Новосибирский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра прикладной математики

Избранные вопросы курса математического анализа

Ряды и преобразование Фурье

В.Н. Старовойтов

Содержание

1 Ряды Фурье в гильбертовом пространстве

Пусть H — линейное пространство над полем вещественных чисел. *Скалярным произведением* в H называется такая функция $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$, что для любых $u, v, w \in H$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия:

1. $(u,u) \geqslant 0$, причём $(u,u) = 0 \quad$ тогда и только тогда, когда $\quad u = 0$;
2. $(u,v) = (v,u)$;
3. $(u+v,w) = (u,w) + (v,w)$;
4. $(\alpha u, v) = \alpha(u,v)$.

Заметим, что в равенстве $u = 0$ имеется в виду нуль в линейном пространстве H.

Банахово пространство H с нормой $\|\cdot\|$ называется *гильбертовым*, если в нём можно определить такое скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, что $\|u\|^2 = (u,u)$ для всех $u \in H$.

Замечание 1.1. Понятие гильбертова пространства можно ввести и в комплексном случае. При этом H является линейным пространством над полем комплексных чисел и на нём определено комплексное скалярное произведение $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$, которое обладает теми же свойствами, что и вещественное, кроме свойства симметричности. В комплексном случае его надо заменить на свойство эрмитовой симметричности: $(u,v) = \overline{(v,u)}$, где черта означает комплексное сопряжение. В этом параграфе мы будем изучать вещественные гильбертовы пространства, но в дальнейшем нам встретятся и комплексные. Факты о комплексных гильбертовых пространствах, которые мы будем использовать, выводятся совершенно аналогично вещественному случаю или сразу следуют из него. •

Пример 1.2. Пусть G — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Пространство $L^2(G)$ является гильбертовым. Скалярное произведение в нём определяется следующим образом:

$$(u,v) = \int_G u\, v\, d\mu \quad \text{для всех} \quad u, v \in L^2(G),$$

где μ — n-мерная мера Лебега. Несложно видеть, что $(u,u) = \|u\|_2^2$.

Пространства $L^p(G)$ при $p \neq 2$ и $C(G)$ гильбертовыми не являются. •

Как проверить, является ли то или иное банахово пространство гильбертовым? Ответ на этот вопрос не очень сложен: в гильбертовом пространстве должно выполняться так называемое тождество параллелограмма, которое мы сейчас выведем. Пусть $\|\cdot\|$ — норма в банаховом пространстве H, а u и v — произвольные элементы этого пространства. Тогда

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = \|u\|^2 + 2\,(u,v) + \|v\|^2,$$
$$\|u-v\|^2 = (u-v, u-v) = \|u\|^2 - 2\,(u,v) + \|v\|^2.$$

Если мы сложим эти равенства, то получим *тождество параллелограмма*:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2.$$

Справедливо и обратное утверждение: если для всех элементов u и v банахова пространства H выполняется тождество параллелограмма, то H является гильбертовым пространством. При этом, скалярное произведение можно определить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(u, v) &= \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right).
\end{aligned}
$$

Доказательство этого факта предоставляем читателю.

Пример 1.3. Рассмотрим пространство $C[0,1]$ с нормой $\|u\|_C = \max_{x\in[0,1]} |u(x)|$. Попробуем ввести в этом пространстве согласованное с нормой скалярное произведение. Возьмём, например, $(u,v) = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$. Очевидно, что все условия из определения скалярного произведения выполняются, но это скалярное произведение не согласовано с нормой. В самом деле, для $u(x) = x$ мы получим, что $\|u\|_C^2 = 1$, а $(u,u) = \int_0^1 x^2\, dx = 1/3 \neq 1$.

Может быть нужно было иначе определить скалярное произведение? Покажем, что в этом пространстве согласованное с нормой скалярное произведение ввести нельзя. Для этого достаточно найти функции u и v из $C[0,1]$, для которых нарушалось бы тождество параллелограмма. Можно взять, например, $u(x) = x$ и $v(x) = 1 - x$. Тогда $\|u+v\|_C^2 + \|u - v\|_C^2 = 1 + 1 = 2$, а $2\,\|u\|_C^2 + 2\,\|v\|_C^2 = 2 + 2 = 4$. Таким образом, пространство $C[0,1]$ не является гильбертовым.

С помощью аналогичных рассуждений можно установить, что не являются гильбертовыми и пространства $L^p(0,1)$ при $p \in [1,\infty]$, $p \neq 2$. Заметим, что в случае пространства $L^\infty(0,1)$ можно использовать в тождестве параллелограмма те же функции u и v, что и для пространства $C[0,1]$, поскольку на непрерывных функциях нормы в этих пространствах совпадают. •

Упражнение 1.4. Пусть H — гильбертово пространство. Показать, что для любых $u, v \in H$ справедливо *неравенство Коши — Буняковского*:

$$
|(u,v)| \leqslant \|u\|\,\|v\|.
$$

Заметим, что если $H = L^2(G)$, то это неравенство является частным случаем неравенства Гёльдера. •

Пусть $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — конечный набор элементов какого-либо линейного пространства X над полем вещественных чисел. *Линейной комбинацией* этих элементов назовём выражение вида $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — произвольные вещественные числа. Если $\mathcal{U}$ — некоторое семейство (не обязательно конечное) элементов из X, то *линейной оболочкой* этого семейства называется множество всех линейных комбинаций (конечных) элементов из $\mathcal{U}$. Будем обозначать линейную оболочку через $\mathrm{Lin}(\mathcal{U})$.

Скажем, что элементы $x_1, \ldots, x_k$ являются *линейно независимыми*, если из равенства $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$ следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Семейство $\mathcal{U}$ элементов линейного пространства X называется линейно независимым, если линейно независимым является любой конечный набор элементов этого семейства.

Два элемента u и v гильбертова пространства H называются *ортогональными*, если $(u, v) = 0$. Семейство $\mathcal{U}$ элементов гильбертова пространства H называется *ортогональным*, если $(u, v) = 0$ для любых различных u и v из $\mathcal{U}$. Семейство $\mathcal{U}$ называется *нормированным*, если $\|u\| = 1$ для любого $u \in \mathcal{U}$. Семейство $\mathcal{U}$ называется *ортонормированным*, если оно является ортогональным и нормированным.

Упражнение 1.5. Показать, что любое ортонормированное семейство является линейно независимым. •

Лемма 1.6. *Если H — сепарабельное гильбертово пространство, то любое ортонормированное семейство $\{u_\alpha\} \subset H$ является не более чем счётным.*

▷ Поскольку семейство $\{u_\alpha\}$ является ортонормированным,

$$\|u_\alpha - u_\beta\|^2 = (u_\alpha - u_\beta, u_\alpha - u_\beta) = \|u_\alpha\|^2 + \|u_\beta\|^2 = 2$$

при $\alpha \neq \beta$. Следовательно шары $B(u_\alpha, 1/2)$ и $B(u_\beta, 1/2)$ в H не пересекаются при $\alpha \neq \beta$. Поэтому мощность множества шаров $\{B(u_\alpha, 1/2)\}$ равна мощности множества $\{u_\alpha\}$.

Поскольку пространство H сепарабельно, в нём существует счётное всюду плотное множество $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$. Так как множество $\{\psi_k\}$ плотно в H, в каждом шаре $B(u_\alpha, 1/2)$ содержится по крайней мере один элемент из семейства $\{\psi_k\}$. Поэтому $\operatorname{card}\{B(u_\alpha, 1/2)\} \leqslant \operatorname{card}\{\psi_k\} = \operatorname{card}\mathbb{N}$. Следовательно семейство $\{u_\alpha\}$ не более чем счётно. ◁

Определение 1.7. Семейство $\mathcal{U}$ элементов гильбертова пространства H называется *полным*, если его линейная оболочка плотна в H (то есть замыкание в H множества $\mathrm{Lin}(\mathcal{U})$ совпадает с H). •

Полное линейно независимое семейство $\{\varphi_\alpha\}$ в гильбертовом пространстве H называется *базисом*. Полное ортонормированное семейство называется *ортонормированным базисом*. Таким образом, согласно лемме 1.6, если H — сепарабельное гильбертово пространство, то любой ортонормированный базис в нём является не более чем счётным. Исследуем вопрос о существовании ортонормированного базиса в H.

Теорема 1.8. *Если H — сепарабельное гильбертово пространство, то в нём существует счётный ортонормированный базис.*

Доказательство. Так как пространство H сепарабельно, в нём существует счётное всюду плотное множество $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Выберем из этого множества полное линейно независимое семейство $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Для этого мы применим следующую процедуру: в качестве e_1 возьмём ψ_1 (без ограничения общности предположим, что $\psi_1 \neq 0$), а далее при каждом $m \in \mathbb{N}$ включим элемент ψ_m в семейство $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ только в том случае, когда $\psi_m \notin \mathrm{Lin}(\{\psi_1, \dots, \psi_{m-1}\})$. Очевидно, что $\mathrm{Lin}(\{\psi_k\}) = \mathrm{Lin}(\{e_k\})$, поэтому семейство $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является полным. Кроме того, по построению оно является линейно независимым.

Докажем теперь, что в H существует полное ортонормированное семейство $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Мы применим к семейству $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *процесс ортогонализации*. Будем строить φ_i таким образом, чтобы $\mathrm{Lin}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}) = \mathrm{Lin}(\{e_1, \dots, e_k\})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Положим $\varphi_1 = e_1/\|e_1\|$. Мы имеем право делить на $\|e_1\|$, так как семейство $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ линейно независимо и, следовательно, в нём нет нулевого элемента.

Чтобы найти φ_2 представим e_2 в виде $e_2 = a_1\varphi_1 + h$, где $a_1 \in \mathbb{R}$ и $(h, \varphi_1) = 0$. Такое представление возможно. В самом деле, можно взять $a_1 = (e_2, \varphi_1)$ и $h = e_2 - a_1\varphi_1$. Теперь определим $\varphi_2 = h/\|h\|$. Опять же заметим, что $h \neq 0$, так как элементы e_1 и e_2 линейно независимы. Таким образом, мы построили ортонормированное семейство $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ и $\mathrm{Lin}(\{\varphi_1, \varphi_2\}) = \mathrm{Lin}(\{e_1, e_2\})$.

Предположим теперь, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$ мы построили такое ортонормированное семейство $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, что $\mathrm{Lin}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}) = \mathrm{Lin}(\{e_1, \ldots, e_n\})$. Представим e_{n+1} в виде $e_{n+1} = g + h$, где $g \in \mathrm{Lin}(\{e_1, \ldots, e_n\})$ и $(h, \varphi_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, n$. Мы можем взять $g = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$ с $a_i = (e_{n+1}, \varphi_i)$ и $h = e_{n+1} - g$. Определим $\varphi_{n+1} = h/\|h\|$. Семейство $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ является ортонормированным и $\mathrm{Lin}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}) = \mathrm{Lin}(\{e_1, \ldots, e_{n+1}\})$. Таким образом, используя индукцию, мы можем построить такое ортонормированное семейство $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, что $\mathrm{Lin}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}) = \mathrm{Lin}(\{e_1, \ldots, e_k\})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку семейство $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является полным в H, полным является и семейство $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Это означает, что $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — базис в H. Теорема доказана. $\square$

Пусть $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная система (не обязательно полная) в гильбертовом пространстве H. Для любого $u \in H$ числа $\alpha_k = (u, \varphi_k)$ называются *коэффициентами Фурье*, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\varphi_k$ — *рядом Фурье* элемента u относительно системы $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Обозначим через S_n (или $S_n(u)$) n-ю частичную сумму этого ряда:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k.$$

Заметим, что, вообще говоря, $u \neq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\varphi_k$.

Лемма 1.9. *Для любой последовательности чисел $\gamma_k \in \mathbb{R}$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство:*

$$\|u - S_n\| \leqslant \|u - S'_n\|,$$

где $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k$. Другими словами, для каждого $n \in \mathbb{N}$ среди всех сумм S'_n, минимум величины $\|u - S'_n\|$ в H достигается на частичной сумме S_n ряда Фурье, то есть при $\gamma_k = \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$.

$\rhd$ В самом деле,

$$\begin{aligned}\|u - S'_n\|^2 &= \Big(u - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k, u - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k\Big) \\ &= \|u\|^2 - 2\Big(u, \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k\Big) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 = \|u\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \gamma_k(u, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \\ &= \|u\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k^2 - 2\gamma_k\alpha_k) = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \gamma_k)^2.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что среди всех γ_k правая часть этого равенства достигает своего минимума при $\gamma_k = \alpha_k$. $\lhd$

Заметим, что, положив $\gamma_k = \alpha_k$ в последнем равенстве доказательства, мы получим ещё одно важное свойство ряда Фурье, а именно,

$$\|u - S_n\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2. \qquad (*)$$

Поскольку левая часть этого равенства всегда неотрицательна, справедливо *неравенство Бесселя*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leqslant \|u\|^2.$$

Теорема 1.10. *Пусть $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная система в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Для того, чтобы эта система была полной в H, необходимо и достаточно, чтобы для любого $u \in H$ выполнялось равенство Парсеваля:*

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2,$$

где α_k — коэффициенты Фурье элемента u относительно системы $\{\varphi_k\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система в H и u — произвольный элемент из H. В силу полноты системы существует такая последовательность $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ линейных комбинаций элементов системы $\{\varphi_k\}$, что $\Phi_n \to u$ в H при $n \to \infty$. Полагая, если необходимо, некоторые числа γ_k равными нулю, мы можем считать, что $\Phi_n = \sum_{k=1}^{m(n)} \gamma_k\varphi_k$, где $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $m(n)$ — максимальный номер элемента φ_k, входящего в Φ_n, и $m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Согласно лемме 1.9

$$\|u - S_{m(n)}\| \leqslant \|u - \Phi_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

поэтому, учитывая $(*)$, мы получим:

$$\|u\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|u\|^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k^2 = \lim_{n\to\infty} \|u - S_{m(n)}\|^2 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть для произвольного $u \in H$ выполняется равенство Парсеваля. Тогда, учитывая $(*)$, мы получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u - S_n\|^2 = \|u\|^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 0.$$

Это означает, что u есть предел последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда Фурье. Поскольку каждая S_n является линейной комбинацией элементов системы $\{\varphi_k\}$, эта система полна в H. □

