Как древнегреческие математики доказывали иррациональность $\sqrt{N}\ :\ 1$

А. И. Щетников

1. Введение

1.1. Одним из самых ярких достижений ранней древнегреческой математики было сделанное в пифагорейской школе открытие *несоизмеримости диагонали и стороны квадрата* [или, что тоже самое, *иррациональности отношения* $\sqrt{2}\ :\ 1$, — поскольку квадрат $ACEF$, построенный на диагонали данного квадрата $ABCD$, в два раза превосходит исходный квадрат по площади (рис. 1)].

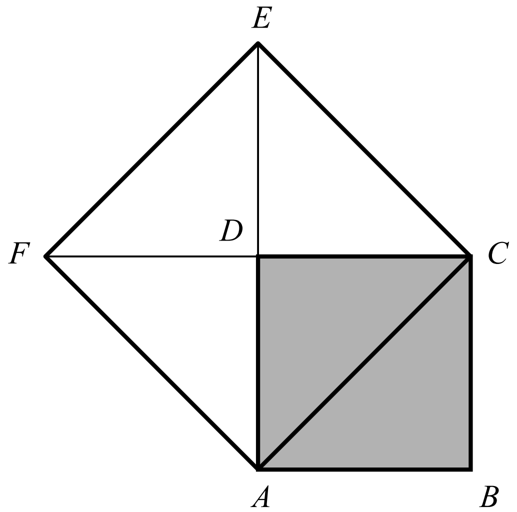


Рис. 1

Проблема несоизмеримости получила громкую известность среди широких кругов образованных людей. В диалоге Платона «Законы» один из его участников, афинянин, говорит, что поздно узнал о несоизмеримости и стыдится того, что не знал об этом раньше, потому что «это свойственно не человеку, но скорее каким-то свиньям» (819d). Аристотель в «Топике» настаивает на том, что «удовольствию от питья противоположно страдание от жажды, но удовольствию от рассмотрения того, что диагональ несоизмерима со стороной, ничего не противоположно» (106a37).

В этом обзоре мы рассмотрим два главных метода, с помощью которых математики древней Греции доказывали несоизмеримость диагонали и стороны квадрата, а также обсудим обобщения этих методов, применявшиеся для доказательства иррациональности $\sqrt{N}\ :\ 1$ (где N — натуральное число, не являющееся квадратом).

1.2. Для понимания задач, стоящих сегодня перед исследователями ранней греческой математики, важным представляется следующее обстоятельство. Теоремы о несоизмеримости, о которых пойдёт речь в этой статье, были доказаны в основном от середины V в. до н. э. до середины IV в. до н. э. Но математических сочинений этого периода до нас практически не дошло.

Большая часть имеющихся у нас сведений о математике этого времени извлечена из «Начал» Евклида, созданных около 300 г. до н. э. В «Началах» систематически излагаются геометрические и арифметические теоремы, открытые и доказанные математиками древней Греции как минимум за два предыдущих века развития математики. Однако Евклид не просто переписал работы своих предшественников, но проделал ряд доказательств заново; а в тех случаях, когда одна и та же теорема уже была доказана несколькими различными способами, он пользовался одним из этих способов, не упоминая остальных. И тем не менее в «Началах» сохранились такие фрагменты более ранних математических сочинений, по которым можно попытаться реконструировать, какими методами пользовались их авторы (даже если эти методы и не применяются в «Началах» непосредственно).

Более ранними источниками, содержащими разнообразные сведения о греческой математике интересующей нас эпохи, служат сочинения великих философов древней Греции — Платона (429–348 до н. э.) и Аристотеля (384–322 до н. э.). Оба философа живо интересовались проблемами современной им математики, и этот интерес нашёл своё выражение во многочисленных отрывках их сочинений, так или иначе связанных с математикой. Однако сами эти сочинения посвящены далёким от математики темам, и имеющиеся в них математические вкрапления по большей части разрозненны и фрагментарны. Задача восстановления целой математической теории по одному-двум отрывкам может оказаться чрезвычайно сложной: сохранившиеся факты (фразы, а иногда даже отдельные слова) порой вообще никак не удаётся объяснить, иногда же для них может быть предложено несколько альтернативных объяснений, и не так просто выбрать, какое из них соответствует исторической действительности.

