16.02.2021 — Теория вероятностей и онлайн-казино

На семинаре мы построили математическую модель одной онлайн-игры из класса «одноруких бандитов». Построение модели мы провели в четыре этапа.

Этап 1. Нематематическая постановка задачи.

Сначала мы внимательно проанализировали игру: вид игрового поля, допустимое множество символов, множество игровых линий и способ начисления выигрышей (см. правила игры по ссылке выше). Мы вспомнили, что каждая такая онлайн-игра характеризуется специальным коэффициентом — RTP. Он определяется как среднее отношение всех денег, выплаченных игрокам, к общей сумме всех поставленных денег. Заказчик хотел, чтобы RTP можно было без трудностей изменять в пределах от 0.9 до 1.

Нематематическая постановка задачи тогда выглядит так:

Построить математическую модель игры такую, чтобы RTP принимал наперед заданное значение $\alpha \in [0.9, 1)$.

Этап 2. Полуматематическая постановка задачи.

Предположим, что мы уже провели $N \gg 1$ симуляций нашей игры. Мы договорились, что будем считать, что все последовательные игры происходят независимо друг от друга, и, к тому же, что распределение случайных конфигураций не меняется от игры к игре. Через $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ обозначим случайные размеры выигрышей в этих играх. Тогда, эмпирический RTP_N вычисляется по следующему правилу:

$$RTP_N = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N}{N}$$

По нашему предположению, случайные величины $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ независимы и одинаково распределены и, более того, имеют конечное математическое ожидание. Это значит, что для больших N согласно закону больших чисел (ЗБЧ) справедливо примерное равенство:

$$RTP_N \approx RTP := \mathbb{E}Y, \tag{1}$$

где Y — случайный выигрыш в еще не сыгранной игре.

Так как RTP_N — случайная величина, и приравнивать её к наперед заданному числу не имеет смысла, мы решили, что разумнее «регулировать» именно RTP. В этот момент, однако, мы задались вопросом: «а какова точность приближения в равенстве (1)?» Ответ на этот вопрос дает *центральная предельная теорема*:

Теорема (ЦПТ). *Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, и $0 < \mathbb{D}X_1 := \mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1)^2 < \infty$. Тогда*

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n\mathbb{D}X_1}} \approx Z,$$

при больших n, где Z — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение.

Из этой теоремы следует, что

$$\sqrt{\frac{N}{\mathbb{D}Y}}\,(RTP_N - RTP) \approx Z$$

или

$$RTP_N \approx RTP + \frac{\sqrt{\mathbb{D}Y}\,Z}{\sqrt{N}}.$$

Следовательно, погрешность аппроксимации в (1) имеет порядок $CN^{-1/2}$ для некоторой константы C. Мы поняли, что чтобы уменьшить эту погрешность, нужно минимизировать дисперсию $\mathbb{D}Y$.

Наконец, мы решили, что будем искать решение в классе игр, в которых пользователи выигрывают «часто, но понемногу», для этого нужно максимизировать вероятность выигрыша $\mathbb{P}\left(Y > 0\right)$.

Таким образом, наша нематематическая постановка теперь преваращается в следующую:

Для любого $\alpha \in [0.9, 1)$ построить математическую модель игры такую, что

$$\begin{cases} \mathbb{E}Y = \alpha, \\ \mathbb{D}Y \to \min, \\ \mathbb{P}\left(Y > 0\right) \to \max \end{cases}$$

Этап 3. Математическая постановка задачи.

Для начала мы заметили, что общий выигрыш в игре Y представляется в виде

$$Y = \sum_{k=1}^{5} Y_{L,k} + Y_s,$$

где $Y_{L,k}$ — выигрыш за k-ую линию, $k = 1, \ldots, 5$, а Y_s — выигрыш за звезды. Отсюда, по свойствам математического ожидания следует, что

$$\mathbb{E}Y = \sum_{k=1}^{5} \mathbb{E}Y_{L,k} + \mathbb{E}Y_s.$$

Для подсчета математических ожиданий нам необходимо придумать правило, по которому будут генерироваться случайные конфигурации $C = (c_{k,l})_{k=1,\ldots,3}^{l=1,\ldots,5}$. Мы предположили, что элементы конфигурации $c_{k,l}$ образуют набор независимых и одинаково распределенных случайных величин. Для $i = 1, \ldots, 7$ обозначим

$$p_i = \mathbb{P}\left(c_{1,1} = i\right) \qquad \text{и} \qquad p_s = \mathbb{P}\left(c_{1,1} = s\right).$$

Вектор $\boldsymbol{p} := (p_1, p_2, \ldots, p_7, p_s)$ полностью описывает распределение случайной величины $c_{1,1}$, а значит, и принцип генерации конфигураций.

Затем мы аналитически нашли нужные математические ожидания и получили, что

$$\mathbb{E}Y = f(\boldsymbol{p}),$$

где f — некоторая определенная функция.

