Преподавание математики в историческом контексте

Щетников А. И., Щетникова А. В.

1. Как соотносятся между собой преподавание математики и её история?

1.1. Математика в её отношении к историческому времени может рассматриваться двояко. С одной стороны, мы можем видеть в ней систему связанных между собой *вечных вневременных фактов*. Деятельность математиков сводится к открытию этих фактов и к прояснению дедуктивных связей между ними; соответственно история математики представляет собой «эволюционный прогресс, по ходу которого математика становится лучше и лучше; при этом подразумевается, что математика прошлого постепенно отвергается как неуместная, неточная и имеющая изъяны» [6, *79*].

С другой стороны, мы можем смотреть на математику как на человеческую деятельность, разворачивающуюся в культурном времени. Эта вторая точка зрения не отменяет собой первую, но дополняет её, открывая возможности для конструктивного обсуждения логики открытий ([2], [4]), математизации и моделирования. И она позволяет нам увидеть, что в деятельности математиков, открывающих новое знание, и в деятельности преподавателей и учащихся, имеющих дело с уже открытым знанием, есть нечто общее, поскольку и в этой последней деятельности элемент содержательного общения, открытия и творчества оказывается очень важным, если только мы стремимся к осмысленности учебного процесса.

1.2. Традиционная форма преподавания математики такова, что основные математические курсы являются по существу своему внеисторическими, а экскурсы в историю прилагаются к ним «для общего познавательного развития», но не в целях собственно математического образования. Так в педагогическом институте история математики читается обычно на последнем курсе; тем самым молчаливо подразумевается, что история ничего не может дать для освоения самого предмета.

Однако современная математика слишком абстрактна, слишком оторвалась от своих исторических корней, чтобы быть легко понятной и хорошо усваиваемой. Постоянное изменение предмета в сторону всё большей его абстрактности вкупе с устоявшимся представлением о его неизменности делают ситуацию в математическом образовании всё более иррациональной. Мысль о необходимости реформы математического образования постоянно обсуждается людьми, входящими в математическое сообщество; однако число продуктивных идей в этой сфере весьма невелико ([8], [9]). И возможно, ключ к решению проблемы состоит в том, чтобы изменить точку зрения на соотношение математики и её истории, и начать систематически рассматривать происхождение математических идей и разыгрывать драму их возникновения не только в факультативных курсах истории математики, но (и прежде всего!) в основных математических курсах.

Как указывает Жан-Пьер Фрейдельмейер, «взгляд назад на историю позволит преподавателю математики найти в ней исходные задачи, и тем самым он сможет вернуть смысл математическим терминам и понятиям, которые часто вычищаются математиками из подтекста, поскольку они слишком конкретны или слишком интуитивны, и слишком неоднозначны для их целей. Он также будет способен показать ступени создания фундаментальных понятий и методов, и помочь своим учащимся выделить их критический смысл и осознать необходимость строгости, показав, как некоторые решения оказывались неудовлетворительными. Таким образом его учащиеся смогут увидеть необходимость *этого* определения или *этой* теоремы» [8, *61*].

2. Метод доказательств и опровержений в преподавании анализа

2.1. Базу для содержательного приложения результатов историко-математических исследований к преподаванию математики даёт *метод доказательств и опровержений*, введённый в эпистемологию Имре Лакатосом. На примере теоремы Декарта-Эйлера о многогранниках Лакатос показал, что «строгие» математические понятия вырастают из попыток доказать первоначальную «наивную» догадку, относящуюся к тому или иному положению дел. Последовательно выдвигаемые доказательства и их опровержения, как правило, полностью «уничтожают» основные первоначальные понятия (в примере Лакатоса — наивное понятие многогранника), и заменяют их *понятиями, рождёнными доказательством*. Тем самым смысл доказываемого (*что*, собственно говоря, доказывается) открывается по-настоящему только в процессе доказательства и анализа доказательства. Согласно Лакатосу, «неформальная квазиэмпирическая математика не развивается как монотонное возрастание количества несомненно доказанных теорем, но только через непрерывное улучшение догадок при помощи размышления и критики, при помощи логики доказательств и опровержений» [2, *15*].