2. Методы, основанные на теории делимости

2.1. Аристотель в «Первой аналитике» обсуждает устройство *доказательства от противного*, и в качестве примера указывает, что «несоизмеримость диагонали доказывают тем, что если признать соизмеримость, то нечётное окажется равным чётному» (41a26–27). Такое доказательство действительно сохранилось в некоторых списках «Начал» Евклида в самом конце X книги.

Возьмём два квадрата, один из которых в два раза больше другого по площади. Предположим, что стороны этих квадратов соизмеримы между собой; пусть их наибольшая общая мера M укладывается b раз в стороне двухфутового квадрата и a раз в стороне однофутового квадрата. Имеет место соотношение

$$b^2 = 2a^2; \tag{1}$$

откуда следует, что число b^2 будет чётным. Но тогда чётным будет и число b: ведь квадрат нечётного числа является нечётным. Тем самым число a должно быть нечётным: ведь если бы оба числа a и b были чётными, то тогда обе стороны измерялись бы и удвоенной мерой $M' = 2M$, и мера M не была бы наибольшей.

Положим теперь $b = 2c$ и преобразуем (1) к виду

$$2c^2 = a^2,$$

откуда следует, что число a^2 будет чётным. Но тогда чётным будет и число a. Получается, что число a будет одновременно и чётным, и нечётным, что невозможно. Тем самым приходится отказаться от первоначально сделанного предположения и сделать вывод о том, что стороны рассматриваемых квадратов несоизмеримы между собой.

2.2. Попытки обобщить полученный результат на случай двух квадратов, площади которых относятся как $N : 1$ (где N — натуральное число, не являющееся квадратом), а стороны — как $\sqrt{N} : 1$, приведут нас скорее всего к следующему рассуждению. Предположим, что стороны рассматриваемых квадратов соизмеримы между собой; пусть их наибольшая общая мера M укладывается b раз в стороне N-футового квадрата и a раз в стороне однофутового квадрата. Имеет место соотношение

$$b^2 = Na^2; \tag{2}$$

откуда следует, что число b^2 будет делиться на N.

Примем теперь (пока без доказательства) следующую лемму: если b^2 делится на N, то b также делится на N. Как только она будет доказана, наше рассуждение воспроизведёт доказательство, рассмотренное выше для частного случая $N = 2$. В самом деле, с одной стороны число a не должно делиться на N: ведь если бы оба числа a и b делились на N, то тогда обе стороны измерялись бы и N-кратной мерой $M' = NM$. С другой же стороны, положим теперь $b = Nc$ и преобразуем (1) к виду

$$Nc^2 = a^2,$$

откуда следует, что число a^2 будет делиться на N. Но тогда (по принятой лемме) число a будет делиться на N. Получается, что число a одновременно будет и делиться на N, и не делиться на N, что невозможно.

Вернёмся теперь к принятой лемме: если b^2 делится на N, то b также делится на N (где N не является квадратом). Её доказательство (которое мы оставим в качестве упражнения для читателя) опирается на ряд предложений общей теории делимости, содержащихся в VII книге «Начал» Евклида. Честь открытия этой теории приписывается Теэтету Афинскому и Архиту Тарентскому; принято считать, что она была построена около 390 г. до н. э. [12].

Однако реальная история устроена не столь прямолинейно, как наше рассуждение: между исходным пифагорейским доказательством **2.1** и доказательством общей теории делимости **2.2** древнегреческими математиками был получен ряд весьма своеобычных доказательств иррациональности $\sqrt{N}:1$. Эти доказательства, не сохранившиеся до наших дней и реконструированные историками математики на основе имеющихся косвенных свидетельств, будут рассмотрены ниже.

2.3. Обратимся теперь к диалогу ПЛАТОНА «Теэтет», действие которого происходит в 399 г. до н. э., а участниками являются СОКРАТ, юноша ТЕЭТЕТ и его учитель — известный геометр ФЕОДОР КИРЕНСКИЙ. Интересующий нас отрывок начинается со следующей реплики ТЕЭТЕТА:

> Вот ФЕОДОР начертил нам нечто о квадратах и их сторонах (περὶ δυνάμεων) и показал, что стороны трехфутового и пятифутового квадратов по длине несоизмеримы со стороной однофутового квадрата. Так, перебирая квадраты один за другим, он дошел до семнадцатифутового. Тут его что-то остановило. (147d–148b)

На основании этой реплики можно сделать два вывода. Во-первых, метод ФЕОДОРА не давал единого доказательства для всех неквадратных чисел сразу: квадраты приходилось «перебирать». Во-вторых, возможно, что он наталкивался на какое-то препятствие при $N = 17$.

