Можно ли назвать книгу Диофанта Александрийского «О многоугольных числах» чисто алгебраической?

А. И. Щетников

Введение

Среди историков математики распространено мнение о том, что характер доказательств Диофанта Александрийского в книге *О многоугольных числах* знаменует собой отказ от геометрического метода и переход к методу алгебраическому. И. Н. Веселовский во вступительной статье к своему переводу Диофанта (1974) указывает на то, что Диофанту в его доказательствах пришлось иметь дело с произведениями более чем трёх сомножителей (например, с произведением двух квадратных чисел), а такие произведения уже не могли быть представлены в плоском или телесном виде. По мнению Веселовского, это и привело к отказу от геометрического чертежа в пользу алгебраической символики. Этой же точки зрения в своих подстрочных примечаниях придерживается И. Г. Башмакова, редактор названного издания.

В настоящей статье я намерен усомнить данный тезис и показать, что метод, которым Диофант усматривает истинность своих предложений, по существу своему остаётся методом пифагорейской фигурной арифметики, а внешняя его алгебраизация относится лишь к изложению полученных результатов.

Формулировка и доказательство IV предложения

В этом разделе воспроизведены формулировка и доказательство основного, IV предложения книги Диофанта *О многоугольных числах*. Текст приводится по переводу Веселовского, я несколько исправил его в отдельных деталях по изданию П. Таннери (Diophantus 1895). В целях удобства доказательство Диофанта разбито на отдельные шаги. Каждый шаг сопровождается подстрочным алгебраическим комментарием, схожим с комментарием Веселовского.

[Предложение]

Если дано, начиная с единицы, любое количество чисел с одинаковыми разностями, то сумма их всех, умноженная на восьмикратную разность и сложенная с квадратом уменьшенной на двойку разности, образует квадрат, сторона которого без двойки будет равна разности, умноженной на такое число, которое после сложения с единицей будет вдвое больше количества всех взятых чисел, включая единицу.

[Экспозиция]

Итак, пусть будет, начиная с единицы, несколько чисел AB, ΔΓ и EZ с одинаковыми разностями. Я утверждаю, что всё сказанное будет иметь место.

Пусть НΘ содержит столько единиц, сколько взято чисел, включая единицу; так как разность, на которую EZ больше единицы, равна разности, на которую AB больше <единицы>, умноженной на НΘ без единицы, то, положив AK, EΛ, HM единицами, будем иметь, что ΛZ равно KB, умноженному на MΘ: так что ΛZ равно KB·MΘ. Положим KN равным двойке; посмотрим, не будет ли сумма всех, умноженная на 8KB (где KB есть разность) и сложенная с квадратом NB (разность, уменьшенная на двойку), давать квадрат, сторона которого без двойки образует некоторое число, равное разности KB, умноженной на сумму НΘ, ΘM.[1]

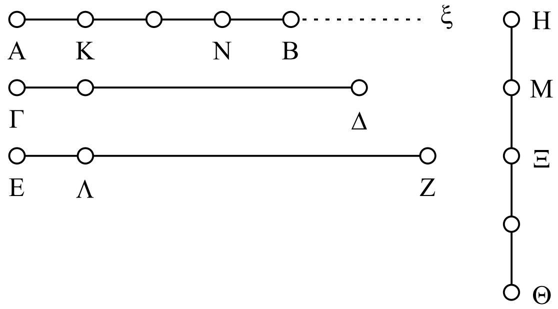


Рис. 1

[Доказательство: шаг 1]

Сумма всех равна половине произведения вместе взятых ZE, EΛ на ΘH; <представим это произведение> как ΛZ·HΘ и дважды EΛ·HΘ, то есть 2HΘ; тогда сумма всех членов будет равна <половине> ΛZ·HΘ и 2HΘ. Но доказано, что ΛZ равно KB·MΘ, и, значит, ΛZ·HΘ будет равно телу KB·MΘ·HΘ, и, следовательно, сумма всех равна половине тела KB·MΘ·HΘ и 2HΘ.

