Что история говорит нам о преподавании анализа [1]

Жан-Пьер Фрейдельмейер

Если вы хотите, чтобы ваша математика имела смысл, вы должны отказаться от достоверности. Если вы хотите сохранить достоверность, избавьтесь от смысла. Вы не можете иметь и то и другое.

И. Лакатос, *Доказательства и опровержения*

Резюме. Реформы в преподавании математики, происходившие во Франции на протяжении последних тридцати лет, более всего касались преподавания анализа. Эти реформы пытались, и совершенно безуспешно, примирить между собой два императива: требование *строгости*, общее для всего математического образования, и педагогическую потребность в понимании и передаче смысла. Но поскольку смысл содержит идеи, связанные с интуицией бесконечности (иррациональные числа, бесконечно малые и бесконечно большие величины, пределы, ...), и эта интуиция необходима для действительного понимания смысла, тем самым возникают противоречия, в результате которых полностью постичь концептуальное богатство идей, развитых математиками в области анализа, не удаётся. Решение вопроса, предлагавшееся в последние годы, знаменовало полный отказ от идеи осмысленного обучения в пользу методов, по существу являющихся числовыми, но создающими иллюзию строгости. Однако такого рода строгость встречается только на отдельных островах, и она нисколько не способствует какому-либо пониманию общего структурного смысла, отдавая предпочтение чисто формальным правилам. Нам представляется возможным другое решение вопроса, сохраняющее смысл и одновременно упорядочивающее математическое мышление студентов связным и строгим образом: это решение состоит в помещении математики и её преподавания в исторический контекст. На этом пути смысл и строгость в их отношении друг к другу перестают быть абсолютными, противоречивыми или недостижимыми; но они возникают в живом и динамичном взаимодействии, вместе с математической интуицией учащихся.

1. Основные изменения в программах преподавания анализа в лицее

Анализ программ преподавания анализа в лицеях, начиная с 1945, чётко выявляет три периода.

1) *До 1961* слово «анализ» в программах не встречается, хотя в них имеются темы, которые мы сегодня можем поместить под этот заголовок: исследование функций, производные и т. п. Но эти темы находились в разделе алгебры и тригонометрии. Эта ситуация продолжает практику, типичную для программ и учебников всего XIX века и дово-

---

[1] Оригинальный текст статьи: Freidelmeyer J.-P. What history has to say to us about the teaching of analysis. *Teaching mathematics: the relationship between knowledge, curriculum and practice*. Topiques Ĭditions, 1996, p. 109–122. Публикация перевода: Фрейдельмейер Ж.-П. Что история говорит нам о преподавании анализа? *Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики: историко-математический и историко-методический аспекты.* Вып. 4. Калуга, Изд. КГПУ, 2002, с. 45–62.74 // Перевод с английского выполнен А. И. Щетниковым.

енных десятилетий XX века, когда даже в высших учебных заведениях исследование функций, числовые ряды и т. п. рассматривались в рамках курса алгебры.

2) По контрасту с предыдущим периодом, *1961–1985* были временем сильной нестабильности. Оно отмечено желанием ввести современный подход к анализу, существенно отличный от алгебры, однако изменения были колеблющимися и непостоянными. К примеру, в программах *Primarie Scientific* (16–17 лет) мы обнаруживаем, что:

• в *1966* вводятся идеи непрерывности и предела в точке, наряду с дифференциалом;

• в *1970* дифференциал становится *«линейной касательной функцией»*;

• в *1982* эти идеи заменяются идеей ограниченного разложения порядка 0 и 1. В это же время вводится изучение числовых последовательностей, и теперь курс анализа имеет дело с использованием интервалов, приближений и неравенств.

3) *С 1985* мы обнаруживаем в официальных математических программах две основные черты:

• стремление к стабильности, поскольку программы *«существенно сохраняют цели, принятые в 1983. Опыт использования их в течение трёх лет показал необходимость сохранения этих изменений».*

• подчёркнутое требование более практического подхода к математическому образованию, с намерением *«придать математическим объектам интуитивное и конкретное содержание»*, в котором *«развивается геометрический взгляд на задачи, особенно в анализе, с тем чтобы интуиция и воображение могли пользоваться геометрическими языком и способами представления»*.

Ниже приведены параллельные выдержки из программ 1985 и 1991. Формулировка *«предел функции в точке»* появляется под заголовком: **язык пределов**: *«После рассмотрения функций $h \to h^n$, n = 1, 2, 3 в окрестности 0 сообщается, что эти функции имеют предел 0 в 0»*.

1985	1991
В Primaire идея непрерывности лежит за пределами программы	*то же самое*, но несколькими строками ниже: «*так же, как и во 2 классе, мы пользуемся понятием функции, изучая явление <u>непрерывности</u>*.
Интегральное исчисление в Terminale C «Для данной функции f, непрерывной на интервале I, и пары точек (a, b) из I, число $F(a) - F(b)$, где F есть какая-либо первообразная для f, не зависит от выбора F. Оно называется интегралом f от a до b, что записывается как $\int_a^b f(t)dt$ ».	*то же самое*, с указанием: *«чтобы придать <u>понятию интеграла некоторый смысл</u>, следует познакомить учащихся с <u>некоторыми задачами интегрального исчисления</u>, на примере вычисления геометрических величин (площади, объёмы) и физических величин (расстояние как функция скорости, среднее и среднеквадратичное значения)»*.