Историками математики было сделано немало попыток восстановить метод, которым выполнял свои доказательства ФЕОДОР. Однако сами эти попытки уже стали достоянием истории — поскольку в 1961 году французский историк математики ЖАН ИТАР предложил такую реконструкцию, для которой имеются веские основания считать метод ФЕОДОРА в его общих чертах окончательно установленным. Во-первых, эта реконструкция основана на *теорию чётных и нечётных чисел*, — ПЛАТОН же в своих диалогах неоднократно определял арифметику как «учение о чётных и нечётных числах, рассматриваемых безотносительно к их величине» («Горгий» 451bc). Во-вторых, совершенно замечательно то, что восстановленный ИТАРОМ метод *впервые не срабатывает именно для* $N = 17$.

Заметим сперва, что рассуждения, схожие с приведёнными в **2.1**, можно проделать и для прочих чётных неквадратных N. При этом N может либо (α) делиться на 2 и не делиться на 4, либо (β) делиться на 4.

(α) Пусть $N = 2M$, где M нечётно. Тогда $b^2 = 2Ma^2$, и тем самым числа b^2 и b будут чётными. Положив $b = 2c$, получим $2c^2 = Ma^2$; но тогда числа Ma^2, и тем самым a^2 и a, будут чётными. Получилось, что оба числа b и a будут чётными, что противоречит требованию, чтобы соответствующая им общая мера была наибольшей.

(β) Пусть теперь $N = 4N'$. Тогда $b^2 = 4N'a^2$, и тем самым числа b^2 и b будут чётными. Положив $b = 2c$, получим $c^2 = N'a^2$. Тем самым вопрос свёлся к исследованию соизмеримости сторон N'-футового и однофутового квадратов. Если N' делится на 4, то будет сделано ещё одно понижение $N' = 4N''$, и так далее до тех пор, пока делимость на 4 не прекратится. Здесь вновь будут возможными два случая. Во-первых (β1), последнее число в последовательности N, N', N'', ... может делиться на 2, но не делиться на 4. Тогда мы приходим к случаю (α), рассмотренному выше. Наконец, остаётся случай (β2), когда последнее число в последовательности N, N', N'', ... является нечётным. Тем самым нам осталось доказать неразрешимость в натуральных числах уравнения $b^2 = Na^2$ для нечётных неквадратных N.

Дальнейшая реконструкция Жана Итара основана на теореме о том, что всякое нечётное квадратное число за вычетом единицы делится на восемь треугольных чисел. Познакомиться с ней можно по книге [11], а также по её изложению в [7]. Здесь же мы рассмотрим модификацию этой реконструкции, выполненную в [8] автором настоящего обзора и позволяющую вести доказательства для различных N на одном и том же чертеже (по свидетельству Платона кажется, что Феодор именно так и делал — в то время как реконструкция Итара требует выполнения для каждого N нового чертежа).

Возьмём два квадрата, один из которых в N раз больше другого (где N — нечётное неквадратное число). Предположим, что их стороны соизмеримы; пусть их наибольшая общая мера укладывается b раз в стороне трёхфутового квадрата и a раз в стороне однофутового квадрата. Числа $a \to a^2 \to b^2 \to b$ имеют одинаковую чётность. Но a и b не могут быть оба чётными: ведь тогда соответствующая общая мера сторон рассматриваемых квадратов не будет наибольшей. Поэтому a и b должны быть оба нечётными, а их разность будет чётным числом.

Наше дальнейшее рассуждение основано на предложении II.8 «Начал» Евклида:

> Если прямая линия как-либо рассечена, то учетверённый прямоугольник, заключённый между всей прямой и одним из отрезков, вместе с квадратом на оставшемся отрезке равен квадрату, надстроенному на всей прямой и упомянутом отрезке, как на одной прямой.

На рис. 2 прямая линия AB рассечена в точке C и продолжена на $BD = CB$. Квадрат на AD состоит из четырёх квадратов на CB, четырёх прямоугольников между AC и CB, и одного квадрата на AC. Объединив квадраты и прямоугольники в пары, получим четыре прямоугольника между AB и CB (на чертеже один из таких прямоугольников заштрихован), что доказывает теорему.