Тогда, если разделим HΘ пополам в Ξ, то получим, что сумма всех равна телу KB·HΘ·ΘΞ вместе с HΘ. Посмотрим, не будет ли тело KB·HΘ·ΘΞ вместе с ΘH, помноженное на 8KB и увеличенное на NB^2, тоже квадратом.[2]

[Доказательство: шаг 2]

Но тело KB·HΘ·ΘΞ, помноженное на KB, составляет произведение HΘ·ΘΞ на KB^2. Таким образом, тело KB·HΘ·ΘΞ, умноженное на 8KB, будет равно HΘ·ΘΞ, умноженному на $8KB^2$, или же произведению восьми HΘ·ΘΞ на KB^2, т.е. четырёх HΘ·ΘM на KB^2.

Если прибавить к этому произведение HΘ на 8KB и NB^2, то не получится ли квадрат? Но HΘ, умноженное на 8KB, дает восемь HΘ·KB; значит, не составят ли квадрат четыре HΘ·ΘM, умноженные на KB^2, сложенные с восьмью HΘ·KB и NB^2? [3]

[1] Введём следующие символические обозначения: HΘ = n — число членов прогрессии, MΘ = $n - 1$, KB = α — разность прогрессии, ΛZ = $\alpha(n - 1)$ — разность между последним членом прогрессии и единицей, KN = 2, NB = $\beta = \alpha - 2$, S — сумма всех членов прогрессии. Утверждается, что имеет место соотношение (1): $8\alpha S + \beta^2 = [(2n - 1) + 2]^2$.

[2] Выше, в предложении III, уже было доказано, что $S = \mathrm{S}\ n\ [2 + \alpha(n - 1)]$. Это равенство приводится к виду $S = (n/2)\alpha(n - 1) + n$, после чего правая часть (1) принимает вид (2): $8\alpha[(n/2)\alpha(n - 1) + n] + \beta^2$.

[3] Здесь (2) приводится к виду (3): $4\alpha^2 n(n - 1) + 8\alpha n + \beta^2$.

[Доказательство: шаг 3]

Но восемь HΘ·KB раскладывается на четыре HM·KB и учетверённую сумму HΘ, ΘM, <умноженную на KB. Не составит ли квадрата сумма произведения четырёх HΘ·ΘM>, умноженных на KB^2, четырёх HM·KB и учетверённой суммы HΘ, ΘM, умноженной на KB, и ещё NB^2? [4]

[Доказательство: шаг 4]

Но четыре HM·KB равны двум NK·KB. Увеличив это на NB^2, получим KB^2 и KN^2. Теперь, не образует ли квадрата четыре ΘH, ΘM, умноженные на KB^2, и учетверённая сумма HΘ, ΘM, умноженная на KB, и ещё KB^2, и KN^2? [5]

[Доказательство: шаг 5]

Но BK^2 преобразуется в HM^2, умноженное на KB^2, и после прибавления к четырём HΘ·ΘM, умноженным на KB^2, образует сумму HΘ, ΘM в квадрате, умноженную на KB^2. Теперь, не образует ли квадрата сумма квадрата вместе взятых HΘ, ΘM, умноженная на KB^2, и учетверённая сумма HΘ, ΘM, умноженная на KB, и ещё KN^2? [6]

[Доказательство: шаг 6]

Если положим произведение суммы HΘ, <ΘM> на KB равным некоторому числу Nξ, то и квадрат вместе взятых HΘ, ΘM, умноженный на KB^2, будет равен $N\xi^2$, что мы докажем ниже. Следовательно, образует ли квадрат сумма $N\xi^2$ и NK^2 вместе с учетверённой суммой HΘ, ΘM, умноженной на KB?

Но произведение четырёх на <сумму> HΘ, ΘM и на KB равно четырём Nξ, так как мы положили произведение суммы HΘ, ΘM на KB равным Nξ, а 4Nξ равно двум Nξ·NK (ибо NK мы положили равным двойке). Итак, не образует ли квадрата сумма $N\xi^2$ и NK^2 вместе с дважды Nξ·NK?

Но это действительно будет квадрат со стороной Kξ; если уменьшить сторону Kξ на двойку NK, то она даст некоторое число Nξ, равное разности KB, умноженной на сумму HΘ, ΘM; если к последней прибавить единицу HM, то мы получим <удвоенное> число всех взятых членов.[7]

[Доказательство леммы к шагу 6]

Доказать пропущенное.