Когда преподаватель математики в начальном (Primaire) или выпускном (Terminale) лицейском классе начнёт готовиться к своему курсу, все эти требования очень скоро покинут его, и он окажется совершенно сбитым с толку. Как возможно придать понятию интеграла некоторый смысл, если оно определено так, как это сделано в левой колонке, и в то же время связать его с понятиями площади и объёма? Более того, он будет весьма удивлён, обнаружив, что такой математический предмет, как анализ, результаты и методы которого изучаются в лицеях уже на протяжении 150 лет, подвергается сегодня пересмотру на уровне учебной программы каждые пять или десять лет. Вполне возможно, что развитие техники — калькуляторов и компьютеров — могло вызвать некоторые изменения в подходах к предмету, упростив вычисления и построения графиков. Но требует ли это изменений в содержании программы?

2. Эти изменения в программах содержат в себе глубокие противоречия

Все эти изменения, колебания и поправки фактически отражают фундаментальное противоречие между двумя противоположными требованиями, которые сильнее всего видны при рассмотрении понятия бесконечности.

1. Педагогический императив. Важно учить так, чтобы обращаться к студентам прямо, стимулируя их понимание и воображение. Это предполагает использование слов, с необходимостью заряженных интуитивным смыслом: «*непрерывный, предел, бесконечность, бесконечно малые или большие величины, ...*», — но такой подход весьма далёк от того, как эти понятия трактуются сегодня профессиональными математиками. И дело не только в том, что эти слова не способны передавать богатство и утончённость соответствующих понятий анализа; более существенно то, что наша интуиция неспособна ухватить их смысл, а если и способна, то мы всё равно легко можем впасть в ошибки или загнать себя в тупики неразрешимых парадоксов. Подумайте, к примеру, о спонтанной реакции наших учащихся на примеры классических пределов

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)^n .$$

По этой причине Бертран Рассел говорил о том, что «в бесконечно малом интуиция слепа», а Гастон Башляр писал, что «строгость может возникнуть лишь из коренного преобразования интуиции».

2. Требование строгости. Когда говорят о математике, говорят о воплощённой строгости. Отсюда возникает второй императив — противоречащий первому в педагогической перспективе — а именно, необходимость точного и строгого представления теорем, связанных с бесконечностью. По большей части такое представление слишком абстрактно для большинства учащихся наших лицеев, и поэтому оно не может быть понято ими. Вот пример тому: учащийся уже имеет интуитивное понятие о мгновенной скорости, но в качестве математического определения преподаватель может предложить ему лишь следующее:

Пусть $f(t)$ есть расстояние в *км*, пройденное за время t. Тогда утверждение, что в момент времени t_0 скорость равна 100 *км/ч*, означает, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |t - t_0| < \eta \Rightarrow \left| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - 100 \right| < \varepsilon .$$

Для этого ответа характерно полное пренебрежение педагогическими требованиями; и в 1960-е и 1970-е анализ преподносился учащимся именно таким образом, когда идеи предела, непрерывности, дифференциала и т. д. вводились преждевременно и формально. С другой стороны, педагогические требования несомненно проглядывают во многих изменениях, сделанных с 1985. Но эти изменения ещё не означают, что трудности, связанные со вторым императивом — требованием к математической деятельности быть точной и строгой — были устранены. Как же мы выходим из этих затруднений?

3. Сегодняшнее решение: утрата осмысленности

Мне представляется, что подход, принятый на сегодняшний день, состоит в отбрасывании всех математических определений и доказательств, каким-либо образом связанных с бесконечностью. Это началось с *коллежей*. В учебниках 1950-х и 1960-х было обычным найти краткое доказательство теоремы Фалеса или формулы для площади прямоугольника. Поэтому было возможным также доказывать, что уравнение $y = ax + b$ представляет прямую линию, или, в *Seconde*, что если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ суть два вектора и λ есть действительное число, то $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$.

Вряд ли вы найдёте сегодня такие доказательства в учебниках математики для лицея или коллежа. То, что надлежит доказывать, теперь просто постулируется. Взамен мы имеем такие формулировки: *«для данных чисел a, b, с множество точек M(x, y) такое, что y = ax + b представляет собой прямую линию, пересекающую Oy»*, или *«для всех* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *мы имеем* $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$*»*.

В результате мы сегодня находимся в ситуации, когда нам следует предупреждать наших молодых коллег, что эти элементарные свойства вообще-то надлежит доказывать, но доказательства являются слишком сложными, поскольку требуют обращения к идее бесконечного. Как, к примеру, мы можем вывести формулу для площади прямоугольника в случае, когда его стороны являются несоизмеримыми величинами? Для наших молодых коллег эти свойства оказываются врождёнными истинами, и в ещё большей степени — для их учащихся. А учебная программа продолжает настаивать на том, что нужно *«передавать учащимся научный подход, развивать их способности экспериментировать и рассуждать, а также воображение и критический анализ»*.

