Задача Архимеда о быках, алгоритм Евклида и уравнение Пелля

А. И. Щетников

1. Задача Архимеда о быках

До наших дней дошла любопытная математическая задача, которую Архимед предложил александрийским математикам в письме, адресованном Эратосфену Киренскому (см. [2], с. 372–377). В этой задаче требуется узнать число быков и коров в четырёх стадах, принадлежащих богу Солнца Гелиосу, поэтому её обычно называют *задачей Архимеда о быках*.

Условие задачи Архимеда состоит из двух частей. Первая часть приводит к решению в натуральных числах системы из семи линейных уравнений с восемью неизвестными. К этой части Архимед даёт такой комментарий:

Сколько у Солнца быков, чужестранец, коль точно ты скажешь,
Нам раздельно назвав тучных быков число,
Так же раздельно коров, сколько каждого цвета их было,
Не назовёт хоть никто в числах невеждой тебя,
Всё ж к мудрецам причислен не будешь.

Когда наименьшее решение неопределённой системы первой части найдено, условие второй части приводится к следующему виду: найти такое квадратное число, которое, будучи взято M = 51 285 802 909 803 раз, окажется равным некоторому треугольному числу.

Об этой второй задаче Архимед говорит так:

Если ты это найдёшь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
Что в этой мудрости ты всё до конца превзошёл.

Напомним, что треугольными называются числа, полученные суммированием последовательных натуральных чисел, начиная с единицы (рис. 1); q-ое треугольное число равно $q(q + 1)/2$.

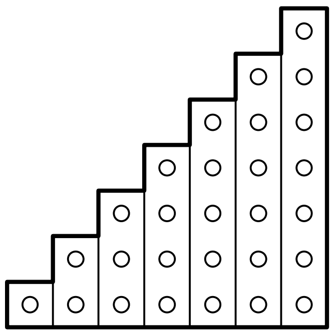

Рис. 1

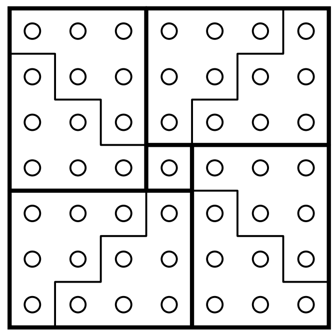

Рис. 2

Обозначим сторону искомого квадратного числа за x, сторону искомого треугольного числа за q. Восемь треугольных чисел с добавлением единицы дают квадратное число со стороной $y = 2q + 1$ (стандартная геометрическая демонстрация этого факта изображена на рис. 2). Алгебраически мы переходим от уравнения $Mx^2 = q(q + 1)/2$ к уравнению $8Mx^2 + 1 = 4q(q + 1) + 1 = (2q + 1)^2 = y^2$. Тем самым арифметическое ядро задачи Архимеда состоит в отыскании хотя бы одного целочисленного решения уравнения

$$y^2 = Nx^2 + 1 \tag{1}$$

для конкретного случая $N = 8M = 410\ 286\ 423\ 278\ 424$.

В докомпьютерную эру задача Архимеда рассматривалась в качестве примера такой задачи, которая хотя и имеет решение, но физически не может быть решена. А. Армтор (1880) установил, что наименьшее x, являющееся решением уравнения (1), выражается десятичным числом с 206530 цифрами; он же вычислил несколько первых и несколько последних цифр этого числа. Первое полное компьютерное решение задачи Архимеда было получено в 1965 году [22], для чего потребовалось 7 часов 49 минут работы вычислительной машины IBM 7040. Компьютер Cray 1 проделал ту же работу в 1981 году за 10 минут [18]. Существенно более быстрые вычислительные алгоритмы для решения задачи Архимеда были разработаны Айланом Варди [20]) и Антти Нюгреном [19]. Формулы последнего используют только целочисленную арифметику и требуют всего нескольких секунд работы персонального компьютера Pentium II.

Надо думать, что Архимед, предлагая задачу о быках Эратосфену и другим александрийским математикам, отдавал себе отчёт в её непосильности. Но ведь он сам тоже не был способен выписать её ответ! В таком случае естественно будет предположить, что он поставил эту задачу не только ради того, чтобы продемонстрировать своё превосходство, в некотором роде сомнительное, но и ради обсуждения общего метода решения уравнений вида (1), которым он сам, как мы склонны предполагать, владел, и изложения которого он мог ждать от александрийских математиков, пусть и на более простых примерах, требующих разумного объёма выкладок.

К сожалению, мы не знаем ни того, как решал уравнение (1) сам Архимед, ни того, получил ли он какой-нибудь ответ от Эратосфена. В дошедших до нас античных математических текстах общие подходы к решению уравнения (1) нигде не обсуждаются. Диофант Александрийский в “Арифметике” рассматривает частные случаи уравнения (1) для $N = 26$ (Книга V, задача 9) и $N = 30$ (Книга V, задача 11). Однако в обоих этих случаях наименьшее решение находится с помощью специального приёма. Пусть $N = n^2 + m$, где n — наибольшее число, квадрат которого не превосходит N. Если при этом $2n$ кратно m, то можно использовать подстановку $y = nx + 1$, что даёт ответ $x = 2n/m$. Кажется, что этот частный приём не слишком много говорит нам о том, как древнегреческие математики могли решать уравнение (1) при произвольном N.

