Линейные вект расслоения.

<u>Опр</u> (B, L, p) наз-ся сем-ом вект. 1-мерных над B, если L_b <u>является</u> вещ. вект пр-ом разм. 1.

$$L = L_b = p^{-1}(b)$$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "p"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \forall\, b \in B$$

$L_b \ni v, w$

$v + w \in L_b$

$\mathbb{R} \ni \lambda, v$

$\lambda \cdot v \in L_b$

<u>Пр.</u> $H_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.

$$H_{\mathbb{R}} = \{(\{l\}, v) \,/\, v \in l\}$$

$$H_{\mathbb{R}} \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n$$

$l \mapsto \forall \{l\} \in \mathbb{R}P^n$

Опр.
$$\begin{tikzcd} L' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p'"'] & & L'' \arrow[dl, "p''"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L'_b \arrow[rr, "\varphi_b"] \arrow[dr] & & L''_b \arrow[dl] \\ & b \in B & \end{tikzcd}$$

Говорят, что φ — послойный изом-м $(B, L', p') \to (B, L, p)$

если

1) $p'' \circ \varphi = p'$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, b \in B$

2) $\forall\, b \in B$ $L'_b \xrightarrow{\varphi_b} L''_b$ — это изом-м 1-мерных вект. пр-в.

$$\begin{tikzcd} L'_b \arrow[r, "\varphi_b"] \arrow[d, equal] & L''_b \arrow[d, equal] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\text{умн на } \lambda"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

<u>Опр.</u> Трив. вект расс над U — это сем-во (U, L, p) виде

$(U, L = U \times \mathbb{R}, pr)$

это проекция на U

Вект расс над B — это такое <u>сем-во</u> (B, L, p), которое <u>лок-но по B тривиально.</u>

Т.е. $\forall b \in B \ \exists \underset{b \in}{U} \underset{\text{откр}}{\subset} B$: $\left(\underline{U}, \underset{p^{-1}(U)}{\overset{\shortparallel}{L_U}}, p_U = p\big|_{L_U} : L_U \to U\right) \approx (U, U \times \mathbb{R}, pr_U)$

$(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})_0 \subseteq \mathbb{R}^2$?

$(1, \frac{x_1}{x_0}) \in \{[x_0:x_1]\}$

<u>Пример</u> $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ (у-ть $\quad ([x_0:x_1], \lambda\underbrace{(1, \frac{x_1}{x_0})}) \longleftrightarrow ([x_0:x_1], \lambda) \in \mathbb{RP}^1_0 \times \mathbb{R}$

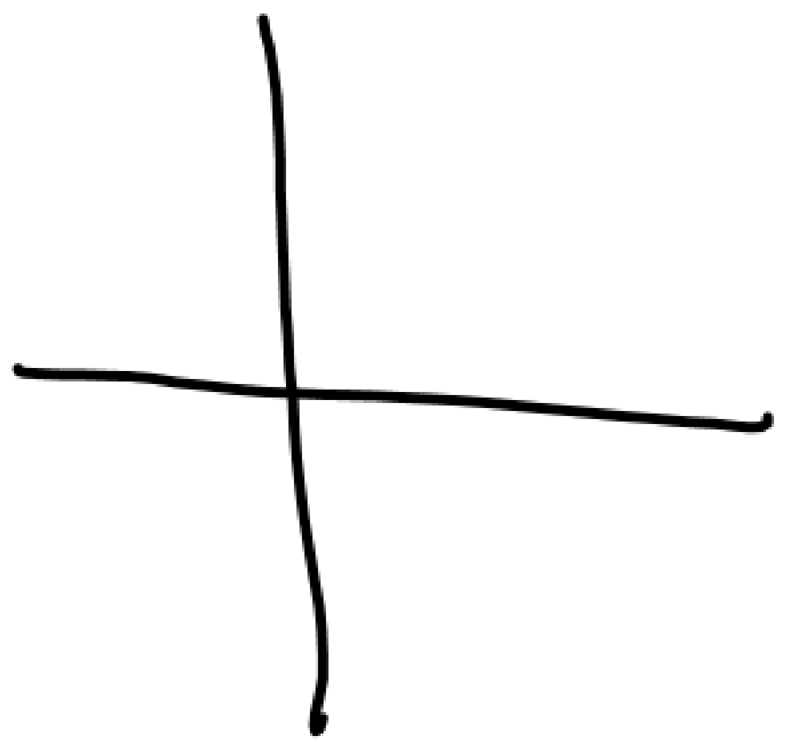
$$\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{pr_2}$$

$n=1 \qquad (\mathbb{RP}^n, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}, p: \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{RP}^n) \qquad (\mathbb{H}_{\mathbb{R}})_0 = p^{-1}(\mathbb{RP}^1_0) \longleftrightarrow \mathbb{RP}^1_0 \times \mathbb{R} \to \mathbb{RP}^1_0 = \mathbb{R}$

Д-ть, что эта сем-во — вект. расслоение
одномерное.