Анализ, как он преподносится сегодня, фактически ограничивается представлением некоторого набора вычислений и графиков, истинность которых всегда постулируется и никогда не доказывается и не подтверждается. Преимущество такого способа изложения состоит в том, что он создаёт иллюзию строгости. Объекты представляются своими свойствами: векторы, точки, прямые... Принимается некоторый набор вычислительных правил, и работа учащегося состоит лишь в их аккуратном применении, и не предполагает задавания и обсуждения последних вопросов о том, какой смысл следует приписать этим объектам и правилам.

Хуже всего то, что учащийся не может опознать математические модели в конкретных ситуациях. Как он может установить связь между экспоненциальным ростом — и функцией, носящей такое же название; или между площадью, моментом инерции, средним значением — и некоторым интегралом, о котором ему говорили?

Итак, противоречие между интуицией учащегося и строгой трактовкой бесконечности разрешается отбрасыванием осмысленности. Отказываясь встретиться с прямо возникающей в теореме Фалеса бесконечностью, с иррациональными числами, с понятием предела и т. д., мы отказываемся спрашивать: что такое число? что означает непрерывность? что такое прямая линия? площадь? объём? Это превращает математику в заведомо формальную дисциплину, в которой вычисления замещают собой рассуждения, необходимые для понимания.

О многом говорит использование учащимися выражений «запрещено» и «разрешено». *«Делить на 0 запрещено; разрешено ли упростить?; разрешено дифференцировать ряд почленно при таких-то условиях»*. Поскольку математические объекты подлежат не осмыслению, но приложению правил, учащиеся естественно подменяют мыслительный подход, требующий различать истину и ложь, подведением под правило, осмысленным лишь в юридическом смысле. Учитель, принявший эту позицию судейского контроля, получает определённые преимущества: здесь возвращается прошлое, когда учитель должен был *«надзирать и наказывать»*. Противоположная позиция, когда поднимается вопрос о смысле, помещает учителя на один уровень с учеником в отношении таких вопросов, которые находятся выше их обоих, а именно вопросов о глубинном смысле.

Мне думается, что в конечном счёте обучение математике может быть изображено на *схеме 1*, отображающей статическое представление о природе математики:

	математическое исследование
смысл и строгость	математика, преподаваемая в университете
смысл?	то, что возможно преподавать в лицее
строгость?	то, что возможно преподавать в коллеже
	то, что возможно преподавать в начальной школе

Схема 1

Согласно этой схеме, математическое образование, совмещающее в себе осмысленность и строгость, возможно только в университете. На нижних уровнях следует принести в жертву либо строгость (особенно в отношении вопросов, связанных с бесконечностью), либо осмысленность (в пользу строгих формальных вычислений).

4. Альтернативное решение состоит в том, чтобы принять противоречия как значимую историческую составляющую математики и её преподавания

Сам я предпочитаю видеть математику в её истории, как это показано на *схеме 2*, менее жёсткой, заметно более беспокойной, зато живой и подвижной.