Теорема 1.11 (Теорема Рисса — Фишера)**.** *Пусть $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная, не обязательно полная система в гильбертовом пространстве H, и $\{\gamma_k\}$ — произвольная последовательность чисел, такая что $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$. Тогда существует такой элемент $u \in H$, что $u = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\varphi_k$, $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2$ и $(u, \varphi_k) = \gamma_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Введем обозначение:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k.$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2$ сходится, из критерия Коши следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такое $m_\varepsilon\in\mathbb{N}$, что $\sum_{k=m+1}^{\ell}\gamma_k^2<\varepsilon$ для всех $\ell>m>m_\varepsilon$. Поэтому

$$\|u_\ell-u_m\|^2=\Big\|\sum_{k=m+1}^{\ell}\gamma_k\varphi_k\Big\|^2=\sum_{k=m+1}^{\ell}\gamma_k^2<\varepsilon$$

для всех $\ell>m>m_\varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{u_k\}$ является фундаментальной в H. Из полноты H следует, что найдется такой элемент $u\in H$, что $u_n\to u$ в H при $n\to\infty$. Учитывая определение u_n, мы получаем, что

$$u=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\varphi_k=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\varphi_k\in H.$$

Зафиксируем теперь произвольное $k\in\mathbb{N}$. Несложно видеть, что $(u_n,\varphi_k)=\gamma_k$ при $n\geqslant k$ и $\lim_{n\to\infty}(u_n,\varphi_k)=\gamma_k$. Поэтому, используя неравенство Коши — Буняковского и учитывая, что $\|\varphi_k\|=1$, мы получим:

$$|(u,\varphi_k)-\gamma_k|=\lim_{n\to\infty}|(u,\varphi_k)-(u_n,\varphi_k)|=\lim_{n\to\infty}|(u-u_n,\varphi_k)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|=0.$$

Таким образом, $(u,\varphi_k)=\gamma_k$ и числа γ_k являются коэффициентами Фурье элемента u относительно системы $\{\varphi_k\}$. Тогда из $(*)$ следует, что

$$\|u\|^2-\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2=\lim_{n\to\infty}\big(\|u\|^2-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^2\big)=\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|^2=0,$$

и теорема полностью доказана. □

Определение 1.12. Система $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ элементов гильбертова пространства H называется *тотальной*, если для любого $u\in H$ из того, что $(u,\varphi_k)=0$ для всех $k\in\mathbb{N}$, следует, что $u=0$ в H. •

Теорема 1.13. *Для того, чтобы ортонормированная система $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ была полной в сепарабельном гильбертовом пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы она была тотальной.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что ортонормированная система $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ полна в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Покажем, что она является тотальной. Возьмём произвольный элемент $u\in H$. Из полноты системы $\{\varphi_k\}$ следует, что справедливо равенство Парсеваля:

$$\|u\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2,$$

где $\alpha_k=(u,\varphi_k)$. Если $\alpha_k=0$ для всех $k\in\mathbb{N}$, то $\|u\|=0$ и, следовательно, $u=0$ в H. Поэтому система $\{\varphi_k\}$ является тотальной в H.

Достаточность. Пусть ортонормированная система $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является тотальной в H. Предположим, что она не является полной. Тогда найдется элемент $u \in H$, для которого нарушается равенство Парсеваля. Поскольку неравенство Бесселя всё равно должно выполняться, имеет место строгое неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \|u\|^2 < \infty,$$

где $\alpha_k = (u, \varphi_k)$. В то же время, как следует из теоремы Рисса — Фишера, существует такой элемент $v \in H$, что $v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|v\|^2,$$

где $\alpha_k = (v, \varphi_k)$. Тогда

$$(u - v, \varphi_k) = (u, \varphi_k) - (v, \varphi_k) = \alpha_k - \alpha_k = 0$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Из тотальности системы $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ следует, что $u = v$ в H. Поэтому $\|u\| = \|v\|$, чего быть не может, так как $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \|u\|^2$. Это опровергает наше предположение о том, что система $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ не является полной. □

2 Тригонометрические ряды Фурье

2.1 Тригонометрическая система функций

В этом параграфе мы будем изучать периодические функции, определённые на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *периодической*, если существует такое число $\tau \in \mathbb{R}_+$, что $f(x + \tau) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Это число τ называется *периодом* функции f. Для краткости периодическую функцию с периодом τ мы будем называть *τ-периодической*.

Вообще говоря, согласно нашему определению периодическая функция имеет бесконечное число периодов. Например, периодами функции $\sin x$ являются числа 2π, 4π, 6π и $2k\pi$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что периодами τ-периодической функции являются также числа $k\tau$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Обычно периодом называют наименьший из возможных периодов. У постоянной функции периодом является любое положительное вещественное число, а наименьший период, таким образом, равен нулю.

Замечание 2.1. Существуют непостоянные функции, у которых числа τ_1 и τ_2 являются периодами, $\tau_1 < \tau_2$ и $\tau_2 \neq k\tau_1$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Примером может служить функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что $f(x) = 1$ при x являющимся алгебраическим числом и $f(x) = 0$ при всех остальных x. Любое алгебраическое число является периодом этой функции. В то же время, найдутся такие алгебраические числа τ_1 и τ_2, что $\tau_2 \neq k\tau_1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. •

Если функция f является τ-периодической и $\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\mu < \infty$, то очевидно, что $f(x) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Здесь μ — одномерная мера Лебега. Поэтому не имеет смысла говорить о периодических функциях из пространств $L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$. Тем не менее, можно говорить о τ-периодических функциях из пространств $L^p(I)$, $p \in [1, \infty)$, где I — отрезок вещественной прямой, длина которого равна τ.

Упражнение 2.2. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — τ-периодическая функция. Показать, что

$$\int_{I_1} |f|\, d\mu = \int_{I_2} |f|\, d\mu$$

для произвольных отрезков I_1 и I_2, длина которых равна τ. •

Поскольку функции из пространств $L^p(I)$ определены с точностью до множества меры нуль, равенство $f(x+\tau) = f(x)$ должно выполняться лишь для почти всех $x \in \mathbb{R}$, если речь идет о τ-периодической функции из этого пространства.

Рассмотрим *тригонометрическую систему* функций:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \dots,\ \cos kx,\ \sin kx,\ \dots$$

Эти функции являются 2π-периодическими, поэтому мы можем изучать их на произвольном отрезке длины 2π. Возьмём, например, отрезок $[-\pi, \pi]$ и рассмотрим эту систему в гильбертовом пространстве $L^2(-\pi, \pi)$. Нетрудно видеть, что она является ортогональной, но не нормированной. В самом деле, для всех $k, m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, \cos mx\, dx = \begin{cases} \pi, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, \sin mx\, dx = \begin{cases} \pi, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, \cos mx\, dx = 0.$$

Интегралы здесь понимаются в смысле Лебега, хотя мы и воспользовались обозначением, под которым раньше понимался интеграл Римана. Из соображений удобства мы и дальше будем так делать, однако все интегралы будут интегралами Лебега. Заметим, что в приведённых равенствах интегралы Лебега и Римана совпадают.

Из этих равенств следует, что система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \dots,\ \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},\ \dots$$

является ортонормированной в $L^2(-\pi, \pi)$. Согласно результатам предыдущего параграфа, каждой функции $f \in L^2(-\pi, \pi)$ можно поставить в соответствие её ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big), \qquad (*)$$

где коэффициенты Фурье определены следующим образом:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx.$$

Эти соотношения по внешнему виду отличаются от того, что было в параграфе 1. Там в гильбертовом пространстве H ряд Фурье функции f имел вид $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \varphi_m$, где $\alpha_m =$

(f, φ_m). Несложно проверить, что это те же самые соотношения. В самом деле, пусть, например, $\varphi_m(x) = \pi^{-1/2} \cos mx$, $m > 1$. В нашем случае $H = L^2(-\pi, \pi)$, поэтому

$$\alpha_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos my \, dy.$$

Таким образом,

$$\alpha_m \varphi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos my \, dy \, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos my \, dy \cos mx = a_m \cos mx.$$

Ряд Фурье относительно тригонометрической системы функций мы будем называть *тригонометрическим рядом Фурье*. Почему в $(*)$ мы не поставили знак равенства? Дело в том, что мы пока не доказали полноту тригонометрической системы в $L^2(-\pi, \pi)$. Этим мы далее и займемся. Заметим ещё, что даже если мы установим полноту, равенство в $(*)$, вообще говоря, будет справедливо лишь для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$, поскольку функции из $L^2(-\pi, \pi)$ определены почти всюду.

Тригонометрическим полиномом степени m (или порядка m) называется функция вида

$$c_0 + \sum_{k=1}^{m} \big(c_k \cos kx + d_k \sin kx\big),$$

где $c_k, d_k \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$. Каждый тригонометрический полином является 2π-периодической функцией. Нетрудно видеть, что произведение двух тригонометрических полиномов порядка m_1 и m_2 является тригонометрическим полиномом порядка $m_1 + m_2$, например, $2 \cos x \sin x = \sin 2x$. Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться формулой Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Предлагаем читателю самостоятельно установить справедливость утверждения из следующего упражнения.

Упражнение 2.3. Если $P(y)$ — алгебраический полином, а $T(x)$ — тригонометрический полином, то функция $P(T(x))$ будет снова тригонометрическим полиномом. •

Докажем теперь одну из классических теорем анализа.

Теорема 2.4 (Вейерштрасс)**.** *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная 2π-периодическая функция, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином T, что $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Шаг 1. Сначала докажем утверждение теоремы для случая, когда f — чётная функция, то есть $f(x) = f(-x)$. Рассмотрим f на отрезке $[0, \pi]$. Определим на отрезке $[-1, 1]$ функцию $g(t) = f(\arccos t)$. Как композиция двух непрерывных функций эта функция непрерывна на $[-1, 1]$, поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический полином P, что

$$\max_{t \in [-1,1]} |g(t) - P(t)| < \varepsilon.$$

Положив $t = \cos x$ и заметив, что $g(\cos x) = f(x)$ при $x \in [0, \pi]$, мы получим неравенство:

$$\max_{x \in [0,\pi]} |f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon.$$

Поскольку функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ являются чётными, из этого неравенства следует, что

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon.$$

Воспользовавшись теперь тем, что функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ являются 2π-периодическими, мы получим утверждение теоремы с $T(x) = P(\cos x)$.

Шаг 2. Пусть теперь f — произвольная непрерывная 2π-периодическая функция. Определим чётные непрерывные 2π-периодические функции:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) \quad \text{и} \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)\,\sin x.$$

Для каждой из них справедливо утверждение, доказанное на первом шаге. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие тригонометрические полиномы T_1 и T_2, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f_1(x) - T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{и} \quad \max_{x\in\mathbb{R}} |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Заметим теперь, что

$$f_1(x)\,\sin^2 x + f_2(x)\,\sin x = f(x)\,\sin^2 x.$$

Используя тригонометрический полином $T_3(x) = T_1(x)\,\sin^2 x + T_2(x)\,\sin x$ и учитывая очевидное неравенство $|\sin x| \leqslant 1$, мы получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}\max_{x\in\mathbb{R}} &|f(x)\,\sin^2 x - T_3(x)| \\ &\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}} |f_1(x)\,\sin^2 x - T_1(x)\,\sin^2 x| + \max_{x\in\mathbb{R}} |f_2(x)\,\sin x - T_2(x)\,\sin x| \\ &\qquad\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}} |f_1(x) - T_1(x)| + \max_{x\in\mathbb{R}} |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Эта оценка справедлива для любой непрерывной 2π-периодической функции и, в частности, возможно с другим тригонометрическим полиномом T_4, для функции $f(x + \pi/2)$. Поэтому для тригонометрического полинома $T_5(x) = T_4(x - \pi/2)$ имеет место оценка:

$$\begin{aligned}\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)\,\cos^2 x - T_5(x)| &= \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)\,\sin^2(x - \pi/2) - T_4(x - \pi/2)| \\ &= \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x + \pi/2)\,\sin^2 x - T_4(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Заметив теперь, что $f(x) = f(x)\,\sin^2 x + f(x)\,\cos^2 x$, и положив $T_6(x) = T_3(x) + T_5(x)$, мы получим:

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T_6(x)| \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)\,\sin^2 x - T_3(x)| + \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)\,\cos^2 x - T_5(x)| < \varepsilon.$$

Поскольку T_6 — тригонометрический полином, теорема доказана. □

Справедливо и обращение теоремы Вейерштрасса.

Теорема 2.5. *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином T, что $\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$, то f — непрерывная 2π-периодическая функция.*

Доказательство. Согласно условию, для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется такой тригонометрический полином T_k, что $\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T_k(x)| < 1/k$. Это означает, что последовательность $\{T_k\}$ сходится к функции f равномерно на $\mathbb{R}$. Поскольку любой тригонометрический полином является непрерывной функцией, непрерывна и функция f. Осталось показать её 2π-периодичность. Возьмём произвольное $x \in \mathbb{R}$ и покажем, что $f(x + 2\pi) = f(x)$. Тригонометрические полиномы являются 2π-периодическими функциями, поэтому для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}\bigl|f(x+2\pi) - f(x)\bigr| &\leqslant \bigl|f(x+2\pi) - T_k(x)\bigr| + \bigl|T_k(x) - f(x)\bigr| \\ &= \bigl|f(x+2\pi) - T_k(x+2\pi)\bigr| + \bigl|T_k(x) - f(x)\bigr| < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}.\end{aligned}$$

Устремляя k к бесконечности, мы получим, что $f(x + 2\pi) = f(x)$. □

Теперь, как следствие теоремы Вейерштрасса, мы можем доказать полноту тригонометрической системы в $L^2(-\pi, \pi)$. Заметим, что тригонометрический полином есть линейная комбинация функций, входящих в тригонометрическую систему. Поэтому для доказательства её полноты достаточно показать, что любую функцию из $L^2(-\pi, \pi)$ можно сколь угодно точно по норме этого пространства приблизить тригонометрическим полиномом.

Теорема 2.6. *Тригонометрическая система полна в пространстве $L^2(-\pi, \pi)$.*

Доказательство. Возьмём произвольную функцию $u \in L^2(-\pi, \pi)$. Необходимо показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином T, что $\|u - T\|_2 < \varepsilon$.

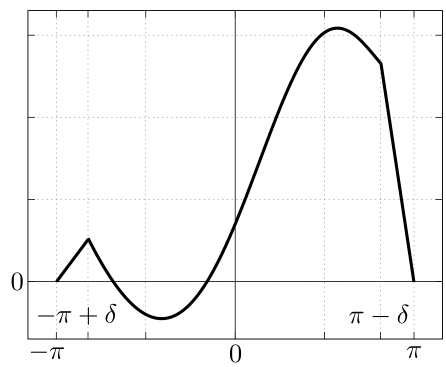

Рис. 1: Функция w_δ.

