1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ.

а) (2 балла) Найти математическое ожидание случайной величины $\overline{g(X)} + S^2$, где $g(y) = 2^y$.

б) (2 балла) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

2. (4 балла) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i \in \mathrm{E}_1 \}$, $H_2 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y) \,\}$, где $f_2(y) = 3/y^4$ при $y \geqslant 1$.

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $1 \leqslant X_{(n)} \leqslant 3$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{X_i \in \mathrm{E}_1\}$ и $H_2 = \{X_i \in \mathrm{E}_2\}$.

а) (4 балла) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера 1/2 и мощности 1/2.

б) (4 балла) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать H_2, если $\overline{X} < 1$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

4. (4 балла) По выборке объёма 1 из распределения с плотностью $f(y) = \theta y^{\theta - 1}$, $y \in [0, 1]$, построить НМК размера 0,3 для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\theta = 1\}$ и $H_2 = \{\theta = 2\}$. Найти мощность этого критерия.

ФИО студента						Номер группы	
1а	1б	2	3а	3б	4	$\sum$	

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ.

а) (2 балла) Найти теоретическую характеристику $\theta(\lambda)$ данного распределения, для которой $F_n^*(3) - F_n^*(1)$ является несмещённой и состоятельной оценкой.

б) (2 балла) Найти при $n = 4$ распределение случайной величины $F_n^*(3) - F_n^*(1)$.

2. (4 балла) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1(y) \,\}$, где $f_1(y) = 4y^3/3^4$ при $0 \leqslant y \leqslant 3$, $H_2 = \{\, X_i \in \mathrm{U}_{0,\,4} \,\}$.

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $2 \leqslant X_{(1)} \leqslant 3$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{X_i \in \mathrm{U}_{0,\,4}\,\}$ и $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$, где

$$f_2(y) = \begin{cases} y/8, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) (4 балла) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера 1/2 и мощности 1/2.

б) (4 балла) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать H_2, если $\overline{X} \geqslant 2$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

4. (4 балла) По выборке объёма 1 из распределения с плотностью $f(y) = \theta y^{-\theta - 1}$, $y \geqslant 1$, построить НМК размера 0,2 для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\theta = 1\}$ и $H_2 = \{\theta = 2\}$. Найти мощность этого критерия.

ФИО студента						Номер группы	
1а	1б	2	3а	3б	4	$\sum$	

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 5 и p.

а) (2 балла) Найти математическое ожидание случайной величины $\overline{g(X)} + 3S^2$, где $g(y) = 2^y$.

б) (2 балла) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

2. (4 балла) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i \in \mathrm{U}_{0,5} \,\}$, $H_2 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2(y) \,\}$, где $f_2(y) = 2/y^3$ при $y \geqslant 1$.

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $3 \leqslant X_{(n)} \leqslant 5$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{X_i \in \mathrm{E}_2\}$ и $H_2 = \{X_i \in \mathrm{E}_4\}$.

а) (4 балла) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера 1/2 и мощности 1/2.

б) (4 балла) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать H_2, если $\overline{X} \leqslant 1/2$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

4. (4 балла) По выборке объёма 1 из распределения с плотностью $f(y) = \theta y^{\theta-1}$, $y \in [0, 1]$, построить НМК размера 0,16 для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\theta = 2\}$ и $H_2 = \{\theta = 1\}$. Найти мощность этого критерия.

ФИО студента						Номер группы	
1а	1б	2	3а	3б	4	$\sum$	

---

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 5 и p.

а) (2 балла) Найти теоретическую характеристику $\theta(p)$ данного распределения, для которой $F_n^*(4) - F_n^*(2)$ является несмещённой и состоятельной оценкой.

б) (2 балла) Найти при $n = 3$ распределение случайной величины $F_n^*(4) - F_n^*(2)$.

2. (4 балла) Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{\, X_i$ имеют распределение с плотностью $f_1(y) \,\}$, где $f_1(y) = 3y^2/4^3$ при $0 \leqslant y \leqslant 4$, $H_2 = \{\, X_i \in \mathrm{E}_2 \,\}$.

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $0 \leqslant X_{(1)} \leqslant 2$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы:. $H_1 = \{X_i \in \mathrm{U}_{0,6}\}$ и $H_2 = \{X_i$ имеют распределение с плотностью $f_2\}$, где

$$f_2(y) = \begin{cases} y/18, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 6, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) (4 балла) Построить (при $n = 1$) какой-либо критерий размера 1/2 и мощности 1/2.

б) (4 балла) Критерий $\delta_3 = \delta_3(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать H_2, если $\overline{X} \geqslant 3$. Найти предел при $n \to \infty$ размера и мощности этого критерия.

4. (4 балла) По выборке объёма 1 из распределения с плотностью $f(y) = \theta y^{-\theta-1}$, $y \geqslant 1$, построить НМК размера 0,25 для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\theta = 2\}$ и $H_2 = \{\theta = 1\}$. Найти мощность этого критерия.

ФИО студента						Номер группы	
1а	1б	2	3а	3б	4	$\sum$	