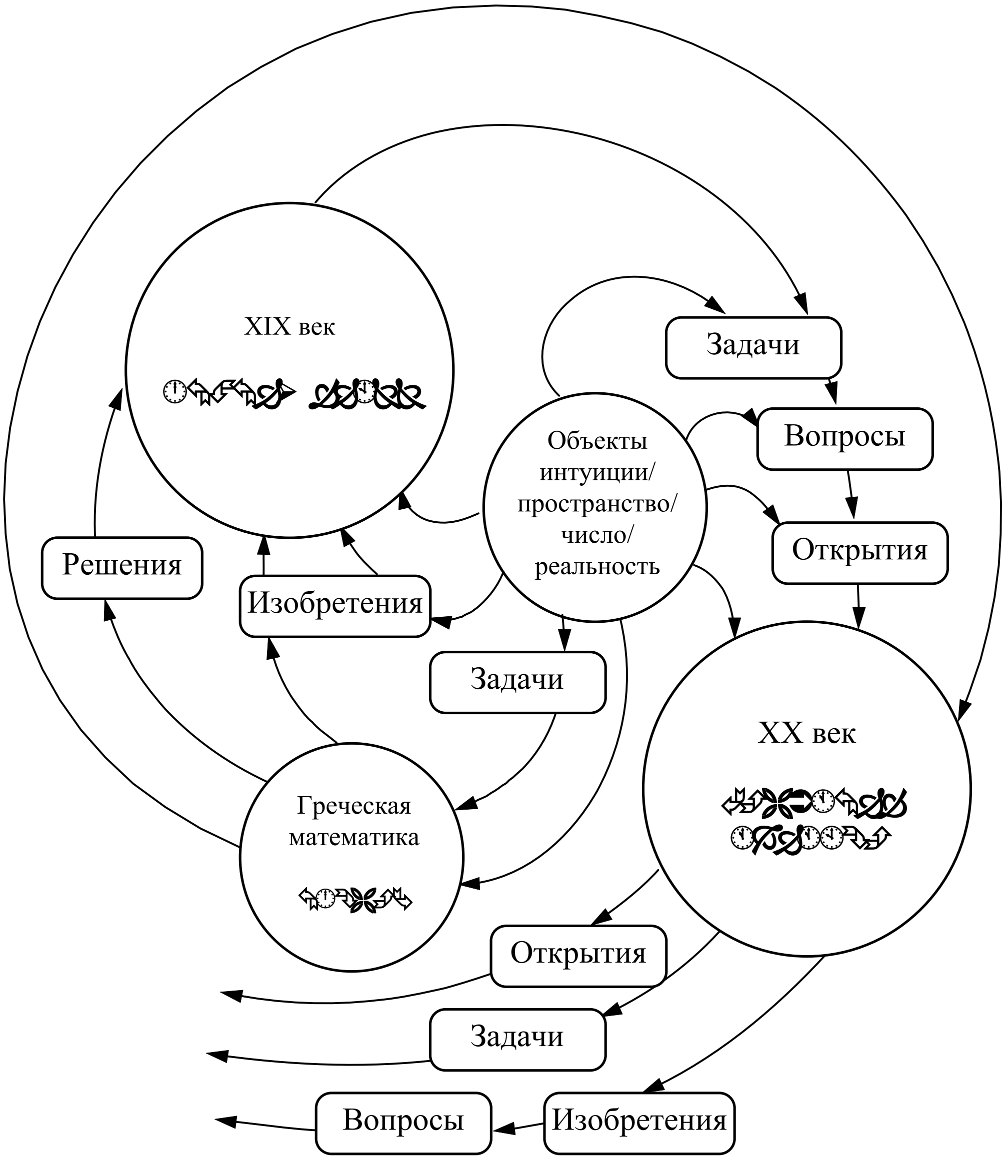

Схема 2

В центре этой схемы изображена **внешняя реальность**, доставляющая нам объекты нашей интуиции, прежде всего — **пространство**[2] и **число**. Эти объекты вызывают к жизни **задачи** сравнения и измерения величин. Они порождают **вопросы** и иногда приводят к неожиданным **открытиям** (например, к открытию несоизмеримых величин).

[2] Точнее — пространственные объекты: пространство в качестве математического объекта является относительно поздним понятием (начиная с теории перспективы и механики XVII века), и то, что мы называем евклидовым пространством, также было изобретением XVII века.

Ответы на эти задачи и вопросы с течением времени образуют **математическую теорию**. Теория оформляет математические рассуждения и выдвигает модель строгости, к примеру — модель евклидовой геометрии. Обучение зачастую играет важную роль в этой строгой организации знания, поскольку оно нуждается в постоянной фокусировке внимания. Выдвинутая модель строгости вовсе не должна иметь ответы на все вопросы, или обеспечивать возможность решения любой задачи. Напротив, она может быть атакована новыми вопросами и задачами, новыми открытиями и изобретениями, которые в некоторый момент времени способны полностью дестабилизировать имеющуюся модель и потребовать создания новой. Я приведу здесь два примера.

1. Изобретение инфинитезимального исчисления в XVII веке выдвинуло исключительно эффективные идеи и методы, но они были полностью чуждыми евклидовой геометрии, и даже противоречили ей. Это можно видеть из формулировки конкурса, предложенного Берлинской академией в 1784 г.:

> «Математическое отделение предлагает следующий вопрос, премия за который будет присуждена в 1786 г. Ожидаемая от математики польза, высокая её оценка и то почётное звание *точной Науки* par excellence, которое она по справедливости носит, связаны с ясностью её принципов, строгостью её доказательств и точностью её теорем. Чтобы гарантировать преемственность этих ценных преимуществ в этой значительной части нашего знания, требуется представить *ясную и точную теорию того, что в математике называют бесконечным*. Известно, что высшая геометрия постоянно принимает *бесконечно большие и бесконечно малые*. Однако геометры и даже древние аналисты тщательно избегали всего, что касается бесконечного, и великие современные аналисты признают, что выражение *бесконечная величина* противоречиво. Академия поэтому желает получить объяснение того, как из противоречивого допущения было выведено столько истинных теорем и чтобы был указан верный, ясный, словом подлинно математический принцип, который мог бы заменить *бесконечное*, не делая слишком трудным или слишком долгими производимые с помощью этого средства исследования. Этот предмет должен быть изложен во всей его всеобщности, и со всей возможной строгостью, ясностью и простотой».

Этого не было сделано до тех пор, пока ясная и точная теория бесконечного не была успешно построена в XIX веке трудами Коши, Абеля, Больцано и Вейерштрасса.

2. Модель, предложенная Вейерштрассом, не могла справиться с парадоксами, выявленными спустя несколько десятилетий после того, как Кантор предложил свою теорию множеств. Почти 150 лет спустя после выдвижения вопроса на конкурс берлинской академии, Гильберт выставил такой же вопрос в 1925, причём сделал это в терминах, почти полностью совпадающих с предыдущим текстом:

> Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике — этом образце достоверности и истинности, — образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподаёт и применяет, приводят к нелепостям. Где же искать надёжность и истинность, если даже само математическое мышление даёт осечку?