Фундаментальные теоремы современного математического анализа (и других разделов современной математики) исторически были осмыслены и сформулированы лишь через несколько столетий после возникновения самих этих дисциплин. Работа по обоснованию основных понятий анализа оказалась весьма тонкой и сложной, и она привела к сильному переосмыслению самих этих понятий. К примеру, Бернард Больцано и Огюст Луи Коши дали определение непрерывной функции с целью зафиксировать в нём интуитивное представление о непрерывной линии (то есть такой линии, которую можно провести, не отрывая карандаша от бумаги); но после того, как это определение было выдвинуто, открылась возможность строить такие функции, которые очень слабо подходили к исходному воззрению (а именно, функции, разрывные всюду; непрерывные функции, не имеющие производных ни в одной точке, и т. п.) (см. [3], [12, *12–24*]).

2.2. С чем же сталкиваются первокурсники, приступающие сегодня к изучению математического анализа? Знакомясь с объектами, не согласующимися с их интуитивным представлением, они испытывают своего рода шок. К примеру, со школы у первокурсника имеются некоторые представления, связанные со словом «функция». Эти представления похожи на те интуиции, которые имелись у математиков XVIII века: функция — это формула, в которой знаками арифметических действий соединены числа и «иксы», а также содержатся такие значки, как sin или log. График такой функции обычно является гладкой непрерывной линией, иногда уходящей в бесконечность. Изредка встречаются изломы (если в формуле встречается знак «модуль») и скачки. В результате, узнав про *всюду разрывную* функцию Дирихле, многие первокурсники спрашивают неуверенно: «А разве это — *функция*?» Если их отослать к определению, они посмотрят, подумают и скажут: «Да, получается, что *это* — функция...». Но ведь знакомясь с определением, излагаемым формально, они такого шока не испытали — а значит, не поняли, *о чём* оно говорит и *зачем* оно так сформулировано.

Что касается самых первых теорем курса анализа, то их утверждения очевидны настолько, что многие студенты недоумевают: а зачем это вообще доказывать? Но доказательства этих теорем — весьма изощрённые и нетривиальные. Тем самым в сознании студента доказательство отрывается от теоремы, вместо того чтобы быть её органической частью, в которой только и раскрывается действительное содержание теоремы. Поэтому смысл теоремы остаётся не понятым; в дальнейшем начинает ускользать и смысл предмета в целом. Как указывает Лео Роджерс, «стандартный способ изложения зачастую производит на студентов впечатление полной бессмыслицы, поскольку они ничего не знают ни о причинах, по которым преподаватель выбрал такой подход, ни о том, чем руководствовались математики, когда ставили свои задачи» [6, *74*].

2.3. С эпистемологической точки зрения, фундаментальные понятия анализа могут быть действительно **усвоены** лишь в контексте *рациональной реконструкции истории математических идей*. Смысл понятия раскрывается, если восстановлены и прожиты основные этапы его становления: от первичных интуитивных представлений, через попытки оформить эти представления в «строгие» определения и теоремы, к их дальнейшей критике и исправлению путём предъявления *парадоксальных примеров* и *контрпримеров*, а в итоге — к переосмыслению собственных представлений и получению нового знания.

Ещё сто лет назад Анри Пуанкаре писал об этом так: «Наши предки думали, что знают, что такое дробь, непрерывность, площадь кривой поверхности; лишь мы заметили, что они этого не знали. Точно так же наши ученики думают, что они это знают, когда уже принимаются серьёзно за изучение математики. Если я, без предварительной подготовки, скажу им: “нет, вы этого не знаете, вы не понимаете того, что вам казалось понятным; я должен доказать вам то, что вы считаете очевидным”, — и если я в своих доказательствах буду опираться на посылки, которые им кажутся менее очевидными, чем заключения, то что подумают эти несчастные? Они подумают, что математическая наука есть не что иное, как груда бесполезных умствований; и они либо почувствуют к ней отвращение, либо будут забавляться ею как игрою, и в умственном отношении уподобляться греческим софистам. Напротив, позже, когда ученик освоится с математическим суждением и ум его созреет в этой продолжительной работе, сомнения станут возникать сами собой, и тогда ваше доказательство будет своевременным. Оно разбудит новые сомнения, и вопросы предстанут перед юношей в той последовательности, в какой они представлялись нашим отцам; и это будет продолжаться до тех пор, пока он не разовьётся в такой мере, что его будут удовлетворять только совершенно строгие определения. Недостаточно ещё во всём сомневаться, нужно знать, почему возникает сомнение» [5, *359*].

