Пространства модулей алгебраических кривых с отмеченными точками

4–7 февраля 2020 г., Новосибирск.
(4 лекции по одному часу)

Лекция 1

Гладкие компактные комплексные многообразия размерности 1 (римановы поверхности) = Гладкие компактные алгебраические кривые

↑ задаются конечным набором полиномиальных уравнений в $\mathbb{CP}^n$.

Все наши кривые будут связными, если не оговорено противное.

Помеченная кривая: $(C; x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in C$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$.

Помеченные кривые $(C; x_1, \dots, x_n)$ и $(C'; x_1', \dots, x_n')$ называются изоморфными, если существует биголоморфное отображение $\varphi: C \to C'$, такое, что $\varphi(x_i) = x_i'$.

Класс изоморфизма помеченной кривой $(C; x_1, \dots, x_n)$ обозначается через $[(C; x_1, \dots, x_n)]$.

Определение

$$\mathcal{M}_{g,n} := \left\{ \begin{array}{l} \text{классы изоморфизма помеченных} \\ \text{кривых } (C; x_1, \dots, x_n) \text{ с } g(C) = g \end{array} \right\}$$

Род 0

С точностью до изоморфизма есть единственная кривая рода 0 — это $\mathbb{CP}^1$.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1) = PGL(2, \mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \det A \neq 0 \right\} \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$ — дробно-линейное преобразование.

Для любых $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{CP}^1$, $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$, существует единственное дробно-линейное преобразование $\varphi: \mathbb{CP}^1 \circlearrowleft$, такое, что $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$, $\varphi(\infty) = x_3$.

Значит,

$\mathcal{M}_{0,0}=\mathcal{M}_{0,1}=\mathcal{M}_{0,2}=\mathcal{M}_{0,3}=pt$

$\mathcal{M}_{0,4}=\mathbb{C}P^1\setminus\{0,1,\infty\}$

$$\mathcal{M}_{0,n}=\left\{(t_1,\dots,t_{n-3})\in(\mathbb{C}P^1)^{n-3}\ \middle|\ \begin{matrix}t_i\neq 0,1,\infty\\ t_i\neq t_j\end{matrix}\right\},\ n\geq 3.$$

$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{M}_{0,n}=n-3,\ n\geq 3.$

Заметим, что

$$|\mathrm{Aut}(\mathbb{C}P^1;x_1,\dots,x_n)|=\begin{cases}\infty, & \text{если } n\leq 2;\\ 1, & \text{если } n\geq 3.\end{cases}$$

Мы будем рассматривать только помеченные кривые с конечной группой автоморфизмов.

Пространства $\mathcal{M}_{0,n}$ с $n\leq 2$ не рассматриваем.

<u>Свойство универсальности</u>

<u>Определение</u>

Семейством помеченных кривых наз-ся набор $(\mathcal{M},B,\pi,\sigma_i)$, где

- $\mathcal{M}$ и B – гладкие комплексные многообразия, связные.
- $\pi:\mathcal{M}\to B$ – голоморфное отображение, являющееся субмерсией
- слои отображения π являются гладкими кривыми
- $\sigma_i: B\to\mathcal{M},\ 1\leq i\leq n$ – сечения, $\pi\circ\sigma_i=\mathrm{Id}$
- σ_i попарно не пересекаются, $\sigma_i(b)\neq\sigma_j(b),\ b\in B,\ i\neq j.$

Построим семейство над $\mathcal{M}_{0,n}$.

$$C_{0,n}:=\mathbb{C}P^1\times\mathcal{M}_{0,n}=\mathbb{C}P^1\times\left\{(t_1,\dots,t_{n-3})\in(\mathbb{C}P^1)^{n-3}\ \middle|\ \begin{matrix}t_i\neq 0,1,\infty\\ t_i\neq t_j\end{matrix}\right\}$$

$\pi: C_{0,n}\to\mathcal{M}_{0,n}$

$$\sigma_i:\mathcal{M}_{0,n}\to C_{0,n},\ \sigma_i(t_1,\dots,t_{n-3}):=\begin{cases}0, & \text{если } i=1;\\ 1, & \text{если } i=2;\\ \infty, & \text{если } i=3;\\ t_{i-3}, & \text{если } i\geq 4.\end{cases}$$

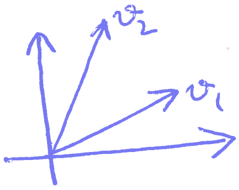
Построили семейство $(C_{0,n},\mathcal{M}_{0,n},\pi,\sigma_i)$

Теорема

Для любого семейства кривых рода 0 с n отмеченными точками, $n \geq 3$, $(\mathcal{M}, B, \pi, \sigma_i)$ существует единственное голоморфное отображение $\varphi : B \to \mathcal{M}_{0,n}$, такое, что семейство $(\mathcal{M}, B, \pi, \sigma_i)$ изоморфно обратному образу семейства $(C_{0,n}, \mathcal{M}_{0,n}, \pi, \sigma_i)$ с помощью отображения φ.

Род 1

$C = \mathbb{C}/L$, где $L = \{a v_1 + b v_2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$



$\mathbb{C}/L \subset \mathrm{Aut}(C) \Rightarrow |\mathrm{Aut}(C)| = \infty$

$|\mathrm{Aut}(C; x_1, \ldots, x_n)| < \infty$, если $n \geq 1$.