Но существует вполне удовлетворительный путь, по которому можно избежать парадоксов, не изменяя при этом нашей науке. Те точки зрения, которые служат для открытия этого пути и те пожелания, которые указывают нам направление, суть следующие:

1. Мы будем заботливо следить за плодотворными способами образования понятий и методами умозаключений везде, где является хотя бы малейшая надежда, будем ухаживать за ними, поддерживать их, делать их годными к использованию. Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор.

2. Надо повсюду установить ту же надёжность умозаключений, которая имеется в обыкновенной, низшей теории чисел, в которой никто не сомневается и где противоречия и парадоксы возникают только вследствие нашей невнимательности.

Достижение этой цели возможно, очевидно, лишь после того, как мы полностью выясним *сущность бесконечности*.

5. Камень преткновения: отношение между пространственной и числовой непрерывностью

Идея бесконечности присутствует как в пространственной области, так и среди чисел, и один из значительных шагов развития в истории математики состоял в установлении связи между этими двумя областями, и в определении того, что может быть сделано посредством этой связи. Греки тщательно различали числа и пространственные величины; для них эти сущности имели разную природу. При создании аналитической геометрии, представляя пространство с помощью координат, Декарт отождествил пространственную непрерывность с числовой непрерывностью. Это отождествление послужило основой для отождествления прямой линии с множеством точек, удовлетворяющих уравнению $y = ax + b$. И именно оно объясняет рекомендации учебных программ развивать *«геометрическое представление задач, особенно в анализе»*. Но я не уверен в том, что оно было полностью выполнено или понято, особенно если мы рассмотрим то, что говорят учащиеся, или даже те объяснения, которые дают преподаватели.

К примеру, преподаватель I курса спросил, возможно ли *«для данных отрезков BD и BC построить отрезок BE, равный произведению BD и BC?»* Я предложил ему решение, данное Декартом в *Геометрии*, исходящее из пропорции $BE : BD = BC : BA$, откуда мы получаем $BE = BD \times BC$, если принять BA за единицу (*схема 3*).

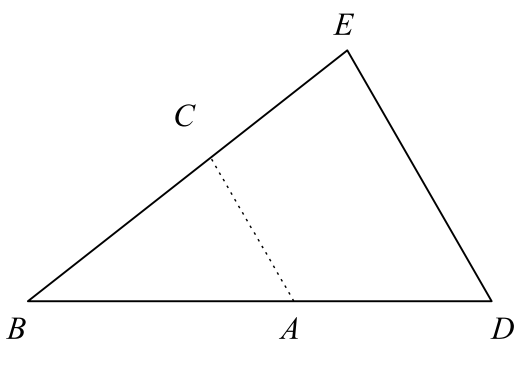

Схема 3

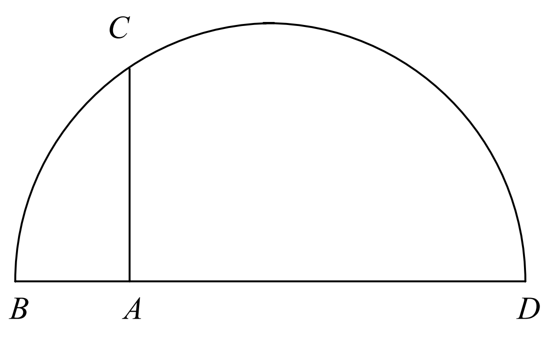

Схема 4

Он не был удовлетворён этим. Его интересовало решение, не требующее принятия длины некоторого отрезка за единицу, как при построении $AD = \sqrt{AB \cdot BC}$ (*схема 4*). Я объяснил ему, что это невозможно: ведь во втором случае мы строим отрезок AD такой, что $AB : AD = AD : AC$, а эта пропорция не зависит от выбора единицы длины. Напротив, в первом случае с помощью длины отрезка мы выражаем площадь прямоугольника, что существенно зависит от выбора единицы длины.

Этот вопрос свидетельствует о недостаточной усвоенности характера отождествления геометрии и чисел. Это отождествление сопровождается утратой смысла, который замещается формальными символическими преобразованиями. Но дела не всегда обстояли таким образом; и я хотел показать в качестве примера проблем, связанных с измерением величин, как численные вычисления постепенно вытеснили применение геометрии из анализа до такой степени, что его геометрические корни оказались полностью забытыми.

6. Строгость как коренное исправление интуиции

В XVII и XVIII столетиях анализ состоял прежде всего в изучении геометрических величин посредством алгебры. Вот как Дидро и Даламбер определяли *Анализ* в *Энциклопедии*:

> Анализ представляет собой метод решения математических задач посредством их сведения к уравнениям. Для решения задач анализ привлекает алгебру и общее исчисление величин; поэтому два слова *анализ* и *алгебра* часто употребляются как синонимы.

(Это согласуется с замечанием, сделанным в начале настоящей статьи: до 1961 г. анализ рассматривался в качестве раздела алгебры.)