Пусть вместе взятые HΘ, ΘM равняются A, а KB равно B и произведение вместе взятых HΘ, ΘM на KB равно Γ. Я утверждаю, что квадрат вместе взятых HΘ, ΘM (т. е. квадрат на A), умноженный на квадрат KB (т. е. квадрат на B), равен квадрату на Γ.

---

[4] Здесь выполняется разложение $8\alpha n = 4\alpha + 4\alpha(2n - 1)$, после чего (3) приводится к виду (4): $4\alpha^2 n(n - 1) + 4\alpha + 4\alpha(2n - 1) + \beta^2$.

[5] Здесь выполняется преобразование $4\alpha + \beta^2 = 2\cdot 2\alpha + (\alpha - 2)^2 = \alpha^2 + 2^2$, после чего (4) приводится к виду (5): $4\alpha^2 n(n - 1) + \alpha^2 + 4\alpha(2n - 1) + 2^2$.

[6] Здесь выполняется преобразование $\alpha^2 + 4\alpha^2 n(n - 1) = \alpha^2\cdot 1^2 + 4\alpha^2 n(n - 1) = \alpha^2(2n - 1)^2$, после чего (5) приводится к виду (6): $\alpha^2(2n - 1)^2 + 4\alpha(2n - 1) + 2^2$.

[7] Здесь выполняется замена $\alpha(2n - 1) = m$, после чего (6) преобразуется к окончательному виду $m^2 + 4m + 2^2 = (m + 2)^2 = [\alpha(2n - 1) + 2]^2$.

Отложим на прямой ΔE, EZ, равные соответственно A и B, построим на них два квадрата ΔΘ, EΛ и дополним параллелограмм ΘZ.

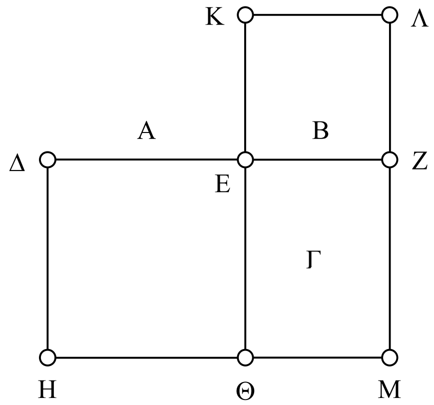


Рис. 2

Тогда ΔE относится к EZ, как ΔΘ к параллелограмму ZΘ; а как ΘE к EK, так и параллелограмм ΘZ к EΛ; следовательно, параллелограмм ΘZ есть средняя пропорциональная между квадратов ΔΘ и KZ; значит, произведение квадратов ΔΘ·KZ равно квадрату параллелограмма ΘZ; и квадрат ΔΘ равен квадрату вместе взятых HΘ, ΘM, квадрат же ZK равен квадрату на KB, и параллелограмм ΘZ равен Nξ. И следовательно, квадрат на вместе взятых HΘ, ΘM, умноженный на квадрат KB, равен квадрату Nξ.[8]

Замечания и вопросы

И. Н. Веселовский рассматривает приведённое Диофантом доказательство предложения IV как формально-алгебраическое подтверждение того факта, что формула

$$8\alpha\left(\frac{n}{2}\alpha(n-1)+n\right)+(\alpha-2)^2=[\alpha(2n-1)+2]^2$$

является алгебраическим тождеством.

В самом деле, во-первых это доказательство почти полностью лишено чертежей. Во-вторых, Диофант начинает свои рассуждения с вопроса: «если взять вот это и вот это, не получится ли квадрат?»; затем он выполняет некоторое формальное преобразование, после чего снова задаёт вопрос: «а если теперь взять вот это и вот это, не получится ли квадрат?»; и так до тех пор, пока последовательность преобразований не завершится получением нужного квадрата.

Кажется, что такой способ работы по праву может быть назван алгебраическим. И тем не менее задержимся здесь и зададим несколько вопросов.

[8] Здесь доказывается, что произведение двух квадратов равно квадрату произведения их сторон. Это доказательство основывается на свойствах числовых пропорций.