Поскольку пространство непрерывных функций плотно в $L^2(-\pi, \pi)$, найдется такая функция $v \in C[-\pi, \pi]$, что $\|u - v\|_2 < \varepsilon/3$. Функция v, однако, не является периодической. Построим такую непрерывную функцию w, что $w(-\pi) = w(\pi) = 0$ и $\|v - w\|_2 < \varepsilon/3$. Это можно сделать следующим образом. Для $\delta \in (0, \pi)$ определим непрерывную функцию w_δ так, что $w_\delta(-\pi) = w_\delta(\pi) = 0$, $w_\delta(x) = v(x)$ при $x \in (-\pi+\delta, \pi-\delta)$, а на отрезках $[-\pi, -\pi+\delta]$ и $[\pi-\delta, \pi]$ она является аффинной (см. рис. 1). При этом $\max_{x\in[-\pi,\pi]} |w_\delta(x)| \leqslant \max_{x\in[-\pi,\pi]} |v(x)|$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |v(x) - w_\delta(x)|^2\,dx &= \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} |v(x) - w_\delta(x)|^2\,dx \\ &\quad + \int_{\pi-\delta}^{\pi} |v(x) - w_\delta(x)|^2\,dx \leqslant 8\delta \max_{x\in[-\pi\pi]} |v(x)|^2.\end{aligned}$$

Выберем δ настолько маленьким, чтобы $8\delta \max_{x\in[-\pi,\pi]} |v(x)|^2 < (\varepsilon/3)^2$ и возьмём в качестве w соответствующую функцию w_δ. Тогда $\|v - w\|_2 < \varepsilon/3$. Функцию w можно продолжить периодически на всю числовую ось, поскольку $w(-\pi) = w(\pi) = 0$. Как следует из теоремы Вейерштрасса 2.4, найдется такой тригонометрический полином T, что

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |w(x) - T(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |w(x) - T(x)| < \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2.$$

Поэтому
$$\|w-T\|_2^2=\int_{-\pi}^{\pi}|w(x)-T(x)|^2\,dx\leqslant 2\pi\max_{x\in[-\pi\pi]}|w(x)-T(x)|^2<\Big(\frac{\varepsilon}{3}\Big)^2.$$
Собирая вместе полученные неравенства, мы получим:
$$\|u-T\|_2\leqslant\|u-v\|_2+\|v-w\|_2+\|w-T\|_2<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$
что и требовалось доказать. □

Доказанная теорема позволяет утверждать, что для тригонометрической системы в $L^2(-\pi,\pi)$ справедливы все утверждения, доказанные в предыдущем параграфе для полных ортонормированных систем в сепарабельных гильбертовых пространствах. В частности,

1. тригонометрический ряд Фурье, соответствующий функции $f\in L^2(-\pi,\pi)$, сходится к f в $L^2(-\pi,\pi)$ и
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos kx+b_k\sin kx\big)\quad\text{для почти всех}\quad x\in[-\pi,\pi],$$
где
$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx;$$
2. для каждой функции $f\in L^2(-\pi,\pi)$ справедливо равенство Парсеваля:
$$\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),$$
где a_k и b_k — определённые выше коэффициенты Фурье функции f относительно тригонометрической системы функций.

Полученные результаты находят применение в самых неожиданных разделах математики и физики. Мы ограничимся демонстрацией того, как их можно использовать для вычисления суммы числовых рядов.

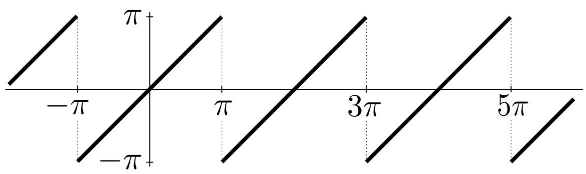

Рис. 2: Периодическая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ при $x\in(-\pi,\pi]$.

Пример 2.7. Рассмотрим периодическую функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такую что $f(x)=x$ при $x\in(-\pi,\pi]$ (см. рис. 2). Очевидно, что $f\in L^2(-\pi,\pi)$, поэтому мы можем разложить её в тригонометрический ряд Фурье. Несложно посчитать коэффициенты Фурье:
$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx\,dx=\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,(\sin kx)'\,dx=-\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=0,$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kx\,dx=-\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,(\cos kx)'\,dx=-\frac{2}{k}(-1)^k+\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=\frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$
Заметим, что равенство нулю коэффициентов a_k сразу следует из нечётности функции f и чётности функций $x\mapsto\cos kx$. Поскольку $\|f\|_2^2=2\pi^3/3$, равенство Парсеваля позволяет заключить, что
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$
•

2.2 Поточечная сходимость ряда Фурье

Сходимость ряда Фурье в гильбертовом пространстве $L^2(-\pi,\pi)$, вообще говоря, не позволяет судить о его сходимости в какой-нибудь конкретной точке. Это связано с тем, что функции из этого пространства определены лишь почти всюду, и не имеет смысла говорить об их значении в одной точке. В точке они могут иметь произвольное значение, которое никак не влияет на саму функцию, рассматриваемую как элемент пространства $L^2(-\pi,\pi)$.

Однако, члены тригонометрического ряда, как и его частичные суммы, являются непрерывными функциями, которые определены в каждой точке. Поэтому можно поставить вопрос о сходимости этого ряда в выбранной точке.

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция и $f\in L^1(-\pi,\pi)$. В этом случае определены её коэффициенты Фурье, которые, как и ранее, мы обозначим через a_k и b_k. Обозначим через $S_n(f,x)$ частичную сумму ряда Фурье функции f в некоторой точке $x\in\mathbb{R}$:

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\,\cos kx+b_k\,\sin kx\big).$$

Эту формулу можно переписать в более удобном виде. Воспользовавшись выражениями для коэффициентов Фурье, мы получим:

$$\begin{aligned}S_n(f,x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\cos kt\,dt\,\cos kx+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\sin kt\,dt\,\sin kx\Big)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\cos k(t-x)\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\Big(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\Big)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(y+x)\Big(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ky\Big)\,dy.\end{aligned}$$

Под интегралом в правой части стоит 2π-периодическая функция, поэтому интеграл от неё по любому отрезку длиной 2π будет одним о тем же. Следовательно мы можем убрать x из пределов интегрирования. Таким образом,

$$S_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\,D_n(y)\,dy,$$

где

$$D_n(y)=\frac{1}{2\pi}\Big(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ky\Big).$$

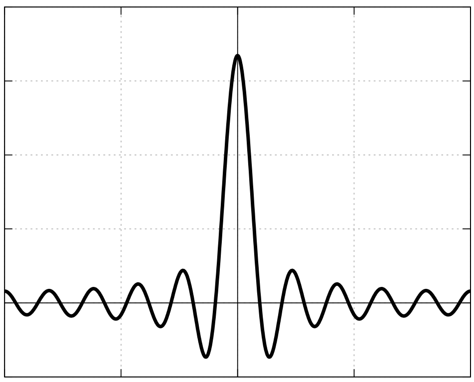

Рис. 3: Функция D_{10}.

Интеграл в выражении для $S_n(f,x)$ называется *интегралом Дирихле*, а $D_n(y)$ — *ядром Дирихле*. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ функция D_n является 2π-периодической и чётной. На рис. 3 изображена функция D_n на отрезке $[-\pi,\pi]$ при $n=10$.

Заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_n(y)\,dy=1$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, поскольку $\int_{-\pi}^{\pi} \cos ky\, dy = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, легко вычислить, что

$$D_n(0) = \frac{2n+1}{2\pi}.$$

Выражение для D_n можно упростить. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что

$$D_n(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)y}{\sin y/2}.$$

Мы уже выводили подобные формулы, используя формулу Эйлера и формулу суммы геометрической прогрессии.

Для того, чтобы вывести ещё одно интересное свойство ядра Дирихле, нам потребуется одно вспомогательное утверждение, которое, впрочем, имеет самостоятельное значение и часто используется в анализе.

Лемма 2.8 (Риман — Лебег). *Пусть $f \in L^1(a,b)$, где $[a,b]$ — произвольный отрезок в $\mathbb{R}$. Тогда*

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b f(t)\cos pt\, dt = \lim_{p\to\infty} \int_a^b f(t)\sin pt\, dt = 0.$$

$\triangleright$ Докажем это утверждение, например, для косинуса. Предположим сначала, что $f \in C^1[a,b]$. Тогда, интегрируя по частям, мы получим:

$$\int_a^b f(t)\cos pt\, dt = \frac{1}{p}\int_a^b f(t)\,(\sin pt)'\, dt = \frac{1}{p} f(t)\, \sin pt\,\Big|_{t=a}^{t=b} - \frac{1}{p}\int_a^b f'(t)\, \sin pt\, dt.$$

Правая часть в этом равенстве стремится к нулю при $p \to \infty$, поскольку $1/p \to 0$, а функция f и её производная ограничены.

Пусть теперь f — произвольная функция из $L^1(a,b)$. Пространство непрерывных функций $C[a,b]$ плотно в $L^1(a,b)$, поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g \in C[a,b]$, что $\|f-g\|_1 < \varepsilon/4$. В то же время, согласно теореме Вейерштрасса найдется такой алгебраический полином h, что $\max_{t\in[a,b]} |g(t)-h(t)| < \varepsilon/(4(b-a))$. Таким образом,

$$\|f-h\|_1 \leqslant \|f-g\|_1 + \|g-h\|_1 < \frac{\varepsilon}{4} + \int_a^b |g(t)-h(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Алгебраические полиномы являются непрерывно дифференцируемыми функциями, поэтому $h \in C^1[a,b]$. Так как мы уже доказали утверждение для функций из $C^1[a,b]$, найдется такое число p_ε, что

$$\Big|\int_a^b h(t)\cos pt\, dt\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $p > p_\varepsilon$. Поэтому

$$\Big|\int_a^b f(t)\cos pt\, dt\Big| \leqslant \Big|\int_a^b h(t)\cos pt\, dt\Big| + \int_a^b |f(t)-h(t)|\,|\cos pt|\, dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $p > p_\varepsilon$. Но это и означает, что $\int_a^b f(t)\cos pt\, dt \to 0$ при $p\to\infty$. $\triangleleft$

Утверждение леммы Римана — Лебега можно наглядно продемонстрировать следующим образом. В выражении $f(t)\cos pt$ функция f играет роль амплитуды, а p — частоты колебаний. При интегрировании этого выражения по отрезку $[a,b]$ мы должны найти площадь подграфика, причём площадь выше оси t взять с плюсом, а ниже — с минусом. Чем больше число p, тем ближе будут эти площади по абсолютной величине и тем ближе к нулю будет интеграл.

Отметим также, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция и $f \in L^1(-\pi,\pi)$, то из леммы Римана — Лебега следует, что коэффициенты Фурье a_k и b_k этой функции стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Лемма 2.9. *Для любого $\delta \in (0,\pi)$ и произвольного отрезка $[a,b] \subset [-\pi,\pi] \setminus (-\delta,\delta)$ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b D_n(t)\,dt = 0.$$

$\triangleright$ Поскольку $|\sin t/2| \geqslant \sin\delta/2$ при $t \in [-\pi,\pi] \setminus (-\delta,\delta)$, функция $t \mapsto 1/\sin(t/2)$ является элементом пространства $L^1(a,b)$, и доказываемое утверждение сразу следует из леммы Римана — Лебега. $\triangleleft$

Используя лемму Римана — Лебега, мы можем вывести признак сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.

Теорема 2.10 (Дини)**.** *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, $f \in L^1(-\pi,\pi)$, $x_0 \in [-\pi,\pi]$ и выполняется условие Дини:*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x_0+t)-A|}{|t|}\,dt < \infty$$

для некоторых $A \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$. Тогда $S_n(f,x_0) \to A$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Используя представление частичных сумм тригонометрического ряда Фурье через интеграл Дирихле, мы получим:

$$\begin{aligned}S_n(f,x_0) - A &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)\,dt - A = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x_0+t)-A\big)D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x_0+t)-A\big)\,\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,\sin(n+1/2)t\,dt,\end{aligned}$$

где

$$F(t) = \frac{f(x_0+t)-A}{\sin t/2} = \frac{f(x_0+t)-A}{t}\,\frac{t}{\sin t/2}.$$

Второй сомножитель в этом выражении является ограниченной функцией, а первый, как следует из условия Дини, принадлежит $L^1(-\pi,\pi)$. Поэтому $F \in L^1(-\pi,\pi)$, и утверждение теоремы следует из леммы Римана — Лебега. $\square$

Заметим, что при использовании теоремы Дини обычно в качестве числа A берут $f(x_0)$. Однако, поскольку функции из $L^1(-\pi,\pi)$ определены с точностью до значений на множестве меры нуль, так можно делать не для всех, а только для почти всех $x_0 \in [-\pi,\pi]$. Если же дополнительно известно, что f непрерывна, то можно смело брать $A = f(x_0)$. Может показаться, и это без доказательства утверждается в некоторых учебниках, что функция является непрерывной в точке, если она удовлетворяет в ней условию Дини. Как показывает следующий пример, это не так.

Пример 2.11. Рассмотрим функцию $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, такую что $f(0) = 0$, $f(-x) = f(x)$ и

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in x \in G, \\ 0, & x \in (0, \pi] \setminus G, \end{cases}$$

где $G = \cup_{k=1}^{\infty} [1/k, 1/k + 1/k^3]$. Очевидно, что $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Проверим, что f удовлетворяет условию Дини в точке $x_0 = 0$ с $A = 0$ и, например, $\delta = \pi$. В самом деле,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(t)|}{|t|}\, dt = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/k}^{1/k+1/k^3} \frac{dt}{t} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + 1/k^2) < \infty,$$

поскольку ряд в правой части сходится. Несмотря на то, что условие Дини выполнено, функция f является разрывной в точке 0, поскольку сколь угодно близко к нулю есть точки, где она принимает значения 1 и 0. Даже исправление этой функции на множестве меры нуль не поможет сделать её непрерывной. •

Когда функция f терпит разрыв первого рода в точке x_0, условие Дини не выполняется, поэтому применить предыдущую теорему нельзя. Однако можно воспользоваться следующим её обобщением:

Теорема 2.12 (Вторая теорема Дини)**.** *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, $f \in L^1(-\pi, \pi)$, $x_0 \in [-\pi, \pi]$ и выполняется второе условие Дини:*

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) - A_+|}{|t|}\, dt < \infty, \qquad \int_{-\delta}^{0} \frac{|f(x_0 + t) - A_-|}{|t|}\, dt < \infty$$

для некоторых $A_+, A_- \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$. Тогда $S_n(f, x) \to (A_+ + A_-)/2$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Поскольку ядро Дирихле — чётная функция,

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)\, dt = \int_0^{\pi} D_n(t)\, dt = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$S_n(f, x_0) - \frac{A_- + A_+}{2} = \int_{-\pi}^{0} \big(f(x_0 + t) - A_-\big) D_n(t)\, dt + \int_0^{\pi} \big(f(x_0 + t) - A_+\big) D_n(t)\, dt.$$

Опираясь на лемму Римана — Лебега и второе условие Дини, так же как и в доказательстве предыдущей теоремы, мы получим, что каждый интеграл в правой части последнего выражения стремится к нулю при $n \to \infty$. □

Числа A_- и A_+ в утверждении доказанной теоремы являются пределами функции f в точке x_0 слева и справа соответственно, если эти пределы существуют. Очевидно, что первая теорема Дини следует из второй при $A_- = A_+ = A$.