В то время как работы греческих геометров основывались на интуиции физического пространства, учёные и математики XVII и XVIII веков опирались на то, что они называли законами природы, — законами, которые они стремились открыть и описать. Так слава Ньютона заключается не в его математических результатах как таковых, но в том, что он сумел установить *«математические начала натуральной философии»*. Ньютон и Лейбниц были согласны между собой в том, что глубокие различия между их взглядами были вызваны их разными подходами к теологической концепцией *Творения*. Творение происходило под контролем неизменных принципов, которые учёный и стремился раскрыть. Именно физика (натуральная философия) предлагала ключевые вопросы анализу, особенно в отношении астрономии и механики. И именно природный мир содержал в себе объекты для изучения, что в течении долгого времени вызывало особый интерес к геометрии, затем к исчислению бесконечно малых, а тем самым и к изучению функций. Вскоре основой геометрической деятельности стало установление связей между тремя независимыми сторонами физических явлений:

- взаимосвязь между двумя переменными (или наборами переменных), регулирующая данное природное явление, например движение планет. Функция выражает закон этого движения. Эти функции необходимо являются непрерывными, поскольку *«природа не делает скачков»* (Лейбниц);
- связь с геометрией посредством той кривой, которой мы можем зрительно представить закон: закон порождает кривую;

• использование полиномов, зачастую бесконечных, для вычисления численных значений функций.

Значительная часть законов мироздания выражалась с помощью неалгебраических функций, названных ЛЕЙБНИЦЕМ *трансцендентальными*: такими, как круговые, логарифмические и экспоненциальные. Как можно было определять значения этих функций, если все вычислительные методы, для которых имелись алгоритмы, состояли в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней?

Ньютон решил эту проблему, развив свою *Универсальную арифметику*. Её основная идея заключалась в том, чтобы единообразно представить все числа, рациональные и иррациональные, посредством десятичных дробей (конечных или бесконечных), а все функции сходным образом записывать в виде обобщённых полиномов для степеней x (не обязательно положительных).

> И так же, как десятичные дроби обладают тем преимуществом, что выраженные в них обыкновенные дроби и числа приобретают в некоторой степени свойства целых чисел, так что с ними можно обращаться как с последними, так и буквенные бесконечные ряды приносят ту пользу, что всякие сложные выражения (дроби с составным знаменателем, корни составных величин или неявных уравнений, и т. д.) можно с их помощью привести к роду простых количеств (НЬЮТОН, *Метод флюксий и бесконечных рядов*.)

Типичный пример представляет собой формула бинома НЬЮТОНА, заслуженно рассматриваемая в качестве стержня нового исчисления в определении рядов, необходимых для вычисления функций; или же удивительный ряд ЛЕЙБНИЦА

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

заменяющий беспорядочное чередование цифр в десятичном разложении числа π на регулярную последовательность членов ряда. Такие ряды смогли сделать **рациональной** ту реальность, которая казалась безвозвратно «иррациональной».

Рассмотрим разложение, изобретённое Эйлером для $\sin x$. Оно начинается со следующих шагов:

$$\sin(nz) = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}},$$

$$\sin(nz) = \frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3 + \ldots$$

Пусть z будет бесконечно малым. Тогда будет $\sin z = z$ и $\cos z = 1$. Пусть также n будет бесконечно большим, так чтобы $nz = v$ было конечным, тогда будет

$$\sin v = v - \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{n-2}{3n}v^3 + \ldots;$$

но $\dfrac{n-1}{2n}=\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{n-2}{3n}=\dfrac{1}{3}$, поскольку n бесконечно велико. Тем самым

$$\sin v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \ldots .$$

Сходные вычисления могут быть найдены на сотнях страниц трудов ЭЙЛЕРА; мы не найдём в них ни тени сомнения, и более того, *они являются точными*. Отчего же они заставляют нас испытывать болезненное неудобство? Почем сегодня мы считаем эти труды *не строгими*? На самом же деле эти труды характеризуются (1) уверенной интуицией бесконечного и (2) сильной верой в могущество символизма.

ЭЙЛЕР и его современники занимались развитием средств нового исчисления, увеличением числа открытий и результатов в гораздо большей мере, нежели оправданием собственных методов. Более того, они вряд ли смогли бы получить все свои результаты, если бы были вынуждены просеивать их через сито наших критериев строгости. С другой стороны, их вычисления отражают необычайную веру в неоспоримое могущество символизма, и многочисленные результаты, полученные с его помощью, только укрепляют эту веру. Но здесь же появляются и первые серьёзные проблемы. К примеру, для ЭЙЛЕРА равенство

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

имело смысл для всех x, поскольку запись $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$ была всего лишь другим способом представления функции $\dfrac{1}{1+x}$, и он считал, что

> возможно пользоваться математическими операциями как эквивалентом этого выражения даже для тех значений переменной, при которых ряд расходится. (ЭЙЛЕР, *О расходящихся рядах*)

НИКОЛАЙ БЕРНУЛЛИ возражал ему, утверждая, что один и тот же ряд может получиться из разложения двух существенно различных функций. ЭЙЛЕР не поверил: *«Бернулли не приводит примеров, и я не верю, что возможно получить один и тот же ряд для двух действительно различных алгебраических выражений»*.