2.4. Наши первые попытки вводить на основе метода доказательств и опровержений систему понятий математического анализа, связанных с идеей *непрерывности функций и числовых областей*, представляются нам весьма продуктивными. Эти попытки осуществлялись в форме семинара в режиме погружения. Мы думаем, что такой семинар следовало бы проводить перед началом обучения; он выполнил бы функцию перехода от школы к институту. Пока такой переход не явлен, многие студенты продолжают не то что думать, но и вести себя по-школьному. А время идёт!

Стартовой задачей семинара послужила известная задача про паломника, который в первый день поднимается на гору, а во второй день спускается с неё, причём движение в оба дня начинается и завершается в одно и то же время; требуется доказать, что в какой-то точке пути паломник находился в одно и то же время суток в оба дня. Задача решается с помощью удачной догадки: нужно изобразить зависимость высоты подъёма от времени на графике, и совместить графики движения за оба дня. Поскольку графики непрерывны, то они должны где-то пересечься (рис. 1).

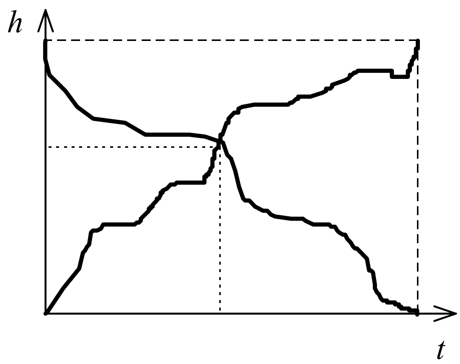

Рис. 1

От обсуждения существенных особенностей движения («паломник проходит одну за другой все точки, ведь он не способен к нуль-транспортировке») мы переходим к формулировке задачи на языке математики: пусть функция $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и принимает значения $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$; требуется доказать, что существует такая точка $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = 0$. Первые попытки доказывать это утверждение «в лоб» упираются в необходимость дать *определение* непрерывной функции (хорошо, если ведущий семинара поставит также вопрос о том, что это значит: «дать определение»).

Путь к определению идёт через отрицание: *непрерывной на отрезке* будет такая функция, которая нигде на этом отрезке не имеет разрывов. Разрыв функции в точке определяется на неформализованном ε-δ языке с привлечением соответствующих картинок: при убывающе малом изменении аргумента функция испытывает конечный скачок значения. Попутно мы определяем вспомогательное понятие функции, *непрерывной в точке*.

Построенные понятия и выдвинутые на их счёт догадки могут быть проверены на объём и прочность с помощью набора парадоксальных примеров и контрпримеров. Может показаться, что точки разрыва всякой функции обязательно отделены одна от другой интервалами непрерывности; это мнение опровергается примером всюду разрывной функции. Может также показаться, что всякая функция, будучи непрерывной в некоторой точке, обязательно окажется непрерывной также и в некоторой окрестности этой точки; контрпримером к этому мнению служит функция, непрерывная в единственной точке. Полезно также рассмотреть более сложный пример функции, разрывной во всех рациональных и непрерывной во всех иррациональных точках (см. [1], [12]).

Теперь можно вернуться к решению основной задачи. Интуиция непрерывности говорит нам, что искомая точка x_0 обязательно существует; но её ещё предстоит *«поймать»*, *опираясь на определение* непрерывной функции. Опыт уже проведённых семинаров показывает, что учащиеся могут попытаться «поймать» эту точку двумя способами (и дело ведущего — помочь им оформить эти способы). *Первый способ* связан с последовательным движением от одного из концов отрезка; он основан на том, что мы всегда можем отойти от конца отрезка на такое расстояние, что знак функции ещё не изменится. Но ведь рано или поздно этот знак должен измениться! Оформление этого способа приводит к идее доказательства, основанной на понятии верхней грани множества (Рихард Дедекинд). Во *втором способе* используется метод дихотомии, когда искомая точка охватывается системой вложенных отрезков (Бернард Больцано, Георг Кантор). И после того, как эта точка «схвачена», нам остаётся показать, что рассматриваемая функция не может принять в ней ни положительного, ни отрицательного значения; следовательно, это значение равно нулю.