<u>$n=1$</u> $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ тривиально над $\mathbb{RP}^1_0 = \{[x_0:x_1] / x_0 \neq 0\}$ одномерно.

и над $\mathbb{RP}^1_1 = \{[x_0:x_1] / x_1 \neq 0\}$



$\{v\}$: все, кроме кон числа коэф. равны нулю. $= \mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{R}^n$

Вопрос Дано X сколько разных лин. вект. рассл. существует над X.

$X = S^1$ или S^2 или

$X =$ 

(X, b, p)

$\mathbb{RP}^0 \subset \mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2 \subset \dots$

Теорема $\boxed{\text{кл. изоморфизма лин. вект. рассл. над } X}$ $\longleftrightarrow [X, \mathbb{RP}^\infty]$

$\mathbb{RP}^\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{RP}^n$

з-о $\mathbb{RP}^\infty \supset Z \iff \forall n \; Z \cap \mathbb{RP}^n$ з-то в $\mathbb{RP}^n$.

Вопрос $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ f гомотопно g

$Gr(n, \mathbb{R}^\infty)$

Опр. Говорят, что L' изом L'', если $\exists$

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & L'' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[dr] & & L'' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$$0 \neq v \in L_b \overset{\sim}{\cong} \mathbb{R}$$

$$v \longleftarrow\!\shortmid 1$$

$$\lambda \cdot v \longleftarrow\!\shortmid \lambda$$

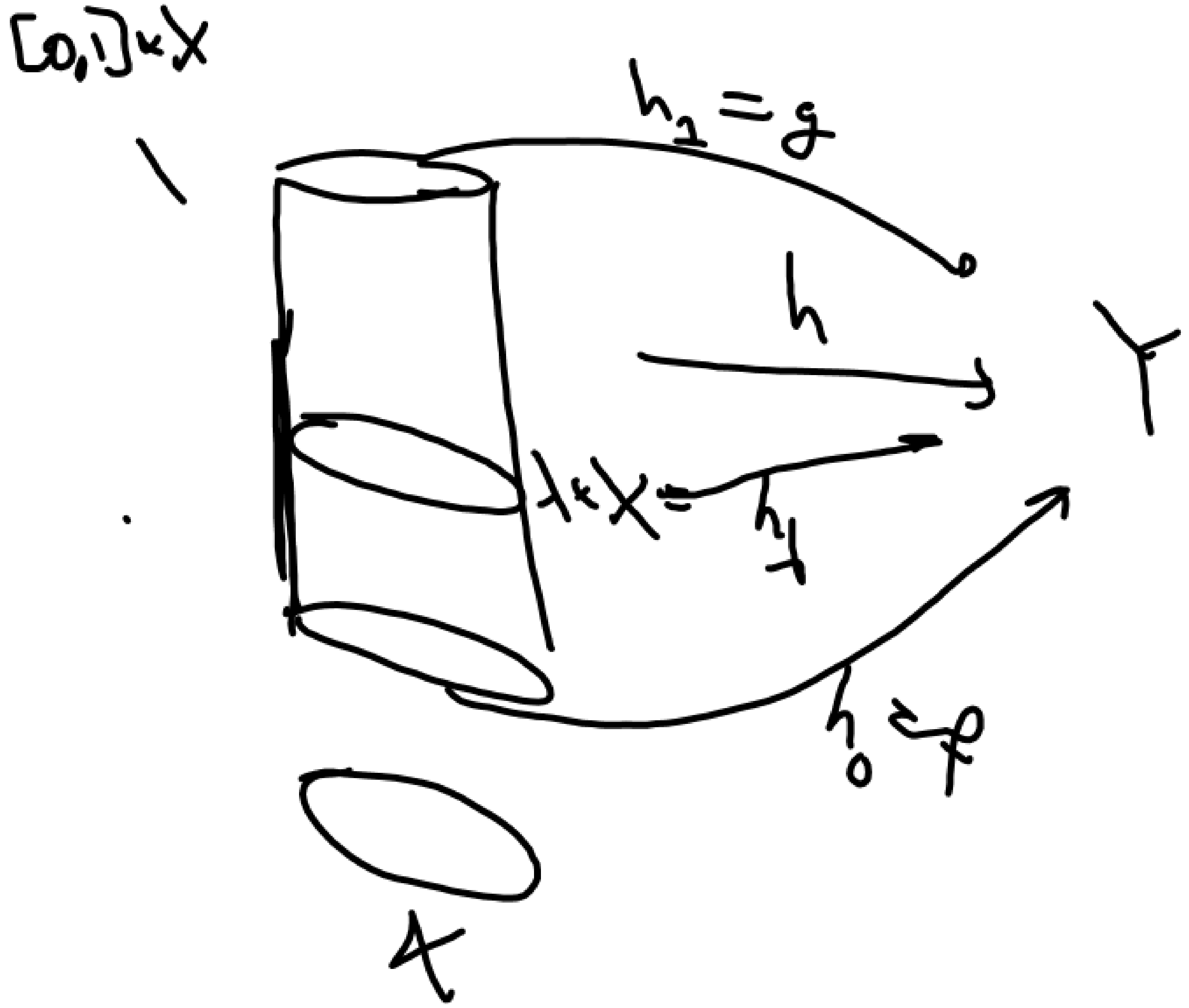
посл. изом φ.