История уравнения (1) в Новое время начинается с вызова, который Пьер Ферма бросил в 1657 году современным ему математикам:

«Пусть дано любое неквадратное число, требуется найти бесконечное число квадратов, которые при умножении на данное число и увеличении на единицу составят квадрат... Найти, например, квадрат, который при умножении на 149, или 109, или 433 и при увеличении на единицу составит квадрат» ([10], с. 68). Этот вызов приняли английские математики Уильям Броункер и Джон Валлис, представившие свои решения. Как решали уравнение (1) Ферма и Броункер, мы в точности не знаем. Методы, применявшиеся Валлисом, рассмотрены в статье [1].

С уравнением (1) связан известный исторический курьёз — Леонард Эйлер по ошибке назвал его *уравнением Пелля* (английский математик Джон Пелль никогда этим уравнением не занимался, правильнее было бы назвать его *уравнением Ферма*), и это название закрепилось в математической литературе.

Общую историю уравнения Пелля рассматривали Л. Диксон [15] и А. Вейль [21]. Так называемый циклический метод, с помощью которого за тысячу лет до Ферма и его современников уравнение Пелля решали математики древней Индии, рассмотрен в статье Б. Л. Ван дер Вардена [4].

2. О методологических принципах предлагаемой реконструкции

В настоящей статье сделана попытка реконструировать метод решения уравнения Пелля в той форме, которой Архимед *мог пользоваться* (подчеркнём ещё раз — не «пользовался», а именно «мог пользоваться»). Отдавая себе отчёт в том, что всякая реконструкция такого рода будет откровенно гипотетической, мы всё же предприняли это изыскание, задавшись целью установить и изучить такие подходы к решению уравнения Пелля, которые соответствовали бы средствам, употреблявшимся в античной логистике (так древние греки называли своё искусство вычислений).

Мы все со школы приучены воспринимать всякое алгебраическое выражение как своего рода «математическую материю» или «оперативный объект» воображения. Запись $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ не требует от нас «привязки» (например, к материи геометрических чертежей). Однако нашей символической алгебры у древних греков не было, и материей их математических рассуждений почти всегда служили геометрические чертежи или схематические изображения фигурных чисел. Поэтому мы считаем, что освоить греческое математическое мышление в его своеобразии — значит научиться работать с геометрическими образами даже там, где нам гораздо привычнее написать алгебраическую формулу.

И хотя для краткости записи в некоторых разделах настоящей работы мы пользуемся привычными алгебраическими формулами, эти формулы всегда допускают прямой перевод на «родной» для древнегреческой математики язык «геометрической алгебры»,

–

изложенный во II книге “Начал” ЕВКЛИДА (см. [12], [17]). Что касается отрицательных числовых коэффициентов, которые мы вводим в уравнения для упрощения анализа различных случаев и которые заведомо не могли употребляться греческими математиками в эпоху АРХИМЕДА, то мы показываем, как можно провести наше рассуждение и без этого алгебраического средства. Само собой разумеется, что мы сознательно воздерживались от того, чтобы использовать в нашей реконструкции непрерывные дроби и алгебраические тождества вида $(a + b\sqrt{N})(a - b\sqrt{N}) = a^2 - Nb^2$, содержащие иррациональные выражения — то есть от того математического аппарата, который со времён ЭЙЛЕРА и ЛАГРАНЖА стандартно используется при изложении вопросов, относящихся к уравнению Пелля.

Помимо реконструкции метода решения уравнения Пелля, данная статья содержит также исследование вопроса, можно ли характерными для античной математики средствами доказать, что уравнение Пелля разрешимо для любого неквадратного N.

3. Некоторые прототипы задачи о быках

А. К уравнению $y^2 = 2x^2 \pm 1$ приводит пифагорейская задача об определении «рациональных сторон и диагоналей», то есть об отыскании таких рациональных приближений для $\sqrt{2}$, у которых квадрат знаменателя на единицу отличается от удвоенного квадрата числителя. В этой же предметной логике решение уравнения (1) связано с поиском таких рациональных приближений для $\sqrt{N}$, у которых квадрат числителя на единицу отличается от N раз взятого квадрата знаменателя.

Б. Автор анонимной схолии к диалогу ПЛАТОНА “Хармид” среди вопросов, которыми занимается логистика, упоминает как задачу Архимеда о быках, так и «обозримую материю задач, касающихся треугольных и многоугольных чисел». Эти последние задачи, как мы сейчас покажем, также могут приводить к уравнению Пелля.

Нетрудно видеть, что число 36 является квадратным и треугольным одновременно. Отсюда возникает задача найти все числа, которые являются квадратными и треугольными одновременно, которая приводит к уравнению $y^2 = 2x^2 + 1$.

