

# Проблема филлотаксиса

ЩЕТНИКОВ А. И.

«Природа любит прятаться»

Гераклит

«Книга природы написана  
на языке математики»

Галилей

## 1. Введение

**1.1.** Филлотаксисом (от φύλλον — лист и τάξις — строй) называется своеобразное решётчатое расположение листьев, семян, лепестков и чешуек многих видов растений. Ряды ближайших соседей в таких решётках, так называемые *парастихи* (от *παρα* — рядом и *στιχος* — ряд), разворачиваются по спиральям на плоской, конической или куполообразной поверхности или закручиваются винтовыми линиями вокруг цилиндра.



Рис. 1

В соцветии маргаритки (рис. 1) видны 34 парастихи, разворачивающиеся против часовой стрелки, и 21 парастиха, разворачивающаяся по часовой стрелке. Достоин удивления тот факт, что оба числа (мы будем называть их *индексами* парастих) входят в качестве последовательных членов в последовательность Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots,$$

где на первых двух местах стоят две единицы, а каждый следующий член вычисляется по рекуррентной формуле

$$F(n + 2) = F(n + 1) + F(n). \quad (1)$$

Рассматривая корзинки подсолнухов, где на периферии индексы пары семейств встречаемых парастих доходят обычно до (55, 89) (см. рис. 6, на котором изображена

простая математическая модель такой корзинки), можно заметить, что ближе к центру семейство парастих с индексом 89 постепенно «рассасывается», — зато «проявляется» семейство парастих с индексом 34, закрученное в том же направлении; ещё ближе к центру «рассасывается» семейство с индексом 55 и «проявляется» семейство с индексом 21, и т. д. Если идти в обратном направлении от центра корзинки к её периферии, индексы парастих будут возрастать по фибоначчиеву закону. Это увеличение индексов принято называть *возрастанием филлотаксиса*. Обычно возрастание спирального филлотаксиса удаётся проследить, начиная от семейства парастих с индексом 13; но можно предположить, что ещё ближе к центру корзинки находятся плохо различимые семейства парастих с меньшими индексами.

**1.2** Явление филлотаксиса упоминал ещё Иоганн Кеплер в своём сочинении «О шестиугольных снежинках», а начиная с основателей кристаллографии братьев Луи и Огюста Браве, опубликовавших в 1837 г. «Опыты о спиральном расположении листьев», началось систематическое его изучение, включавшее в себя феноменологические и математические описания, теоретические объяснения различных аспектов явления и экспериментальные исследования. Недостатка в разнообразных описаниях и объяснениях филлотаксиса нет — в обзоре [9] упомянуто 115 работ, и при желании к ним можно добавить как минимум ещё столько же. Неизменный интерес исследователей к проблеме филлотаксиса подчёркивается изображением модели спирального филлотаксиса на серийной обложке журнала «Mathematical Biosciences». Этот интерес подогревается в последнее время тем фактом, что аналогичные спиральные структуры были обнаружены и в неживой природе (см. [4], [10], [14], [15]).

Можно сказать, что проблема филлотаксиса предстаёт перед современными исследователями не как специфически математическая, биологическая, физическая, химическая, кристаллографическая и т. д., а как по преимуществу методологическая. По-видимому, все или почти все возможные элементы её решения давно уже выявлены, — и задача исследователей состоит прежде всего в том, чтобы согласовать их друг с другом, указав границы разумной применимости каждого из подходов.

## 2. Теоремы Браве

Основная идея братьев Браве состояла в том, чтобы рассматривать при изучении филлотаксиса не только явно видимые спирали контактных парастих, но также и другие, менее заметные спирали, составленные из периодически расположенных зёрен, не находящихся в непосредственном контакте (читатель может попробовать найти такие спирали на рис. 1 и подсчитать их индексы).

В качестве базовой модели для изучения образующихся при филлотаксисе спиралей братья Браве предложили рассматривать точечную решётку  $\mathfrak{R}$  на поверхности цилиндра, удовлетворяющую следующим требованиям:

- Если на спиральной линии, соединяющей узлы  $A$  и  $B$  решётки  $\mathfrak{R}$ , находятся другие узлы решётки  $\mathfrak{R}$ , то эти узлы разбивают отрезок  $AB$  на равные отрезки.
- Пусть точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на одной спиральной линии, и  $AC = m \cdot AB$ . Тогда если точки  $A$  и  $B$  являются узлами решётки  $\mathfrak{R}$ , то и точка  $C$  является узлом решётки  $\mathfrak{R}$ .

• Пусть точки  $A, B, C, D$  являются вершинами параллелограмма. Тогда если точки  $A, B, C$  являются узлами решётки  $\mathfrak{R}$ , то и точка  $D$  является узлом решётки  $\mathfrak{R}$ .

Для удобства мы будем изображать решётку  $\mathfrak{R}$  на развёртке цилиндра — полосе, ширину которой удобно принять за единицу.

Говоря о спирали с индексом  $m$ , мы будем иметь в виду семейство из  $m$  параллельных спиральных линий, на которых лежат все узлы решётки  $\mathfrak{R}$ .

Далее мы будем рассматривать *встречные* (одна закручивается вправо, а другая влево) пары спиралей с индексами  $n$  и  $m$ . Следуя за Ирвином Адлером [8], мы будем называть пару встречных спиралей *видимой*, если каждая точка их пересечения является узлом решётки  $\mathfrak{R}$ .

**Теорема 1.** Пусть на решётке  $\mathfrak{R}$  проведена видимая пара встречных спиралей  $(n, m)$ , где  $n > m$ . Тогда новые спирали, «диагональные» по отношению к параллелограммам сетки, образованной исходными спиральями, имеют индексы  $n + m$  («сумма спиралей») и  $n - m$  («разность спиралей»). // Этот результат непосредственно следует из построения (рис. 2).

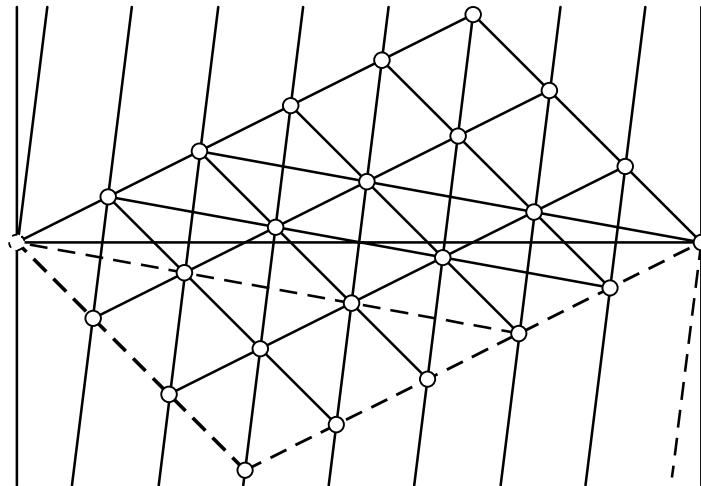


Рис. 2

**Теорема 2.** Если индексы видимой пары встречных спиралей  $(m, n)$  являются взаимно простыми числами, то через все точки решётки  $\mathfrak{R}$  может быть проведена спираль с индексом «1». И обратно, если через все точки решётки  $\mathfrak{R}$  может быть проведена спираль с индексом «1», то индексы любой видимой пары встречных спиралей являются взаимно простыми числами. // Прямая теорема доказывается с помощью алгоритма последовательного взаимного вычитания (алгоритма Евклида), приложенного к паре спиралей  $(m, n)$ . Поскольку  $\text{НОД}(m, n) = 1$ , этот алгоритм завершится построением видимой спирали с индексом «1». Обратная теорема доказывается от противного.

Спирали контактных парастих, по-видимому, вторичны; первична же *основная генетическая спираль* с индексом «1», поскольку зёрна располагаются на ней в порядке их появления. Азимутальный угол между двумя последовательными зёрнами основной генетической спирали принято называть *углом расхождения* (углом дивергенции).

Если через все узлы решётки может быть проведена спираль с индексом «1», то через эти же узлы может быть проведена ещё одна спираль с индексом «1», закручивающаяся в противоположную сторону. Если последовательные зёрна закручиваются по одной из этих спиралей на угол  $\alpha$  (измеряемый в долях полного оборота), то по противоположной спирали они закручиваются на угол  $1 - \alpha$ .

**Теорема 3.** Если узлы решётки занумерованы по порядку их расположения на основной генетической спирали, то в семействе спиралей с индексом  $m$  каждую спиральную линию образуют узлы решётки с номерами, сравнимыми по модулю  $m$ .

