Решения задач 1-го варианта

1. Случайные величины $\xi \Subset \mathrm{B}_{4,\,\frac{1}{2}}$ и $\eta \Subset \mathrm{N}_{1,4}$ независимы. Найти коэффициент корреляции случайных величин $2\xi - 3\eta$ и $\xi + \eta$. Построить график функции распределения случайной величины 2ξ.

Решение. а)

$$\mathsf{E}\xi = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \quad \mathsf{D}\xi = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad \mathsf{E}\eta = 1, \quad \mathsf{D}\eta = 4,$$

$$\operatorname{cov}(2\xi - 3\eta, \xi + \eta) = 2\operatorname{cov}(\xi, \xi) - 3\operatorname{cov}(\xi, \eta) + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta) - 3\operatorname{cov}(\eta, \eta) = 2\mathsf{D}\xi - 3\mathsf{D}\eta = 2 - 12 = -10.$$

$$\mathsf{D}(2\xi - 3\eta) = 4\mathsf{D}\xi + 9\mathsf{D}\eta = 40, \quad \mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta = 5.$$

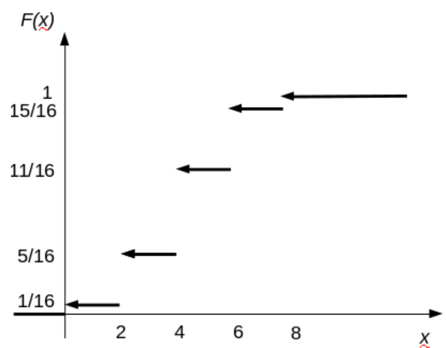
$$\rho(2\xi - 3\eta, \xi + \eta) = \frac{\operatorname{cov}(2\xi - 3\eta, \xi + \eta)}{\sqrt{\mathsf{D}(2\xi - 3\eta)\mathsf{D}(\xi + \eta)}} = -\frac{10}{\sqrt{40 \cdot 5}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

б)

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

2ξ	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

График функции распределения величины 2ξ:



2. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(t) = ct$ при $1 < t < 2$ (и 0 иначе). Найти c и функцию распределения случайной величины $\eta = 4 \cdot \xi$.

Решение.
По свойству плотности распределения,

$$1 = \int\limits_1^2 ct\, dt = c\frac{3}{2},$$

поэтому $c = \frac{2}{3}$.

Найдём функцию распределения. При $1 < x < 2$

$$F_\xi(x) = \int\limits_1^x \frac{2}{3} t\, dt = \frac{x^2 - 1}{3}.$$

Поэтому

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ \frac{x^2-1}{3}, & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Найдём $F_\eta(x)$:

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}(4\xi < x) = F_\xi\left(\frac{x}{4}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{x}{4} \leqslant 1 \\ \frac{(\frac{x}{4})^2-1}{3}, & 1 < \frac{x}{4} < 2 \\ 1, & \frac{x}{4} \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 4 \\ \frac{(\frac{x}{4})^2-1}{3}, & 4 < x < 8 \\ 1, & x \geqslant 8. \end{cases}$$

Преобразования — по вкусу.

3. Пусть $\xi \Subset \mathrm{E}_3$, $\eta \Subset \mathrm{U}_{0,1}$ и $\varphi \Subset \mathrm{B}_{3/4}$ независимы. Найти: функцию распределения случайной величины $\nu = \varphi\eta - (1-\varphi)\xi$. Найти дисперсию $\mathsf{D}\,\nu$.

Решение. а) По формуле полной вероятности

$$F_\nu(x) = \mathsf{P}(\varphi\eta - (1-\varphi)\xi < x) = \mathsf{P}(\varphi\eta - (1-\varphi)\xi < x,\, \varphi = 0) + \mathsf{P}(\varphi\eta - (1-\varphi)\xi < x,\, \varphi = 1) =$$

$$= \mathsf{P}(-\xi < x, \varphi = 0) + \mathsf{P}(\eta < x, \varphi = 1) = \mathsf{P}(-\xi < x)\mathsf{P}(\varphi = 0) + \mathsf{P}(\eta < x)\mathsf{P}(\varphi = 1) =$$

$$= \frac{1}{4}\mathsf{P}(\xi > -x) + \frac{3}{4}F_\eta(x) = \frac{1}{4}(1 - F_\xi(-x)) + \frac{3}{4}F_\eta(x) =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{cases} e^{3x}, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} + \frac{3}{4}\begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{3x}, & x \leqslant 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

б)

$$\mathsf{E}\nu = \mathsf{E}\varphi\mathsf{E}\eta - \mathsf{E}(1-\varphi)\mathsf{E}\xi = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{24}.$$

Найдём второй момент ν. Поскольку $\varphi^2 = \varphi$, $(1-\varphi)^2 = (1-\varphi)$, $\varphi(1-\varphi) = 0$, то

$$\nu^2 = \varphi\eta^2 + (1-\varphi)\xi^2.$$

В силу независимости,

$$\mathsf{E}\nu^2 = \mathsf{E}\varphi\mathsf{E}\eta^2 + \mathsf{E}(1-\varphi)\mathsf{E}\xi^2.$$

Подставим

$$\mathsf{E}\xi^2 = \mathsf{D}\xi + (\mathsf{E}\xi)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}, \quad \mathsf{E}\eta^2 = \mathsf{D}\eta + (\mathsf{E}\eta)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

Итого

$$\mathsf{E}\nu^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9} = \frac{11}{36}, \quad \mathsf{D}\nu = \frac{11}{36} - \left(\frac{7}{24}\right)^2 = \frac{127}{576}.$$

4. Страховая компания продает полисы ОСАГО и КАСКО. Время до поступления очередного страхового требования по полису ОСАГО имеет показательное распределение со средним 2 дня, а по КАСКО — показательное распределение со средним 3 дня. Предполагая, что эти времена независимы, найти вероятность, что следующее страховое требование придёт ранее чем через два дня. Найти среднее время ожидания страхового требования.