Пример 2.13. Как и в примере 2.7 рассмотрим 2π-периодическую функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такую что $f(x) = x$ при $x \in (-\pi, \pi]$. Эта функция непрерывна в точке $x_0 = \pi/2$, поэтому мы можем воспользоваться теоремой Дини 2.10 для исследования сходимости ряда Фурье в этой точке. Возьмём $A = f(x_0) = \pi/2$ и произвольное $\delta \in (0, \pi/2)$, тогда

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) - A|}{|t|}\, dt = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\pi/2 + t - \pi/2|}{|t|}\, dt = 2\delta < \pi < \infty.$$

Следовательно, $S_n(f,\pi/2) \to \pi/2$ при $n \to \infty$. Используя вычисленные в примере 2.7 выражения для коэффициентом ряда Фурье, мы получаем, что

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\,\sin\frac{k\pi}{2} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{2m-1}\,\sin\frac{(2m-1)\pi}{2} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{2m-1}\,(-1)^{m+1}.$$

Таким образом,

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Возьмём теперь точку $x_0 = \pi$. В этой точке функция f терпит разрыв и $f(x_0 \mp 0) = \pm\pi$. Нетрудно проверить, что выполняются условия второй теоремы Дини 2.12 с $A_+ = -\pi$ и $A_- = \pi$. Поэтому, согласно этой теореме,

$$0 = \frac{A_+ + A_-}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\,\sin k\pi.$$

Но $\sin k\pi = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то есть это равенство тривиально и лишь подтверждает вывод теоремы 2.12. •

Теорема 2.14 (Принцип локализации). *Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодические функции, $x_0 \in [-\pi,\pi]$, $f, g \in L^1(-\pi,\pi)$ и $f = g$ почти всюду на некотором интервале, содержащем точку x_0. Тогда ряды Фурье функций f и g сходятся или расходятся в точке x_0 одновременно, и если они сходятся, то их суммы совпадают.*

Доказательство. Обозначим через $S_n(f,x_0)$ и $S_n(g,x_0)$ значения n-х частичных сумм рядов Фурье в точке x_0 функций f и g соответственно. Пусть δ — такое положительное число, что $f(x_0+t) = g(x_0+t)$ при почти всех $t \in (-\delta,\delta)$. Тогда

$$\begin{aligned} S_n(f,x_0) - S_n(g,x_0) &= \int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x_0+t) - g(x_0+t)\big)\,D_n(t)\,dt \\ &= \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)}\big(f(x_0+t) - g(x_0+t)\big)\,D_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} F(t)\,\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}\,dt, \end{aligned}$$

где $F(t) = f(x_0+t) - g(x_0+t)$. Поскольку $|\sin t/2| \geqslant \sin\delta/2$ при $t \in [-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)$, а функции f и g принадлежат $L^1(-\pi,\pi)$, функция $F(t)/\sin(t/2)$ интегрируема на множестве $[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)$. В силу леммы Римана — Лебега 2.8 интеграл в последнем равенстве стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому $S_n(f,x_0) - S_n(g,x_0) \to 0$ при $n \to \infty$, откуда сразу следует утверждение теоремы. □

Принцип локализации представляет собой довольно интересное свойство рядов Фурье. При определении коэффициентов этих рядов используются значения разлагаемой функции на всём отрезке $[-\pi,\pi]$, поскольку приходится вычислять интегралы именно по этому отрезку. То есть, разложение в ряд Фурье имеет нелокальный характер. Доказанная теорема однако утверждает, что на значение суммы ряда Фурье в точке влияют значения разлагаемой функции только в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки. Вне этой окрестности функцию можно как угодно изменить (сохранив интегрируемость), и это не изменит суммы ряда Фурье в самой точке. Таким образом, разложение в ряд Фурье имеет всё-таки локальный характер, поэтому теорема и называется принципом локализации.

2.3 Равномерная сходимость ряда Фурье

Изучим теперь вопрос о сходимости ряда Фурье не в какой-то отдельной точке, а на всём отрезке $[-\pi, \pi]$. Речь идёт о равномерной сходимости на этом отрезке. Например, если разлагаемая функция f удовлетворяет в каждой точке условию Дини в некотором смысле равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье будет сходиться к ней равномерно. Однако проверить равномерное выполнение условия Дини не очень просто, хотя и возможно. Можно наложить на f более привычное условие, что мы и сделаем.

Обозначим через $C^{0,\alpha}[-\pi, \pi]$, $\alpha \in (0, 1)$, пространство непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций f, которые удовлетворяют *условию Гёльдера*:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x - y|^\alpha$$

для всех x и y из отрезка $[-\pi, \pi]$ и некоторой константы C. При $\alpha = 1$ условие Гёльдера называется *условием Липшица*. Для произвольного $\alpha \in (0, 1]$ пространство $C^{0,\alpha}[-\pi, \pi]$ является банаховым с нормой

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}[-\pi,\pi]} = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)| + \max_{x,y\in[-\pi,\pi]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ пространство $C^{0,\alpha}[-\pi, \pi]$ превращается в обычное пространство непрерывных функций $C[-\pi, \pi]$. Часто $C^{0,\alpha}[-\pi, \pi]$ при $\alpha \in (0, 1)$ называют пространством Гёльдера с показателем α, а $C^{0,1}[-\pi, \pi]$ — пространством Липшица, которое иногда обозначается через $Lip[-\pi, \pi]$. Для этих пространств справедливы включения:

$$C^{0,\alpha}[-\pi, \pi] \subset C^{0,\beta}[-\pi, \pi] \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Теорема 2.15. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная 2π-периодическая функция и $f \in C^{0,\alpha}[-\pi, \pi]$ с $\alpha \in (0, 1]$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $[-\pi, \pi]$, а значит, и на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ и произвольного $\delta \in (0, \pi)$ мы имеем:

$$S_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x + t) - f(x)\big)\, D_n(t)\, dt = I_n^\delta(x) + J_n^\delta(x),$$

где

$$I_n^\delta(x) = \int_{-\delta}^{\delta} \big(f(x + t) - f(x)\big)\, D_n(t)\, dt \quad \text{и} \quad J_n^\delta(x) = \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} \big(f(x + t) - f(x)\big)\, D_n(t)\, dt.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберём такое $\delta \in (0, \pi)$, что $|I_n^\delta(x)| < \varepsilon$ и $|J_n^\delta(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$ и всех $n > N$, где N — некоторое не зависящее от x натуральное число. Отсюда будет сразу следовать утверждение теоремы.

Начнём с I_n^δ. Поскольку $f \in C^{0,\alpha}[-\pi, \pi]$, найдётся такая постоянная C, что $|f(x + t) - f(x)| \leqslant C|t|^\alpha$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$. Поэтому

$$|I_n^\delta(x)| \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \big|f(x + t) - f(x)\big|\, |D_n(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\big|f(x + t) - f(x)\big|}{|\sin t/2|}\, dt \leqslant \frac{C}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|t|^\alpha}{|\sin t/2|}\, dt.$$

При $\alpha > 0$ функция $t \mapsto |t|^\alpha/|\sin t/2|$ интегрируема, поэтому в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдётся такое $\delta > 0$, что $|I_n^\delta(x)| < \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех

$x \in [-\pi, \pi]$. Итак, мы уже выбрали δ и не можем в дальнейшем его менять. Заметим также, что δ не зависит ни от x, ни от n.

Рассмотрим теперь J_n^δ. Разобьём множество $[-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$ на $2k$ отрезков $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, 2k$, одинаковой длины $\lambda_k = (\pi - \delta)/k$. В силу того, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка α с постоянной C, справедлива оценка:

$$\bigl|F(x,t) - F(x,a_i)\bigr| \leqslant C\,\lambda_k^\alpha \quad \text{при} \quad t \in [a_i, b_i], \quad i = 1, \ldots, 2k,$$

где $F(x,t) = f(x+t) - f(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
|J_n^\delta(x)| &\leqslant \sum_{i=1}^{2k} \Bigl| \int_{a_i}^{b_i} F(x,t)\, D_n(t)\, dt \Bigr| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{2k} \Bigl| \int_{a_i}^{b_i} \bigl(F(x,t) - F(x,a_i)\bigr)\, D_n(t)\, dt \Bigr| + \sum_{i=1}^{2k} \Bigl| \int_{a_i}^{b_i} F(x,a_i)\, D_n(t)\, dt \Bigr| \\
&\leqslant C\,\lambda_k^\alpha \sum_{i=1}^{2k} \int_{a_i}^{b_i} |D_n(t)|\, dt + \sum_{i=1}^{2k} |F(x,a_i)| \Bigl| \int_{a_i}^{b_i} D_n(t)\, dt \Bigr|.
\end{aligned}$$

На множестве $[-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$ функция $|D_n|$ ограничена константой $\bigl(2\pi \sin(\delta/2)\bigr)^{-1}$. Следовательно,

$$|J_n^\delta(x)| \leqslant C\,\lambda_k^\alpha \frac{2(\pi - \delta)}{2\pi \sin \delta/2} + \sum_{i=1}^{2k} |F(x,a_i)| \Bigl| \int_{a_i}^{b_i} D_n(t)\, dt \Bigr|.$$

Поскольку $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, существует такое $k_* \in \mathbb{N}$, что

$$C\,\lambda_{k_*}^\alpha \frac{2(\pi - \delta)}{2\pi \sin \delta/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, в силу ограниченности функции F и леммы 2.9 найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{i=1}^{2k_*} |F(x,a_i)| \Bigl| \int_{a_i}^{b_i} D_n(t)\, dt \Bigr| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n > N.$$

Таким образом, $|J_n^\delta(x)| < \varepsilon$ при $n > N$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$ и теорема полностью доказана. □

Доказанную теорему можно обобщить. Например, можно ослабить условие принадлежности функции пространству Гёльдера, однако полностью отказаться от такого рода условия нельзя. Есть примеры просто непрерывных функций, ряд Фурье которых не сходится не только равномерно, но и поточечно. Отметим обобщение этой теоремы в другом направлении, а именно, в предположении непрерывности функции по Гёльдеру на некотором отрезке её ряд Фурье сходится равномерно на чуть меньшем отрезке. Аналогичное обобщение справедливо и для принципа локализации. Оба эти утверждения сформулированы ниже без доказательства.

Утверждение 2.16 (Равномерный принцип локализации). *Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодические функции, $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ и $f = g$ почти всюду на некотором отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ ряды Фурье функций f и g равномерно сходятся или расходятся на $[\alpha, \beta]$ одновременно, и если они сходятся, то их суммы совпадают.*

Утверждение 2.17. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодические функции, $f \in C^{0,\alpha}[a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, для некоторого отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тогда для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ ряд Фурье функции f сходится на $[\alpha,\beta]$ равномерно.*

Пример 2.18. Рассмотрим 2π-периодическую функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такую что

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{при} \quad x \in [0, 2\pi).$$

Легко посчитать, что её ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Этот ряд мы уже исследовали и выяснили, что он сходится для всех $x \in \mathbb{R}$ и сходится равномерно по x на множестве $G_\delta = \mathbb{R} \setminus \cup_{m\in\mathbb{Z}}(2\pi m - \delta, 2\pi m + \delta)$ для произвольного $\delta > 0$. Сейчас мы можем объяснить причину такой сходимости. На множестве $G_{\delta/2}$ функция f удовлетворяет условию Липшица, поэтому сходимость её ряда Фурье на G_δ является равномерной. Поскольку δ произвольно, ряд Фурье сходится в каждой точке, отличной от $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. В точках $x_m = 2\pi m$ сходимость тоже есть, так как $\sin kx_m = 0$ для всех $k, m \in \mathbb{Z}$. Таким образом, ряд Фурье сходится на $\mathbb{R}$, но эта сходимость не может быть равномерной, поскольку в точках x_m, $m \in \mathbb{Z}$, функция f разрывна. Частичные суммы этого ряда изображены на рис. 7 и 8 на стр. 27. •

Далее же мы исследуем вопрос о том, можно ли что-нибудь сказать о ряде Фурье, если раскладываемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является 2π-периодической и лишь непрерывной. Как уже было сказано выше, такой ряд Фурье может и расходиться. Но нам известны два метода суммирования расходящихся рядов. Попробуем воспользоваться методом Чезаро. Введем обозначение:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\big(S_0(f,x) + \dots + S_{n-1}(f,x)\big).$$

Нетрудно вычислить, что

$$\sigma_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\varPhi_n(t)\,dt, \quad \text{где} \quad \varPhi_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2.$$

Мы не первые, кому пришла в голову подобная идея, поэтому у полученных величин есть общепринятые названия: $\sigma_n(f,x)$ называется *суммой Фейера* функции f, а $\varPhi_n$ — *ядром Фейера*. На рис. 4 изображен график функции $\varPhi_{20}$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.

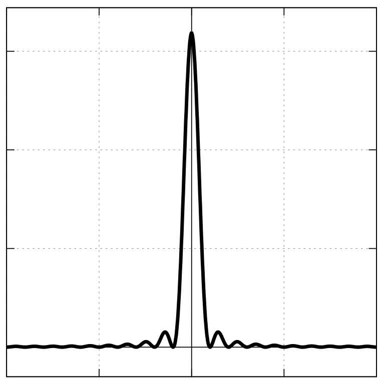

Рис. 4: Функция $\varPhi_{20}$.