Аналогичная задача об отыскании всех чисел, которые одновременно являются квадратными и пятиугольными, также приводит к уравнению Пелля. В самом деле, k-ое пятиугольное число выражается формулой $k(3k - 1)/2$. Сложив вместе шесть таких чисел, получим гетеромекное [1] число $3k(3k - 1)$. Сложив вместе четыре таких гетеромекных числа и добавив к ним единицу, получим квадратное число $(6k - 1)^2$. Тем самым наша задача привела к уравнению

$$(6k - 1)^2 = 24n^2 + 1.$$

Сделав замену $6k - 1 = x$, $2n = y$, перепишем это уравнение в виде

[1] В античной арифметике *гетеромекными* назывались прямоугольные числа, стороны которых разнятся на единицу. Выделение этого вида чисел связано прежде всего с тем, что четыре одинаковых гетеромекных числа с добавлением единицы дают квадрат (рис. 2).

$$x^2 = 6y^2 + 1.$$

Из совокупности решений этого уравнения для нашей задачи следует выбрать те решения, в которых $x + 1$ делится на 6.

4. Алгоритм Евклида в его исходной форме

В современном «школьном» понимании алгоритм Евклида представляет собой процедуру отыскания *наибольшего общего делителя* двух натуральных чисел, двух многочленов и т. д. В противоположность этому, древнегреческие математики использовали этот алгоритм (Евклидом не изобретённый, но лишь описанный в VII и X книгах “Начал”) для поиска *наибольшей общей меры* двух величин, включая сюда и числа. По-гречески процедура такого поиска называется «антифайресис», что можно перевести на русский язык как «*взаимное вычитание*». Суть её состоит в следующем.

Возьмём две величины $A > B$ и вычтем B из A; в результате получим две величины B и $C = A - B$. Если они равны друг другу, то тогда C будет наибольшей общей мерой A и B. В противном случае возьмём пару B и C и вычтем меньшую величину из большей; мы получим новую пару величин, и т. д. Если эта процедура завершится на каком-нибудь шаге равенством образовавшихся величин, последняя разность будет служить наибольшей общей мерой начальной пары $\{A, B\}$. Если же нам удастся показать, что для данной пары величин эта процедура не завершится ни на каком шаге, то величины в данной паре придётся признать несоизмеримыми между собой.

Ещё раз подчеркнём разницу между современной и античной трактовками алгоритма Евклида. Мы делим одно число на другое и отыскиваем остаток, после чего составляем пару из делителя и остатка. Греки же вычитали одну величину из другой, после чего составляли пару из вычитаемого и разности. К примеру, когда мы применяем алгоритм Евклида к паре $\{37, 11\}$, мы делим 37 на 11, находим остаток 4 и составляем пару $\{11, 4\}$. Греки же находили разность $37 - 11 = 26$, составляли пару $\{26, 11\}$, снова находили разность $26 - 11 = 15$, составляли пару $\{15, 11\}$, снова находили разность $15 - 11 = 4$, и только теперь составляли пару $\{11, 4\}$. Конечно же, итог оказывается тем же — но идейная основа обоих подходов, на наш взгляд, несколько различается.

Процедура антифайресиса использовалась в ранней античной теории пропорциональности для определения равенства отношений (см. [14], [16]), в логистике — для приближённого сокращения дробей с большими числителями и знаменателями (см. [7]).

5. Антифайретическое доказательство иррациональности $\sqrt{N}$ (отдельное для каждого частного случая)

Б. Л. Ван дер Варден [3] выдвинул предположение о том, что древнегреческие математики могли использовать процедуру антифайресиса для доказательства иррациональности отношения $\sqrt{N}:1$ (здесь $\sqrt{N}$ мы будем мыслить геометрически — как сторону квадрата, отношение площади которого к площади единичного квадрата выражается некоторым неквадратным числом N). В реконструкции Ван дер Вардена отношение $\sqrt{N}:1$ разлагается в периодическую непрерывную дробь. Более изощрённую версию этой же реконструкции, основанную на преобразованиях чертежа в рамках «геометрической алгебры», предложил Дэвид Фаулер [17].

В противоположность этому, в нашей реконструкции метод взаимного вычитания применяется *не к паре данных отрезков, а к паре неизвестных натуральных чисел*, относительно которых предполагается, что они удовлетворяют уравнению

$$p^2 = Nq^2. \tag{2}$$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$p^2 = 7q^2$$

и будем искать его наименьшее решение в натуральных числах. Числа p и q в этом решении, если таковое существует, — взаимно простые (иначе это решение не было бы наименьшим), и их наибольшая общая мера равна единице.