Пространство $\mathcal{M}_{1,1}$

$(C, x) = (\mathbb{C}/L, L/L)$, $L = \{a v_1 + b v_2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$

$(\tilde{C}, \tilde{x}) = (\mathbb{C}/\tilde{L}, \tilde{L}/\tilde{L})$.

$(C, x) \cong (\tilde{C}, \tilde{x}) \Leftrightarrow \tilde{L} = \lambda L$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}^*$

$$\Leftrightarrow (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = \lambda (a v_1 + b v_2, c v_1 + d v_2), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\tilde{v}_1}{\tilde{v}_2}, 1\right) = \lambda \frac{c v_1 + d v_2}{\tilde{v}_2} \left(\frac{a \frac{v_1}{v_2} + b}{c \frac{v_1}{v_2} + d}, 1 \right)$$

$$\lambda = \frac{\tilde{v}_2}{c v_1 + d v_2}$$

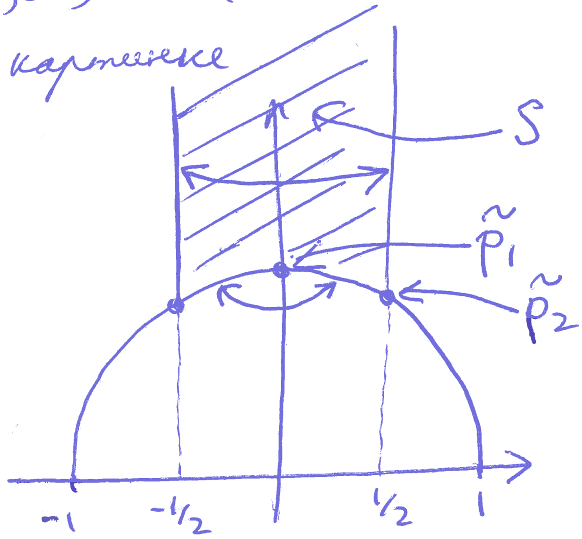
Получается, что

$(C, x) \cong (\tilde{C}, \tilde{x}) \Leftrightarrow \dfrac{\tilde{v}_1}{\tilde{v}_2} = \dfrac{a \frac{v_1}{v_2} + b}{c \frac{v_1}{v_2} + d}$ для некоторой матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$.

$$\mathcal{M}_{1,1} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, \tau \neq 0\} / GL(2, \mathbb{Z}) =$$

$$= \underbrace{\{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, \tau > 0\}}_{\mathbb{H}} / SL(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$$

Фундаментальной областью для действия группы $SL(2,\mathbb{Z})$ на $\mathbb{H}$ явл-ся область S, изображенная на картинке



Значит,

$$\mathcal{M}_{1,1} = \mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z}) = S/_{z\sim -\bar z,\, z\in\partial S}$$

Топологически, $\mathcal{M}_{1,1}$ — это открытый диск.

Заметим, что если $(C,x) = (\mathbb{C}/L, L/L)$, $L=\{a\tau+b\}$, то $\mathrm{Aut}(C,x) = St_\tau \subset SL(2,\mathbb{Z})$.

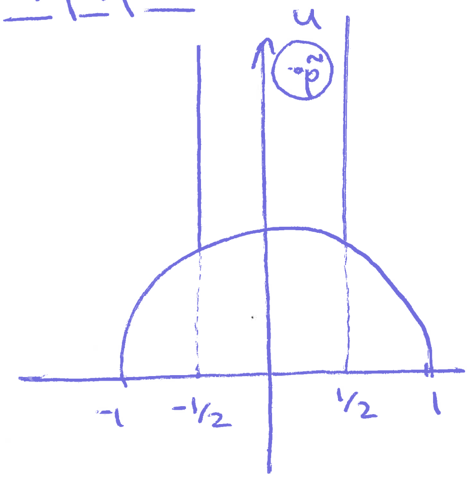
Правильно рассматривать $\mathcal{M}_{1,1}$ как фактор $\mathcal{M}_{1,1} = \mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$, сохраняя часть информации о действии группы.

$\pi: \mathbb{H} \to \mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$

$p_1 := \pi(\tilde p_1) \in \mathcal{M}_{1,1}$

$p_2 := \pi(\tilde p_2) \in \mathcal{M}_{1,1}$

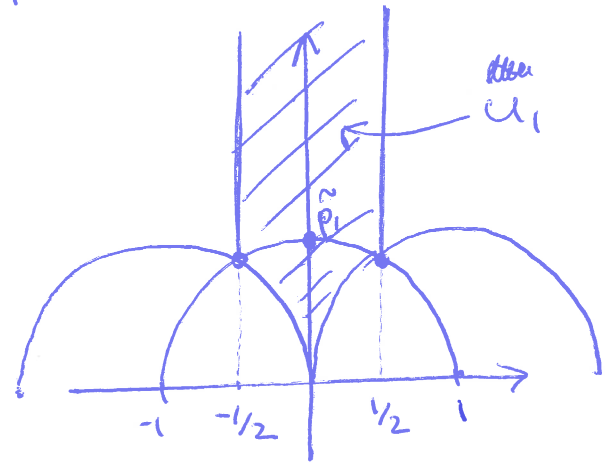
$\underline{\mathcal{M}_{1,1} \ni p \neq p_1, p_2}$



$\pi(\tilde p) = p$

Окрестность p: $U/\mathbb{Z}_2$, действие $\mathbb{Z}_2$ тривиально.