Упражнение 2.19. Вывести представление для ядра Фейера. •

Отметим некоторые очевидные свойства ядра Фейера. Во-первых, $\varPhi_n$ является чётной неотрицательной функцией и $\varPhi_n(0) = n/(2\pi)$. Во-вторых, $\varPhi_n$ — 2π-периодической функция, поскольку

$$\varPhi_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t),$$

а каждое ядро Дирихле D_k — 2π-периодической функция. Далее, из этого же представления следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varPhi_n(t)\,dt = 1$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ в силу аналогичного свойства D_k. Наконец, для произвольного $\delta \in (0, \pi)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} \varPhi_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{-\delta} \varPhi_n(t)\,dt = 0.$$

Это соотношение следует из того, что

$$\int_{\delta}^{\pi} \varPhi_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \Bigl(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\Bigr)^2 dt \leqslant \frac{1}{2\pi n}\,\frac{\pi - \delta}{(\sin \delta/2)^2}.$$

Теорема 2.20 (Фейер). *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная 2π-периодическая функция. Тогда $\sigma_n(f) \to f$ равномерно на $[-\pi, \pi]$, а значит, и на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Учитывая свойства ядра Фейера, для каждого $x \in \mathbb{R}$ мы получим:

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \bigl(f(x+t) - f(x)\bigr)\,\varPhi_n(t)\,dt.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f найдётся такое положительное число δ, что $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon/2$ при $|t| < \delta$. Это неравенство справедливо для всех $x \in [-\pi, \pi]$ с одним и тем же δ, поскольку из непрерывности функции на компактном множестве $[-\pi, \pi]$ следует её равномерная непрерывность. Более того, x можно взять произвольным на $\mathbb{R}$, так как функция f — 2π-периодическая. Поэтому

$$\begin{aligned}\Bigl|\int_{-\delta}^{\delta} \bigl(f(x+t) - f(x)\bigr)\,\varPhi_n(t)\,dt\Bigr| &\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \bigl|f(x+t) - f(x)\bigr|\,\varPhi_n(t)\,dt \\ &\leqslant \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \varPhi_n(t)\,dt < \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \varPhi_n(t)\,dt = \varepsilon/2.\end{aligned}$$

Опять же из непрерывности функции f следует, что $|f(x)| \leqslant M$ для некоторой постоянной $M \in \mathbb{R}_+$ и всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\Bigl|\int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} \bigl(f(x+t) - f(x)\bigr)\,\varPhi_n(t)\,dt\Bigr| &\leqslant 2M \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} \varPhi_n(t)\,dt \\ &= 4M \int_{\delta}^{\pi} \varPhi_n(t)\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Таким образом, существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что

$$\Bigl|\int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} \bigl(f(x+t) - f(x)\bigr)\,\varPhi_n(t)\,dt\Bigr| < \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad n > N.$$

Объединяя два полученных неравенства, мы получим, что

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, откуда и следует утверждение теоремы. □

Теорема Фейера имеет значение не только как интересный факт. В частности, поскольку $\sigma_n(f)$ является при каждом $n \in \mathbb{N}$ тригонометрическим полиномом, из этой теоремы следует теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими полиномами. Более того, в отличие от последней, в теореме Фейера предлагается конкретная последовательность тригонометрических полиномов, которая сходится к непрерывной функции равномерно.

Упражнение 2.21. Доказать следующее утверждение: пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция и $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Тогда $\sigma_n(f) \to f$ в $L^1(-\pi, \pi)$ при $n \to \infty$.
Совет: доказательство проводится совершенно аналогично доказательству теоремы Фейера. При этом возникнут повторные интегралы, которые придется поменять местами, а также необходимо будет воспользоваться тем, что

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x+t) - f(x)\big|\, dx = 0$$

для любой периодической функции $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Этот факт мы также оставим в качестве упражнения. Периодичность функции f здесь нужна только для того, чтобы определить $f(x+t)$ вне отрезка $[-\pi, \pi]$. Заметим, что аналогичное соотношение справедливо и в многомерном случае. •

Если $f \in L^1(-\pi, \pi)$, то мы можем однозначно определить все соответствующие f коэффициенты Фурье a_k и b_k. Можно поставить обратный вопрос: если заданы числовые последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, будет ли соответствующий тригонометрический ряд рядом Фурье некоторой функции? В общем случае ответ, вообще говоря, отрицательный. Однако в некоторых случаях что-то всё же можно сказать. Например, если $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) < \infty$, то, как следует из теоремы Рисса — Фишера, существует $f \in L^2(-\pi, \pi)$, которая является суммой ряда Фурье с коэффициентами $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$. Используя суммы Фейера можно выписать необходимые и достаточные условия для положительного ответа на поставленный вопрос. Мы не будем их доказывать, а лишь сформулируем.

Утверждение 2.22. *Для того, чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\sigma_n\}$ его сумм Фейера сходилась равномерно.*

Фактически, это утверждение является очевидным следствием теоремы Фейера.

Утверждение 2.23. *Для того, чтобы тригонометрический ряд был рядом Фурье функции $f \in L^p(-\pi, \pi)$, $p \in (1, \infty]$, необходимо и достаточно, чтобы $\|\sigma_n\|_p \leqslant K$ для некоторого $K \in \mathbb{R}_+$ и всех $n \in \mathbb{N}$.*

Аналогичные результаты можно получить, если вместо суммирования рядов Фурье по Чезаро применить метод суммирования Абеля — Пуассона.

2.4 Общие замечания

Теория рядов Фурье очень обширна и вряд ли может быть полно изложена в рамках курса математического анализа. Наша цель состоит лишь в том, чтобы познакомиться с основными понятиями этой теории. В этом пункте собраны некоторые дополнительные факты, которые никак не были отражены в предыдущем изложении и которые могут оказаться полезными. Анализ этих фактов мы проводить не будем. Некоторые из них в таком анализе и не нуждаются.

Ряды Фурье на отрезке $[0, \pi]$.

В пространстве $L^2(0,\pi)$ полными являются следующие две ортогональные системы функций:

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \cos kx,\ \dots$$

и

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \dots,\ \sin kx,\ \dots .$$

В самом деле, возьмём произвольную функцию $f \in L^2(0,\pi)$ и определим чётную функцию $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,\pi], \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Поскольку g — чётная функция из $L^2(-\pi,\pi)$, она представима в виде сходящегося в этом пространстве ряда Фурье, в котором коэффициенты перед синусами равны нулю. Поэтому

$$f(x) = g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad \text{для почти всех} \quad x \in [0,\pi].$$

Более того, стоящий в правой части ряд сходится в пространстве $L^2(0,\pi)$.

Аналогично, определив функцию g на $[-\pi,\pi]$ нечётным образом:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,\pi], \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

мы получим, что

$$f(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad \text{для почти всех} \quad x \in [0,\pi]$$

и стоящий в правой части ряд также сходится в пространстве $L^2(0,\pi)$.

Ряды Фурье на отрезке $[-\tau, \tau]$.

Рассмотрим теперь 2τ-периодические функции, где τ — произвольное положительное число. Заменой переменной этот случай легко свести к изучению 2π-периодических функций. Действительно, если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является 2τ-периодической, то функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определённая равенством

$$g(x) = f\Big(\frac{\tau}{\pi}\, x\Big),$$

является уже 2π-периодической, и для неё справедливы все доказанные нами утверждения. Используя разложение в ряд Фурье функции g, мы можем выписать ряд Фурье 2τ-периодической функции f:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos \frac{\pi}{\tau} kx + b_k \sin \frac{\pi}{\tau} kx\big),$$

где

$$a_k = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(x)\,\cos\frac{\pi}{\tau}kx\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(x)\,\sin\frac{\pi}{\tau}kx\,dx.$$

Явление Гиббса.

Рассмотрим 2π-периодическую функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такую что

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0), \\ 1, & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Эта функция разрывна в точках $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Положим для определённости $f(k\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, что согласуется со второй теоремой Дини 2.12. Разложим f в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Это равенство справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$, но равномерной сходимости ряда в правой

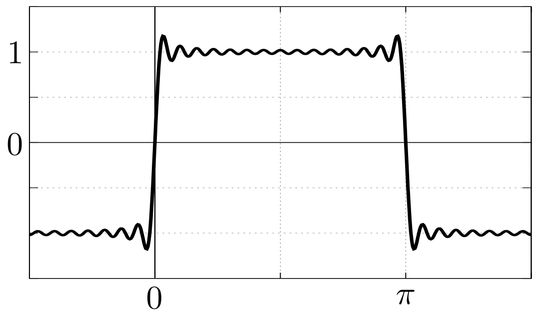

Рис. 5: Частичная сумма $S_{15}(f)$.

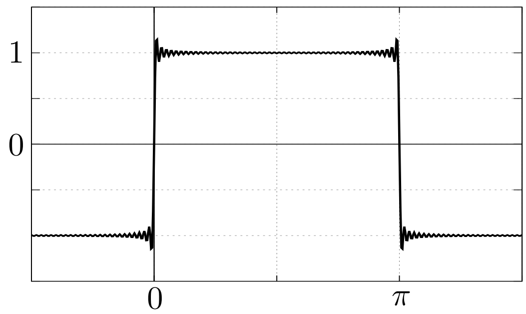

Рис. 6: Частичная сумма $S_{50}(f)$.

части нет. Мы уже отмечали, что ряд Фурье разрывной функции не может сходиться к ней равномерно. Попробуем выяснить причину отсутствия равномерной сходимости. Для этого рассмотрим последовательность $S_n(f)$ частичных сумм этого ряда Фурье. На рис. 5 изображен график функции $S_{15}(f)$. Видим, что вблизи точек $k\pi$ присутствуют выделяющиеся пики. Если увеличивать n, то пики никуда не исчезнут (см. рис. 6), $S_n(f)$ будет по-прежнему отклоняться от нуля примерно на 18% больше, чем исходная функция f. Этот факт называется *явлением Гиббса* по имени человека (великого физика и механика Дж. Гиббса), привлекшего к нему внимание в своих работах в конце 19-го века. Отметим, что за 50 лет до Дж. Гиббса это явление было открыто Г. Уилбрэмом.

Такого рода пример отсутствия равномерной сходимости у функциональной последовательности мы в своё время рассматривали. Теперь мы знаем, что он характерен для рядов Фурье. Явление Гиббса возникает всегда при разложении в ряд Фурье разрывной функции. В качестве ещё одного примера рассмотрим функцию из примера 2.18. Графики частичных сумм $S_{15}(f)$ и $S_{50}(f)$ её ряда Фурье приведены на рис. 7 и 8. Видим, что пики вблизи точек разрыва и упомянутые отклонения в 18% присутствуют и здесь.

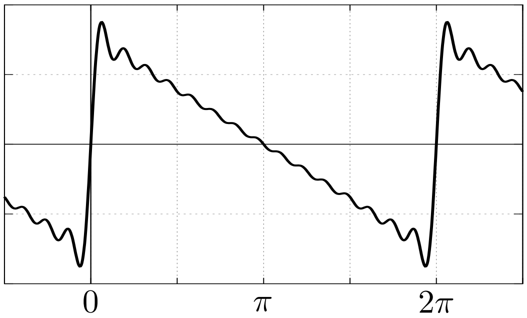

Рис. 7: Частичная сумма $S_{15}(f)$ функции $f(x) = (\pi - x)/2$.

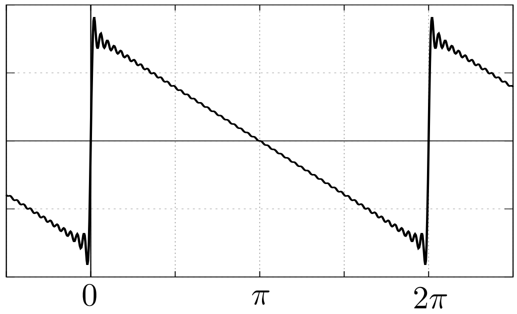

Рис. 8: Частичная сумма $S_{50}(f)$ функции $f(x) = (\pi - x)/2$.

Комплексные ряды Фурье.

Предположим, что 2π-периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представима своим рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big),$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \sin kt\, dt.$$

Мы уже отмечали полезность формулы Эйлера, попробуем применить её и в этом случае. Согласно этой формуле

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \text{и} \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Отсюда получаем, что

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

где $c_0 = a_0/2$, $c_k = (a_k + ib_k)/2$ при $k < 0$ и $c_k = (a_k - ib_k)/2$ при $k > 0$. Нетрудно видеть, что комплексные числа c_k можно вычислить по следующей формуле:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Таким образом, мы получили представление функции в виде комплексного ряда Фурье, который выглядит компактнее соответствующего вещественного ряда.

Это представление справедливо и для комплексных 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, где $f = f_1 + if_2$ и $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — вещественные 2π-периодические функции. Функция f_1 называется вещественной, а f_2 — мнимой частью комплексной функции f. Здесь стоит сделать отступление, связанное с комплексными пространствами интегрируемых функций.

Скажем, что комплексная функция принадлежит пространству $L^p(-\pi, \pi)$, $p \in [1, \infty]$, если её вещественная и мнимая части лежат в этом пространстве. Для нормы в этих пространствах, как нетрудно видеть, остаётся прежнее выражение:

$$\|u\|_p = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \big|u(x)\big|^p\,dx\Big)^{1/p}, \quad p \in [1,\infty), \quad \|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[-\pi,\pi]} \big|u(x)\big|,$$

где $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. С гильбертовым пространством $L^2(-\pi,\pi)$ есть небольшой нюанс. Скалярное произведение в комплексном пространстве $L^2(-\pi,\pi)$ определяется следующим образом:

$$(u,v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,\overline{v(x)}\,dx, \quad u,v \in L^2(-\pi,\pi),$$

где черта над знаком функции означает комплексное сопряжение: $\overline{v} = v_1 - iv_2$. Очевидно, что $\|u\|_2^2 = (u,u)$. В замечании 1.1 мы уже говорили о скалярном произведении в комплексном гильбертовом пространстве. Таким образом, в полном соответствии с нашими определениями для абстрактных гильбертовых пространств для комплексного пространства $L^2(-\pi,\pi)$ мы имеем:

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k,$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ikx}, \quad \alpha_k = (f,\varphi_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Система функций $\{\varphi_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ образует ортонормированный базис в $L^2(-\pi,\pi)$.

В дальнейшем, чтобы отличать комплексные пространства от вещественных, мы иногда, когда это имеет значение, будем писать $L^p_{\mathbb{C}}$ в комплексном случае.