Ясно, что в искомом решении будет $p > q$. Тем самым возникает мысль вычесть p из q и сделать замену $p = q + r$:

$$(q + r)^2 = 7q^2 \;\;\Rightarrow\;\; q^2 + 2qr = 6r^2.$$

Поскольку в новом уравнении сумма коэффициентов слева равна 3, а коэффициент справа равен 6, в искомом решении будет $q > r$. Сделаем замену $q = r + s$:

$$(r + s)^2 + 2(r + s)r = 7r^2 \;\;\Rightarrow\;\; s^2 + 4rs = 3r^2.$$

Поскольку в новом уравнении сумма коэффициентов слева равна 5, а коэффициент справа равен 3, в искомом решении будет $s < r$. Сделаем замену $r = s + t$:

$$s^2 + 4(s + t)s = 3(s + t)^2 \;\;\Rightarrow\;\; 2s^2 = 2st + 3t^2.$$

Временно остановившись на этом шаге антифайресиса, отметим, что опорой для представленных здесь рассуждений могут служить не только привычные нам буквенные алгебраические уравнения, но также и характерные для древнегреческой математики чертежи «геометрической алгебры». На фигурах, изображённых на рис. 3, квадрат над диагональю большого прямоугольника равен по площади семи квадратам под диагональю. Три фигуры, вычерченные одна за другой, соответствуют трём выписанным выше уравнениям. В каждой фигуре закрашены части квадратов, уже удалённые при антифайресисе.

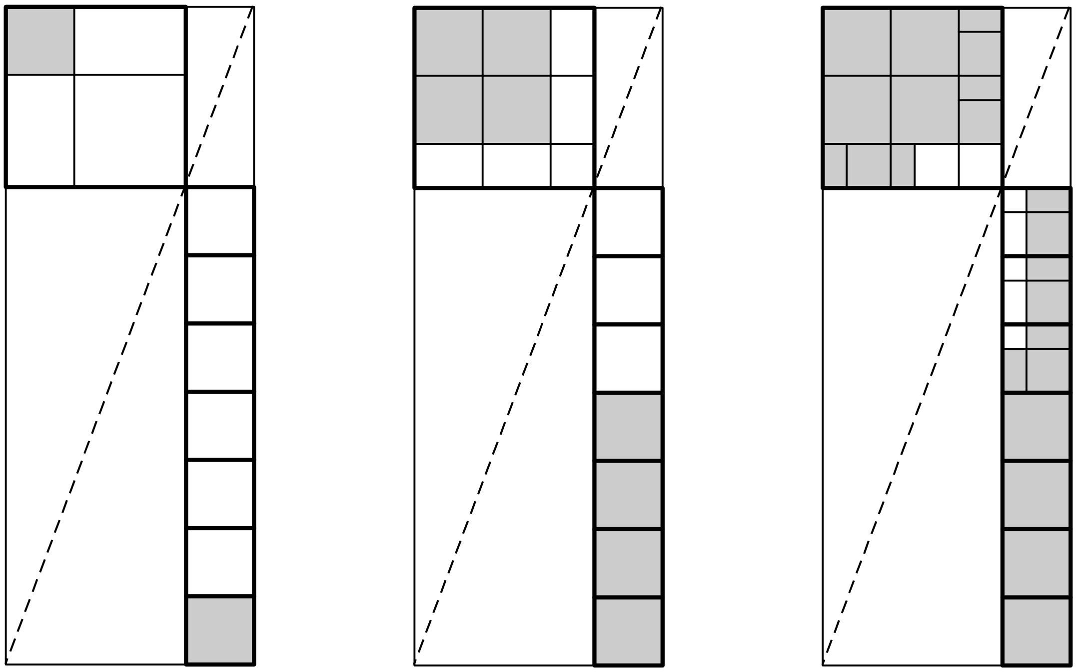

Рис. 3

Для следующих шагов антифайресиса мы не будем ни выписывать самих уравнений, ни вычерчивать эквивалентных этим уравнениям чертежей, но ограничимся составлением таблицы числовых коэффициентов. Для краткости мы позволим себе перекрестный член bxy в уравнении $ax^2 + bxy = cy^2$ записывать во всех уравнениях слева от знака равенства, придавая коэффициенту b как положительные, так и отрицательные значения. Впрочем, эта вольность, не согласующаяся с отсутствием отрицательных чисел в греческой математике до Диофанта, легко может быть исправлена при некотором утяжелении табличных записей и правил манипулирования с ними.

Установим правило, по которому производится переход от коэффициентов (a, b, c) предыдущей строки к коэффициентам (a', b', c') следующей строки.

<table>
<tr><td colspan="2">Если в данной строке выполняется неравенство</td></tr>
<tr><td>$a + b < c$</td><td>$a + b > c$</td></tr>
<tr><td colspan="2">то в этом случае следует сделать замену</td></tr>
<tr><td>$x = y + z$</td><td>$y = x + z$</td></tr>
<tr><td colspan="2">которая приводит к уравнению</td></tr>
<tr><td>$az^2 + (b + 2a)xz = (c - a - b)y^2$</td><td>$(a + b - c)x^2 + (b - 2c)xz = cz^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Тем самым переход к коэффициентам
следующей строки задаётся формулами</td></tr>
<tr><td>$a' = a,$
$b' = b + 2a,$
$c' = c - a - b.$</td><td>$a' = a + b - c,$
$b' = b - 2c,$
$c' = c.$</td></tr>
</table>

(Замечание: из формул перехода следует, что коэффициенты a и c всегда остаются положительными.)