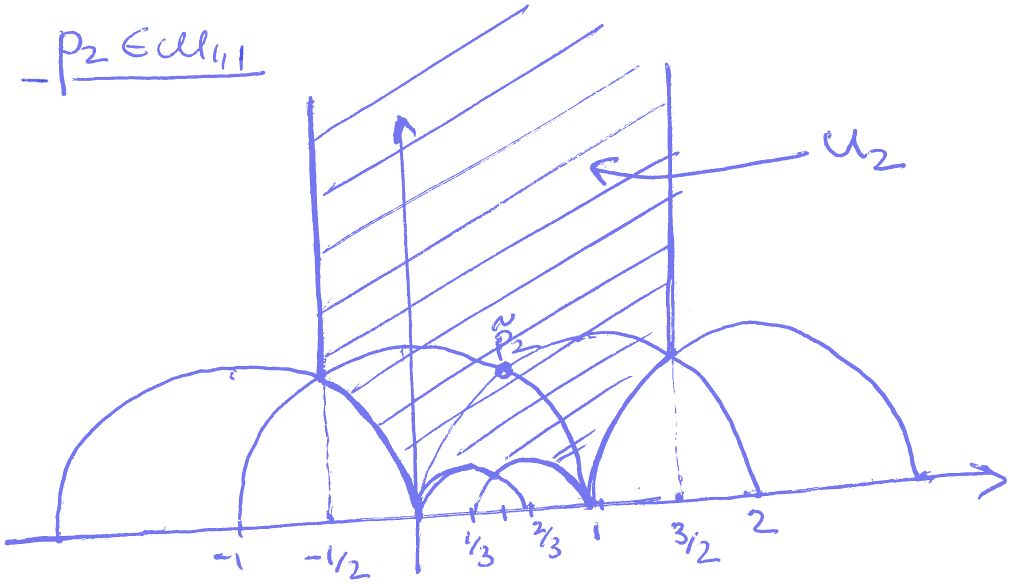
$p_1 \in \mathcal{M}_{1,1}$



Окрестность p_1: $U_1/\left\langle\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\rangle =$

$= U_1/\mathbb{Z}_4$

$p_2 \in \mathcal{M}_{1,1}$



Окрестность p_2: $U_2/\left\langle\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle = U_2/\mathbb{Z}_6$.

Мы видим, что окрестность каждой точки в $\mathcal{M}_{1,1}$ изоморфна фактору открытого множества в $\mathbb{C}$ по действию конечной группы. Получающаяся структура на $\mathcal{M}_{1,1}$ наз-ся структурой орбиобразия

Лекция 2

Орбиобразия

X - топологическое пр-во

Определение

(Орби) картой на пр-ве X наз-ся следующие данные:

$$U/G \xrightarrow{\varphi} V \subset X,$$

где $U \subset \mathbb{C}^n$ - стягиваемое, открытое подмножество, наделённое гомоморфным действием конечной группы G, $V \subset X$ — открытое подмножество и $\varphi: U/G \to V$ — гомеоморфизм.

Замечание

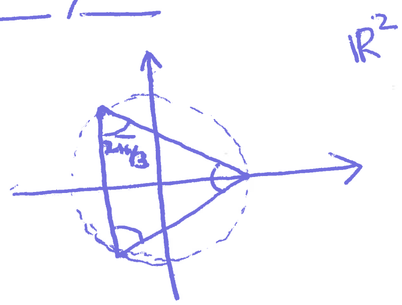
Группа G может действовать тривиально на U

Определение

Карта $U'/G' \xrightarrow{\varphi'} V' \subset X$ наз-ся подкартой карты $U/G \xrightarrow{\varphi} V \subset X$, если $V' \subset V$ и заданы вложение групп $G' \hookrightarrow G$ и гомоморфное вложение $U' \hookrightarrow U$, такие что

- вложение $U' \hookrightarrow U$ коммутирует с действием группы G', которая действует на U посредством вложения $G' \hookrightarrow G$.
- вложение $U' \hookrightarrow U$ коммутирует с изоморфизмами φ и φ'.
- стабилизатор в G' каждой точки $p \in U'$ изоморфен стабилизатору в G её образа в U.

Пример

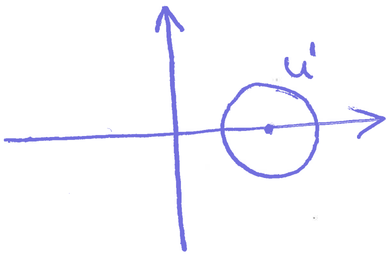


Группа симметрий треугольника — S_3.

Порождена $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$

Возьмём комплексификацию действия на $\mathbb{C}^2$.

$U = \mathbb{C}^2$, $G = S_3$, $X = U/G = \mathbb{C}^2/S_3 = V$



$U'/\mathbb{Z}_2 = V' \subset V$ — подкарта в карте $U/G \to V$.