• Диофант начинает с формулировки некоторого соотношения, а потом показывает, что это соотношение является алгебраическим тождеством. Но как была получена сама исходная формулировка?

• Связана ли последовательность формальных преобразований, выполняемая Диофантом, со способом получения этой формулировки?

• Были ли мыслительные средства Диофанта алгебраическими или же геометрическими? Иначе говоря, являются ли его «формулы» теми *объектами*, которые и подлежат непосредственному преобразованию, или же они служат *сокращёнными записями* о преобразованиях, производимых над объектами совсем иной природы?

• Почему преобразования четвёртого, пятого и шестого шагов выполняются Диофантом «в одно действие», хотя они отнюдь не являются тривиальными, зато многие другие действия очень тщательно расписываются по шагам?

• Почему Диофант пишет НМ·КВ, а не просто КВ, хотя НМ = 1 (третий шаг)? Зачем он точно так же говорит, что KB^2 равняется $HM^2 \cdot KB^2$ (пятый шаг)?

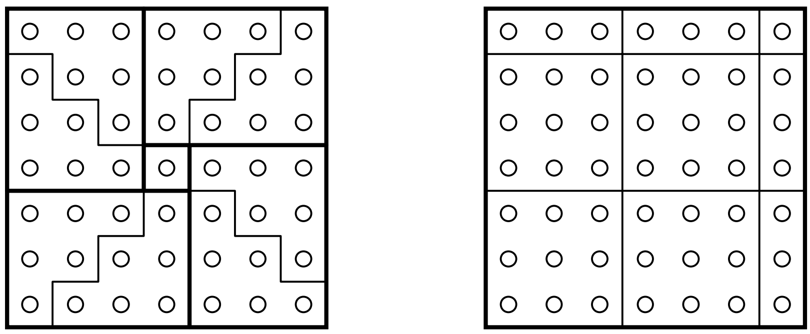
• Почему буква N входит в обозначения и отрезка KN = 2 (рис. 1), и числа Nξ, равного произведению суммы НΘ, ΘМ на КВ (шестой шаг)?

Реконструкция геометрической формы IV предложения

Я полагаю, что основная цель книги Диофанта *О многоугольных числах* (или по крайней мере её сохранившегося фрагмента) состояла в обобщении арифметической теоремы «*восемь треугольных чисел с добавлением единицы дают квадрат*»[9] на случай произвольных многоугольных чисел. Этот тезис в общем виде высказал ещё в 1910 г. Т. Хизс (см. Heath 1964, p. 127), однако свой собственный перевод *Книги о многоугольных числах* он прокомментировал на языке элементарной алгебры, а не с помощью геометрических чертежей (хотя и ссылаясь при этом на геометрические предложения II.7 и II.8 *Начал* Евклида).

На рис. 3, *а* два треугольных числа складываются в гетеромекное число (т. е. в прямоугольное число, стороны которого разнятся на единицу), а затем из четырёх гетеромекных чисел составляется квадратная рама, с добавлением центральной единицы дающая полный квадрат. На рис. 3, *б* эта же теорема доказывается на основе предложения II.8 *Начал* Евклида, когда гетеромекные прямоугольники составляются из квадрата и полоски шириной в одну единицу.

[9] Эту теорему упоминают Плутарх в *Платоновских вопросах* (1003f), Ямвлих во *Введении в Никомахову арифметику* ($90_{18\text{-}19}$) и Диофант в *Арифметике* (IV, 38). Согласно сделанной Ж. Итаром (Itard 1961) реконструкции так называемого «Феодорова места» из диалога Платона *Теэтет*, эта теорема могла использоваться Феодором Киренским в исторически первом (ок. 400 г. до н. э.) доказательстве иррациональности квадратных корней из неквадратных чисел.



а) *б*)

Рис. 3

Поскольку исходная теорема о треугольных числах была получена на геометрической схеме, естественно попытаться выстроить её обобщение в этом же ключе. Чтобы представить все многоугольные числа в единообразной форме, Диофанту приходится *переоформить* их. Как выполняется это переоформление, показано на рис. 4 на примере четвёртого пятиугольного числа. Здесь ширина каждой ступеньки α на две единицы меньше числа углов.