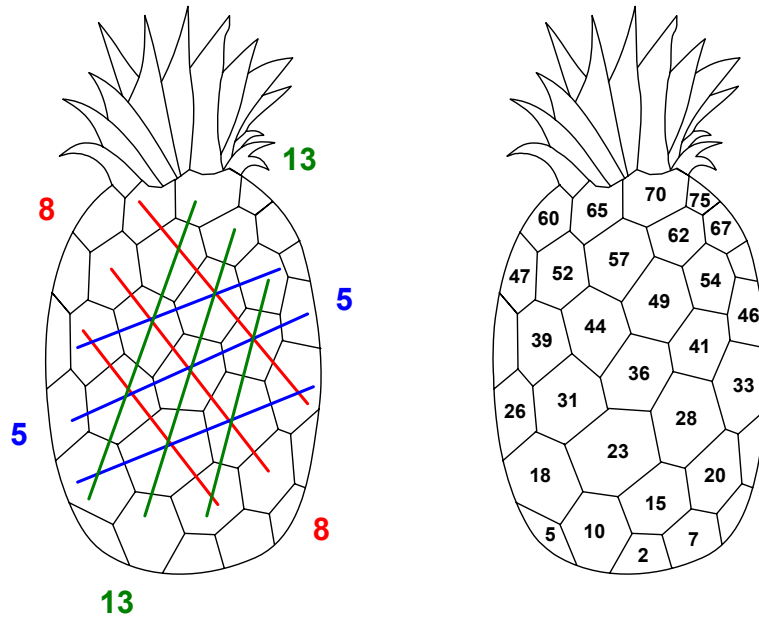


Рис. 3

Иллюстрацией к теоремам 1–3 может служить рис. 3, на котором изображён плод ананаса. На рис. 3, а можно видеть, что чешуйки ананаса образуют три семейства контактных парастих с индексами 5, 8, 13; при этом спирали с индексом 8 идут навстречу спиралям с индексами 8 и 13. На рис. 3, б чешуйки занумерованы в порядке их расположения на генетической спирали. Мы видим, что через чешуйку с номером 36 проходят три контактные парастихи с индексами **5** (31 – 36 – 41), **8** (28 – 36 – 44), **13** (23 – 36 – 49). При более пристальном всматривании можно заметить также неконтактные спирали с индексами **3** (33 – 36 – 39), **21** (15 – 36 – 57), **18** (18 – 36 – 54).

**Задача 1.** Пусть индексы видимой пары встречных спиралей ( $m, n$ ) являются взаимно простыми числами, и угол между зёрнами с номерами «0» и « $mn$ » равен  $\vartheta$ . Требуется определить по этим данным угол дивергенции.

*Решение.* Пусть зерно с номером «1» лежит на пересечении  $a$ -ой спирали с индексом  $n$  и  $(m - b)$ -ой спирали с индексом  $m$  (рис. 4).

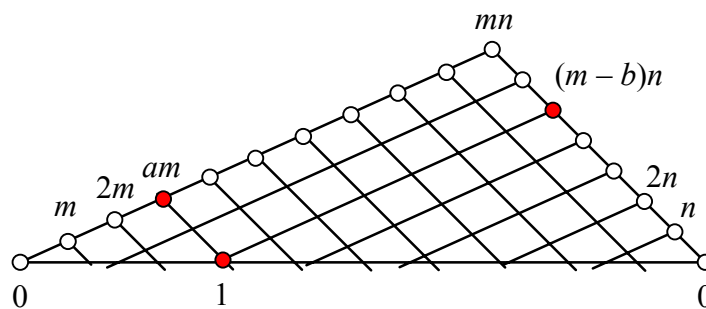


Рис. 4

При движении вверх по спирали с индексом  $m$  номер зерна с каждым шагом возрастает на  $m$ ; при движении вниз по спирали с индексом  $n$  номер зерна с каждым шагом убывает на  $n$ . Чтобы перейти по решётке встречных спиралей от узла с номером «0» к узлу с номером «1», следует сделать  $a$  шагов вверх по спирали с индексом  $m$ , а затем  $b$  шагов вниз по спирали с индексом  $n$ . Поэтому числа  $a$  и  $b$  связаны с индексами спиралей соотношением

$$am - bn = 1. \quad (2)$$

При этом угол дивергенции вычисляется по формуле

$$\alpha = \frac{a\vartheta}{n} + \frac{b(1-\vartheta)}{m} = \frac{b}{m} + \frac{am - bn}{mn} \vartheta,$$

что с учётом (2) даёт

$$\alpha = \frac{b}{m} + \frac{\vartheta}{mn} = \frac{a}{n} - \frac{1-\vartheta}{mn}.$$

Если индексы  $m$  и  $n$  велики по сравнению с единицей, то при приближённом вычислении угла дивергенции вторым слагаемым можно пренебречь:

$$\alpha \approx \frac{b}{m} \approx \frac{a}{n}.$$

Тем самым в первом приближении угол дивергенции не зависит от угла  $\vartheta$  и определяется лишь индексами спиралей ( $m, n$ ): сдвиговые деформации решётки мало влияют на положение зерна с номером «1».

Наименьшее решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям  $a < n$  и  $b < m$ , отыскивается с помощью алгоритма Евклида, приложенного к паре ( $m, n$ ). Вывод соответствующих результатов приведён в **Приложении**. Представим отношение  $n : m$  в виде непрерывной дроби

$$\frac{n}{m} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_{k-1} + \frac{1}{q_k}}}.$$

При этом оказывается, что если  $k$  чётно, то

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{q_k + q_{k-1} + \dots + q_2 + q_1},$$

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{q_k + q_{k-1} + \dots + q_2 + q_1 + q_0},$$
(3)

если  $k$  нечётно, то верхняя и нижняя дроби меняются местами.

### 3. Почему золотое сечение даёт оптимальное заполнение корзинки?

**3.1.** Одно и то же явление в науке часто удаётся объяснить двояким образом. Объяснения первого рода, называемые *телеологическими*, отвечают на вопрос «для чего?», «с какой целью?»; объяснения второго рода, называемые *механистическими*, отвечают на вопрос «из-за чего?», «в результате действия какого механизма?».

Телеологическое объяснение филлотаксиса было выдвинуто гораздо раньше механистического. По-видимому, первым такое объяснение придумал швейцарский натуралист Шарль Бонне в 1754 году. Бонне считал, что листья на стволе распределяются так, чтобы как можно меньше закрывать друг друга (ведь тогда они хорошо освещаются солнечными лучами и омываются дождём); а зёрна в корзинке — чтобы между ними было как можно меньше пустот. На вопрос «а как получается, что листья по стволу и зёрна по корзинке распределяются именно таким образом?» в XVIII веке отвечали: «потому что их такими создал Бог»; в XIX веке, после того, как Чарльз Дарвин опубликовал в 1859 году свою теорию эволюции, стали говорить, что такой порядок сложился в результате естественного отбора как самый жизнеспособный.

**3.2.** Будем считать, что заполняющие корзинку зёрна последовательно выпускаются из центра корзинки через равные интервалы времени; каждое зерно движется в своём радиальном направлении по одному и тому же закону  $r = r(t)$ ; угол расхождения между радиусами в любой паре последовательных зёрен равен фиксированной величине  $\alpha$ . Такую модель заполнения корзинки зёрнами мы будем называть *глобальной кинематической моделью*.

Мы можем смотреть на процесс последовательного заполнения значений угловой координаты зёрнами как на аналог алгоритма Евклида поиска наибольшей общей меры двух величин путём их взаимного вычитания.

Пусть после того, как сделано  $q_1$  поворотов на угол расхождения  $\alpha$ , до полного оборота остался угол  $\beta < \alpha$  (рис. 5, *a*).