$$\mathbb{R} = L'_b \xrightarrow[\varphi_b]{} L''_b = \mathbb{R}$$

это изом-м вект. пр-в

$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ гомотопны, если $\exists$

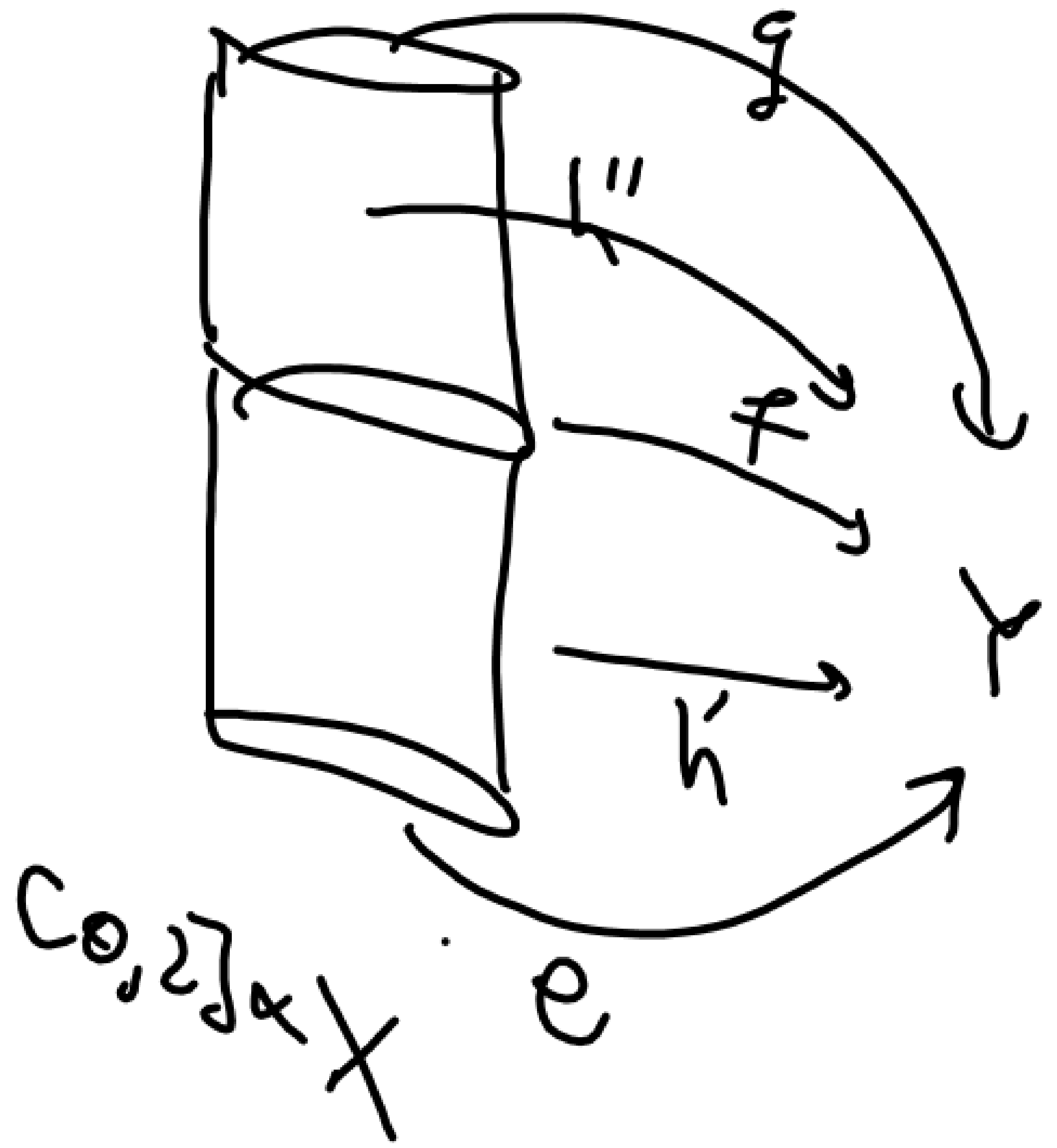
$$h: [0,1]\times X \longrightarrow Y : \quad h\big|_{0\times X} = f, \quad h\big|_{1\times X} = g$$