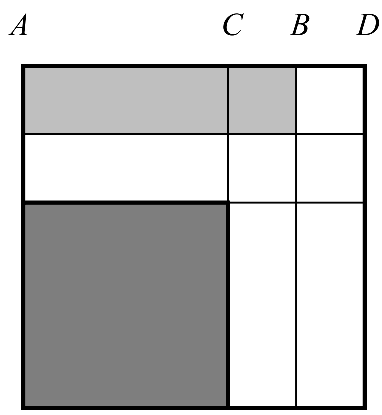


Рис. 2

Предложение II.8 не используется Евклидом ни в одном из последующих предложений «Начал». Поэтому естественно задаться вопросом, зачем оно было кем-то сформулировано и доказано. Наша гипотеза как раз и состоит в том, что это предложение использовалось ФЕОДОРОМ в его рассуждениях.

Вслед за ФЕОДОРОМ рассмотрим прежде всего случай $N = 3$. Пусть на рис. 2 квадрат на AD равен трём квадратам на AC. Тогда Г-образная фигура, являющаяся разностью этих квадратов (древние греки называли такую фигуру гномоном), будет по площади в два раза больше квадрата на AC. Но общая мера сторон укладывается в отрезке CD чётное число раз, а поэтому эта разность-гномон делится на четыре одинаковых прямоугольных числа, заключённых между AC и CB. Получается, что *нечётный* квадрат на AC равен *удвоенному* продолговатому числу между AC и CB, что абсурдно. Тем самым следует заключить, что стороны исходных квадратов несоизмеримы.

Мы предлагаем читателю самому проделать аналогичные рассуждения для $N = 5$, 7, 11, 13, 15. Покажем теперь на той же самой схеме, как строится рассуждение при исследовании 17-футового квадрата. Оба искомых числа a и b опять должны быть нечётными; гномон будет в 16 раз больше меньшего квадрата. Гномон имеет чётную ширину CD и делится на четыре одинаковых продолговатых числа со сторонами AB и CB. Эти стороны имеют противоположную чётность, поскольку их разность AC является нечётной. Поэтому продолговатые числа будут чётными, и тем самым гномон будет делиться на восемь равных частей. Получается, что удвоенный меньший квадрат (чётное число) равен одной восьмой части гномона. Но ничто не запрещает этой части также быть чётной. Противоречия не возникает. Стало быть, для числа 17 «метод чётных и нечётных» не работает.

3. Методы, основанные на алгоритме Евклида

3.1. В предложении X.1 «Начал» ЕВКЛИДА описывается алгоритм отыскания общей меры двух величин путём их *последовательного взаимного вычитания* (ανθυφάιρεσις), известный нам более в своей частной форме алгоритма для отыскания наибольшего общего делителя двух чисел.

Пусть даны две величины $A > B$. Будем вычитать мерку B из величины A до тех пор, пока не получится остаток $C < B$. Будем затем вычитать мерку C из величины B до тех пор, пока не получится остаток $D < C$. Если на каком-нибудь шаге очередная мерка уложится в вымеряемой величине без остатка, то эта последняя мерка будет наибольшей общей мерой двух исходных величин.

Но возможны и такие ситуации, когда шаги последовательного вычитания будут повторяться, не прекращаясь. А именно («Начала» X.2),

> если для двух неравных величин при постоянном взаимном вычитании меньшей из большей остаток никогда не будет измерять своего предшествующего, то величины будут несоизмеримы.

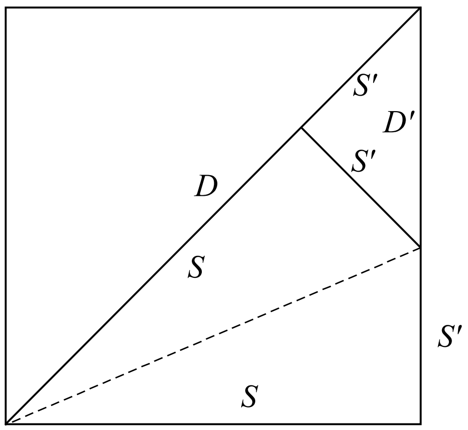
По-видимому, алгоритм последовательного взаимного вычитания был изобретён первоначально с целью дать определение пропорциональности четырёх величин для того случая, когда отношения величин в пропорциональных парах невозможно выразить с помощью пары натуральных чисел [9]. Об этом свидетельствует Аристотель в следующем фрагменте «Топики»:

> И в математике кое-что не может быть легко изображено из-за упущений в определении, например то, что при рассечении плоскости (ἐπίπεδον) вдоль одной из её сторон, подобно (ὁμοίως) разделятся линия и площадь. Если же привести определение, сказанное сразу станет очевидным; а именно, площади и линии имеют одинаковое взаимное вычитание (ἀνταναίρεσιν). А это и есть определение одного и того же отношения. (158b29-159a1)

Теория пропорциональности, основанная на алгоритме последовательного взаимного вычитания, была впоследствии заменена новой теорией, выдвинутой Евдоксом Книдским (ок. 406–ок. 355 до н. э.), после чего старая теория была окончательно забыта. Теория Евдокса изложена в V книге «Начал» Евклида.