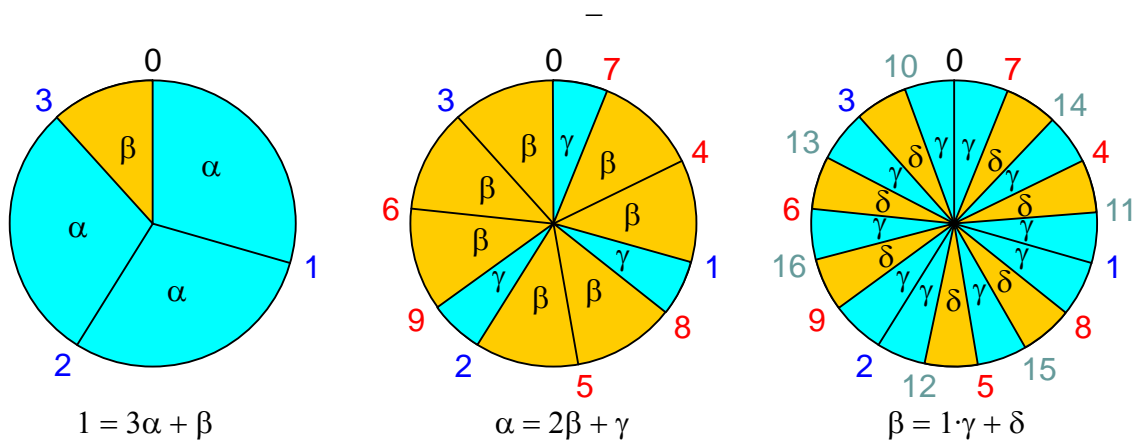


Рис. 5

После ещё одного поворота на угол  $\alpha$  дуга между отметками «0» и «1» будет поделена на отрезки  $\alpha - \beta$  и  $\beta$ . Далее на первом полном обороте от каждой дуги  $\alpha$  будет отсечена дуга  $\beta$ , при следующем полном обороте — ещё одна дуга  $\beta$ , прилегающая к уже отсечённой, и так до тех пор, пока не образуются остатки  $\gamma < \beta$ . В итоге каждая дуга  $\alpha$  будет разделена на  $q_2$  частей  $\beta$  и остаток  $\gamma$  (рис. 5, б).

Третья серия проходов даст точки, отсекающие от всех дуг  $\beta$  последовательные дуги  $\gamma$ , пока не образуются остатки  $\delta < \gamma$ . В итоге каждая дуга  $\beta$  будет разделена на  $q_3$  частей  $\gamma$  и остаток  $\delta$  (рис. 5, в).

Продолжая эту процедуру далее, получим цепочку равенств

$$1 = q_1\alpha + \beta, \quad \alpha = q_2\beta + \gamma, \quad \beta = q_3\gamma + \delta, \quad \dots,$$

которую можно переписать в виде

$$\alpha = \frac{1}{q_1 + \frac{\beta}{\alpha}}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{q_2 + \frac{\gamma}{\beta}}, \quad \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{q_3 + \frac{\delta}{\gamma}}, \quad \dots$$

Подставляя второе равенство в первое, третье во второе и т. д., представим  $\alpha$  в виде непрерывной дроби

$$\alpha = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \dots}}}}.$$

Если величина угла  $\alpha$  соизмерима с единицей, рассматриваемая процедура попеременного взаимного вычитания завершится на каком-то шаге  $k$ , когда очередной остаток окажется равным нулю — и соответствующая непрерывная дробь будет конечной; если же величина угла  $\alpha$  несоизмерима с единицей, эта процедура не будет иметь завершения, и соответствующая непрерывная дробь будет бесконечной. В первом случае значения угловых координат зёрен с номерами  $k, k + 1, k + 2, \dots$  будут повторять значения угловых координат зёрен с номерами  $0, 1, 2, \dots$ ; во втором случае любые два зерна будут иметь различные азимутальные координаты.

**3.3.** Зададимся вопросом, какая последовательность подходящих частных  $q_i$  соответствует наиболее эффективному заполнению корзинки зёрнами?

Мы знаем, что чем большим будет некоторое подходящее частное  $q_i$ , тем большими окажутся долго не заполняемые «пустоты» на соответствующей серии шагов. Наличие таких пустот можно считать свидетельством о не самом эффективном использовании площади корзинки. Поэтому выгодно, чтобы все подходящие частные  $q_i$  были как можно меньшими, т. е. равными 1. Тем самым оптимальный угол расхождения равен

$$\phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Составив уравнение  $\phi = 1/(1 + \phi)$  и решив его, получим, что  $\phi = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618...$  Выраженный в градусной мере, этот угол с точностью до секунды равен  $222^\circ 29' 32''$ . Удобнее рассматривать его дополнение до полного оборота, равное  $137^\circ 30' 28''$ .

Только что составленное уравнение можно преобразовать в пропорцию

$$1 : \phi = \phi : (1 - \phi).$$

Мы видим, что угол в полный оборот так относится к углу  $\phi$ , как угол  $\phi$  относится к его дополнению  $1 - \phi$  до полного оборота. Деление непрерывной величины на две части, когда целое относится к большей части как большая часть к меньшей, называется *золотым сечением*, соответственно иррациональное число  $\phi$  и обратное к нему число  $\Phi = \phi^{-1} = 1 + \phi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1,618...$  называются *числами золотого сечения*.

**3.4.** Обрывая разложение  $\phi$  в непрерывную дробь на очередном подходящем частном, получим так называемые *подходящие* рациональные дроби, всё точнее и точнее приближающие иррациональное число  $\phi$ :

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{5}{8}, \quad \dots$$

Числители и знаменатели этих подходящих дробей являются последовательными числами Фибоначчи. Именно это обстоятельство приводит к тому, что индексы контактных парастих, проявляющихся при возрастании филлотаксиса, оказываются равными последовательным числам Фибоначчи.

**3.5.** Посмотрим, как заполняется зёрнами круговая корзинка в глобальной кинематической модели. Пусть на зерно с номером  $n$  приходится площадь  $S$  (вообще говоря, величина переменная). Кольцо радиуса  $r$  и ширины  $dr$  имеет площадь  $2\pi r dr$ . Но эта же площадь равна  $S dn$ , что приводит к дифференциальному уравнению  $2\pi r dr = S dn$ . В простейшем случае  $S = \text{const}$  связь между  $n$  и  $r$  задаётся соотношением  $S n = \pi r^2$ .

Результаты численного счёта для 1000 зёрен, выпущенных под углом расхождения  $\phi$ , представлены на рис. 6. По краям корзинки просматривается пара встречных парастих (55, 89); по мере приближения к центру она сменяется парами (34, 55), (21, 34) и т. д.



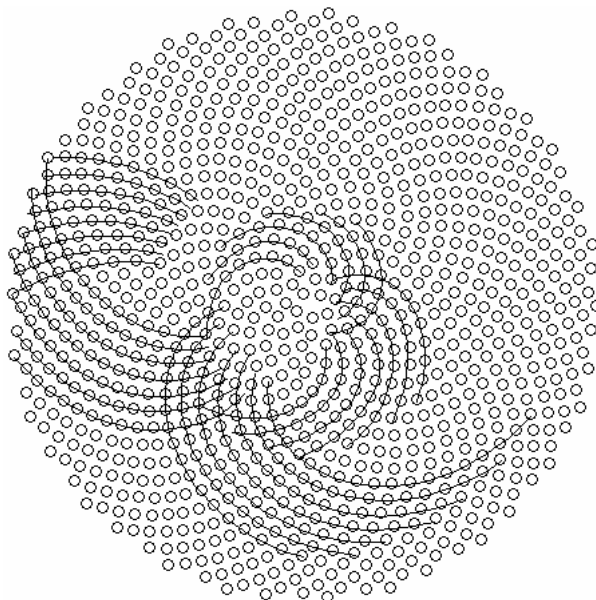


Рис. 6

#### 4. Критика глобальной кинематической модели

В глобальной кинематической модели каждое зерно выпускается из центра с абсолютной азимутальной точностью, и зёрна двигаются по радиусу независимо друг от друга. Однако абсолютная точность отмеривания в природе недостижима. Кроме того, зёрна не являются математическими точками — они давят друг на друга, и под действием этого давления перемещаются по корзинке и деформируются.

Предположим, что последовательные зёрна стала выпускаются из центра корзинки под углом расхождения, незначительно отличающимся от угла  $\phi$ . Простые численные эксперименты показывают, что малое изменение угла расхождения приводит к радикальной перестройке рисунка спиралей (рис. 7). Корзинка перестаёт заполняться равномерно, в её рисунке проявляются плотно заполненные зёрнами спирали, перемежающиеся спиральными пустотами.