Завершению антифайресиса соответствовало бы получение на очередном шаге такого уравнения, решением которого была бы пара чисел $\{1, 1\}$ и коэффициенты которого удовлетворяли бы соотношению $a + b = c$.

Ниже приведены таблицы преобразования коэффициентов (a, b, c) уравнений вида (2) для всех неквадратных N от 2 до 15. Из этих таблиц можно видеть, что во всех рассмотренных случаях условие $a + b = c$ не выполняется ни в одной из выписанных строк, зато на некотором шаге антифайресиса (отображённом в последней строке каждой таблицы) воспроизводится форма исходного уравнения. Это означает, что во всех этих случаях процедура антифайресиса приводит к построению периодической цепочки коэффициентов и не имеет завершения. Отсюда вытекает, что во всех этих случаях соответствующее отношение $\sqrt{N} : 1$ является иррациональным.

Заметим также, что во всех таблицах наблюдается одна и та же палиандромическая структура: в строках, равно отстоящих от начала и конца таблицы, коэффициенты a и c попарно равны друг другу, а коэффициенты b меняют знак.

В таблицах для $N = 2, 5, 10, 13$ имеется средняя строка, в которой коэффициенты a и c начальной строки меняются местами. В принципе, доказательство иррациональности отношения $\sqrt{N} : 1$ можно было бы оборвать уже на этой строке, но в целях дальнейшего исследования мы продолжили построение таблицы вплоть до воспроизведения начальной строки (с этой же целью во всех таблицах выделена строка, коэффициенты которой удовлетворяют уравнению $a + b = c + 1$.)

1	0	$<$	2
1	2	$>$	1
2	0	$>$	1
1	–2	$<$	1
1	0		2

1	0	$<$	3
1	2	$>$	2
1	–2	$<$	2
1	0		3

1	0	$<$	5
1	2	$<$	4
1	4	$>$	1
4	2	$>$	1
5	0	$>$	1
4	–2	$>$	1
1	–4	$<$	1
1	–2	$<$	4
1	0		5

1	0	$<$	6
1	2	$<$	5
1	4	$>$	2
3	0	$>$	2
1	–4	$<$	2
1	–2	$<$	5
1	0		6

1	0	$<$	7
1	2	$<$	6
1	4	$>$	3
2	–2	$<$	3
2	2	$>$	3
1	–4	$<$	3
1	–2	$<$	6
1	0	$<$	7

1	0	$<$	8
1	2	$<$	7
1	4	$>$	4
1	–4	$<$	4
1	–2	$<$	7
1	0		8

1	0	<	10
1	2	<	9
1	4	<	6
1	6	>	1
6	4	>	1
9	2	>	1
1	0	>	10
9	–2	>	1
6	–4	>	1
1	–6	<	1
1	–4	<	6
1	–2	<	9
1	0		10

1	0	<	11
1	2	<	10
1	4	<	7
1	6	>	2
5	2	>	2
5	–2	>	2
1	–6	<	2
1	–4	<	7
1	–2	<	10
1	0		11

1	0	<	12
1	2	<	11
1	4	<	8
1	6	>	3
4	0	>	3
1	–6	<	3
1	–4	<	8
1	–2	<	11
1	0		12

1	0	<	13
1	2	<	12
1	4	<	9
1	6	>	4
3	–2	<	4
3	4	>	3
4	–2	<	3
4	6	>	1
9	4	>	1
12	2	>	1
13	0	>	1
12	–2	>	1
9	–4	>	1
4	–6	<	1
4	2	>	3
3	–4	<	3
3	2	>	4
1	–6	<	4
1	–4	<	9
1	–2	<	12
1	0	<	13

1	0	<	14
1	2	<	13
1	4	<	10
1	6	>	5
2	–4	<	5
2	0	<	7
2	4	>	5
1	–6	<	5
1	–4	<	10
1	–2	<	13
1	0		14

1	0	<	15
1	2	<	14
1	4	<	11
1	6	>	6
1	–6	<	6
1	–4	<	11
1	–2	<	14
1	0		15

6. Общее антифайретическое доказательство иррациональности $\sqrt{N}$

Относительно реконструированных Ван дер Варденом и Фаулером антифайретических доказательств иррациональности отношения $\sqrt{N}:1$ принято замечать, что их недостатком является необходимость разлагать это отношение в непрерывную дробь заново для каждого N (или для некоторого специального класса N). В нашей версии доказательства этот недостаток легко устраняется: мы можем провести одно универсальное доказательство для всех неквадратных N.

Лемма 1. Значение выражения $b^2 + 4ac$ при переходе от предыдущей строки к последующей остаётся неизменным и равным $4N$.

Доказательство.

Пусть $a + b < c$, тогда $4a'c' + b'^2 = 4a(c - a - b) + (b + 2a)^2 = 4ac + b^2$.

Пусть $a + b > c$, тогда $4a'c' + b'^2 = 4(a + b - c)c + (b - 2c)^2 = 4ac + b^2$.

Поэтому значение выражения $b^2 + 4ac$ остаётся неизменным.

Но в первой строке $a = 1$, $b = 0$, $c = N$, и тем самым $b^2 + 4ac = 4N$.