порождена $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Определение

Две карты $U_1/G_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_1 \subset X$ и $U_2/G_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_2 \subset X$ наз-ся согласованными, если каждая точка $p \in V_1 \cap V_2$ содержится в карте V_3, $U_3/G_3 \xrightarrow{\varphi_3} V_3 \subset X$, являющейся подкартой в картах V_1 и V_2.

Атласом на X наз-ся семейство попарно согласованных карт, покрывающих X.

Определение

Орбиобразие – это хаусдорфово топологическое пр-во со счётной базой и с заданным классом эквивалентности атласов.

Замечание

Мы имеем

$$|Aut(C; x_1, \dots, x_n)| < \infty \iff \left(\begin{array}{c} g=0 \text{ и } n \geq 3 \\ \text{или} \\ g=1 \text{ и } n \geq 1 \\ \text{или} \\ g \geq 2 \end{array} \right) \iff 2g-2+n > 0.$$

Теорема

Пусть $(C; x_1, \dots, x_n)$ – помеченная кривая, $2g-2+n>0$.

$G := Aut(C; x_1, \dots, x_n)$

Сущ-ют следующие объекты:

а) стягиваемое, открытое подмножество $0 \in U \subset \mathbb{C}^{3g-3+n}$,

б) семейство $\mathcal{C}_U \xrightarrow{p} U$ помеченных кривых, $(\mathcal{C}_U, U, p, \sigma_i)$,

в) G-действия на $\mathcal{C}_U$ и U, такие что $p(gx) = g(p(x))$, $x \in \mathcal{C}_U$, $g \in G$, и $g(\sigma_i(y)) = \sigma_i(y)$, $y \in U$.

удовлетворяющие св-вам

1) $(p^{-1}(0); \sigma_1(0), \dots, \sigma_n(0)) \cong (C; x_1, \dots, x_n)$,

2) $g(0)=0$ и группа G действует как группа автоморфизмов слоя $(p^{-1}(0); \sigma_1(0), \dots, \sigma_n(0))$,

3) для любого семейства помеченных кривых $(\mathcal{C}_B, B, \tilde{p}, \tilde{\sigma}_i)$, такого что $(\tilde{p}^{-1}(b); \tilde{\sigma}_1(b), \ldots, \tilde{\sigma}_n(b)) \cong$
$\cong (C; x_1, \ldots, x_n)$ для некоторого $b \in B$, для любой достаточно малой открытой окрестности $b \in B' \subset B$ существует голоморфное отображение $\varphi : B' \to U$, единственное с точностью до композиции с действием группы G, такое что $\varphi(b) = 0$ и ограничение семейства $(\mathcal{C}_B, B, \tilde{p}, \tilde{\sigma}_i)$ на B' изоморфно обратному образу семейства $(\mathcal{C}_U, U, p, \sigma_i)$ с помощью отображения φ.

Кроме того, семейство карт U/G задаёт на $\mathcal{M}_{g,n}$ структуру орбиобразия, а множества $\mathcal{C}_U/G$ склеиваются в пространство $\mathcal{C}_{g,n}$, надëлённое проекцией $p : \mathcal{C}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n}$, называемое универсальной кривой. Пр-во $\mathcal{C}_{g,n}$ также явл-ся орбиобразием.

$$p^{-1}([C; x_1, \ldots, x_n]) = C/\mathrm{Aut}(C; x_1, \ldots, x_n).$$

Докажем, что при $g = n = 1$ не сущ-ет универсального сем-ва помеченных кривых, такое что любое другое сем-во можно было бы из него получить в рез-те обратного образа. Предположим, что такое сем-во существует, $(\tilde{\mathcal{C}}_{1,1}, \tilde{\mathcal{M}}_{1,1}, \tilde{p}, \tilde{\sigma}_1)$.

$C = \mathbb{C}/L$ - любая кривая рода 1, $L = \{a v_1 + b v_2\} \subset \mathbb{C}$.

$$\hat{L} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \qquad \hat{L} := \left\{ (\lambda(a v_1 + b v_2), \lambda^2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \;\middle|\; \begin{matrix} a, b \in \mathbb{Z} \\ \lambda \in \mathbb{C}^* \end{matrix} \right\}$$

$$\downarrow \hat{\pi} \qquad \hat{\pi}^{-1}(b) \cap \hat{L} = \sqrt{b}\, L, \quad b \in \mathbb{C}^*.$$

$$\mathbb{C}^*$$

$$\mathcal{C} := \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* / \hat{L} \qquad \pi^{-1}(b) = \mathbb{C}/\sqrt{b}\,L \cong \mathbb{C}/L \cong C$$

$$\sigma_1 \uparrow \downarrow \pi$$

$$\mathbb{C}^*$$

$$(\mathcal{C}, \mathbb{C}^*, \pi, \sigma_1) \cong \varphi^{-1}(\tilde{\mathcal{C}}_{1,1}, \tilde{\mathcal{M}}_{1,1}, \tilde{p}, \tilde{\sigma}_1)$$

для некоторого $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{1,1}$

$\pi^{-1}(b) \cong C, \forall b \in \mathbb{C}^* \Rightarrow Im(\varphi) = pt \in \tilde{\mathcal{M}}_{1,1} \Rightarrow$ семейство $(\mathcal{C}, \mathbb{C}^*, \pi, \sigma_1)$ есть прямое произведение

Однако, легко понять, что топологически семейство $\begin{array}{c}\mathcal{C}\\ \downarrow \\ \mathbb{C}^*\end{array}$ явл-ся локально тривиальным расслоением, которое <u>нетривиально</u>. Это можно проверить посчитав монодромию при обходе вдоль $S^1 \subset \mathbb{C}^*$. Противоречие.