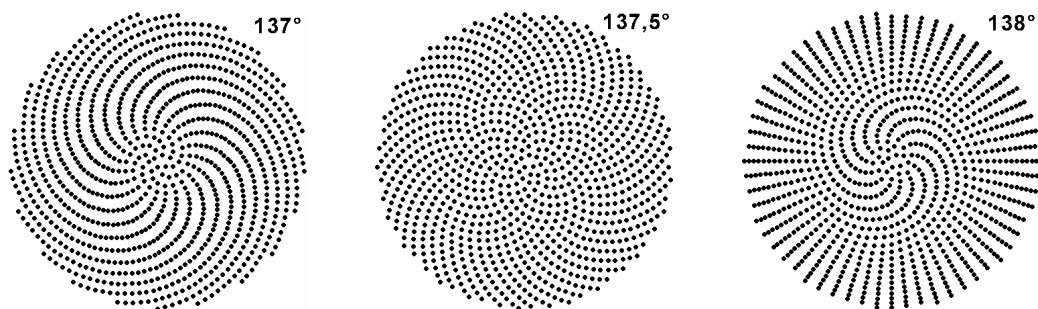


Рис. 7

Результаты численного моделирования приводят нас к предположению о том, что филлотаксис Фибоначчи возникает не за счёт абсолютно точного отмеривания углов, приводящего к «предустановленной гармонии» оптимального расположения зёрен, — но в результате действия динамических факторов, сообщающих системе структурную

устойчивость. Последовательные зерна могут выходить из центра корзинки под углами расхождения, заметно отличающимися от угла  $\phi$ , — однако силы, действующие на каждое зерно со стороны ближайших его соседей, направляют это зерно в нужном направлении, так что правильная картинка складывается в некотором смысле «сама».

## 5. Проблема размыкания младшей парастихи

5.1. Возрастание филлотаксиса происходит за счёт того, что при перемыкании пары противоположных контактных парастих ( $m, n$ ) появляется новая контактная парастиха с индексом  $m + n$  (рис. 8).

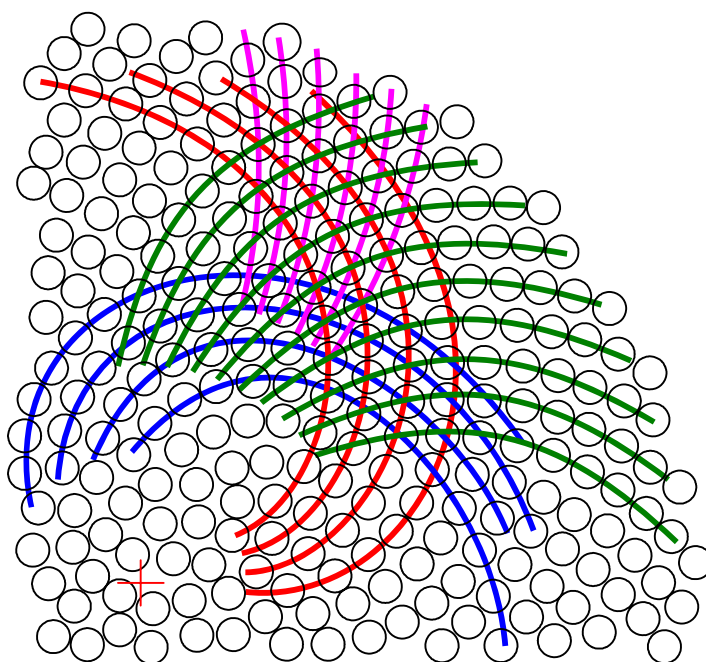


Рис. 8

Пусть  $m < n$ ; будем называть парастиху с индексом  $m$  «младшей», парастиху с индексом  $n$  «старшей», парастиху с индексом  $m + n$  «диагональной». При перемыкании пары противоположных контактных парастих система проходит *точку виртуального ветвления*, поскольку после замыкания диагональной парастихи разомкнуться может как младшая парастиха, так и старшая парастиха. Однако для того, чтобы возрастание филлотаксиса всегда шло в соответствии с рекуррентным законом (1), требуется, чтобы *при очередном шаге возрастания филлотаксиса всегда размыкалась младшая парастиха*. И действительное решение проблемы филлотаксиса состоит в отыскании механизма, обеспечивающего такой порядок перемыкания!

Модельная часть искомого объяснения может быть выстроена либо на языке сил (см., [8]), либо на языке минимизации энергии системы (см. [4], [10], [12]–[14]). По-видимому, все эти представления (а также — и некоторые другие) в какой-то мере эквивалентны, и для нашей задачи предпочтительнее выбрать самое простое из них, — такое, из которого сразу же вытекает условие размыкания младшей парастихи.

5.2. В наших дальнейших рассуждениях будет подразумеваться, что расстояние от выделенного фрагмента решётки до центра корзинки в несколько раз больше характерного расстояния между зёрнами, и тем самым (а) локальное расположение зёрен может изображаться решёткой параллелограммов, (б) индексы рассматриваемых контактных парастих достаточно велики ( $\geq 13$ ).

Выделим параллелограмм  $ABCD$ , образованный пересечением соседних спиральных линий, относящихся к паре видимых встречных парастих. Пусть индекс сторон  $AD$  и  $BC$  равен  $m$ , индекс сторон  $AB$  и  $DC$  равен  $n$ , индекс диагонали  $AC$  равен  $n + m$ . Проведём через  $A$  прямую  $MN$  перпендикулярно радиальному направлению; эта прямая (мы будем называть её «базой») локально совпадает с «базовой» окружностью, центр которой расположен в центре корзинки. Продолжим прямые  $CB$  и  $CD$  до пересечения с базой в точках  $M$  и  $N$  (рис. 9).

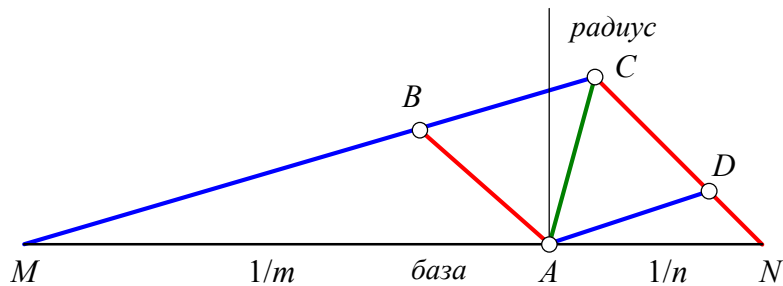


Рис. 9

«Базовые сечения» младшей парастихи  $AM$  и старшей парастихи  $AN$  составляют соответственно  $1/m$  и  $1/n$  от длины базовой окружности. И поскольку  $1/m > 1/n$ , из двух парастих большее базовое сечение имеет парастиха с меньшим индексом.

5.3. Следуя за Адлером [8], введём важнейшее различие регулярной и иррегулярной конфигураций. В *регулярной* конфигурации диагональ  $n + m$  образует встречную пару со старшей парастихой  $n$ , в *иррегулярной* конфигурации диагональ  $n + m$  образует встречную пару с младшей парастихой  $m$  (рис. 10).

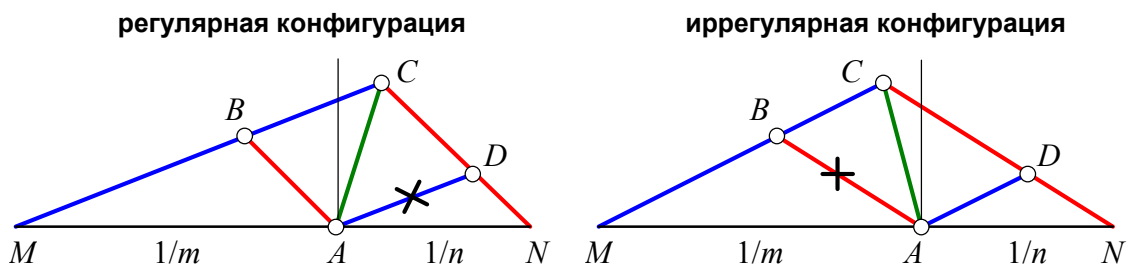


Рис. 10

Посмотрим теперь, как идёт перемыкание парастих в обеих конфигурациях. За точкой виртуального ветвления зёрна контактной диагональной парастихи продолжают сближаться по радиальному направлению так, что диагональная парастиха всё время сохраняет своё направление и «размыкает» сонаправленную с ней парастиху исходной пары. При этом в регулярной конфигурации размыкается младшая, а в нерегулярной — старшая парастиха. Тем самым необходимым и достаточным условием возрастания

филлотаксиса по рекуррентному закону (1) является регулярность всякой вновь образовавшейся пары встречных контактных парастих.

**5.4.** Вывести *необходимое* условие регулярности несложно, но мы не станем этого делать, ограничившись следующим *достаточным* условием: **если в момент ветвления встречные контактные парастихи  $n$  и  $m$  имеют одинаковую ширину, образованная ими конфигурация является регулярной.** Действительно, в таком случае параллелограмм  $ABCD$  является ромбом, и из  $AM > AN$  следует, что  $\angle CAN > \angle CAM$ .

**5.5.** Для примера рассмотрим две модели возрастания филлотаксиса, удовлетворяющие *достаточному условию регулярности* (весьма правдоподобному физически!).