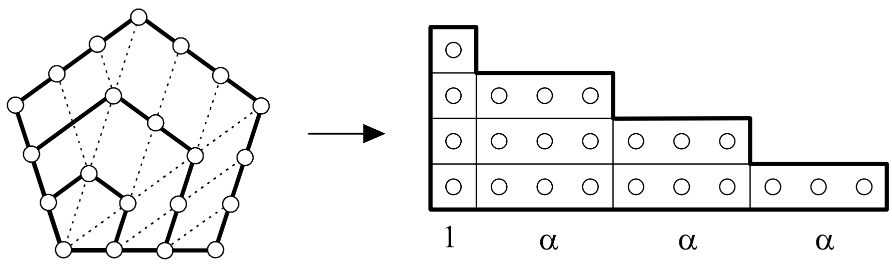


Рис. 4

Сложим два одинаковых многоугольных числа в один прямоугольник (рис. 5). Одно многоугольное число будет составлять половину такого прямоугольника. Доказательству этого факта посвящено у Диофанта предложение III.

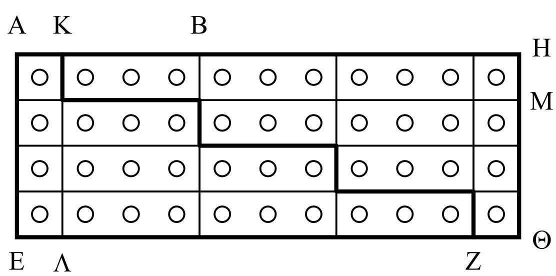


Рис. 5

Следующий ход Диофанта состоит в том, чтобы увеличить высоту каждой горизонтальной полоски с единицы до шага ступеньки α. Если считать новые квадраты со стороной α за «условные единицы», то такие «единицы» образуют два «треугольных» числа, складывающиеся в одно «гетеромекное» число (рис. 6; со схемы убраны изображения отдельных единиц; ширина боковых полосок равна единице).

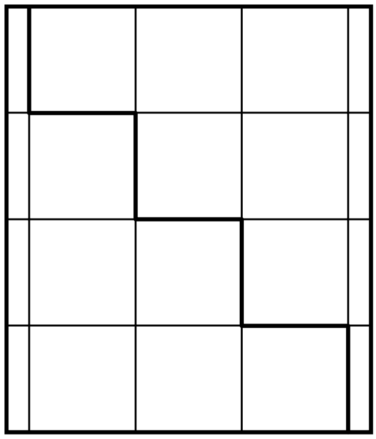


Рис. 6

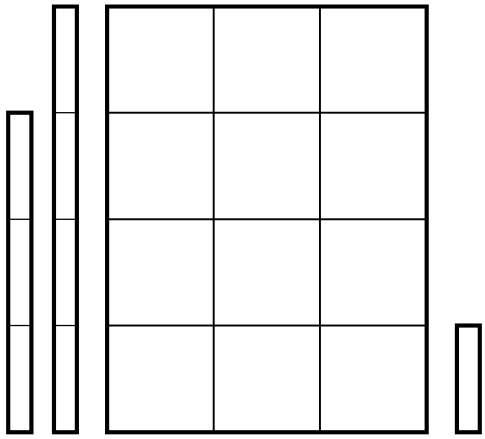


Рис. 7

Четыре «гетеромекных» числа вместе с ещё одной «единицей» дают квадрат. Поэтому в дальнейшем построении будет участвовать четыре таких набора. Чтобы употребить в дело боковые единичные полоски, Диофант разбирает чертёж на части, показанные на рис. 7. Этому разбиению посвящены второй и третий шаги его доказательства.

Затем Диофант выполняет построение, описанное в предложении II.7 *Начал* Евклида, прибавляя к четырём полоскам единичной ширины и высоты α квадрат со стороной (α – 2). Это даёт два квадрата: один со стороной α и один со стороной в две единицы (рис. 8; перекрытие полосок закрашено). Этому преобразованию соответствует четвёртый шаг доказательства.