<u>Лекция 3</u>

Явная конструкция универсальной кривой $\mathcal{C}_{1,1} \longrightarrow \mathcal{M}_{1,1}$

$\tau \in \mathbb{H} \longleftrightarrow$ решётка $L_\tau := \{a\tau + b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$

Заметим, что для $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ мы имеем

$$L_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}} = \frac{1}{c\tau+d} L_\tau .$$

Определим $\hat{L} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{H}$:

$$\hat{L} := \{(a\tau + b, \tau) \mid a, b \in \mathbb{Z}, \tau \in \mathbb{H}\}$$

$SL(2,\mathbb{Z})$-действие на $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z, \tau) := \left(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \right)$$

Мы видим, что $\hat{L}$ явл-ся $SL(2,\mathbb{Z})$-инвариантным.

Определим

$$\begin{array}{c} \mathcal{C}_{1,1} := (\mathbb{C} \times \mathbb{H} / \hat{L}) / SL(2, \mathbb{Z}) \\ \downarrow \pi \\ \mathcal{M}_{1,1} = \mathbb{H} / SL(2, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Это и есть универсальная кривая.

Компактификация пр-ва $\mathcal{M}_{g,n}$

$\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

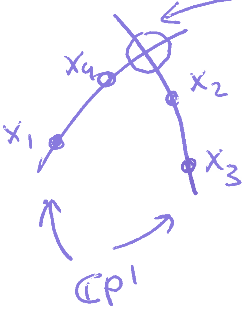
$[(\mathbb{CP}^1; 0,1,\infty,t)] \longleftrightarrow t\in\mathbb{CP}^1$

Что происходит, когда $t\to 0$?

$$[(\mathbb{CP}^1;0,1,\infty,t)] \xrightarrow[z\mapsto z/t]{\text{лок. коорд.}} [(\mathbb{CP}^1; 0, \tfrac1t, \infty, 1)]$$

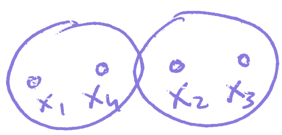
сближаются. сближаются.

Оказывается, что в качестве предела надо рассматривать особую кривую



точка простого самопересечения (локально, $\{xy=0\}\subset\mathbb{C}^2$)

Двумерная картинка



Реализация в семействе

Семейство $C_t := \{[x:y:z]\in\mathbb{CP}^2 \mid xy = tz^2\}$, $t\in\mathbb{C}$.

$C_t \cap \mathbb{C}^2 = \{xy=t\}$

$e_x := \{y=0\}\subset \mathbb{CP}^2$

$e_y := \{x=0\}\subset\mathbb{CP}^2$

$\pi: C_t \xrightarrow{\sim} e_x$ - проекция, $t\neq0$.

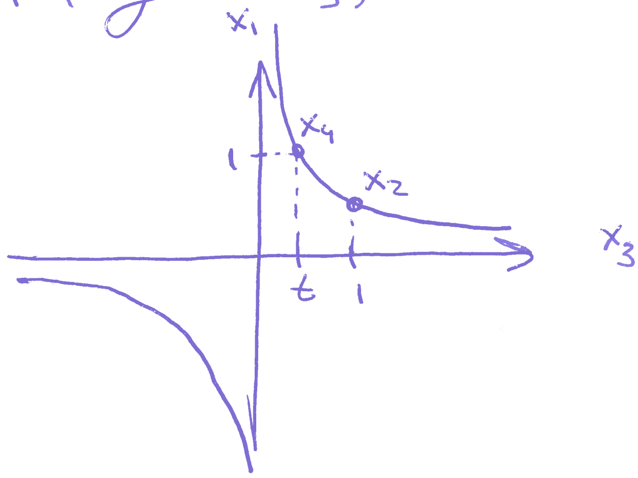
$\pi^{-1}(0) = [0:1:0] \xrightarrow{t\to0} [0:1:0]$

$\pi^{-1}(1) = [1:t:1] \xrightarrow{t\to0} [1:0:1]$

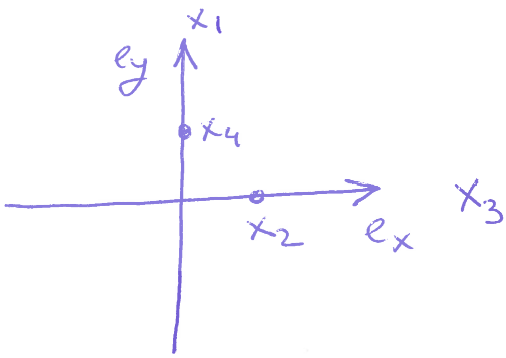
$\pi^{-1}(\infty) = [1:0:0] \xrightarrow{t\to0} [1:0:0]$

$\pi^{-1}(t) = [t:1:1] \xrightarrow{t\to0} [0:1:1]$

$C_t \xrightarrow{t\to0} C_0 = e_x\cup e_y$



$\downarrow t\to0$

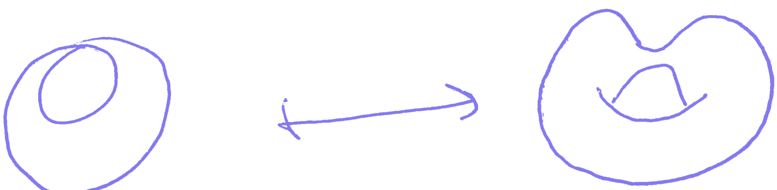


Определение

Нодальная кривая – это (возможно особая) связная, компактная, комплексная кривая, где в качестве особенностей разрешаются только точки двойного самопересечения.