Первым пример такого рода привёл КОШИ, обративший внимание на то, что у таких функций, как $\exp(-1/x^2)$ и $\exp(-1/\sin^2 x)$, все члены ряда Маклорена равны нулю, а тем самым такие функции, как $\exp(-x^2)$ и $\exp(-x^2) + \exp(-1/x^2)$, имеют одно и то же разложение в сходящийся ряд. Но были и другие причины, вынуждавшие математиков устанавливать новые критерии строгости.

Когда интуиция могла представить объекты исчисления в заведомо надёжном виде, как это было в случае ЭЙЛЕРА, риск ошибиться был минимальным, и даже удивительно, как мало ошибок было допущено математиками XVIII столетия. Однако развитие анализа вело к конструированию математиками таких объектов, которые становились всё менее и менее доступными для интуиции: к примеру, таковы функции комплексного переменного или многозначные функции. Новые исследования в физике вели к уравнениям колебаний струны или теплопроводности. Отчасти это развитие было вызвано и собственной динамикой математики, — и всё это привело к изменению математических воззрений. Вместо рядов, получаемых разложением функций, мы всё чаще встречаемся с противоположным случаем, когда функция определяется с помощью ряда. К примеру, в XVIII столетии мы встречаем множество доказательств биномиальной формулы, но ни одно из них не является удовлетворительным. Чтобы добиться цели, обращают задачу, рассматривая функцию ϕ, определённую посредством ряда

$$\phi(m) = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots.$$

Показав, что ϕ удовлетворяет уравнению $\phi(m + m') = \phi(m)\phi(m')$, КОШИ продемонстрировал важность понятия непрерывной функции. КОШИ, АБЕЛЬ и многие другие настаивали на том, что некоторое выражение можно принять за истинное только в том случае, когда оно является непосредственным численным равенством, и отвергали такие отклонения от этого, которые приводили бы к необоснованному применению символизма.

> Что касается способов изложения, то я старался придать им ту строгость, которая требуется в геометрии, совершенно избегая суждений, извлекаемых из алгебраического обобщения. Хотя и допускаются подобные суждения, особенно при переходе от сходящихся рядов к расходящимся, от вещественных количеств к мнимым выражениям, но мне кажется, что их можно принять за наведения, посредством которых, и то не всегда, только угадывается истина, что весьма мало удовлетворяет точности, которою хвалятся математические науки. (КОШИ, предисловие к *Алгебраическому анализу*)

КОШИ ограничил себя исключительно равенствами действительных количеств. Но приложение точного численного равенства к ряду, и тем самым суммирование бесконечности, возможно лишь через исчисление неравенств. Равенство двух недоступных чисел замещается в анализе неравенством:

$X = Y$ тогда и только тогда, если $\forall\varepsilon > 0$, $|X - Y| < \varepsilon$.

ВЕЙЕРШТРАСС переформулировал все определения анализа, используя такие выражения, как $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\alpha$ ... и т. п. Сделав это, он открыл дверь целому миру математических монстров, совершенно неподвластных интуитивному восприятию: функции, непрерывные на всём интервале, но нигде не дифференцируемые, или непрерывные функции, не являющиеся монотонными ни на каком интервале. Эти объекты заставляют нас удивляться, поскольку они представляются нам парадоксальными. Но почему? Потому что они абсолютно оторваны от геометрической интуиции. Они обладают лишь формальным численным смыслом, избегая любого представления, доступного интуитивному схватыванию. ГИЛЬБЕРТ обрисовывает дело так, что хотя ВЕЙЕРШТРАСС и заложил в высшей степени строгие основания исчисления бесконечно малых, дискуссия об основах анализа этим отнюдь не была закончена:

> Причина этого лежит в том, что значение *бесконечного* для математики ещё не выяснено до конца. Правда, бесконечно малое и бесконечно большое были из анали-

> за Вейерштрасса исключены тем, что высказывания, относящиеся к этим понятиям, были сведены к отношениям между конечными величинами. Но бесконечное всё же выступает снова в бесконечных числовых последовательностях, определяющих действительное число, и затем в понятии системы действительных чисел, которая воспринимается точно так, как предстоящая перед нами готовая и законченная совокупность. Формы логических умозаключений, в которых выражается эта трактовка, — когда, например, идёт речь о *всех* действительных числах, обладающих известным свойством, или о том, что *существуют* действительные числа, обладающие известным свойством, — суть как раз те формы, к которым неограниченно обращаются в этом обосновании анализа и которые применяют, постоянно повторяя.

И тем не менее, хотя формализм и способен отделить интуицию от её геометрической опоры, он также может послужить источником для обогащения интуиции на другом уровне, и даже обеспечить более глубокое и богатое постижение смысла. Сопоставьте только богатство идеи непрерывности действительных чисел, как она мыслится сегодня, сравнив её с представлением, характерным для XVIII века. Стало быть, дело не в том, чтобы осуждать формализм, а в том, чтобы определить его место и объём в данном образовательном контексте.