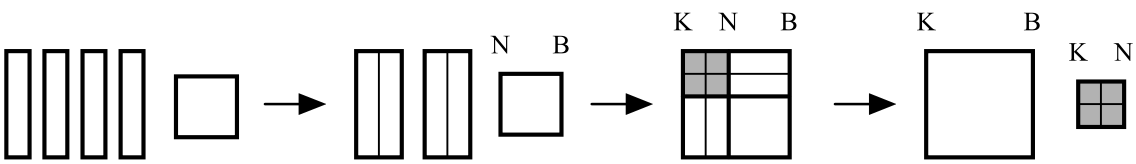


Рис. 8

Затем получившийся на предыдущем шаге квадрат со стороной α складывается с четырьмя уже имевшимися «гетеромекными» прямоугольниками, что даёт большой квадрат, выложенный квадратами со стороной α («квадрато-квадрат»), причём число таких квадратов в стороне большого квадрата равно ($2n$ – 1). Это построение выполняется на основе предложения II.8 *Начал* Евклида (см. рис. 3, *б*). Ему соответствует пятый шаг доказательства.

Наконец, основываясь на предложении II.4 *Начал*, к этому квадрату прикладывается оставшийся квадрат со стороной 2 и четыре полоски шириной в единицу и длиной в $\alpha[n + (n - 1)] = \alpha(2n - 1)$, что и даёт искомый результат (рис. 9). Этому преобразованию соответствует последний, шестой шаг доказательства.

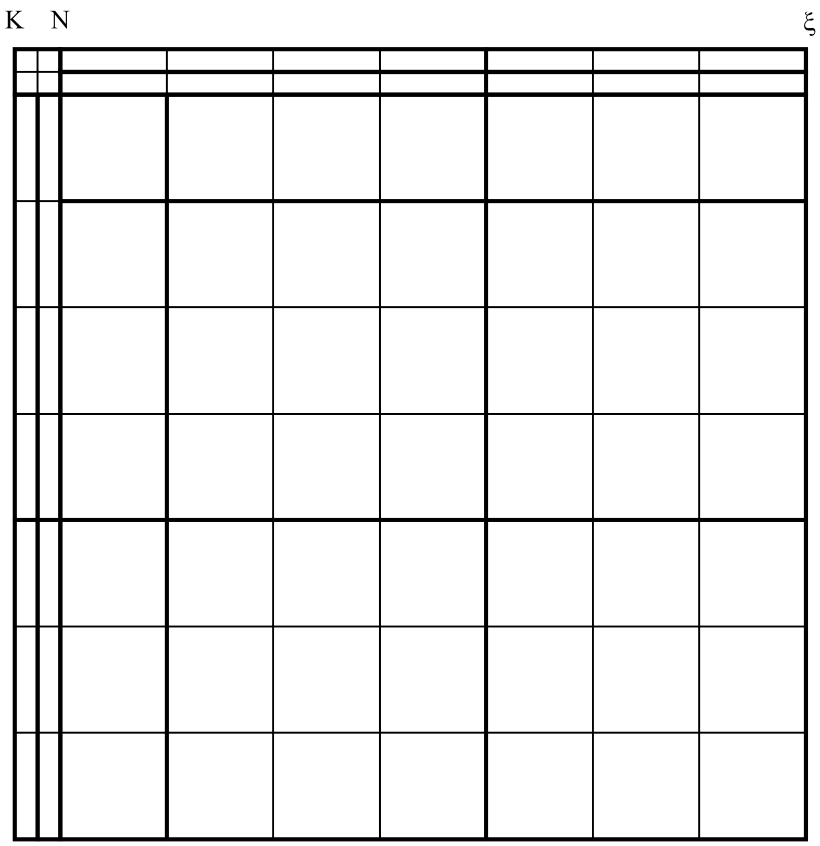


Рис. 9

Представленное выше рассуждение показывает нам не только то, как ДИОФАНТ доказал свою теорему, то также и то, как он к ней пришёл.[10] Впрочем, я склонен полагать, что первоначально эта теорема была усмотрена ДИОФАНТОМ или кем-то из его предшественников [11] при складывании квадратной рамы из четырёх прямоугольников (рис. 10), и только потом её доказательство было переоформлено в стиле предложений II книги *Начал* ЕВКЛИДА.