Аналитически найти $\mathbb{D}Y$ и $\mathbb{P}\left(Y > 0\right)$ нам не удалось, однако ясно, что они также будут некоторыми функциями, скажем, g и h соответственно, параметров $\boldsymbol{p}$.

Наконец, мы сформулировали строгую математическую постановку задачи:

Для любого $\alpha \in [0.9, 1)$ найти $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_7, p_s)$ такой, что

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{p}) = \alpha, \\ g(\boldsymbol{p}) \to \min, \\ h(\boldsymbol{p}) \to \max. \end{cases} \tag{2}$$

Этап 4. Численное решение задачи.

Для начала мы поверили в то, что (2) эквивалентна следующей постановке:
Найти $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_7, p_s)$ *такой, что*

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{p}) \approx 1, \\ g(\boldsymbol{p}) \to \min, \\ h(\boldsymbol{p}) \to \max\,. \end{cases} \tag{3}$$

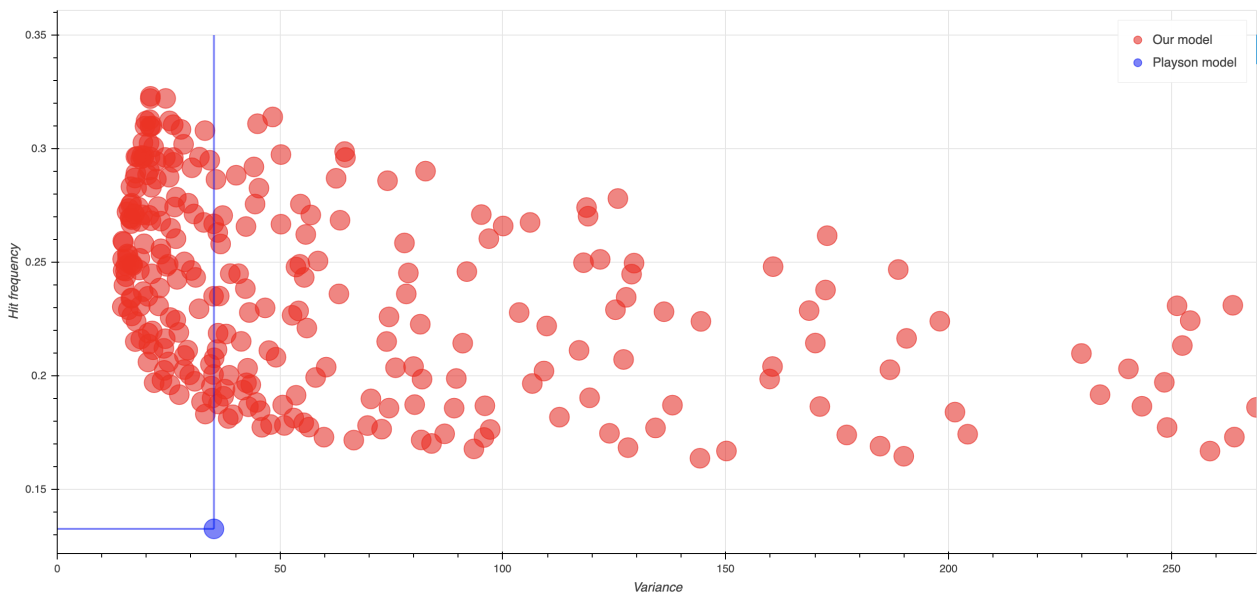
Задачу нахождения $\boldsymbol{p}$, удовлетворяющих первому условию в (3) мы решали простым перебором, выбирая лишь те вектора, для которых $1 \le f(\boldsymbol{p}) \le 1.5$. Как мы уже упоминали, нам не удалось найти аналитических выражений для $g(\boldsymbol{p})$ и $h(\boldsymbol{p})$. Мы заменили их численными приближениями, которые строим следующим образом. Для каждого выбранного $\boldsymbol{p}$ мы проводим большое количество N симуляций нашей игры и, пользуясь ЗБЧ, получаем численные приближения неизвестных характеристик:

$$g(\boldsymbol{p}) \equiv \mathbb{D}Y \equiv \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 \approx \frac{Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_N^2}{N} - \left(\frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N}{N}\right)^2$$

и

$$h(\boldsymbol{p}) \equiv \mathbb{P}\,(Y > 0) \approx \frac{\text{Количество } Y_i > 0}{N}.$$

Для каждого найденного $\boldsymbol{p}$ мы посчитали аппроксимации для $g(\boldsymbol{p})$ и $h(\boldsymbol{p})$ и сравнили вектора по этим характеристикам. Ниже приведен соответствующий scatter plot:



Синяя точка на scatter plot соответствует модели от Playson. Согласно постановке (3) все решения, лежащие на scatter plot выше и левее неё представляют лучшие, чем у Playson, модели рассматриваемой онлайн-игры.