Решение.
Дано: $\xi \Subset \mathrm{E}_\alpha$, $\mathsf{E}\xi = 2 = \frac{1}{\alpha}$, поэтому $\alpha = \frac{1}{2}$. Соответственно, $\eta \Subset \mathrm{E}_\beta$, $\beta = \frac{1}{3}$.

Время ожидания ближайшего страхового требования есть наименьшее из ξ и η. Найдём распределение этого времени: для $x > 0$

$$\mathsf{P}(\min(\xi,\eta) < x) = 1 - \mathsf{P}(\min(\xi,\eta) \geqslant x) = 1 - \mathsf{P}(\xi \geqslant x,\, \eta \geqslant x) = 1 - (1 - F_\xi(x))(1 - F_\eta(x)) =$$
$$= 1 - e^{-x/2}\cdot e^{-x/3} = 1 - e^{-5x/6}.$$

Т.е. $\min(\xi,\eta) \Subset \mathrm{E}_{5/6} = \mathrm{E}_{\alpha+\beta}$. Поэтому
а) $\mathsf{P}(\min(\xi,\eta) < 2) = 1 - e^{-\frac{5}{6}\cdot 2} = 1 - e^{-10/6}$ и
б) $\mathsf{E}\min(\xi,\eta) = \frac{6}{5}$.

5. Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \Subset \mathrm{E}_3$ — независимые случайные величины. Найти $\mathsf{E}\left(\dfrac{4}{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4}\right)$.

Решение. Поскольку $\mathrm{E}_3 = \Gamma_{3,1}$, по теореме об устойчивости гамма распределения относительно суммирования

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4 \Subset \Gamma_{3,4}.$$

Здесь $\alpha = 3$, $\lambda = 4$.

$$f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4}(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} = \frac{3^4}{\Gamma(4)} x^3 e^{-3x}, \quad x > 0.$$

Подставим $\Gamma(4) = 3! = 6$. По закону бессознательного статистика,

$$\mathsf{E}\left(\frac{4}{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{4}{x} \cdot \frac{3^4}{6} x^3 e^{-3x}\, dx = \frac{4\cdot 3^4}{6} \cdot \int\limits_0^\infty x^2 \cdot e^{-3x}\, dx.$$

Вычислять интеграл нет никакой нужды, поскольку

$$\int\limits_0^\infty x^2 \cdot e^{-3x}\, dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty x^2 \cdot 3e^{-3x}\, dx = \frac{1}{3}\mathsf{E}\xi_1^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}.$$

Последний интеграл есть второй момент показательного распределения с параметром 3. Напомню, что k-й момент показательного распределения равен $\frac{k!}{\alpha^k}$.

Окончательно,

$$\mathsf{E}\left(\frac{4}{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4}\right) = \frac{4\cdot 3^4}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9} = 4.$$

6. Для $\xi \Subset \mathrm{G}_p$, $p > 0{,}5$, найти $\mathsf{E}\,2^\xi$.

Решение. По закону бессознательного статистика,

$$\mathsf{E}2^\xi = \sum_{k=1}^\infty 2^k \cdot pq^{k-1} = 2p\sum_{k=1}^\infty (2q)^{k-1} = \frac{2p}{1-2q}.$$

7*. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$, а случайная величина $\eta \Subset \Pi_\lambda$ не зависит от этой последовательности. Найти функцию распределения случайной величины $\zeta = \max\{\xi_1, ..., \xi_{\eta+1}\}$.

Решение. По формуле полной вероятности,

$$F_\zeta(x) = \mathsf{P}(\zeta < x) = \sum_{k=0}^\infty \mathsf{P}(\max\{\xi_1, ..., \xi_{\eta+1}\} < x,\, \eta = k) = \sum_{k=0}^\infty \mathsf{P}(\max\{\xi_1, ..., \xi_{k+1}\} < x)\mathsf{P}(\eta = k)$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \left(F_{\xi_1}(x)\right)^{k+1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Мы воспользовались тем, что $\mathsf{P}(\max\{\xi_1, ..., \xi_n\} < x) = \left(F_{\xi_1}(x)\right)^n$ для независимых и одинаково распределённых случайных величин. Для $0 < x < 1$ подставим $F_{\xi_1}(x) = x$ и получим

$$F_\zeta(x) = \sum_{k=0}^\infty x^{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = x\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} = xe^{-\lambda}e^{\lambda x} = xe^{\lambda(x-1)}.$$

$F_\zeta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $F_\zeta(x) = 1$ при $x \geqslant 1$.