Доказательство иррациональности $\sqrt{N}$. Предположим, что на каком-нибудь шаге антифайресиса мы доберёмся до завершающей строки, в которой будет $a + b = c$. Но тогда $b^2 + 4ac$ будет квадратным числом (рис. 4, *а* выполнен для случая $b > 0$; рис. 4, *б* — для случая $b < 0$).

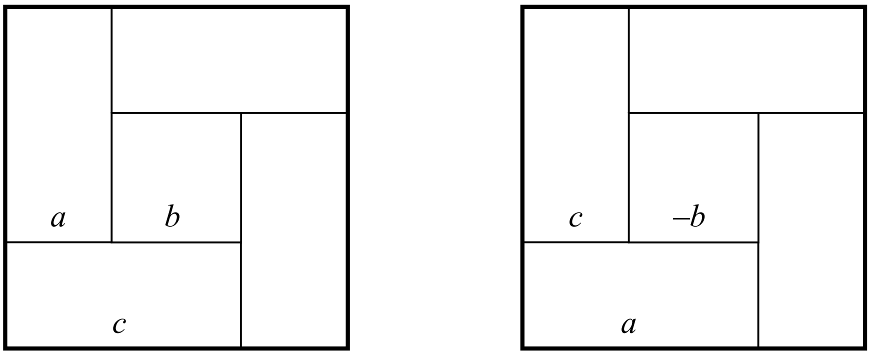

Рис. 4

В силу леммы 1 получается, что квадратное число $b^2 + 4ac$ равно неквадратному числу $4N$, что невозможно. Следовательно, сделанное выше предположение является ложным, и процедура антифайресиса не будет иметь завершения. Отсюда следует заключить, что $\sqrt{N}$ для любого неквадратного N есть величина, несоизмеримая с единицей.

7. Отыскание наименьшего решения уравнения Пелля (отдельное для каждого частного случая)

Вновь вернёмся к конкретному примеру, когда $N = 7$. Для отыскания наименьшего решения уравнения

$$p^2 = 7q^2 + 1$$

рассмотрим ту же таблицу, что и в предыдущем разделе. Спустимся по ней вниз до строки, в которой $a + b = c + 1$. Пририсуем к таблице дополнительные пятый и шестой столбцы (ниже они названы левым и правым) и запишем в оба столбца этой строки две единицы, а затем начнём подъём наверх. Если в следующей сверху строке стоит знак «<», запишем в её левый столбец сумму чисел предыдущей строки, а в правый столбец перепишем число из правого столбца предыдущей строки. Если в следующей сверху строке стоит знак «>», запишем в её правый столбец сумму чисел предыдущей строки, а в левый столбец перепишем число из левого столбца предыдущей строки. Таким образом мы поднимемся до первой строки; два записанные в ней числа дают искомое наименьшее решение.

1	0	$<$	7	8	3
1	2	$<$	6	5	3
1	4	$>$	3	2	3
2	–2	$<$	3	2	1
2	2		3	1	1

Проверка показывает, что и в самом деле $8^2 = 7 \cdot 3^2 + 1$.

8. Доказательство теоремы о том, что уравнение Пелля разрешимо в натуральных числах при любом неквадратном *N*

А. Для начала научимся вычислять по данной строке предшествующую строку. Набору (a, b, c) могут предшествовать два набора $(a, b - 2a, c + b - a)$ и $(a - b - c, b + 2c, c)$. Но одно из выражений $c + b - a$ либо $a - b - c$ является отрицательным. Поэтому если $c + b > a$, то набору (a, b, c) предшествует набор $(a, b - 2a, c + b - a)$; если $c + b < a$, то набору (a, b, c) предшествует набор $(a - b - c, b + 2c, c)$.

Б. Теперь заметим, что во всех рассмотренных выше примерах равенство $a + b = c + 1$ выполняется в строке, находящейся непосредственно над блоком нижних строк, в которых $a = 1$. Представим N в виде $N = n^2 + m$, где n^2 — наибольший квадрат, не превышающий N. Несложно показать, что блок нижних строк и строка над ним будут иметь следующий вид:

$1 - m + 2n$	$-2n + 2m$	m
1	$-2n$	m
1	$-2(n - 1)$	$m + n^2 - (n - 1)^2$
...	...	...
1	-2	$m + n^2 - 1$
1	0	$m + n^2$

При этом в верхней строке действительно выполняется равенство

$$a + b = (1 - m + 2n) + (-2n + 2m) = m + 1 = c + 1.$$

В. Выше (раздел 6) мы доказали, что процесс антифайресиса для уравнения (2) никогда не завершается, но мы ещё не доказали, что первая строка при этом обязательно повторится. Чтобы доказать это, заметим, что число наборов ($a > 0$, b, $c > 0$), для которых выполняется условие $b^2 + 4ac = 4N$, является конечным. Поэтому рано или поздно повторится по крайней мере один из этих наборов. Но тогда повторятся и наборы предыдущих строк, и т. д., вплоть до первой строки. А поскольку первая строка повторится, то в указанном месте (см. пункт **Б**) над ней обязательно будет находиться строка, в которой $a + b = c + 1$.