Заметим также, что закрашенный квадрат в центре рис. 10 иллюстрирует способ, каким могло быть усмотрено I предложение книги *О многоугольных числах*: «Если три числа имеют одинаковые разности, то восемь раз взятое произведение наибольшего и среднего, сложенные с квадратом наименьшего, будет квадратом, сторона которого равна сумме наибольшего и двух средних».

---

[10] И. Н. ВЕСЕЛОВСКИЙ пишет о предложениях I и IV: «Заметим, что их доказательство становится понятным, только если оно проведено чисто алгебраически, и, кроме того, требует выхода за пределы второго и третьего измерений. Кстати, мы знаем, как эта теорема доказывается, но не знаем, как она могла быть получена» (стр. 34). — Думается, что теперь мы знаем не только то, как эти предложения могли быть получены, но также и то, что их доказательства фактически *не требуют выхода за пределы двух измерений плоского чертежа*.

[11] Теория фигурных чисел, восходящая к ранним пифагорейцам, в классическую эпоху активно изучалась в платоновской Академии. Из учеников ПЛАТОНА о ней писали ФИЛИПП ОПУНТСКИЙ в книге *О многоугольных числах* и СПЕВСИПП в книге *О пифагорейских числах* (обе эти книги до наших дней не дошли). В качестве своего прямого предшественника ДИОФАНТ указывает на ГИПИСКЛА (середина II в. н. э.), автора XIV книги *Начал* ЕВКЛИДА.

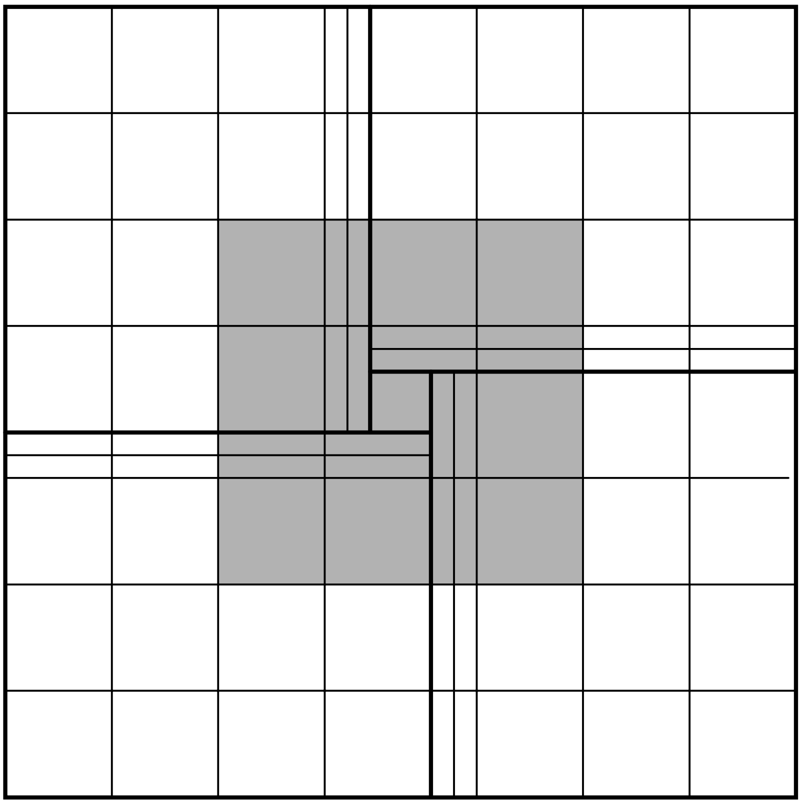


Рис. 10

Теперь мы можем ответить на вопросы, заданные в предыдущем разделе.

• Предложение IV было сформулировано геометрически — как обобщение теоремы о треугольных числах.

• По видимости формально-алгебраическое «многомерное» доказательство ДИОФАНТА в действительности описывает преобразования некоторого плоского чертежа.

• Преобразования четвёртого, пятого и шестого шагов выполняются ДИОФАНТОМ «в одно действие», потому что они основываются на заготовках II книги *Начал* ЕВКЛИДА.[12]

• Записи НМ·КВ соответствует прямоугольник единичной ширины; записи $НМ^2 \cdot КВ^2$ соответствует квадрат, состоящий из единичных квадратов.