- В первой модели все зёрна представляют собой касающиеся жёсткие диски одинакового радиуса. В точке виртуального ветвления образуется локальный фрагмент гексагональной решётки, когда зерно касается шести своих соседей (рис. 11). За точкой ветвления сближение зёрен идёт по направлению 1–5, 2–4, что приводит к размыканию младшей парастихи.

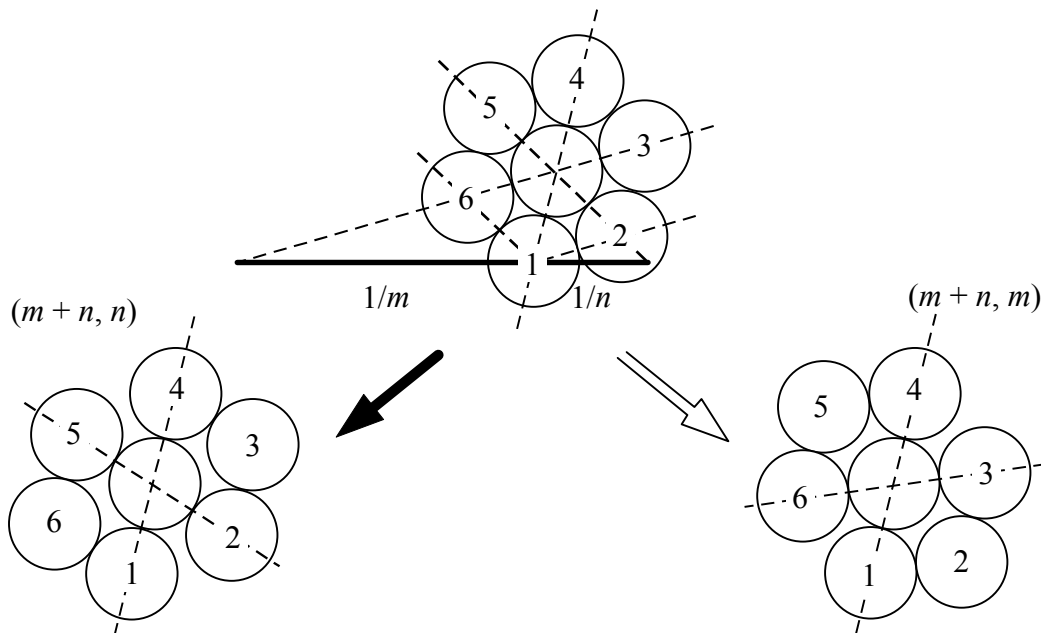


Рис. 11

- Во второй модели зёрна стремятся сохранять форму, максимально близкую к квадратной. В точке виртуального ветвления контактные парастихи ортогональны друг другу; между двумя последовательными точками ветвления *парастихи старшего семейства скользят друг по другу* (рис. 12). За точкой виртуального ветвления скольжение идёт вдоль старшей парастихи, что приводит к размыканию младшей парастихи.

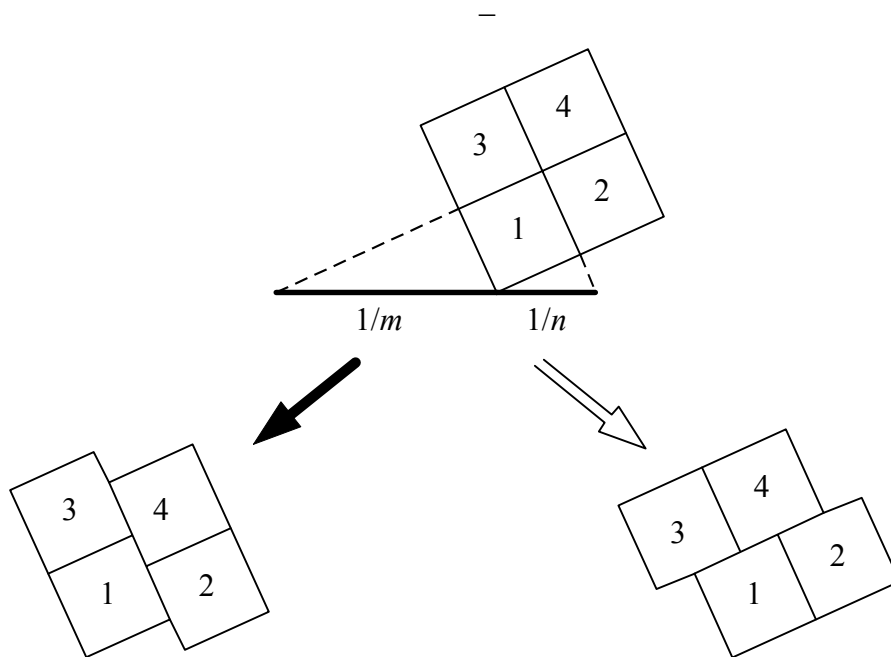


Рис. 12

## 6. «Нестандартный» филлотаксис

**6.1.** В природе иногда (в нескольких процентах от общего числа случаев) встречаются корзинки, у которых возрастание филлотаксиса описывается не последовательностью Фибоначчи, но другими числовыми последовательностями, также удовлетворяющими соотношению (1), однако начинающимися с других числовых пар. Рисунок спиралей в таких корзинках внешне почти неотличим от филлотаксиса Фибоначчи (рис.13), однако угол расхождения, определяемый с помощью формул (3), здесь существенно отличается от угла  $\phi$ .

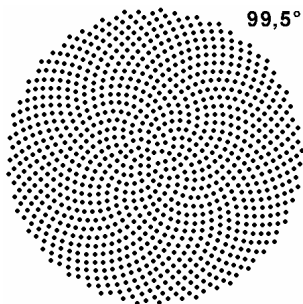
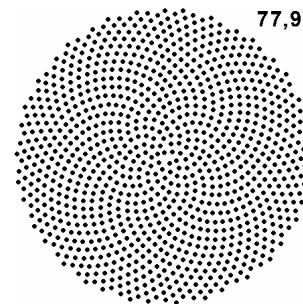
1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76...	1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97...
$\alpha = \frac{1}{3+1+1+1+\dots} = \frac{1}{3+\phi}$	$\alpha = \frac{1}{4+1+1+1+\dots} = \frac{1}{4+\phi}$
 99,5°	 77,9°

Рис. 13

Естественно предположить, что эти разновидности филлотаксиса возникают вместо филлотаксиса Фибоначчи в результате некоторого *сбоя в центральной области корзин-*

ки. Расхождение последовательных зёрен по радиальным направлениям оказывается иным, нежели в случае «стандартного» филлотаксиса Фибоначчи; однако далее включается механизм выстраивания регулярных конфигураций, и последующее возрастание филлотаксиса идёт в соответствии с универсальной формулой (1).

Существование «нестандартного» филлотаксиса является ещё одним сильным аргументом против глобальной кинематической модели в дополнение к тем, что уже были рассмотрены выше. В самом деле, было бы очень странно, если бы сбой в центральной области каждый раз «переключал» угол расхождения с абсолютно точно установленного значения  $\phi$  на другие (и вновь абсолютно точно установленные!) значения, вновь приводящие к оптимальной упаковке зёрен. Гораздо более естественным выглядит предположение о том, что зёрна выходят на нужные радиальные направления постепенно, в процессе саморегуляции, под действием своих соседей.

**6.2.** При смене пары встречных контактных парастих  $(m, n)$  на пару  $(n, m + n)$  образуется новое отношение индексов парастих:

$$(n + m)/n = 1 + 1/(n/m).$$

При этом «старое» отношение  $n/m$  «сдвигается этажом ниже», а «наверху» появляется новая единица. Если возрастание филлотаксиса всё время идёт с размыканием младшей контактной парастихи, эта операция будет воспроизводиться на каждом шаге:

$$1 + 1/(n/m), 1 + 1/(1 + 1/(n/m)), 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(n/m))), \dots$$

Но тогда естественно сделать вывод о том, что первые пары чисел в каждой из рассматривавшихся последовательностей являются «затравочными» для последующего единообразно действующего механизма. К примеру, для последовательности, начинающейся с пары чисел  $(1, 3)$ , роль затравки играет отношение  $3 : 1$ . А потом начинается процесс возрастания филлотаксиса, которому соответствует «наращивание» конечных непрерывных дробей

$$1 + 1/3 = 4/3, 1 + 3/4 = 7/4, 1 + 4/7 = 11/7, 1 + 7/11 = 18/11, \dots$$

## **7. Разворачивание непрерывной дроби «наружу» и античное учение о семенном логосе**

Разворачивание непрерывной дроби вонне от затравочного отношения замечательным образом схоже с реконструкцией, которую мы дали в работе [5] для пифагорейского учения о сторонних и диагональных числах, отношения которых рационально приближают иррациональное отношение диагонали квадрата к его стороне. Применительно к приближению золотого отношения парами соседних чисел Фибоначчи античные математики сказали бы, что два первых числа последовательности и обрабатывающий их алгоритм задают «семенное отношение ( $\sigma\tau\epsilon\rho\mu\alpha\tau\iota\kappa\omicron\varsigma \lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ ), по которому упорядочиваются фигуры».