3.2. Историками математики давно обсуждается гипотеза о том, что алгоритм последовательного взаимного вычитания мог применяться древнегреческими математиками эпохи Платона как для частного доказательства несоизмеримости стороны квадрата с его диагональю, так и для более общего доказательства иррациональности $\sqrt{N}$: 1 (см. [2], [3], [6], [10]). Предложенные ранее реконструкции этого метода могут быть разделены на две основные группы.

Реконструкции первой группы основаны на последовательном взаимном вычитании рассматриваемых отрезков, выполняемом непосредственно на чертеже с помощью геометрических построений. Одна из таких реконструкций представлена на рис. 3. Здесь пунктирный отрезок является биссектрисой одного из прямоугольных треугольников, получившихся при рассечении квадрата его диагональю. Вычитая из диагонали квадрата D его сторону S, мы получаем пару отрезков $S > S'$. Вычитая S' из S, мы вновь получаем пару отрезков $S' < D'$. Легко видеть, что S' и D' вновь являются стороной и диагональю квадрата, только меньшего. Последовательное взаимное вычитание исходных величин будет постоянно приводить к одной и той же ситуации, поэтому оно никогда не закончится. Поэтому приходится сделать вывод о том, что сторона и диагональ квадрата несоизмеримы друг с другом.



–

Рис. 3

Реконструкции второй группы основываются на составлении пропорций, позволяющих переходить от одной пары соизмеряемых величин к другой, имеющей то же самое отношение. Одна из таких реконструкций, представленная на рис. 4, основывается на предложении II.6 «Начал» Евклида.

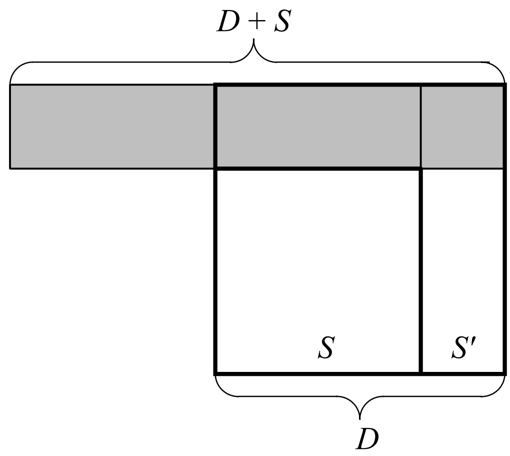


Рис. 4

Двухфутовый квадрат со стороной D и однофутовый квадрат со стороной S наложены здесь друг на друга. Их разность образует однофутовый гномон. Развернув гномон в равновеликий ему прямоугольник, мы получим соотношение

$$(D + S) \times S' = S \times S,$$

которое преобразуется в геометрическую пропорцию

$$(D + S) : S = S : S'.$$

Но ведь если отрезок D соизмерим с отрезком S, то также и отрезок $(D + S)$ соизмерим с отрезком S, причём наибольшая общая мера остаётся здесь той же самой. Тем самым получается, что при отыскании наибольшей общей меры отрезков $(D + S)$ и S мы на первом же шаге последовательного взаимного вычитания получаем пару отрезков S и S', имеющих то же самое отношение, что и исходные. А отсюда можно заключить, что отрезки $(D + S)$ и S {и тем самым отрезки D и S} несоизмеримы.

3.3. Что касается реконструкций, рассмотренных в **3.2**, мы можем сказать о них следующее. Первая реконструкция сама по себе устроена достаточно просто и естественно, — однако она очень сильно усложняется для $N > 2$. Вторая же реконструкция выглядит гораздо более искусственной, — зато она допускает несложное обобщение на случай произвольного неквадратного N.