• Что касается «двойного» употребления буквы N, то оно проиллюстрировано расстановкой букв на рис. 9, где NK = 2, $N\xi = (H\Theta + \Theta M)\cdot KB$.

Как Диофант мыслил свои квадрато-квадраты?

Когда ДИОФАНТ пересказывает своё геометрическое доказательство на языке алгебраических сокращений, ему приходится представлять некоторые числа в виде произведения четырёх сомножителей. Так прямоугольник, изображённый на рис. 7, предстаёт

[12] Этот факт впервые отметил T. HEATH (1910).

здесь в виде произведения $\alpha^2(n-1)n$. Кроме того, он вполне свободно складывает числа, имеющие разную «геометрическую размерность».

И. Г. БАШМАКОВА в своих подстрочных примечаниях говорит о том, что такие действия считались в классической греческой математике «недопустимыми» (стр. 173) и «немыслимыми» (стр. 175). Первое из этих двух примечаний я приведу здесь целиком:

> Замечательно, что здесь ДИОФАНТ свободно складывает «тело» со стороной. Такие действия в классической греческой математике считались недопустимыми. Этой точки зрения придерживался ещё Ф. ВИЕТ. ДИОФАНТ же трактует, очевидно, и тело и сторону как числа, мы бы теперь сказали — как элементы одного и того же поля.

На это я хотел бы заметить следующее. А как ДИОФАНТУ ещё трактовать тело (произведение трёх чисел) и его сторону (число), если тела и стороны, с которыми он имеет дело, по существу своему как раз и являются числами? Другое дело, что недопустимо складывать длину отрезка и объём прямоугольного параллелепипеда, когда они взяты в качестве *непрерывных геометрических величин*, измеряемых каждая своей собственной мерой. Но в данном случае и отрезок, и прямоугольный параллелепипед представляют собой некоторые *совокупности, составленные из дискретных единиц*. И непонятно, почему указанные действия над ними могли считаться в классической греческой математике недопустимыми (не один из известных мне античных авторов не пишет о такой «недопустимости»).

Возвращаясь к рис. 7, мы видим, как сначала произведением двух равных сомножителей получается квадрат, а потом из таких квадратов как из новых условных «единиц» выкладывается прямоугольник. Конечно, можно сказать, что мы здесь получаем произведение четырёх сомножителей, что в некотором смысле выводит нас за пределы трёх измерений. Но по сути дела мы остаёмся в плоскости, поскольку первый по происхождению квадрат α^2 в дальнейших перемножениях оказывается новой «единицей».

Можно предположить, что таким же образом мыслились квадрато-кубы и кубокубы, упоминаемые ДИОФАНТОМ во введении к *Арифметике*. В пользу этого предположения свидетельствует и тот факт, что для названий степеней ДИОФАНТ применял аддитивный принцип образования, а не мультипликативный:[13] *квадрато-куб* — это $a^2 \cdot a^3$, а не $(a^2)^3$; *кубо-куб* — это $a^3 \cdot a^3$, а не $(a^3)^3$. Поскольку «куб» понимался ДИОФАНТОМ в известной степени «телесно», тем самым и кубо-куб мыслился им как *куб, составленный из кубов*.

Библиография

ДИОФАНТ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ, *Арифметика и книга о многоугольных числах*. Пер. И. Н. Веселовского, ред. и комм. И. Г. Башмаковой. М.: Наука, 1974.

[13] Мультипликативный принцип образования названий степеней впервые встречается в сочинении византийца МИХАИЛА ПСЕЛЛА (XI в. н. э.). Впоследствии эта система была распространена в Западной Европе.

ЕВКЛИД, *Начала*. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского. В 3 т. М.: Изд-во АН СССР, 1948–51.

DIOPHANTUS ALEXANDRINUS, *De polygonis numeris*. Ed. et latine int. P. Tannery. In: *Diophanti Alexandrini opera omnia*, vol. 1. Leipzig: Teubner, 1893, p. 450–480. (Repr. Stuttgart, 1974)

HEATH T. L. *Diophantus of Alexandria: A study in the history of Greek algebra*. Cambridge, 1910. (Repr. NY, Dover, 1964)

ITARD J. *Lex livres arithmetiqúes d`Euclide*. Paris: Hermann, 1961.