h наз-ся гомотоп-ей между f и g

__Опр:__ $[X,Y]$ – кл. отобр $X\to Y$ с точностью

$e \sim f \sim g$



Наблюдение (не очень очевидное, но верное)

послойно м ...).

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \times \mathbb{R}^N \arrow[dl] \\ X & \end{tikzcd}$$

$\forall x \in X$ $\quad L_x \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $\quad L_x \cong \mathbb{R}$

вект. под-ом в $\mathbb{R}^N$

$p^{-1}(U)$ $\quad$ послойный изом.

$$\begin{tikzcd} V_U \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl] \\ U & \end{tikzcd}$$

$\cancel{\mathbb{R}^1} \cong$ $V_u \cong \mathbb{R}^n$ над u

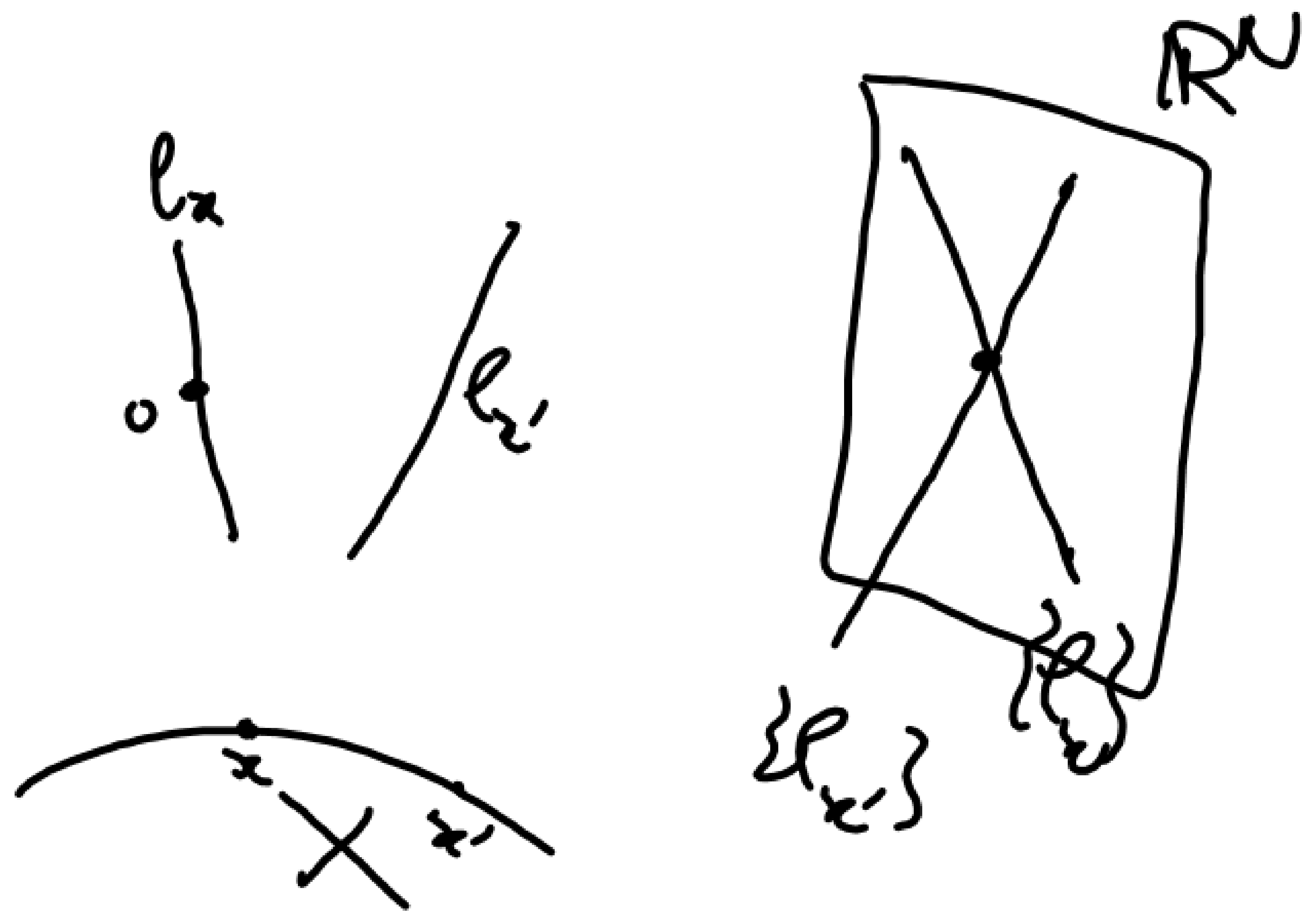
изом вект. вект прр

Вект. рассл со слоем $\mathbb{R}^n$ над X это сем-во (X, V, p) лок трив по X т.е. $\forall x \in X$ $\exists U \subset X$, $x \in U$ откр.:

Опр. Можно опр-ть понятие вект рассл со слоем $\mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d] \\ X \ni x \end{tikzcd} \qquad V_x \cong \mathbb{R}^n$$

$$
\begin{tikzcd}
L_x \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & l \arrow[r, hook, "in"] \arrow[d] & X \times \mathbb{R}^N \arrow[r] \arrow[dl] & \mathbb{R}^N \\
x \in X \arrow[rrr, "f_{in}"] & & & \{l_x\} \in \mathbb{R}P^{N-1}
\end{tikzcd}
$$



строим отобр. $X \longrightarrow \mathbb{R}P^{N-1}$

<u>Лемма</u> Класс гомот. отобр. f_{in} <u>НЕ</u> зависит от выбора вложения in

f_{in} $\quad$ $f_{in'}$

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{in'} & X \times \mathbb{R}^{N'} \\ \downarrow ! & \swarrow & \\ X & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{in''} & X \times \mathbb{R}^{N''} \\ \downarrow & \swarrow & \\ X & & \end{array}$$

$$X \xrightarrow{f_{in'}} \mathbb{RP}^{N'-1} \xhookrightarrow{j'} \mathbb{RP}^{N'+N''-1} \hookrightarrow \mathbb{RP}^{\infty}$$