3 Преобразование Фурье

В ряд Фурье раскладываются только периодические функции. Этот аппарат можно применить также к функциям, определённым на конечном промежутке, продолжив их периодически на всю числовую ось. Однако, если функция определена на $\mathbb{R}$ и не является периодической, приходится искать другие пути её исследования. В этом случае одним из наиболее часто применяемых инструментов служит преобразование Фурье, о котором и пойдёт речь в данном параграфе.

3.1 Формула Фурье

Вообще говоря, если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не является периодической, но $f \in L^1(\mathbb{R})$, то $f \in L^1(-\tau,\tau)$ для всех $\tau > 0$. Но на отрезке $[-\tau,\tau]$ мы можем разложить f в ряд Фурье. Устремив в этом разложении τ к бесконечности, мы получим некоторое представление, которое называется формулой Фурье. Проще, однако, вывести эту формулу из других соображений.

Нам придется интегрировать по всей числовой прямой, поэтому сначала напомним, как такие интегралы Лебега определяются. Через $\mathscr{L}(X)$ мы обозначим множество интегрируемых по Лебегу на множестве X функций. Числовая ось $\mathbb{R}$ является множеством бесконечной одномерной меры Лебега, поэтому $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, если $g \in \mathscr{L}(X)$ для любого измеримого множества $X \subset \mathbb{R}$ конечной меры и $\sup \int_X |g|\,dx < \infty$, где супремум берётся по всем таким множествам X. При этом $\int_{\mathbb{R}} g\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{X_k} g\,dx$, где $\{X_k\}$ — исчерпывающая $\mathbb{R}$ последовательность измеримых множеств: $\cup_{k=1}^{\infty} X_k = \mathbb{R}$. Заметим, что предел не зависит от выбора исчерпывающей последовательности. Исходя из этого определения интеграла определяются пространства $L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty)$, в частности, $L^1(\mathbb{R}) = \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

Можно ввести ещё одно понятие интеграла Лебега по множеству бесконечной меры, которое аналогично понятию несобственного интеграла Римана. Скажем, что $g \in \mathscr{L}_*(0,\infty)$, если $g \in \mathscr{L}(0,\tau)$ для всех $\tau \in \mathbb{R}_+$ и существует предел $\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau g(x)\,dx$. Этот предел назовём *несобственным интегралом Лебега* от функции g по промежутку $(0,\infty)$ и обозначается через $\int_0^\infty g(x)\,dx$. Аналогично определяется несобственный интеграл по $(-\infty,0)$. Скажем, что $g \in \mathscr{L}_*(\mathbb{R})$, если $g \in \mathscr{L}_*(-\infty,0)\cap\mathscr{L}_*(0,\infty)$ и

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{-\alpha_k}^{\beta_k} g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{-\alpha_k}^{0} g(x)\,dx + \lim_{k\to\infty}\int_0^{\beta_k} g(x)\,dx$$

для произвольных последовательностей $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, таких что $\alpha_k \to +\infty$ и $\beta_k \to +\infty$ при $k\to\infty$. Если $\alpha_k = \beta_k$ для всех $k\in\mathbb{N}$, мы будем говорить, что интеграл существует в смысле главного значения и писать $p.v.\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$. В определении $\mathscr{L}_*(\mathbb{R})$ мы вместо нуля могли бы взять произвольное вещественное число, что не повлияло бы на результат.

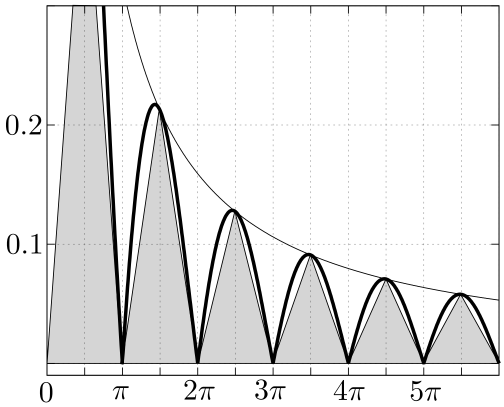

Рис. 9: Оценка снизу интеграла функции $|\sin x/x|$.

Если функция g интегрируема по Риману на бесконечном промежутке (α,∞) в несобственном смысле, то $g\in\mathscr{L}_*(\alpha,\infty)$. Очевидно, что $\mathscr{L}(\mathbb{R})\subset\mathscr{L}_*(\mathbb{R})$, однако, как показывает следующий пример, обратного включения нет.

Пример 3.1. Рассмотрим функцию $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такую что

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \text{и} \quad g(0)=1.$$

Мы уже исследовали несобственный интеграл Римана $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$, называемый интегралом Дирихле, и доказали, что он сходится к π. Очевидно, что $g\in\mathscr{L}_*(\mathbb{R})$ и несобственный интеграл Лебега тоже сходится к π. Тем не менее, $g\notin\mathscr{L}(\mathbb{R})$. В самом деле, функция g является чётной, поэтому для доказательства этого факта нам достаточно оценить снизу интеграл $\int_0^\infty |g(x)|\,dx$. Для произвольного $m\in\mathbb{N}$ справедлива оценка:

$$\int_0^{\pi m}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \sum_{k=1}^m\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\frac{\pi}{\pi(k+(k-1))/2} = \sum_{k=1}^m\frac{1}{2k-1}.$$

Фактически мы оценили интеграл снизу через сумму площадей лежащих под графиком функции $|g|$ треугольников (см. рис 9). Справа в этой оценке стоит частичная сумма гармонического ряда, который расходится. Поэтому $\int_0^{\pi m}|g(x)|\,dx\to\infty$ при $m\to\infty$ и, как следствие, $g\notin\mathscr{L}(\mathbb{R})$. •

Теорема 3.2 (Формула Фурье). *Пусть функция $f\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ определена в точке $x_0\in\mathbb{R}$ и удовлетворяет условию Дини:*

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{|t|}\,dt<\infty$$

для некоторого $\delta > 0$. Тогда справедливо представление:

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \lambda(t - x_0)\, dt\, d\lambda.$$

Доказательство. Введём обозначение:

$$F(x_0, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \lambda(t - x_0)\, dt\, d\lambda.$$

Интеграл по λ будем понимать, как несобственный, поэтому нам необходимо показать, что $F(x_0, \tau) \to f(x_0)$ при $\tau \to \infty$. Заметим, что $F(x_0, \tau)$ определено при $\tau \in \mathbb{R}_+$, поскольку $f \in L^1(\mathbb{R})$ и косинус — ограниченная функция. Используя теорему Фубини, мы можем переставить порядок интегрирования:

$$F(x_0, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \int_0^\tau \cos \lambda(t - x_0)\, d\lambda\, dt.$$

Мы доказали теорему Фубини только в случае ограниченных множеств, поэтому покажем, как можно ею воспользоваться в данном случае. Пусть $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольные числовые последовательности, такие что $\alpha_k \to +\infty$ и $\beta_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Тогда, используя дополнительно теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получим:

$$\begin{aligned} F(x_0, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \lim_{k\to\infty} \int_{-\alpha_k}^{\beta_k} f(t) \cos \lambda(t - x_0)\, dt\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \lim_{k\to\infty} \int_0^\tau \int_{-\alpha_k}^{\beta_k} f(t) \cos \lambda(t - x_0)\, dt\, d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{k\to\infty} \int_{-\alpha_k}^{\beta_k} f(t) \int_0^\tau \cos \lambda(t - x_0)\, d\lambda\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \int_0^\tau \cos \lambda(t - x_0)\, d\lambda\, dt. \end{aligned}$$

Посчитав интеграл по λ, мы придём к следующему выражению:

$$F(x_0, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t)\, \frac{\sin \tau(t - x_0)}{t - x_0}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x_0 + t)\, \frac{\sin \tau t}{t}\, dt.$$

Последнее равенство получилось в результате замены $t - x_0$ на новую переменную интегрирования, которую мы снова обозначили через t. Пределы интегрирования не изменились, поскольку x_0 — фиксированное число. Теперь, вспомнив пример 3.1, мы заметим, что

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \tau t}{t}\, dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi$$

для произвольного положительного числа τ. Левое равенство легко получается с помощью замены τt на новую переменную интегрирования. Поэтому

$$F(x_0, \tau) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}\, \sin \tau t\, dt.$$

Покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число T, что $|F(x_0, \tau) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $\tau > T$. Для этого мы разобьем интеграл в правой части последнего равенства на сумму трёх интегралов:

$$\begin{aligned} F(x_0, \tau) - f(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^\alpha \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}\, \sin \tau t\, dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\alpha,\alpha)} f(x_0 + t)\, \frac{\sin \tau t}{t}\, dt - \frac{f(x_0)}{\pi} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\alpha,\alpha)} \frac{\sin \tau t}{t}\, dt, \end{aligned}$$

где α — положительное число, которое мы далее определим.

Оценим второй интеграл:

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\alpha,\alpha)} f(x_0+t)\,\frac{\sin\tau t}{t}\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{\alpha\pi}\,\|f\|_1.$$

Так как $f\in L^1(\mathbb{R})$, найдётся такое $\alpha_0>0$, что

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\alpha,\alpha)} f(x_0+t)\,\frac{\sin\tau t}{t}\,dt\Big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad \alpha>\alpha_0.$$

Рассмотрим третий интеграл. В силу сходимости несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}\sin\tau t/t\,dt$ найдется такое $\alpha_1>\alpha_0$, что

$$\Big|\frac{f(x_0)}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\alpha,\alpha)} \frac{\sin\tau t}{t}\,dt\Big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad \alpha>\alpha_1.$$

Осталось оценить первый интеграл, в котором мы зафиксируем какое-либо $\alpha>\alpha_1$. Так как функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Дини, функция $t\mapsto (f(x_0+t)-f(x_0))/t$ является элементом пространства $L^1(-\alpha,\alpha)$. Как следует из леммы Римана — Лебега 2.8, найдётся такое положительное число T, что

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}\,\sin\tau t\,dt\Big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $\tau>T$.

Объединяя полученные оценки, мы получим, что $|F(x_0,\tau)-f(x_0)|<\varepsilon$ при $\tau>T$, а это как раз и означает, что $F(x_0,\tau)\to f(x_0)$ при $\tau\to\infty$. □

Заметим, что в отличие от теоремы 2.10 мы выписали условие Дини с $A=f(x_0)$. Если бы мы оставили число A в этом условии, то и в формуле Фурье вместо $f(x_0)$ стояло бы A, что скрывало бы суть этой формулы. Если функция f удовлетворяет условию Дини во всех точках $x_0\in\mathbb{R}$, то и справа под интегралом, и слева будет стоять f.

Доказанную формулу Фурье можно записать в более компактной комплексной форме. Для этого сначала заметим, что $\lambda\mapsto\cos\lambda(t-x_0)$ — чётная функция, поэтому

$$f(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x_0)\,dt\,d\lambda.$$

Более того, функция $\lambda\mapsto\sin\lambda(t-x_0)$ является нечётной, поэтому

$$\int_{-N}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x_0)\,dt\,d\lambda=0$$

для произвольного $N\in\mathbb{R}_+$. Отметим, что равенство нулю имеет место только при интегрировании по λ по симметричному относительно нуля отрезку $[-N,N]$. Таким образом,

$$p.v.\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x_0)\,dt=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x_0)\,dt=0.$$

Используя формулу Эйлера и объединяя полученные равенства, мы получим формулу Фурье в комплексной форме:

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\, p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda(t-x_0)}\, dt\, d\lambda.$$

Здесь интеграл по переменной t понимается как несобственный, а по λ — в смысле главного значения. Заметим также, что в этой формуле можно было бы поставить $e^{i\lambda(t-x_0)}$, то есть, изменить знак выражения в степени числа e. Это никак не повлияло бы на правильность представления. Выбор такого знака — дань традиции.

Мы выводили формулу Фурье, предполагая, что f — вещественная функция. Но мы нигде не пользовались её вещественностью, поэтому эта формула справедлива также и для комплексных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

3.2 Преобразование Фурье и его свойства

Каждой функции $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ поставим в соответствие функцию $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, такую что

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt.$$

Функция $\hat{f}$ называется *преобразованием Фурье* функции f. Мы будем также использовать для преобразования Фурье обозначение $\mathscr{F}(f)$. Согласно формуле Фурье, если f удовлетворяет в точке x_0 условию Дини, то справедлива *формула обращения преобразования Фурье*:

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x_0}\, d\lambda.$$

Выражение в правой части называется *обратным преобразованием Фурье* от $\hat{f}$ и обозначается $\mathscr{F}^{-1}(\hat{f})$. Отметим схожесть выписанных формул: они отличаются знаком в степени показательной функции. Более существенное отличие состоит в том, что в прямом преобразовании Фурье интеграл понимается в обычном смысле, а в обратном — в смысле главного значения. Если f удовлетворяет условию Дини во всех точках вещественной оси, то $\mathscr{F}^{-1}\big(\mathscr{F}(f)\big) = f$. Для выполнения этого равенства можно потребовать выполнения и другого условия, отличного от условия Дини.

Изучим свойства преобразования Фурье. Прежде всего мы отметим, что $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}^{-1}$ являются линейными отображениями. Пока не будем уточнять, откуда и куда они действуют. Напомним лишь, что мы определили $\mathscr{F}$ на пространстве $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

Теорема 3.3. *Преобразование Фурье $\mathscr{F}$ является непрерывным линейным отображением из $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ в пространство непрерывных функций $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Другими словами,*

1. *если $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, то $\mathscr{F}(f)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией;*

2. *если $f_k \to f$ в $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ при $k \to \infty$, то $\mathscr{F}(f_k) \to \mathscr{F}(f)$ равномерно на $\mathbb{R}$.*

Более того, если $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, то $\mathscr{F}(f)(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$ и $\max_{\lambda\in\mathbb{R}} |\mathscr{F}(f)(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \|f\|_1$.