Заключительная часть семинара связана с выделением базовых лемм, на которых основываются построенные доказательства. Одну из этих лемм следует принять за *аксиому о непрерывности системы действительных чисел*; тогда остальные будут ближайшими следствиями этой первой леммы. Можно проследить по разным учебникам, что так и происходит: один автор принимает одну аксиому о непрерывности системы действительных чисел, другой — другую. Но все эти аксиомы эквивалентны друг другу. Особенно интересно заметить, что каждая из этих лемм превращается в мощное орудие для дальнейших доказательств различных теорем.

3. Понятие параллельных прямых в школьном курсе геометрии

3.1. Ещё одно направление наших работ, в котором историко-математические и эпистемологические исследования интегрированы с прикладными педагогическими разработками, связано с проектом учебного курса геометрии для 7–11 класса средней школы ([10], [11]). Одна из основных идей этого курса состоит в том, чтобы те или иные блоки геометрических знаний осваивались учащимися не в порядке формального следования от аксиом ко всё более и более сложным теоремам, но путём сведения теорем *неочевидного* содержания к элементарным геометрическим фактам.

Систематическую часть курса геометрии предлагается открыть комплексом, связанным с теоремой о сумме углов треугольника и понятием параллельных прямых. Теорема о том, что *сумма внутренних углов всякого треугольника равна развёрнутому углу*, представляет собой утверждение неочевидного характера, приводимое к очевидности с помощью простого дополнительного построения (рис. 2). Если мы проведём через вершину A произвольного треугольника ABC прямую DE, параллельную стороне BC, то угол DAB будет равен углу ABC, а угол EAC будет равен углу ACB, и поэтому сумма углов треугольника ABC будет равна сумме углов DAB, BAC, CAE, то есть будет равна развёрнутому углу DAE.

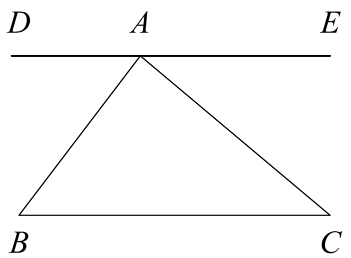

Рис. 2

Именно так эту теорему доказывали математики древней пифагорейской школы (см. [6, *474*]). Данное доказательство воспринималось сперва как самодостаточное, опирающееся на очевидные факты и не требующее дальнейшего обоснования. Понятие параллельных прямых выступало в нём как *эпистемологический синкрет* (ср. [13, *258*]), в котором были слиты воедино различные свойства: идти рядом на одном расстоянии, не встречаться при продолжении, пересекать секущую под равными накрестлежащими углами и пр.

После того, как теорема о сумме углов треугольника доказана, мы можем на её основе развернуть *конструктивную* или *синтетическую* линию рассматриваемого блока геометрических знаний. В неё входят теоремы о сумме углов четырёхугольника и произвольного многоугольника, понятие о внешнем угле многоугольника (в том числе — об отрицательном внешнем угле при невыпуклой вершине), теоремы о сумме углов пятиконечной звезды и произвольного звёздчатого многоугольника.

3.2. Обращение же к основаниям предъявленного доказательства задаёт движение по противоположной (не вширь, а вглубь) *аналитической* линии. Первая проблема появляется вместе с вопросом: «А как вы будете *проводить* прямую *DE*, чтобы она была параллельна *BC*?» Если ответить: «Мы проведём её так, чтобы угол *DAB* был равен углу *ABC*», то тогда возникает ещё один вопрос: «А откуда вы знаете, что и угол *EAC* при этом будет равен углу *ACB*?» Если последует ответ: «Но ведь *BC* и *DE* — параллельные прямые», то следующий вопрос будет таким: «А что вы называете параллельными прямыми? Какое *определение* параллельных прямых вы даёте?» И как только параллельные прямые определяются как *непересекающиеся при продолжении*, тут же выставляется требование связать свойства прямых *не пересекаться при продолжении* и *образовывать с секущей равные накрестлежащие углы* двумя взаимно обратными теоремами.