Нодальная кривая $C \longmapsto$ сглаживание $\hat{C}$ (локально, $\{xy=0\} \longmapsto \{xy=\varepsilon\}$)

C $\hat{C}$



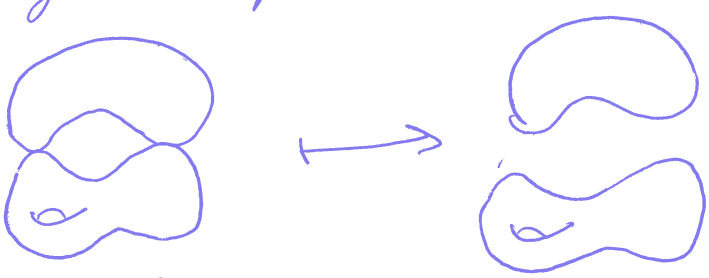
C $\hat{C}$

$g(C) := g(\hat{C})$

$g=2$

гладкая, возможно несвязная.

Нодальная кривая $C \longmapsto$ нормализация $\tilde{C}$ (разводим ветви в особых точках)



C $\tilde{C}$

$\tilde{C} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_k$, C_i – связные

δ – число особых точек

Упражнение

$$g(C) = 1 + \delta + \sum_{i=1}^{k} (\overbrace{g(C_i)}^{g_i} - 1)$$

Помеченная нодальная кривая: $(C; x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in C^{sm}$, $x_i \neq x_j, i \neq j$.

гладкая часть

Стабильная кривая — это помеченная нодальная кривая $(C; x_1, \dots, x_n)$, такая что $|Aut(C; x_1, \dots, x_n)| < \infty$.

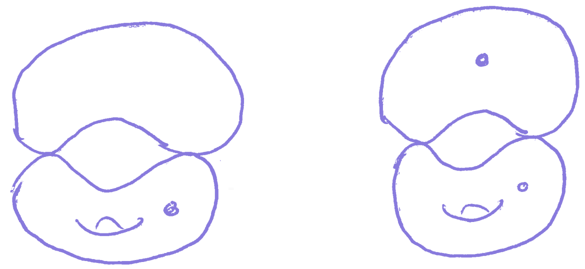
$\pi: \tilde{C} \longrightarrow C$

$n_i := |C_i \cap \pi^{-1}(C^{sing} \cup \{x_1, \dots, x_n\})|, \quad 1 \le i \le k$

$|Aut(C; x_1, \dots, x_n)| < \infty \iff 2g_i - 2 + n_i > 0, \ \forall \ 1 \le i \le k$

$\Updownarrow$

($2g - 2 + n > 0$ и если $g_i = 0$, то $n_i \geq 3$)



$g = 2$ нестабильна — стабильна

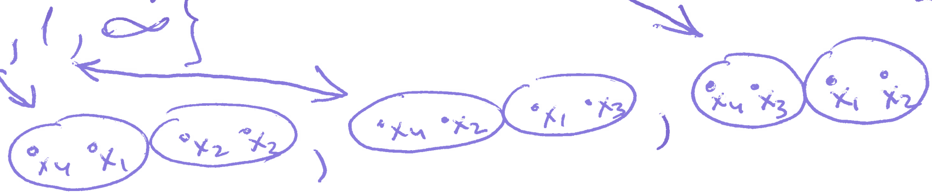
Определение

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n} := \{$ классы изоморфизма стабильных кривых рода g с n отмеченными точками $\}$