Доказательство. Начнём мы с оценки в конце утверждения теоремы:

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} |\mathscr{F}(f)(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \|f\|_1.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $|e^{-i\lambda t}| = 1$. Из этой оценки и линейности $\mathscr{F}$ сразу следует второе утверждение теоремы:

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} |\mathscr{F}(f_k)(\lambda) - \mathscr{F}(f)(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \|f_k - f\|_1.$$

Докажем первое утверждение. Пусть $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. В силу теоремы Гейне о непрерывности функции достаточно показать, что $\mathscr{F}(f)(\lambda_k) \to \mathscr{F}(f)(\lambda_0)$ для произвольного $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и произвольной последовательности $\{\lambda_k\}$, сходящейся к λ_0. Воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Поскольку $|f(t)\, e^{-i\lambda t}| \leqslant |f(t)|$, мы можем взять f в качестве интегрируемой мажоранты. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{F}(f)(\lambda_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda_k t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \lim_{k\to\infty} e^{-i\lambda_k t}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda_0 t}\, dt = \mathscr{F}(f)(\lambda_0)$$

Нам осталось установить, что $\mathscr{F}(f)(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$, если $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдётся такое $\lambda_\varepsilon > 0$, что $|\mathscr{F}(f)(\lambda)| < \varepsilon$ при $|\lambda| > \lambda_\varepsilon$. Поскольку $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, существует такое $N > 0$, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]} \left|f(t)\, e^{-i\lambda t}\right| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]} |f(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Итак, N мы уже выбрали и не можем далее его менять. В силу леммы Римана — Лебега 2.8 найдётся такое λ_ε, что

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |\lambda| > \lambda_\varepsilon.$$

Объединяя полученные оценки, мы получим требуемый результат. □

Приведём пример вычисления преобразования Фурье.

Пример 3.4. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такую что

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [a,b], \end{cases}$$

где $[a,b]$ — произвольный отрезок вещественной оси. Очевидно, что $f \in L^1(\mathbb{R})$, поэтому преобразование Фурье от этой функции определено и, как следует из доказанной теоремы, является непрерывной функцией на $\mathbb{R}$. Вычислим его:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\lambda t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{i}{\lambda} (e^{-i\lambda b} - e^{-i\lambda a})$$

Видим, что, как и утверждалось в теореме, $\hat{f}(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Отметим также, что при $a = -\alpha$ и $b = \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}_+$,

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\lambda}(e^{-i\lambda\alpha} - e^{i\lambda\alpha}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} \sin \lambda\alpha.$$

Отметим также, что $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ (см. пример 3.1), однако $\hat{f} \in \mathscr{L}_*(\mathbb{R})$ и $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$ в предположении, что $\hat{f}(0) = \alpha\sqrt{2/\pi}$. •

Изучим вопрос о связи преобразования Фурье с операцией дифференцирования. Вообще говоря, чем больше есть производных у функции f, тем быстрее стремится на бесконечности к нулю её преобразование Фурье. Заметим, что следующую теорему мы докажем при не самых общих предположениях. Можно было бы отказаться от поточечной дифференцируемости функции на $\mathbb{R}$ и оставить только принадлежность её производной пространству $L^1(\mathbb{R})$.

Теорема 3.5. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — дифференцируемая функция, $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ и $f' \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\mathscr{F}(f')(\lambda) = i\lambda\mathscr{F}(f)(\lambda) \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

и $\mathscr{F}(f)(\lambda) = o(1/\lambda)$ при $\lambda \to \pm\infty$.

Доказательство. Сначала покажем, что $f(\pm\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$. В самом деле,

$$f(\alpha) = f(0) + \int_0^\alpha f'(t)\, dt$$

и поскольку $f' \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}_*(\mathbb{R})$, существует предел $\lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha)$. Так как $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, этот предел равен нулю. Аналогично, $\lim_{\alpha\to-\infty} f(\alpha) = 0$.

Теперь, используя интегрирование по частям, для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ мы получим:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f')(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f'(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha\to\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}\Big|_{t=-\alpha}^{t=\alpha} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \\ = \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt = i\lambda\mathscr{F}(f)(\lambda).\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали первое утверждение теоремы. Полученное равенство можно записать так:

$$\mathscr{F}(f)(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \mathscr{F}(f')(\lambda).$$

Поскольку $f' \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, из этого равенства и теоремы 3.3 сразу следует последнее утверждение доказываемой теоремы. □

Следствие 3.6. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — k раз дифференцируемая функция, $k \in \mathbb{N}$, $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ и $f^{(\ell)} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ для всех $\ell \in \{1, \ldots, k\}$. Тогда*

$$\mathscr{F}(f^{(k)})(\lambda) = (i\lambda)^k \mathscr{F}(f)(\lambda) \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

и $\mathscr{F}(f)(\lambda) = o(1/\lambda^k)$ при $\lambda \to \pm\infty$.

$\triangleright$ Это утверждение сразу следует из теоремы, так как

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\lambda) = i\lambda\mathcal{F}(f^{(k-1)})(\lambda) = (i\lambda)^2\mathcal{F}(f^{(k-2)})(\lambda) = \ldots = (i\lambda)^k\mathcal{F}(f)(\lambda).$$

$\triangleleft$

Справедлив и обратный результат: чем быстрее убывает функция на бесконечности, тем более гладким является её преобразование Фурье.

Теорема 3.7. *Если $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ и функция $x \mapsto g(x) = xf(x)$ также является элементом пространства $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}(f) \in C^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\big(\mathcal{F}(f)\big)' = -i\mathcal{F}(g)$ и $\big(\mathcal{F}(f)\big)'(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$.*

Доказательство. Если рассуждать формально, то доказываемое утверждение можно получить буквально в одну строчку:

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-it)\,f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt = -i\mathcal{F}(g)(\lambda).$$

Однако, при доказательстве теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру мы требовали непрерывность подынтегральной функции и её производной. По этой причине нам придется провести более подробные рассуждения.

Для произвольных вещественных чисел $\delta \neq 0$ и λ_0 мы имеем:

$$\frac{\mathcal{F}(f)(\lambda_0+\delta) - \mathcal{F}(f)(\lambda_0)}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\lambda_0 t}\,\frac{e^{-i\delta t}-1}{\delta}\,dt.$$

Наша цель — перейти к пределу в этом выражении при $\delta \to 0$. Для этого мы воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе. Обозначим подынтегральную функцию в правой части через $h_\delta(t)$ и найдём для неё не зависящую от δ интегрируемую мажоранту.

Нетрудно видеть, что

$$\left|\frac{e^{-i\delta t}-1}{\delta}\right| \leqslant 2|t|$$

для всех $\delta \in \mathbb{R}$. В самом деле,

$$\left|\frac{e^{-i\delta t}-1}{\delta}\right| = \left|\frac{\cos\delta t - 1}{\delta} - i\,\frac{\sin\delta t}{\delta}\right| \leqslant \left|\frac{\cos\delta t - 1}{\delta t}\right||t| + \left|\frac{\sin\delta t}{\delta t}\right||t| \leqslant 2|t|,$$

так как $|\cos x - 1| \leqslant |x|$ и $|\sin x| \leqslant |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, $|h_\delta(t)| \leqslant 2|t|\,|f(t)| = |2tf(t)| = |2g(t)|$. Поскольку $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, мы можем взять $2g$ в качестве интегрируемой мажоранты.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}(f)(\lambda_0) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\mathcal{F}(f)(\lambda_0+\delta) - \mathcal{F}(f)(\lambda_0)}{\delta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\lambda_0 t}\lim_{\delta\to 0}\frac{e^{-i\delta t}-1}{\delta}\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-it)\,f(t)\,e^{-i\lambda_0 t}\,dt = -i\mathcal{F}(g)(\lambda_0).\end{aligned}$$

Это равенство справедливо для произвольного $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. В силу теоремы 3.3 функция $\mathcal{F}(g)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$, поэтому функция $\mathcal{F}(f)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Из этой же теоремы следует, что $\big(\mathcal{F}(f)\big)'(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$. $\square$

Следствие 3.8. *Если $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ и функции $x \mapsto g_\ell(x) = x^\ell f(x)$ для всех $\ell \in \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, также являются элементами пространства $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, то $\mathscr{F}(f) \in C^k_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\big(\mathscr{F}(f)\big)^{(k)} = (-i)^k \mathscr{F}(g_k)$ и $\big(\mathscr{F}(f)\big)^{(k)}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$.*

Доказательство этого утверждения оставим в качестве упражнения.

Пример 3.9. В качестве примера доказанной теоремы вычислим преобразование Фурье функции $x \mapsto f(x) = e^{-\alpha x^2}$, где α — положительное вещественное число. Очевидно, что функции $x \mapsto f(x)$ и $x \mapsto xf(x)$ являются элементами пространства $L^1(\mathbb{R})$, поэтому, как следует из теоремы,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\mathscr{F}(f)(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)\, e^{-\alpha t^2}\, e^{-i\lambda t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2\alpha} \left(e^{-\alpha t^2}\right)' e^{-i\lambda t}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{2\alpha}\, e^{-\alpha t^2}\, e^{-i\lambda t}\, dt\Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\, e^{-i\lambda t}\, dt = -\frac{\lambda}{2\alpha}\, \mathscr{F}(f)(\lambda).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались интегрированием по частям и тем, что $e^{-\alpha t^2} \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Таким образом, $\mathscr{F}(f)$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, решение которого легко находится:

$$\mathscr{F}(f)(\lambda) = C\, e^{-\lambda^2/(4\alpha)},$$

где C — произвольная постоянная. Определим эту постоянную, используя значение интеграла Эйлера — Пуассона:

$$C = \mathscr{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Окончательно получаем:

$$\mathscr{F}(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-\lambda^2/(4\alpha)}.$$

Интересная ситуация возникает при $\alpha = 1/2$. В этом случае $\mathscr{F}(f) = f$. То есть, преобразование Фурье не изменяет функцию $x \mapsto f(x) = e^{-x^2/2}$. •

Есть ещё одна операция, которую мы изучим в связи с преобразованием Фурье. *Сверткой* функций $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ называется определённая на $\mathbb{R}$ функция

$$x \mapsto (f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t)\, dt.$$

Сразу возникает вопрос о корректности этого определения, так как под интегралом стоит произведение двух функций, каждая из которых лишь из $L^1(\mathbb{R})$. Вообще говоря произведение двух таких функций не должно быть интегрируемым, однако свёртка имеет специальную структуру, которая позволяет утверждать, что $f * g$ определена как элемент пространства $L^1(\mathbb{R})$, то есть почти всюду на $\mathbb{R}$.

Теорема 3.10. *Если $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, то $f * g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ и $\|f * g\|_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Доказательство. Поскольку $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|\,dx\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,|g(x-t)|\,dx\,dt.$$

Согласно теореме Тонелли функция $(x,t) \mapsto |f(t)|\,|g(x-t)|$ является элементом пространства $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Поэтому, как следует из теоремы Фубини,

$$\sqrt{2\pi}\,\|f*g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt \Big|\,dx$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)\,g(x-t)|\,dt\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,|g(x-t)|\,dx\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx = \|f\|_1\|g\|_1,$$

что и требовалось доказать. □

Свёртка имеет много замечательных свойств, однако мы ограничимся доказательством только одного из них, связанного с преобразованием Фурье.

Теорема 3.11. *Если $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, то $\mathscr{F}(f*g) = \mathscr{F}(f)\,\mathscr{F}(g)$.*

Доказательство. Используя теорему Фубини и замену переменной интегрирования $x - t = y$, для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$ мы получим:

$$\mathscr{F}(f*g)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt\,e^{-i\lambda x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,e^{-i\lambda x}\,dt\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,e^{-i\lambda x}\,dx\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\lambda t}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\,e^{-i\lambda(x-t)}\,dx\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\lambda t}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,e^{-i\lambda y}\,dy\,dt = \mathscr{F}(f)(\lambda)\,\mathscr{F}(g)(\lambda). \quad \square$$

3.3 Инъективность преобразования Фурье

В этом пункте мы установим, что преобразования Фурье различных функций из $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ не могут совпадать. Сначала мы докажем одну вспомогательную лемму, относящуюся скорее к теории интеграла Лебега.

Лемма 3.12. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$. Если $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ для произвольного интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$, то $f(x) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$.*

▷ Если A — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}$, то A представимо в виде счётного объединения непересекающихся полуинтервалов вида $[a_k, b_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx = 0.$$

Если $G \subset \mathbb{R}$ — множество типа G_δ, то $G = \cap_{k=1}^{\infty} A_k$, где $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность вложенных друг в друга открытых множеств. Следовательно,

$$\int_G f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(x)\,dx = 0.$$

Если E — произвольное измеримое множество в $\mathbb{R}$, то существуют множество G типа G_δ и множество M меры нуль, такие что $E = G \setminus M$. Поэтому

$$\int_E f(x)\,dx = \int_G f(x)\,dx = 0.$$

Определим измеримые множества $E_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ и $E_- = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_{E_+} f(x)\,dx - \int_{E_-} f(x)\,dx = 0,$$

откуда следует, что $f = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}$. $\lhd$

Теперь мы можем доказать основное утверждение данного пункта.

Теорема 3.13 (Об инъективности преобразования Фурье)**.** *Если $f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ и $\mathscr{F}(f) = \mathscr{F}(g)$ почти всюду в $\mathbb{R}$, то $f = g$ почти всюду в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. В силу линейности преобразования Фурье достаточно показать, что если $\mathscr{F}(f) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}$, то $f = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}$.

Пусть χ — характеристическая функция произвольного интервала $(a, b) \in \mathbb{R}$, то есть $\chi(x) = 1$ при $x \in (a, b)$ и $\chi(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$. Обозначим через $\{\chi_k\}$ последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций, которая сходится к χ в почти всюду в $\mathbb{R}$. Потребуем также, чтобы каждая χ_k была отлична от нуля на ограниченном интервале и $|\chi_k| \leqslant 1$ в R для всех $k \in \mathbb{N}$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}_+$ мы получим (черта над знаком функции означает комплексное сопряжение):

$$0 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \mathscr{F}(f)\,\overline{\mathscr{F}(\chi_k)}\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\,\overline{\mathscr{F}(\chi_k)}(\lambda)\,d\lambda$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \mathscr{F}(\chi_k)(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda}\,dx.$$

Заметим, что согласно формуле обращения преобразования Фурье

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \mathscr{F}(\chi_k)(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda = \chi_k(x)$$

при всех $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, следствие 3.6 позволяет заключить, что модуль интеграла $\int_{-\alpha}^{\alpha} \mathscr{F}(\chi_k)(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda$ ограничен некоторой постоянной C, которая может зависеть от k, но не зависит от α. Таким образом, используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла с функцией $C|f|$ в качестве мажоранты, мы получим:

$$0 = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \mathscr{F}(\chi_k)(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\chi_k(x)\,dx.$$

Знак комплексного сопряжения мы убрали, поскольку χ_k — вещественная функция. Осуществив в этом равенстве ещё один предельный переход при $k \to \infty$ с помощью теоремы Лебега, мы получим, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\chi(x)\,dx = 0$. Доказываемое утверждение следует теперь из леммы 3.12 и того, что χ — характеристическая функция произвольного интервала. $\square$

3.4 Задача о распространении тепла

В этом пункте мы покажем, как можно применить технику преобразования Фурье к решению конкретной задачи. В качестве примера рассмотрим процесс распространения тепла в длинной проволоке. Проволоку мы взяли, так как она является с большой точностью одномерным объектом, а мы изучили преобразование Фурье в одномерном случае. Аналогичная техника развита и в случае нескольких пространственных переменных. Проволока является длинной, поэтому можно считать, что пространственная переменная x меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

Обозначим через t переменную времени, которая меняется в положительном направлении, а через u — температуру проволоки. Таким образом, u является функцией двух переменных: x и t. Предположим, что в некоторый начальный момент времени, который мы без ограничения общности положим $t = 0$, задано распределение температуры в проволоке, то есть

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

где функция u_0 считается известной. Задача состоит в определении функции $u = u(x, t)$ во все последующие моменты времени, то есть при $t > 0$. Рассматриваемый процесс описывается так называемым уравнением теплопроводности, которому удовлетворяет функция u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где k — положительная постоянная, называемая коэффициентом теплопроводности. Этот коэффициент зависит от свойств среды, где распространяется тепло, например, от материала, из которого изготовлена проволока. Таким образом, с математической точки зрения нам необходимо найти решение $u(x, t)$ задачи Коши, то есть задачи с начальным условием, для уравнения с частными производными — уравнения теплопроводности при $x \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}_+$.