Г. Выше (пункты **Б** + **В**) мы доказали, что уравнение Пелля разрешимо в натуральных числах при любом N, и указали приём, позволяющий явно построить одно его решение. Осталось показать, что построенное таким образом решение является наименьшим. Для этого докажем, что строка, в которой $a + b = c + 1$, встречается внутри периода от первой строки до её повторения только один раз.

Составим фигуру из квадрата b^2 и четырёх прямоугольников ac, как показано на рис. 5 (на рис. 5, *а* изображён случай $b < 0$, на рис. 5, *б* — случай $b < 0$). Площадь этой фигуры по лемме 1 равна $4N$; площадь закрашенной четверти этой фигуры равна N.

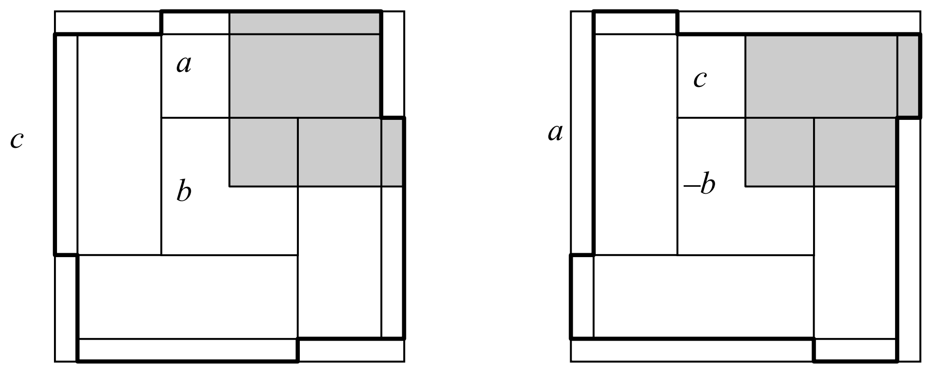

Рис. 5

Пусть $N = n^2 + m$, где n^2 — наибольшее квадратное число, не превышающее N. Из рассмотрения чертежа следует, что m — это число единиц в закрашенных «выступах» («выступе») единичной ширины; и это число равно c. Получаем, что из совместного выполнения условий $a + b = c + 1$ и $b^2 + 4ac = 4N$ следует, что коэффициенты строки, в которой $a + b = c + 1$, обязательно будут иметь вид

$$c = m, \quad b = 2(m - n), \quad a = 2n - m + 1.$$

Но это и есть решение, построенное выше (пункт **Б**).

Заметим теперь, что внутри периода от первой строки до её повторения любая строка может встретиться не более одного раза (в противном случае повторятся и наборы следующих строк, и т. д., вплоть до последней строки, и тем самым получится, что внутри периода встречается строка, совпадающая с последней строкой). Поэтому построенное выше решение уравнения (1) действительно является наименьшим.

9. Построение бесконечной цепочки решений уравнения Пелля

В формулировке задачи Архимеда требуется найти хотя бы одно решение уравнения (1) для заданного N. Однако само исследование уравнений вида (1) естественно приводит к задаче о построении последовательности всех решений каждого такого уравнения. Соответствующий алгоритм для частного случая $N = 2$ был известен ещё пифагорейцам (см. [6], [9], [11], [17]).

Уравнение (1) имеет бесконечно много решений, поскольку в каждом периоде имеется строка, в которой $a + b = c + 1$. Все эти решения в принципе могут быть найдены обратным восхождением к первой строке.

Более быстрый приём отыскания последовательных решений уравнения (1) основывается на так называемом «тождестве Брахмагупты»

$$(x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2) = (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 + x_2y_1)^2, \qquad (8)$$

истинность которого можно проверить прямым раскрытием скобок. Из этого тождества следует, что если две пары чисел $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ (не обязательно различные) удовлетворяют уравнению (1), то и пара $\{x_1x_2 + Ny_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2\}$ также удовлетворяет уравнению (1).

Приём состоит в том, чтобы в качестве пары $\{x_1, y_1\}$ всё время брать наименьшее решение (1), а в качестве пары $\{x_2, y_2\}$ брать сначала это же наименьшее решение, затем — найденное на первом шаге второе решение, и т. д.

Так для $N = 7$ наименьшим будет найденное выше решение $\{8, 3\}$. Следующие решения находятся про указанному правилу:

$$\frac{8\cdot 8+7\cdot 3\cdot 3}{8\cdot 3+3\cdot 8}=\frac{127}{48},\quad \frac{8\cdot 127+7\cdot 3\cdot 48}{8\cdot 48+3\cdot 127}=\frac{2024}{765},\quad \frac{8\cdot 2024+7\cdot 3\cdot 765}{8\cdot 765+3\cdot 2024}=\frac{32257}{12192},\quad \ldots$$

Спрашивается, мог ли о тождестве (8), содержащем выражения четвёртой степени, знать Архимед? Как это тождество устанавливается с помощью средств «геометрической алгебры»? (Выражения четвёртой степени встречаются в так называемой «формуле Герона», позволяющей вычислять площадь треугольника по длине трёх его сторон. Эта формула в действительности была открыта не Героном, описавшим её в своей *Метрике*, а Архимедом. В ходе доказательства площадь треугольника представляется как среднее геометрическое двух других площадей, то есть как корень квадратный из произведения этих площадей (см. [2], с. 419–421)).