$\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$

$\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

$\overline{\mathcal{M}}_{0,4} \setminus \mathcal{M}_{0,4} = \{$

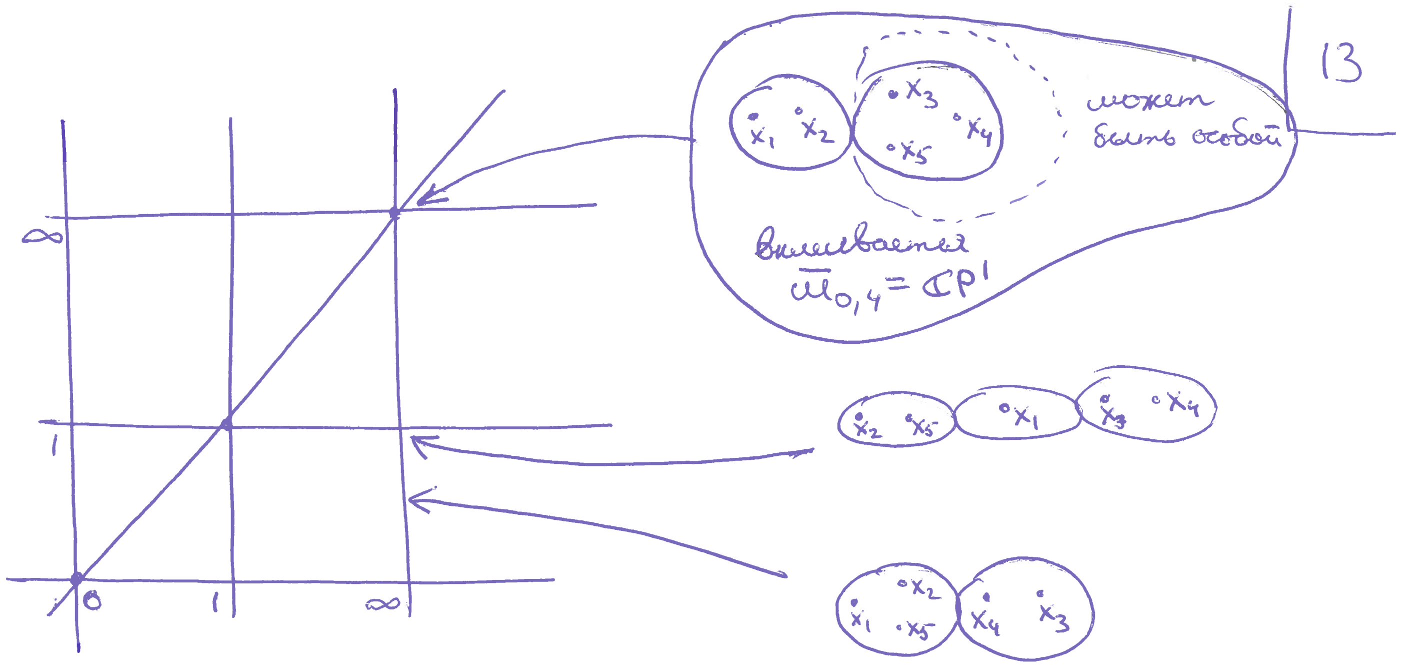


$\}$

$\overline{\mathcal{M}}_{0,4} = \mathbb{CP}^1$

$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$

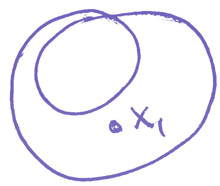
$\mathcal{M}_{0,5} = \left\{ (t_1, t_2) \in (\mathbb{CP}^1)^2 \ \middle| \ \begin{array}{l} t_1, t_2 \neq 0, 1, \infty \\ t_1 \neq t_2 \end{array} \right\}$



В рез-те,

$\overline{M}_{0,5}$ = раздутие $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$ в
точках $(0,0)$, $(1,1)$, (∞,∞)

$\overline{M}_{1,1}$

$\overline{M}_{1,1}\setminus M_{1,1} = \Big\{$  $\Big\}$

$\overline{M}_{1,1}$ гомеоморфно $\mathbb{CP}^1$

Как орбиобразие, $\overline{M}_{1,1}\not\cong\mathbb{CP}^1$

Теорема

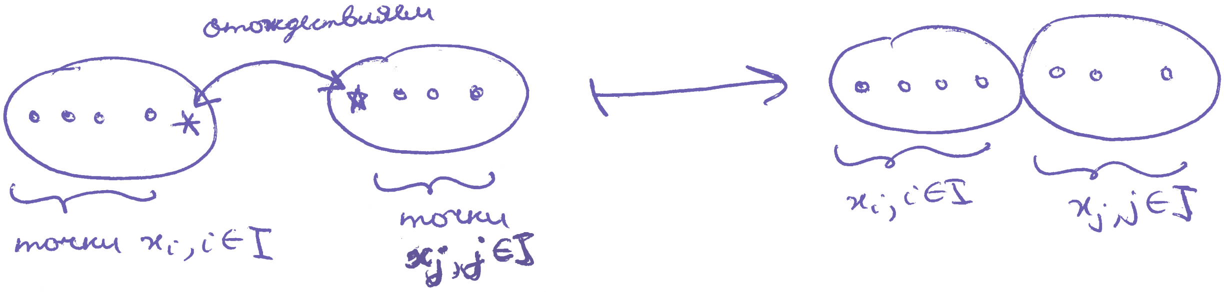
1) На $\overline{M}_{g,n}$ имеется стр-ра компактного, комплексного орбиобразия размерности $3g-3+n$.
2) $M_{g,n}\subset\overline{M}_{g,n}$ явл-ся открытым подмножеством.
3) Имеется компактное, комплексное орбиобразие $\overline{C}_{g,n}$ и отображение $p:\overline{C}_{g,n}\to\overline{M}_{g,n}$, имеющее локальную структуру аналогичную локальной стр-ре универсальной кривой $C_{g,n}\to M_{g,n}$, и которое обладает св-вом универсальности для семейств стабильных кривых.

Замечание

Пр-ва $\overline{M}_{0,n}$ и $\overline{C}_{0,n}$ явл-ся гладкими, комплексными многообразиями.