$$X \xrightarrow{f_{in''}} \mathbb{RP}^{N''-1} \xhookrightarrow{j''} \mathbb{RP}^{N'+N''-1}$$

$$\boxed{j' \circ f_{in'} \sim j'' \circ f_{in'}}$$

гомотопны

$$\boxed{\text{лин. рассл. над } X} \longleftrightarrow [X, \mathbb{RP}^{\infty}]$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \subset & \mathbb{R}^m \\ & \Downarrow & \\ \mathbb{RP}^{n-1} & \subset & \mathbb{RP}^{m-1} \end{array}$$

...

$$(x,v) \longmapsto (f(x),v)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^N & X \times \mathbb{R}^N \arrow[rr] & & \mathbb{RP}^{N-1} \times \mathbb{R}^N & \\
\{v / v \in \ell_{f(x)}\} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d] & \{(x,v) / \ell_{f(x)} \ni v\} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d] \arrow[rr, bend right] & & \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \arrow[u, hook, "in"] \arrow[d] & \ell \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d] \\
x & X \arrow[rr, "f"] & & \mathbb{RP}^{N-1} & \ni \{\ell\}
\end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto f(x), \quad f(x) \in \mathbb{RP}^{N-1}$$

$$(x,v) \longmapsto (f(x),v)$$

причем $v \in \ell_{f(x)}$

$$\ell_{f(x)} \mapsto$$

$$\begin{tikzcd}
f^*(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}) \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \arrow[d] & \ell_{f(x)} \\
X \arrow[r, "f"] & \mathbb{RP}^{N-1} & \ni f(x)
\end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto f(x)$$

мор-зм с переносом св. $\mathbb{H}_R$ пределом ρ

5234

$f^*(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}) \longleftarrow\!\shortmid (f : X \to \mathbb{R}P^\infty)$

лин. рассл. над X

$L \longmapsto f_L$

<u>Т 1</u> $\boxed{\text{лин. вещ. рассл. над } X}$ $\longleftrightarrow [X, \mathbb{R}P^\infty]$

$f^*(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}) \longleftarrow\!\shortmid f$