Само слово « $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ » является в древнегреческом языке чрезвычайно многозначным. Это разумное начало, проявляющееся в способности приводить доводы и отчитываться

в содеянном, это разумная речь и составляющие её слова; а в математике этим словом называют отношение чисел и величин. В оборот античной философской мысли понятие «семенного логоса» было введено ранними стоиками, называвшими так воплощённое в живых существах начало, благодаря которому они могут расти и воспроизводить себя в потомстве: «После того, как семя высажено в землю, оно разворачивает собственные логосы, привлекая необходимую материю и преобразуя те логосы, которые оно содержит в себе» (SVF II 499); «Природа — это структура, выходящая из себя самой в согласии с семенными логосами, выполняющая и воспроизводящая их в назначенные сроки» (Diog. Laert, VII, 1587).

Связь пифагорейского учения о «семенном логосе» квадратного корня из двух и стоического учения о «семенном логосе» живых существ выглядит на первый взгляд не более чем интересной метафорой. И однако мы видим, как в теории филлотаксиса математическое учение пифагорейцев и натурфилософское учение стоиков теснейшим образом соединяются друг с другом, проясняя и исходный онтологический тезис Пифагора «всё есть число», и последующий гносеологический тезис, выдвинутый Иммануилом Кантом в «Математических началах естествознания»: «Во всяком частном учении о природе содержится ровно столько науки, сколько в нём содержится математики».

## 8. Модель спирального филлотаксиса с квадратными зёрнами

**8.1.** Исследуем, какую форму имеют скользящие парастихи в модели филлотаксиса с одинаковыми квадратными зёрнами (см. 5.4). Поскольку все парастихи имеют одинаковую ширину  $\delta$ , спирали с индексом  $n$  будут являться эвольвентами окружности радиуса  $R = n\delta/2\pi$  (рис. 14).

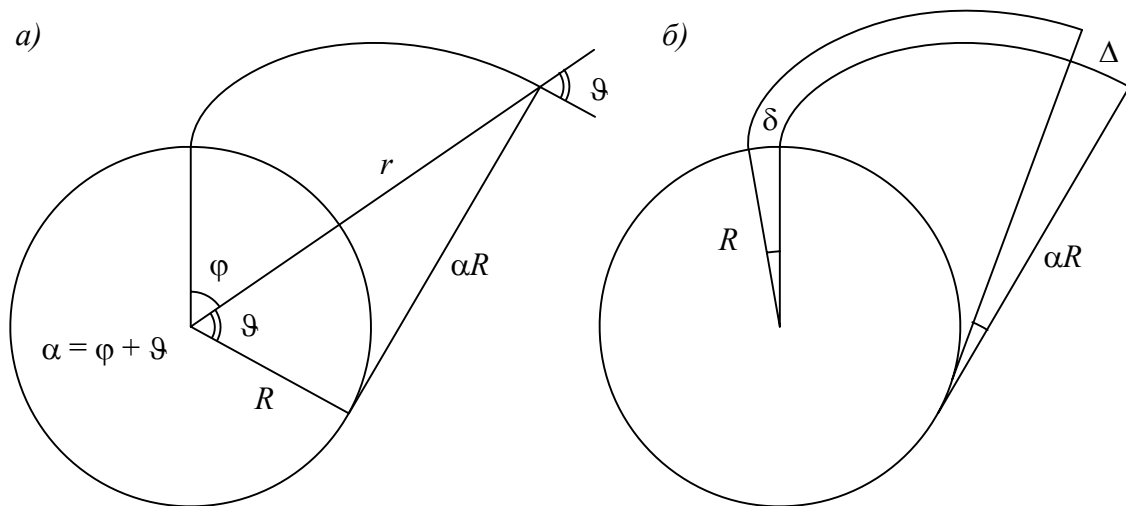


Рис. 14

В обозначениях рис. 13, *a* каждая спираль-эвольвента описывается уравнением

$$\varphi = \alpha - \arctg \alpha = \operatorname{tg} \vartheta - \vartheta,$$

где  $\alpha = \operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{(r/R)^2 - 1}$ .

8.2. Соответствующие двум последовательным точкам виртуального ветвления концы «скользящей» парастихи определяются из того условия, что угол  $\vartheta$  между направлением парастихи и радиусом удовлетворяет на нижнем и верхнем концах (рис. 15) соотношениям

$$\operatorname{tg}\vartheta^{\vee} = m/n \approx \Phi^{-1}, \operatorname{tg}\vartheta^{\wedge} = (m+n)/n \approx \Phi.$$

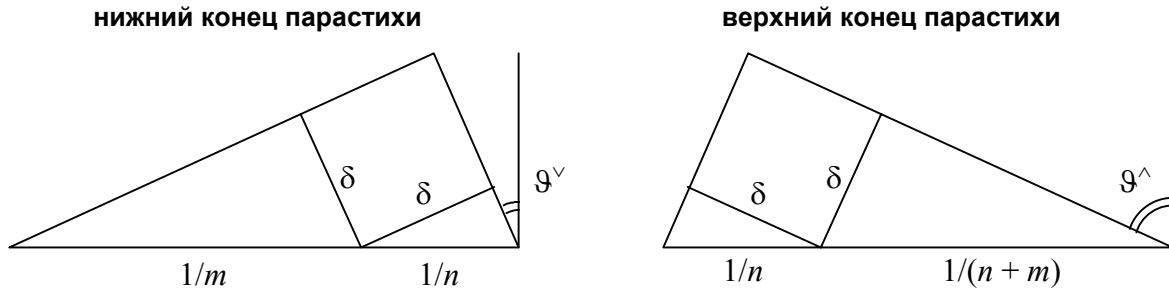


Рис. 15

Радиусы нижнего и верхнего концов скользящей парастихи и их отношение:

$$r^{\vee} = R\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta^{\vee}} \approx R\sqrt{1+\Phi^{-2}}, \quad r^{\wedge} = R\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta^{\wedge}} \approx R\sqrt{1+\Phi^2};$$

$$\frac{r^{\wedge}}{r^{\vee}} = \frac{\sqrt{1+\Phi^2}}{\sqrt{1+\Phi^{-2}}} = \Phi.$$

Азимутальные углы нижнего и верхнего концов парастихи и их разность:

$$\varphi^{\vee} = \Phi^{-1} - \operatorname{arctg}(\Phi^{-1}), \quad \varphi^{\wedge} = \Phi - \operatorname{arctg}(\Phi);$$

$$\varphi^{\wedge} - \varphi^{\vee} = 1 - \operatorname{arctg}(1/2) = 30,73^\circ.$$

Нам осталось показать, что относительный сдвиг зерна между нижним и верхним концами соседних скользящих парастих одного семейства в точности равен ширине парастихи  $\delta$ . Полный сдвиг соседних спиралей  $\Delta$  так относится к  $\delta$ , как радиус кривизны спирали  $\alpha R$  относится к  $R$  (рис. 13, б); поэтому  $\Delta = \delta\alpha = \delta\operatorname{tg}\vartheta$ . Тем самым относительный сдвиг зерна между нижним и верхним концами равен

$$\Delta^{\wedge} - \Delta^{\vee} = \delta(\operatorname{tg}\vartheta^{\wedge} - \operatorname{tg}\vartheta^{\vee}) = \delta(\Phi - \Phi^{-1}) = \delta.$$

Семейства скользящих контактных парастих, построенные по приведённым выше формулам, изображены на рис. 16.