Основываясь на исторической реконструкции перехода от синкретического *представления* о параллельных к детализованному *понятию*, мы хотели бы попробовать разыграть этот переход на уроках геометрии. Мы полагаем, что при правильной организации учебной коммуникации учащиеся 7 класса способны:

(1) вычленить из набора своих представлений о параллельных прямых *определение параллельных прямых как не встречающихся при их продолжении*;

(2) установить, что теорема о сумме углов треугольника основывается на двух взаимно обратных теоремах: *если две прямые пересекают секущую под равными накрестлежащими углами, то они не встречаются при их продолжении* (эта теорема нужна для построения параллельных прямых) и *если две прямые не встречаются при их продолжении, то они пересекают секущую под равными накрестлежащими углами*.

3.3. Попытки доказать две вышеназванные теоремы приводят нас в самое ядро рассматриваемого комплекса геометрических знаний. Содержательным основанием для доказательства первой теоремы (равенство накрестлежащих углов → параллельность) служит идея *отсутствия достаточного основания*: почему рассматриваемые прямые должны пересечься скорее с одной стороны от секущей, нежели с другой? Формализация этой идеи приводит к построению первого в курсе *доказательства от противного* и к вычленению аксиомы о том, что *через две различные точки проходит только одна прямая*.

Эта же теорема может быть доказана и на основе вспомогательной теоремы о том, что *внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного* (именно так она доказывается в *Началах* ЕВКЛИДА). Однако мы полагаем, что вычленение такой вспомогательной теоремы и само её доказательство будут представляться учащимся более искусственными, нежели «симметрийное» рассуждение.

Что касается доказательства второй теоремы (параллельность → равенство накрестлежащих углов), то оно должно основываться на принятии какой-либо аксиомы о параллельных прямых, эквивалентной пятому постулату ЕВКЛИДА. Думается, что с дидактической точки зрения будет полезным, если учитель сперва продемонстрирует доказательство, основанное на аксиоме о том, что *через точку вне прямой проходит только* *одна прямая, параллельная данной*, а затем обсудит с учащимися *эквивалентность* этой аксиомы некоторым другим утверждениям о параллельных прямых (таким, как *если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой*, или *если прямая проходит через точку внутри угла, то она пересекает по крайней мере одну из сторон этого угла*). Во-первых, у учащихся появится представление о свободе выбора аксиом в рамках одной и той же системы фактов; во вторых, они получат возможность попрактиковаться в построении косвенных доказательств.

Библиография

1. ГЕЛБАУМ Б., ОЛМСТЕД ДЖ. *Контрпримеры в анализе*. М.: Мир, 1967.
2. ЛАКАТОС И. *Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы*. М.: Наука, 1967.
3. *Непрерывность функций и числовых областей: Б. Больцано, Л. О. Коши, Р. Дедекинд, Г. Кантор*. Новосибирск: АНТ, 1997.
4. ПОЙА Д. *Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание*. М.: Наука, 1970.
5. ПУАНКАРЕ А. *О науке*. М.: Наука, 1983.
6. РОДЖЕРС Л. Историческая реконструкция математического знания. *Математическое образование*, 2001, №1(16), с. 74–85.
7. *Фрагменты ранних греческих философов. Часть I: От эпических космогоний до возникновения атомистики*. Подг. изд. А. В. Лебедев. М.: Наука, 1989.
8. ФРЕЙДЕЛЬМЕЙЕР Ж.-П. Что история говорит нам о преподавании анализа? *Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики: историко-математический и историко-методический аспекты.* Вып. 4. Калуга, Изд. КГПУ, 2002, с. 45–62.
9. ШЕХОВЦОВ С. Г. Математическое и естественнонаучное образование в современной России: тенденции и перспективы. *Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*. М.: МГУ, 2000. Ч. II, с. 239–253.
10. ЩЕТНИКОВ А. И. Материалы к проектированию курса геометрии для средней школы. *Математическое образование*, №3 (14), 1999, с. 35–42.
11. ЩЕТНИКОВ А. И. *Геометрия: Учебник для 7–11 классов средней школы*. Новосибирск: АНТ, 2000.
12. ЩЕТНИКОВ А. И., ЩЕТНИКОВА А. В. *Роль контрпримеров в развитии основных понятий математического анализа*. Новосибирск: АНТ, 1999.
13. STENIUS E. Foundations of mathematics: ancient Greek and modern. *Dialectica*, **32**, 1978, p. 255–290.