

1. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = \frac{4y^3}{\theta^4}$ на отрезке $[0, \theta]$, где $\theta > 0$ (все пункты по 3 балла).

а) Найти ОММ θ_1^* и θ_6^* для параметра θ по первому и шестому моментам.

б) Сравнить оценки θ_1^* и θ_6^* в асимптотическом смысле.

в) Проверить асимптотическую несмещённость θ_6^* .

г) Найти ОМП $\hat{\theta}$ для параметра θ и проверить её асимптотическую нормальность.

д) Сравнить ОММ θ_1^* и ОМП $\hat{\theta}$ в среднеквадратичном смысле.

е) Построить асимптотический доверительный интервал для θ асимптотического уровня доверия 0,95 с помощью θ_1^* .

ё) Построить точный доверительный интервал для θ уровня доверия 0,7 с помощью $\hat{\theta}$.

Подсказка: найдите k -й момент распределения, чтобы не вычислять несколько раз однотипные матожидания.

2 (3 балла). Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из стандартного нормального распределения. Доказать, что совпадают распределения случайных векторов

$$\left(\bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{X_1}{\sqrt{n}}, \sum_{i=2}^n X_i^2 \right).$$

ФИО студента								Номер группы	
1а	1б	1в	1г	1д	1е	1ё	2		

1. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = \frac{5y^4}{\theta^5}$ на отрезке $[0, \theta]$, где $\theta > 0$ (все пункты по 3 балла).

а) Найти ОММ θ_1^* и θ_5^* для параметра θ по первому и пятому моментам.

б) Сравнить оценки θ_1^* и θ_5^* в асимптотическом смысле.

в) Проверить асимптотическую несмещённость θ_5^* .

г) Найти ОМП $\hat{\theta}$ для параметра θ и проверить её асимптотическую нормальность.

д) Сравнить ОММ θ_1^* и ОМП $\hat{\theta}$ в среднеквадратичном смысле.

е) Построить асимптотический доверительный интервал для θ асимптотического уровня доверия 0,95 с помощью θ_1^* .

ё) Построить точный доверительный интервал для θ уровня доверия 0,9 с помощью $\hat{\theta}$.

Подсказка: найдите k -й момент распределения, чтобы не вычислять несколько раз однотипные матожидания.

2 (3 балла). Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из стандартного нормального распределения. Доказать, что совпадают распределения случайных векторов

$$\left(\bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}, \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 \right).$$

ФИО студента								Номер группы	
1а	1б	1в	1г	1д	1е	1ё	2		

1. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = \frac{6y^5}{\theta^6}$ на отрезке $[0, \theta]$, где $\theta > 0$ (все пункты по 3 балла).

- Найти ОММ θ_1^* и θ_4^* для параметра θ по первому и четвёртому моментам.
- Сравнить оценки θ_1^* и θ_4^* в асимптотическом смысле.
- Проверить асимптотическую несмещённость θ_4^* .
- Найти ОМП $\hat{\theta}$ для параметра θ и проверить её асимптотическую нормальность.
- Сравнить ОММ θ_1^* и ОМП $\hat{\theta}$ в среднеквадратичном смысле.
- Построить асимптотический доверительный интервал для θ асимптотического уровня доверия 0,95 с помощью θ_1^* .
- Построить точный доверительный интервал для θ уровня доверия 0,8 с помощью $\hat{\theta}$.

Подсказка: найдите k -й момент распределения, чтобы не вычислять несколько раз однотипные матожидания.

2 (3 балла). Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из стандартного нормального распределения. Доказать, что совпадают распределения случайных векторов

$$\left(\bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{X_1}{\sqrt{n}}, \sum_{i=2}^n X_i^2 \right).$$

ФИО студента								Номер группы	
1а	1б	1в	1г	1д	1е	1ё	2		

1. Элементы выборки X_1, \dots, X_n имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = \frac{7y^6}{\theta^7}$ на отрезке $[0, \theta]$, где $\theta > 0$ (все пункты по 3 балла).

- Найти ОММ θ_1^* и θ_3^* для параметра θ по первому и третьему моментам.
- Сравнить оценки θ_1^* и θ_3^* в асимптотическом смысле.
- Проверить асимптотическую несмещённость θ_3^* .
- Найти ОМП $\hat{\theta}$ для параметра θ и проверить её асимптотическую нормальность.
- Сравнить ОММ θ_1^* и ОМП $\hat{\theta}$ в среднеквадратичном смысле.
- Построить асимптотический доверительный интервал для θ асимптотического уровня доверия 0,95 с помощью θ_1^* .
- Построить точный доверительный интервал для θ уровня доверия 0,7 с помощью $\hat{\theta}$.

Подсказка: найдите k -й момент распределения, чтобы не вычислять несколько раз однотипные матожидания.

2 (3 балла). Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из стандартного нормального распределения. Доказать, что совпадают распределения случайных векторов

$$\left(\bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}, \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 \right).$$

ФИО студента								Номер группы	
1а	1б	1в	1г	1д	1е	1ё	2		