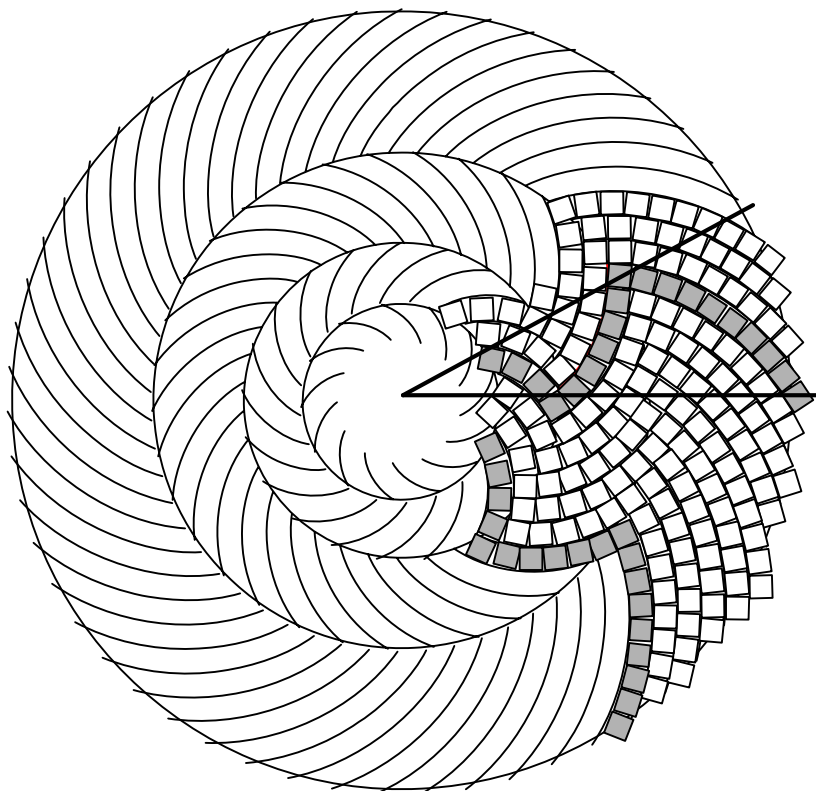


Рис. 16

## 9. Учебно-исследовательский семинар для старшеклассников

**9.1.** Одним из основных проектов виртуальной Лаборатории теоретической и прикладной эпистемологии (ЛТиПЭ) на сегодняшний день является учебный курс для старшеклассников «Применимая математика». Этот курс направлен на формирование у школьников представления о том, как и зачем создаются научные понятия, на воспитание у них умения математически исследовать явления реального мира, на развитие их мыслительных способностей и коммуникативных компетенций.

Чтобы научиться математике, надо решать математические задачи. Однако задача задаче рознь. Привычные задачи школьных учебников и математических олимпиад являются «закрытыми» в том смысле, что главное в них — получение правильного и окончательного ответа. Как только ответ получен, про задачу можно тут же забыть. И совсем другое дело — «открытые» задачи, исходное условие которых требует неоднократных переформулировок и уточнений, и процесс решения которых не исчерпывается найденным «ответом», поскольку приводит к постановке новых вопросов и задач, о существовании которых мы в начале и не подозревали.

Основной организационной формой курса «Применимая математика» является интенсивный учебно-познавательный семинар. Предлагаемые на семинаре задачи решаются обычно не индивидуально, а в рабочих группах, и результаты такой работы докладываются всем участникам семинара в стендовых докладах или на пленарных общих заседаниях. Многие школьники впервые понимают здесь, что о математике и её приложениях можно осмысленно размышлять и разговаривать.

**9.2.** Задача, в которой школьникам предлагается исследовать и объяснить явление филлотаксиса, является, на наш взгляд, весьма подходящей для проведения полноценного трёх- или даже четырёхдневного семинара-погружения. Организационные принципы такого семинара обсуждались нами в докладе [6], развёрнутое описание одного из семинаров этого проекта содержится в статье [7]; к этим работам мы и отсылаем заинтересованного читателя, предполагая, что если кто-либо соберётся организовать и провести учебно-исследовательский семинар по проблеме филлотаксиса, ему будет гораздо полезнее не воспроизвести готовую разработку, но осуществить свой проект самостоятельно. Мы же ограничимся несколькими замечаниями и советами.

1) Имеет смысл за неделю до семинара выдать его участникам подборку простых задач, приводящих к числам Фибоначчи, — чтобы сама эта последовательность и некоторые её свойства уже запечатлелись в памяти участников.

2) Основные усилия первого дня работы следует направить на внимательное наблюдение за спиральными структурами филлотаксиса на разнообразном материале. Во-первых, это комнатные растения, сосновые и еловые шишки, морские раковины и т. п. Во-вторых, это подборка фотографий цветов из семейства сложноцветных (подсолнух, ромашка, маргаритка и др.). Некоторые фотографии имеет смысл распечатать в увеличенном виде и вложить в папку, выдаваемую каждому участнику семинара. В-третьих, в эту же папку вкладывается несколько рабочих листов с крупно распечатанным модельным изображением корзинки (наподобие того, что изображено на рис. 5), на котором можно выделять цветом семена, проводить спирали и т. п.

3) Общая дискуссия первого дня посвящена переходу от наблюдений к первым попыткам объяснения явления. Как будут разворачиваться следующие два дня семинара, зависит как от составленного плана, так и от конкретных идей, выдвигаемых участниками семинара. Можно сказать заранее, что помимо соображений, изложенных в данной статье, будут рассматриваться и разные другие соображения, в том числе телеологические и эволюционные. К примеру, участники могут заметить, что листья на пятигранном стволе молочая образуют семейство встречных спиралей (2, 3), и предположить, что такое расположение обеспечивает наилучший доступ света к листьям.

4) На общей дискуссии второго дня важно сделать предварительную сборку результатов, выделить дальнейшие направления исследования и сформировать группы третьего дня по этим направлениям.

**9.3.** Устройство для моделирования расположения листьев в цилиндрическом филлотаксисе изображено на рис. 17. На подставке закреплена вертикальная труба высотой около 50 см и диаметром около 10 см. На поверхность трубы нанесена вертикальная градусная разметка. На тубус плотно (но не туго) надеваются кольца из прозрачной пластмассы; высота каждого кольца около 1 см. В каждом кольце проделано отверстие, в которое вставляется «черенок листа». В черенках могут закрепляться «листья» разных цветов (на рисунке не показаны).

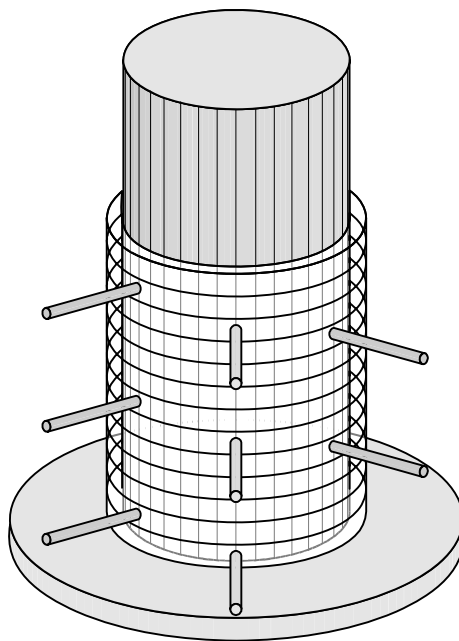


Рис. 17

**9.4.** Семинар приобретает дополнительные измерения, если его участникам обеспечен выход в Интернет. Важнейшими сетевыми ресурсами для нашей темы в настоящее время являются:

- сайт «Филлотаксис» (Smith College, штат Массачусетс, США):  
<http://www.math.smith.edu/~phyllo/>
- сайт «Числа Фибоначчи», поддерживаемый Роном Кноттом (Великобритания):  
<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/>
- программа для моделирования филлотаксиса, составленная Брайаном ДиЛорето:  
<http://atomicconcept.united.net.kg/phylotaxis.htm>

### **Замечание**

Настоящая статья была посвящена в первую очередь поискам механико-геометрических объяснений закона регулярного возрастания филлотаксиса. По этой причине в ней не были отражены интереснейшие математические подходы, в которых возрастание филлотаксиса рассматривается как геометрическое преобразование в псевдоевклидовой геометрии Минковского (О. Я. Боднар, [1]) или неевклидовой геометрии Лобачевского (Л. С. Левитов, [12], [13]).

### **Благодарности**

Я выражаю свою признательность Дмитрию Вейзе (Москва), Леониду Левитову (МИТ) и Константину Метлову (Прага) за участие и ценные замечания, высказанные на завершающей стадии написания этой статьи. Пользуясь случаем, я сердечно благодарю Настю Щетникову (ЛТИПЭ), вместе со мной проводившую учебно-познавательный семинар по проблеме филлотаксиса в школе №11 г. Мыски Кемеровской обл., а также

всех участников и организаторов этого семинара. И ещё: «Gracias a la vida que me ha dado tanto», как пела когда-то Виолетта Парра.