7. Заключение

Глубинная трудность в обучении анализу заключена в следующем противоречии: анализ имеет дело исключительно с числовой непрерывностью, тогда как интуиция учащихся исходно и ещё в течение долгого времени основывается на геометрической непрерывности. Мне думается, что педагогическая ошибка наших образовательных программ состоит в том, что мы не пользуемся здесь никаким иным понятием, кроме как числовой непрерывностью. Поступая так, мы отвергаем идеи геометрической и пространственной непрерывности, представленные, к примеру, формулами для площадей и объёмов и теоремой Фалеса.

Если мы действительно хотим сообщить интуитивное содержание конкретным математическим объектам, если мы желаем развивать геометрическое представление для решения задач, в частности в анализе, разумно ли будет пренебрегать использованием пространственной интуиции? Разве не она обеспечивает осмысленность и реальность иррациональных чисел? Разве не проблема измерения величин привела к построению той конструкции, которую мы называем системой действительных чисел?

Краткий обзор небольшого числа эпизодов из истории анализа от XVII столетия до начала XX века показывает нам, что внутренние математические доводы, приведшие к утверждению требуемой для анализа строгости, весьма далеко отстоят от тех вопросов, которые мы можем предложить учащимся наших лицеев. Вопрос состоит не во введении истории анализа в учебные программы, но в том, чтобы сделать наших преподавателей чувствительными к взятию на себя исторической и эпистемологической рефлексии, оформляющей процесс обучения. *Элементы математики* БУРБАКИ открываются следующими словами:

> Со времён древних греков тот, кто говорит *математика*, говорит *доказательство*. Более того, сомнительно, чтобы доказательства были возможны где либо ещё, поми-

мо математики, — в том точном и строгом смысле, который был принят греками и которого мы держимся сегодня. Будет верно сказать, что этот смысл не изменился, и то, что было доказательством для Евклида, остаётся таковым и для нас. (Бурбаки, введение в *Теорию множеств*.)

Ясно, что существует специфически научный подход к математике, основывающийся на идее строгого доказательства. Однако он всё же зависит как от истории и культуры, так и от уровня обучения. Получив весьма абстрактное и формальное университетское образование, будущий учитель математики оснащается, в качестве своей второй натуры, такими способами размышлять о математике, которые оказываются заслоном между ним и его учащимися. Если он желает снизойти до уровня учащегося, «он должен переоткрыть образ каждого понятия, каждой задачи, сделав это на примитивном уровне, с точки зрения того, кто ещё не начал теоретизировать».[3] Взгляд назад на историю позволит ему найти в ней исходные задачи, и тем самым он сможет вернуть смысл математическим терминам и понятиям, которые часто вычищаются математиками из подтекста, поскольку они слишком конкретны или слишком интуитивны, и слишком неоднозначны для их целей. Он также будет способен показать ступени создания фундаментальных понятий и методов анализа, и помочь своим учащимся выделить их критический смысл и осознать необходимость строгости, показав, как некоторые решения оказывались неудовлетворительными. Таким образом его учащиеся смогут увидеть необходимость этого определения или этой теоремы. Как писал об этом Эрмит своему другу Миттаг-Леффлеру:

Я полагаю, что представление начинающим всей этой новой математики, неоспоримо лучшей и более строгой, нежели математика древних, не лишено опасности. Мне кажется, что сперва следует подготовить их к этим новым теориям, и, следуя старому правилу, показать те ошибки и неточности в доказательствах, которые столь долго оставались незамеченными, и указать, как другие методы устраняют их. Довод состоит в том, что кое-что из исторического развития науки должно обнаружится и в образовании. Позвольте мне объяснить это. Абсолютно достоверный опытный факт состоит в том, что ошибка оказывается гораздо более полезной для развития мысли и поступательного прогресса науки, нежели точные истины. Разве мы не были счастливы верить, вплоть до сего дня, что всякая непрерывная функция имеет производную, и что всякое дифференциальное уравнение имеет решение, и ещё ранее, что всякая функция имеет своё разложение в ряд Маклорена? Думается, что я не ошибаюсь в своём выводе о том, что очень сложное современное представление о строгости и тот абстрактный характер, который она обнаруживает, возможно и не является всецелым благом для начинающих математиков, и хотя её и полезно вводить в конце, в качестве кровли всего здания, эта строгость отнюдь не всегда оказывается уместной.

Библиография

Бурбаки Н. *Теория множеств*. М.: Наука, 1965.
Гильберт Д. *Основания геометрии*. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
Коши Л. О. *Алгебраический анализ*. Лейпциг: 1864.

[3] Hauchard C., *Sur l'appropriation des concepts de suite de limite*, Doctoral thesis, Louvain.

ЛАКАТОС И. *Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы*. М.: Наука, 1967.
НЬЮТОН И. *Математические работы*. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
BKOUCHE, CHARLOT & ROUCHE, *Faire des mathŭmatiques: le plaisir du sens*. Armand Colin, 1991.
GRABINER J. Is mathematical truth time-dependent? *American Mathematical Monthly*, **81**, 1974.
HARTHONG J. & REEB G. Intuitionisme 84. In: *La mathŭmatique non standard*, Editions du CNRS, 1989.
SALANSKIS J. M. L'analyse non standard et la tradition de l'infiniti. *Revue d'Historie des sciences*, XLI, 2, 1988.