Применим к уравнению теплопроводности преобразование Фурье по переменной x. В результате этой операции получим, что $\mathscr{F}(u)(\lambda, t)$ удовлетворяет при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \mathscr{F}(u)(\lambda, t)}{\partial t} = -k\,\lambda^2\,\mathscr{F}(u)(\lambda, t).$$

Общим решением этого уравнения является следующая функция:

$$\mathscr{F}(u)(\lambda, t) = C\,e^{-k\lambda^2 t},$$

где C — некоторая постоянная, которая не завит от t, но, вообще говоря, зависит от λ. Эту постоянную мы найдём из начального условия:

$$C = \mathscr{F}(u)(\lambda, 0) = \mathscr{F}(u_0)(\lambda).$$

В качестве промежуточного итога мы определили преобразование Фурье от решения задачи:

$$\mathscr{F}(u)(\lambda, t) = \mathscr{F}(u_0)(\lambda)\,e^{-k\lambda^2 t}.$$

Теперь найдём саму функцию u. Вспомнив пример 3.9, можно заключить, что

$$e^{-k\lambda^2 t} = \mathscr{F}(g)(\lambda, t),$$

где

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-x^2/(4kt)}.$$

Тогда из теоремы 3.11 следует, что

$$\mathscr{F}(u)(\lambda,t) = \mathscr{F}(u_0)(\lambda)\,\mathscr{F}(g)(\lambda,t) = \mathscr{F}(u_0 * g)(\lambda,t).$$

Используя теперь теорему 3.13 об инъективности преобразования Фурье, мы получим:

$$u(x,t) = (u_0 * g)(x,t),$$

где свёртка берётся по переменной x. Воспользовавшись определением свёртки, эту формулу можно записать в интегральном виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y)\, g(x-y)\, dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y)\, e^{-(x-y)^2/(4kt)}\, dy.$$

Функция $g/\sqrt{2\pi}$ называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Таким образом, зная начальное распределение температуры в проволоке, мы можем определить её значение в любой момент времени $t > 0$ в каждой точке x. В случае нескольких пространственных переменных задача решается аналогично, однако с использованием многомерного преобразования Фурье, определение которого будет дано в пункте 3.6.

3.5 Преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R})$

Ранее мы установили, что для измеримого множества A конечной меры принадлежность функции пространству $L^p(A)$ влечёт её принадлежность $L^q(A)$ при $q \in [1,p]$. Для множеств бесконечной меры это правило нарушается. В частности, если $f \in L^2(\mathbb{R})$, то, вообще говоря, $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Примером может служить функция f, такая что $f(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $f(x) = 1/x$ при $|x| > 1$. Более того, функция f, такая что $f(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$ и $f(x) = 1/\sqrt{x}$ при $|x| < 1$, принадлежит $L^1(\mathbb{R})$, но не является элементом пространства $L^2(\mathbb{R})$. Поэтому $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$. То есть, пространства $L^1(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R})$ не вкладываются одно в другое, хотя и имеют непустое пересечение. Таким образом, несмотря на то, что мы определили преобразование Фурье на пространстве $L^1(\mathbb{R})$, на функциях из $L^2(\mathbb{R})$ оно может быть и не определено.

Но пространство $L^2(\mathbb{R})$ является гильбертовым, поэтому хотелось бы определить на нём преобразование Фурье, чтобы воспользоваться преимуществами пространства со скалярным произведением. Есть ещё одна веская причина такого определения. Дело в том, что если мы определим преобразование Фурье на $L^2(\mathbb{R})$ таким образом, чтобы оно совпадало с прежним на $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, то потом с помощью специальной интерполяционной техники функционального анализа можно будет определить его на всех промежуточных пространствах $L^p(\mathbb{R})$ с $p \in (1,2)$. Мы не будем этого делать, а ограничимся только тем, что обобщим понятие преобразования Фурье так, чтобы оно было определено на функциях из $L^2(\mathbb{R})$ и совпадало с классическим на функциях из $L^1(\mathbb{R})$.

Сначала мы докажем вспомогательную лемму. Обозначим через $C_0^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, пространство функций (вообще говоря, комплексных) из $C^k(\mathbb{R})$, имеющих компактный носитель, то есть обращающихся в нуль вне некоторого интервала. Напомним, что *носителем* определённой на $\mathbb{R}$ функции f называется множество $\operatorname{supp} f$, являющееся замыканием в $\mathbb{R}$ множества $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. Очевидно, что каждая функция $f \in C_0^k(\mathbb{R})$, принадлежит также $L^p(\mathbb{R})$ для всех $p \in [1,\infty]$.

Лемма 3.14. *Если $f, g \in C_0^1(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$,*

$$\big(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\big) = (f, g) \quad \text{и} \quad \|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,$$

а черта, как обычно, означает комплексное сопряжение.

$\triangleright$ Заметим, что функции f и g удовлетворяют во всех точках вещественной оси условию Дини, поэтому для них всюду справедлива формула обращения преобразования Фурье. Кроме того, $\mathcal{F}(f) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (аналогично, $\mathcal{F}(g) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$), поскольку функция $\mathcal{F}(f)$ ограничена (теорема 3.3), а её квадрат убывает на бесконечности быстрее, чем $1/\lambda^2$ (теорема 3.5). Таким образом, использую теорему Фубини, мы получим:

$$\big(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\lambda)\,\overline{\mathcal{F}(g)(\lambda)}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\,\overline{\mathcal{F}(g)(\lambda)}\,d\lambda$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(g)(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = (f, g).$$

Равенство для норм получается, если положить $g = f$. $\triangleleft$

Теорема 3.15 (Планшерель)**.** *Для произвольной функции $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ и каждого $m \in \mathbb{N}$ определим функцию $\mathcal{F}_m(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, такую что*

$$\mathcal{F}_m(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-m}^{m} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда

1. *$\mathcal{F}_m(f) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ для всех $m \in \mathbb{N}$;*
2. *последовательность $\{\mathcal{F}_m(f)\}_{m\in\mathbb{N}}$ сходится в $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ при $m \to \infty$ к некоторой функции $F \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, причём $\|F\|_2 = \|f\|_2$;*
3. *если $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, то $F = \mathcal{F}(f)$ почти всюду в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Шаг 1. Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}$ и для $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ определим функцию $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, такую что

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leqslant m, \\ 0, & |x| > m. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_m \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ и определено $\mathcal{F}(f_m)$. Поскольку $C_0^1(-m, m)$ плотно в $L^2_{\mathbb{C}}(-m, m)$, существует такая последовательность функций $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, что $\varphi_k \in C_0^1(-m, m)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi_k \to f_m$ в $L^2_{\mathbb{C}}(-m, m)$ при $k \to \infty$. Но $C_0^1(-m, m) \subset C_0^1(\mathbb{R})$, поэтому в силу леммы 3.14

$$\|\mathcal{F}(\varphi_k) - \mathcal{F}(\varphi_\ell)\|_2 = \|\mathcal{F}(\varphi_k - \varphi_\ell)\|_2 = \|\varphi_k - \varphi_\ell\|_2$$

для всех $k, \ell \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится в $L^2_{\mathbb{C}}(-m,m)$, критерий Коши позволяет утверждать, что последовательность $\{\mathscr{F}(\varphi_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ также сходится в $L^2_{\mathbb{C}}(-m,m)$. Обозначим через F_m предел этой последовательности.

Заметим, что из сходимости$\{\varphi_k\}$ к f_m в $L^2_{\mathbb{C}}(-m,m)$ следует её сходимость к тому же пределу в $L^1_{\mathbb{C}}(-m,m)$. Поэтому из теоремы 3.3 следует, что $\mathscr{F}(\varphi_k) \to \mathscr{F}(f_m)$ при $k \to \infty$ равномерно на $\mathbb{R}$. Это означает, что $F_m = \mathscr{F}(f_m)$, то есть,

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathscr{F}(\varphi_k) - \mathscr{F}(f_m)\|_2 = 0.$$

Более того, так как $\|\mathscr{F}(\varphi_k)\|_2 = \|\varphi_k\|_2$ для всех k и $\|\varphi_k\|_2 \to \|f_m\|_2$ при $k \to \infty$, мы получаем, что

$$\|\mathscr{F}(f_m)\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\mathscr{F}(\varphi_k)\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_2 = \|f_m\|_2.$$

Шаг 2. Поскольку на предыдущем шаге число $m \in \mathbb{N}$ было произвольным, полученные оценки и линейность преобразования Фурье позволяют заключить, что

$$\|\mathscr{F}(f_m) - \mathscr{F}(f_n)\|_2 = \|f_m - f_n\|_2 \quad \text{для всех} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Но $\mathscr{F}(f_m) = \mathscr{F}_m(f)$, поэтому

$$\|\mathscr{F}_m(f)\|_2 = \|f_m\|_2 \quad \text{и} \quad \|\mathscr{F}_m(f) - \mathscr{F}_n(f)\|_2 = \|f_m - f_n\|_2 \quad \text{для всех} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $f_m \to f$ при $m \to \infty$ в $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, из второго равенства и критерия Коши следует, что последовательность $\{\mathscr{F}_m(f)\}_{m\in\mathbb{N}}$ сходится в $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ к некоторой функции F, а предельный переход в первом равенстве влечёт, что $\|F\|_2 = \|f\|_2$.

Шаг 3. Нам осталось установить справедливость третьего утверждения теоремы. Если $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, то $f_m \to f$ при $m \to \infty$ ещё и в $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Поэтому $\mathscr{F}(f_m) \to \mathscr{F}(f)$ при $m \to \infty$ равномерно на $\mathbb{R}$. Но $\mathscr{F}(f_m) \to F$ при $m \to \infty$ в $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, а значит, и в $L^2_{\mathbb{C}}(A)$, где A — произвольное измеримое множество в $\mathbb{R}$. Следовательно $F = \mathscr{F}(f)$ почти всюду в $\mathbb{R}$.

$\square$

Эта теорема позволяет определить преобразование Фурье от функций из $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Для $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ положим

$$\mathscr{F}(f) = \lim_{m\to\infty} \mathscr{F}_m(f),$$

где предел находится в пространстве $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Если же $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, то предел является равномерным на $\mathbb{R}$ (см. теорему 3.3), а равенство справедливо в пространстве $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Заметим, что в определении преобразования $\mathscr{F}_m$ мы могли бы интеграл брать по произвольному интервалу (a_m, b_m), такому что $a_m \to -\infty$ и $b_m \to +\infty$ при $m \to \infty$. Симметричность интервала интегрирования относительно нуля нигде в доказательстве не использовалась.

Таким образом, мы расширили понятие преобразования Фурье, определив его не только на $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, но и на $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. На пространстве $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ оно обладает рядом замечательных свойств. Дело в том, что преобразование Фурье отображает это пространство в себя, причём является изометрией, то есть сохраняет норму элемента. Поэтому нет никаких проблем с обратным преобразованием Фурье, и на функцию не требуется налагать дополнительные условия типа условия Дини.

Установим ещё одно свойство преобразования Фурье, связанное с гильбертовой структурой пространства $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

Теорема 3.16. *Если $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, то* $\big(\mathscr{F}(f), \mathscr{F}(g)\big) = (f, g)$.

Доказательство. В силу линейности преобразования Фурье

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2 = \|\mathscr{F}(f+g)\|_2^2 &= \big(\mathscr{F}(f)+\mathscr{F}(g), \mathscr{F}(f)+\mathscr{F}(g)\big) \\ &= \|\mathscr{F}(f)\|_2^2 + \|\mathscr{F}(g)\|_2^2 + 2\big(\mathscr{F}(f), \mathscr{F}(g)\big) = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\big(\mathscr{F}(f), \mathscr{F}(g)\big),\end{aligned}$$

откуда сразу следует доказываемое равенство, так как

$$\|f+g\|_2^2 = (f+g, f+g) = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2(f,g). \qquad \square$$

3.6 Многомерное преобразование Фурье

Преобразование Фурье функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ определяется аналогично одномерному преобразованию. Мы не будем его изучать, а приведём лишь определение. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — векторы в $\mathbb{R}^n$, а $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi} = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ — их евклидово скалярное произведение. Если $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, то положим

$$\mathscr{F}(f)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\, e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x},$$

где $d\boldsymbol{x}$ — n-мерная мера Лебега. Функция $\mathscr{F}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется преобразованием Фурье (n-мерным) функции f. Используя теорему Фубини, можно вычисление n-мерного интеграла свести к последовательному вычислению n одномерных интегралов. То есть

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f)(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})\, e^{-i(x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n)}\, dx_1 \ldots dx_n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})\, e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1 \ldots e^{-ix_n\xi_n}\, dx_n = \mathscr{F}_n \ldots \mathscr{F}_1(f)(\boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

где $\mathscr{F}_k$ — одномерное преобразование Фурье по k-й переменной. Таким образом, многомерное преобразование Фурье есть композиция одномерных, причём в силу теоремы Фубини не имеет значения, в каком порядке вычисляются эти одномерные преобразования.

Свойства многомерного преобразования Фурье аналогичны свойствам одномерного. Оно часто применяется в математике и физике при решении задач с несколькими переменными.