## Приложение: Непрерывные дроби <sup>1</sup>

**1. Гауссовы скобки.** Запишем общую непрерывную дробь в виде

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots \frac{1}{q_n}}}. \quad (\text{П1})$$

Если преобразовать эту непрерывную дробь в обыкновенную, её числителем и знаменателем окажутся суммы различных произведений чисел  $q_0, q_1, \dots, q_n$ . Обозначим получившийся числитель через  $[q_0, \dots, q_n]$  (это обозначение было введено К. Ф. Гауссом, поэтому его называют *гауссовыми скобками*). Нетрудно видеть, что знаменателем дроби  $q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots \frac{1}{q_n}}}$  будет числитель дроби  $q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots \frac{1}{q_n}}$ , поэтому

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots \frac{1}{q_n}}} = \frac{[q_0, \dots, q_n]}{[q_1, \dots, q_n]}. \quad (\text{П2})$$

Представив дробь  $q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots \frac{1}{q_n}}$  в виде отношения скобок  $\frac{[q_1, \dots, q_n]}{[q_2, \dots, q_n]}$ , мы можем записать, что

$$\frac{[q_0, \dots, q_n]}{[q_1, \dots, q_n]} = q_0 + \frac{[q_2, \dots, q_n]}{[q_1, \dots, q_n]}.$$

Если привести правую часть этого уравнения к общему знаменателю, равенство числителей даст рекуррентное соотношение

$$[q_0, \dots, q_n] = q_0[q_1, \dots, q_n] + [q_2, \dots, q_n], \quad (\text{П3})$$

позволяющее шаг за шагом вычислять значение функции «квадратная скобка», начиная с  $[ ] = 1$ ,  $[q_n] = q_n$ ,  $[q_{n-1}, q_n] = q_{n-1}[q_n] + [ ]$ .

**2. Правило Эйлера.** Чтобы вычислить  $[q_0, \dots, q_n]$ , надо составить сумму, в которую входит *произведение всех элементов, затем всевозможные произведения, которые можно получить, опустив любую пару последовательных элементов, затем произведения, получающиеся отбрасыванием любых двух пар последовательных элементов, и так далее. Если  $n$  нечётно, то на последнем шаге отбрасыванием всех элементов мы получим пустое произведение. Его значение принимается по определению равным 1.*

Правило Эйлера доказывается по индукции с помощью соотношения (П3). В самом деле, примем, что для скобок, стоящих в правой части (П3), правило Эйлера выполняется. Тогда выражение  $[q_2, \dots, q_n]$  даст нам все такие произведения  $q_0, q_1, \dots, q_n$ , в которых опускается пара  $q_0, q_1$ . А выражение  $q_0[q_1, \dots, q_n]$  в точности равно сумме тех произведений  $q_0, q_1, \dots, q_n$ , в которых пара  $q_0, q_1$  не опускается.

<sup>1</sup> Материалы этого приложения излагаются в основном по книге [2].

Из правила Эйлера сразу же следует, что значение функции «квадратная скобка» не изменится, если переписать все элементы в обратном порядке:

$$[q_0, \dots, q_n] = [q_n, \dots, q_0]. \quad (\text{П4})$$

Тем самым оказывается, что кроме соотношения (П3) имеется ещё одно соотношение, выражающее скобку  $[q_0, \dots, q_n]$  через скобки, в которых опущены последний и два последних элемента:

$$[q_0, \dots, q_n] = q_n[q_0, \dots, q_{n-1}] + [q_0, \dots, q_{n-2}]. \quad (\text{П5})$$

**3. Подходящие данной непрерывной дроби.** Значение подходящей дроби, которое получится, если оборвать исходную дробь на  $q_m$ , равно  $q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_m}}} = \frac{[q_0, \dots, q_m]}{[q_1, \dots, q_m]}$ .

Для упрощения обозначений положим

$$A_m = [q_0, \dots, q_m], \quad B_m = [q_1, \dots, q_m]. \quad (\text{П6})$$

Соотношение (П5) в новых обозначениях принимает форму

$$A_m = q_m A_{m-1} + A_{m-2}. \quad (\text{П7})$$

То же соотношение, если отбросить в нём  $q_0$ , показывает, что

$$B_m = q_m B_{m-1} + B_{m-2}. \quad (\text{П8})$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{[q_0, \dots, q_m]}{[q_0, \dots, q_{m-1}]} = \frac{[q_m, \dots, q_0]}{[q_{m-1}, \dots, q_0]} = q_m + \frac{1}{q_{m-1} + \dots + \frac{1}{q_0}}; \quad (\text{П9})$$

аналогичное соотношение с отбрасыванием  $q_0$  записывается и для  $\frac{B_m}{B_{m-1}}$ .

Числители и знаменатели двух последовательных подходящих дробей связаны так называемым «фундаментальным соотношением»

$$A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m = (-1)^{m-1}. \quad (\text{П10})$$

Чтобы доказать его, подставим  $A_m$  и  $B_m$  из соотношений (П7) и (П8):

$$A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m = (q_m A_{m-1} + A_{m-2}) B_{m-1} - A_{m-1} (q_m B_{m-1} + B_{m-2}) = A_{m-2} B_{m-1} - A_{m-1} B_{m-2}.$$

Если обозначить  $A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m = D_m$ , получается, что  $D_m = -D_{m-1}$ . Непосредственным вычислением устанавливаем, что  $D_1 = 1$ . Поэтому  $D_m = (-1)^{m-1}$ .

**4. Уравнение  $ax - by = 1$**  (где  $a$  и  $b$  — взаимно простые числа). Если обозначить наименьшее решение уравнения

$$ax - by = 1 \quad (\text{П11})$$

через  $(x_0, y_0)$ , то его общее решение будет задаваться формулой  $x = x_0 + bt, y = x_0 + at$ .

Что касается наименьшего решения, то оно находится с помощью следующей конструкции. Представим отношение  $a/b$  в виде непрерывной дроби

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots \frac{1}{q_n}}}$$

Последняя подходящая дробь  $\frac{A_n}{B_n}$  равна самой дроби  $\frac{a}{b}$ . Предшествующая ей подходящая дробь  $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$  в виду (П9) удовлетворяет соотношению  $aB_{n-1} - bA_{n-1} = (-1)^{n-1}$ . Если  $n$  нечётно, то это — рассматриваемое уравнение. Если  $n$  чётно, изменим непрерывную дробь, представив последний элемент  $q_n$  в виде  $(q_n - 1) + \frac{1}{1}$ . Новая непрерывная дробь имеет на один член больше, чем старая, поэтому числитель и знаменатель её предпоследней подходящей дроби дадут решение уравнения (П11).

### Литература

1. БОДНАР О. Я., Геометрия филлотаксиса, *Доклады АН Украины* №9 (1992) 9–14.
2. ДЭВЕНПОРТ Г., *Высшая арифметика* (М., Наука, 1965).
3. КОКСТЕР Г. С. М., *Введение в геометрию* (М., Наука, 1966).
4. ЛЕВИТОВ Л. С., Числа Фибоначчи в ботанике и физике: филлотаксис, *Письма в ЖЭТФ* **54** (1991) 542–545.
5. ЩЕТНИКОВ А. И., Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие «семенного логоса», *Математическое образование* №1(8) (1999) 84–94.
6. ЩЕТНИКОВ А. И., ЩЕТНИКОВА А. В., Учебный семинар «Как решать незнакомую задачу», *Труды конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения Алексея Андреевича Ляпунова* (Новосибирск, ОИИ СО РАН, 2001) 773–780.
7. ЩЕТНИКОВ А. И., ЩЕТНИКОВА А. В., Учебно-исследовательский семинар «Распределение первых значащих цифр», *Математическое образование* №2(21) (2002) 107–123.
8. ADLER I., A model of contact pressure in phyllotaxis, *J. Theor. Biol.* **45** (1974) 1–79.
9. ADLER I., VARABE D., JEAN R. V., A history of the study of phyllotaxis, *Annals of botany* **80** (1997) 231–244.
10. DOUADY S., COUDER Y., Phyllotaxis as a physical self-organized growth process, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 2098–2101.
11. JEAN R. V., *Phyllotaxis: A systemic study in plant morphogenesis* (Cambridge Univ. Press, 1995).
12. LEE H. W., LEVITOV L. S., Universality in phyllotaxis: a mechanical theory, *Symmetry in plants* (Singapore, World Scientific, 1998) 619–653.
13. LEVITOV L. S., Energetic approach to phyllotaxis, *Europhys. Lett.* **14** (1991) 533–539.
14. LEVITOV L. S., Phyllotaxis of flux lattices in layered superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 224–227.
15. RIVIER N., OCCELLI N., PANTALONI J., LISSOWSKI A., Structure of Bénard convection cells, phyllotaxis and crystallography in cylindrical symmetry, *J. Physique* **45** (1984) 49–63.