Автором данного обзора была предложена новая реконструкция доказательства несоизмеримости сторон двухфутового и однофутового квадратов, основанного на методе последовательного взаимного вычитания [8]. Нам представляется, что эта реконструкция отличается от рассмотренных выше своей большей *непосредственностью*.

Возьмём двухфутовый и однофутовый квадраты и наложим их друг на друга «угол в угол» (рис. 5). Получившуюся разность сторон ($A - B$) обозначим Δ_1. Вычтем Δ_1 из стороны однофутового квадрата, вложив ещё один однофутовый квадрат в противоположный угол двухфутового квадрата. Новую разность ($B - \Delta_1$) обозначим Δ_2. Два однофутовых квадрата в сумме дают двухфутовый квадрат; поэтому их перекрытие равно недопокрытию двухфутового квадрата. Тем самым квадрат на Δ_2 равен двум квадратам на Δ_1. Дальнейшее взаимное вычитание Δ_1 и Δ_2 будет воспроизводить исходную ситуацию, и поэтому оно никогда не будет завершено. Поэтому приходится заключить, что стороны двухфутового и однофутового квадратов несоизмеримы по длине.

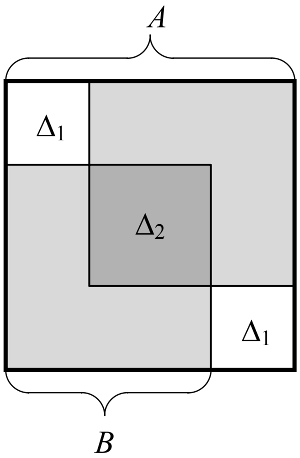


Рис. 5

Предложенная реконструкция допускает относительно несложное обобщение для случая отношения $\sqrt{3} : 1$ (впрочем, следует заметить, что чертежи будут сильно усложняться при следующих N). Здесь (рис. 6) тот же самый трюк воспроизводится дважды. Доказательство того факта, что начальная ситуация $A^2 = 3B^2$ воспроизводится здесь в уравнении $\Delta_3^2 = 3\Delta_2^2$, мы оставим читателю для упражнения.

–

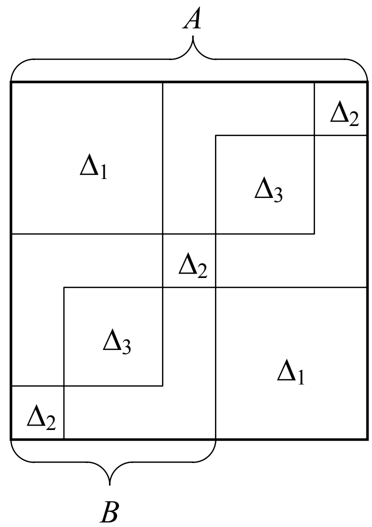


Рис. 6

Литература

1. АРИСТОТЕЛЬ, *Сочинения*. В 4 т. М.: Мысль, 1976–1982.
2. ВАН-ДЕР-ВАРДЕН Б. Л. *Пробуждающаяся наука*. М.: Физматгиз, 1959.
3. ВЫГОДСКИЙ М. Я. *Арифметика и алгебра в Древнем мире*. М.: Наука, 1967.
4. ЕВКЛИД. *Начала*. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского. В 3 т. М.: Изд-во АН СССР, 1948–51.
5. ПЛАТОН. *Собрание сочинений*. В 4 т. М.: Мысль, 1990–1994.
6. ЦЕЙТЕН Г. Г. *История математики в древности и в средние века*. М.–Л.: ОНТИ, 1938.
7. ЩЕТНИКОВ А. И. *Пифагорейское учение о числе и величине*. Новосибирск: НГУ, 1997.
8. ЩЕТНИКОВ А. И. Вторая книга «Начал» Евклида: её математическое содержание и структура. *Вторая книга «Начал» Евклида: текст и интерпретации*. Новосибирск: АНТ, 2001, с. 19–40.
9. FOWLER D. H. Ratio in early Greek mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society,* N. S., **1**, 1979, pp. 807–846.
10. FOWLER D. H. Book II of Euclid’s Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio. *Archive for History of Exact Sciences.* **22**, 1980, pp. 5–36, **26**, 1982, pp. 193–209.
11. ITARD J. *Lex livres arithmetiqúes d`Euclide*. Paris: Hermann, 1961.
12. KNORR W. R. *The evolution of the Euclidean Elements. A study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for Greek geometry*. Dordrecht a. o.: Reidel, 1975.