Г. Укажем ещё один приём, позволяющий по двум имеющимся решениям $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ построить новое решение $\{x_1x_2 + Ny_1y_2,\ y_1x_2 + x_1y_2\}$. Рассмотрим следующую четвёрку рациональных приближений для $\sqrt{N}$:

$$\frac{Ny_2}{x_2},\quad \frac{Ny_1}{x_1},\quad \frac{x_1}{y_1},\quad \frac{x_2}{y_2}.$$

На первом шаге построения вычислим средние гармонические для первой (нижней) и для второй (верхней) пары приближений:

$$\frac{2Ny_1y_2}{x_1y_2+x_2y_1},\quad \frac{2x_1x_2}{x_1y_2+x_2y_1}.$$

На втором шаге вычислим среднее арифметическое для этих средних гармонических:

$$\frac{x_1x_2+Ny_1y_2}{x_1y_2+x_2y_1}.$$

Можно прийти к этому же результату и в другом порядке, вычислив на первом шаге построения средние арифметические для первого и третьего и для второго и четвёртого приближений, а на втором шаге — среднее гармоническое для этих средних арифметических.

Библиография

1. Антропов А. А. О двух методах решения уравнения Пелля в работах Дж. Валлиса. *История и методология естественных наук*. 1986. **32.** С. 39–49.

2. Архимед. *Сочинения*. М:, Физматгиз, 1962.

3. ВАН ДЕР ВАРДЕН Б. Л. *Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции*. М:, Физматгиз, 1959.

4. ВАН ДЕР ВАРДЕН Б. Л. Уравнение Пелля в математике греков и индийцев. *УМН*. 1976. Т.31. Вып. 5(191). С. 57–70.

5. ДИОФАНТ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ. *Арифметика и книга о многоугольных числах*. М:, Наука, 1974.

6. ЗВЕРКИНА Г. А. Метод простой итерации: от Вавилона до Ньютона. *Историко-математические исследования*. 1999. Вып. 3 (38). С. 270–315.

7. ЗВЕРКИНА Г. А. Алгоритм Евклида как вычислительное средство античной математики. *Историко-математические исследования*. 2000. Вып. 5(40). С. 232–243.

8. ЗВЕРКИНА Г. А. Уравнение Пелля-Ферма в античности. *Международная научная конференция «Образование, наука и экономика в вузах на рубеже тысячелетий». Сборник статей*. Vysoke Tatry, 2000. С. 210–213.

9. ПАЕВ М. Е. О приближённом вычислении квадратных корней в древней Греции. *Историко-математические исследования*. 1965. Вып.16. С. 219–234.

10. ФЕРМА П. *Исследования по теории чисел и диофантову анализу*. М:, Наука, 1992.

11. ЩЕТНИКОВ А. И. Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие «семенного логоса». *Математическое образование*. 1999. №1(8). С. 84–94.

12. ЩЕТНИКОВ А. И. Вторая книга «Начал» Евклида: её математическое содержание и структура. В кн. *Вторая книга «Начал» Евклида: текст и интерпретации*. Новосибирск: АНТ, 2001. С. 19–40.

13. AMTHOR A. Das Problema bovinum des Archimedes. *Zeitschrift für Math. und Phys., Hist.-litt. Abth*. 1880. T. 25. S. 153–171.

14. BECKER O. Eudoxos-Studien, I. Eine voreudoxishe Proportionlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid. *Quellen und Studien zur Geshihte der Math*. 1932. B.2. S. 313–333.

15. DICKSON L. E. *History of the theory of numbers. Vol. II, Diophantine analysis*. Washington, Carnegie Institute. 1920. (Reprinted: AMS, 1999.)

16. FOWLER D. H. Ratio in early Greek mathematics. *Bull. AMS*. 1979. N. S., T.1. P. 807–846.

17. FOWLER D. H. Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio. *Archive for History of Exact Sciences*. 1980–82. V.22. P. 5–36; V.26. P. 193–209.

18. NELSON H. L. A solution to Archimedes' cattle problem. *J. of Recreational Math*. 1980–81. V.13. P. 162–176.

19. NYGRÉN A. A simple solution to Archimedes' cattle problem. *Acta Universitatis Ouluensis Scientiae Rerum Naturalium*. 2001. ISBN 951-42-5932-7.

20. VARDI I. Archimedes' cattle problem. *Am. Math. Monthly*. 1998. V.105. P. 305–319.

21. WEIL A. *Number theory: an approach through history*. Boston, Birkhäuser, 1984.

22. WILLIAMS H. C., GERMAN R. A., ZARNKE C. R. Solution of the cattle problem of Archimedes. *Math. Comp*. 1965. V.19. P. 671–674.