Лекция 4

$n \geq 4 \qquad \{1, \dots, n\} = I \sqcup J, \quad |I|, |J| \geq 2.$

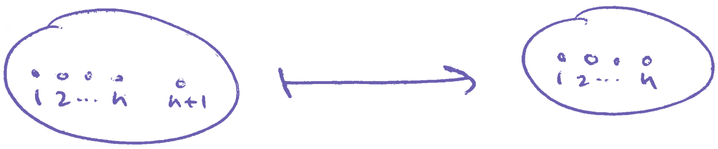


$$gl: \overline{\mathcal{M}}_{0,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,|J|+1} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$$

Образ отображения gl состоит из замыкания множества стабильных кривых с одной особой точкой, с точками $x_i, i \in I$, на одной компоненте и с точками $x_j, j \in J$, на другой компоненте.

$n \geq 3$

Забывающее отображение $\pi: \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$: забываем $(n+1)$-ую отмеченную точку, и, если одна из компонент стала нестабильной, то стягиваем её в точку.



Итерируя, мы получаем забывающие отображения

$$\pi: \overline{\mathcal{M}}_{0,n+m} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}, \quad m \geq 1.$$

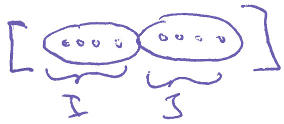
Соотношения в когомологиях пр-ва $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

$n \geq 4 \qquad \{1, \dots, n\} = I \sqcup J, \quad |I|, |J| \geq 2.$

$$gl: \overline{\mathcal{M}}_{0,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,|J|+1} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$$

$$\delta_0^I := PD(gl_*[\overline{\mathcal{M}}_{0,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,|J|+1}]) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}) = H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}, \mathbb{C}).$$

двойственность Пуанкаре

$=$  графическое изображение

Пример

$$\delta_0^{\{1,2\}} = \delta_0^{\{1,3\}} = \delta_0^{\{1,4\}} = \left(\begin{array}{l}\text{класс, двойственный} \\ \text{точке в } \mathbb{C}P^1\end{array}\right) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,4}), \quad \overline{\mathcal{M}}_{0,4} = \mathbb{C}P^1$$

Утверждение

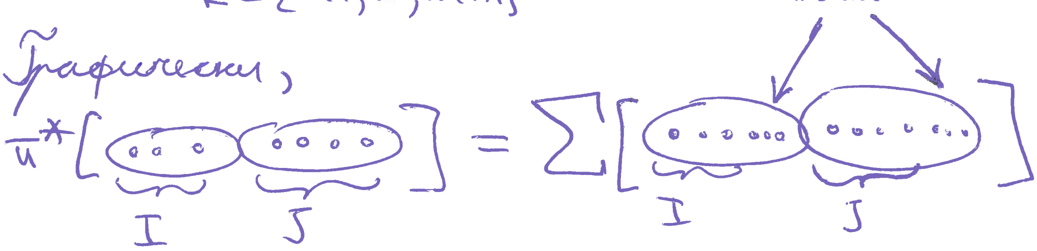
$n \geq 4$, $\{1, \dots, n\} = I \sqcup J$, $|I|, |J| \geq 2$

$\pi : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+m} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ – забывающее отображение

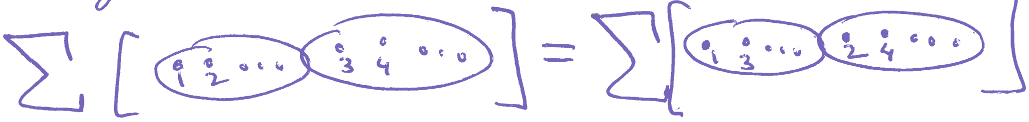
Тогда

$$\pi^* \delta_0^I = \sum_{K \subset \{n+1, \dots, n+m\}} \delta_0^{K \sqcup I} \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+m}).$$

Графически,



Следствие (из примера и утверждения)



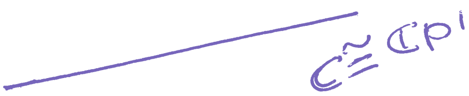
$\in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}), n \geq 4.$

Рациональные кривые степени d на $\mathbb{CP}^2$

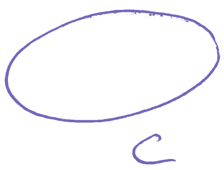
$C \subset \mathbb{CP}^2$ степени $d \geq 1$ $\quad [x:y:z] \in \mathbb{CP}^2$

$C = \{[x:y:z] \in \mathbb{CP}^2 \mid P(x,y,z) = 0\}$, $P(x,y,z)$ – однородный многочлен степени d.

$d = 1$



$d = 2$



Если C – гладкая, то $C \cong \mathbb{CP}^1$

$d = 3$

Если C – гладкая, то $g(C) = 1$.

Если у C есть одна особая точка, явл-ся точкой простого самопересечения, то $g(\tilde{C}) = 0$.

Произвольная степень $d \geq 1$

Если C – неодная, то $g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Рассмотрим особые кривые с $\delta \geq 0$ особых точек, явл-ся точками простого самопересечения, причём такие, что $\widetilde{C}$ – связная.

Тогда $g(\widetilde{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$.

Рациональные кривые $\Leftrightarrow g(\widetilde{C}) = 0 \Leftrightarrow \delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{d^2-3d+2}{2}$

$$Q_d := \{P(x,y,z) = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x^i y^j z^k\}$$

$$\dim Q_d = (d+1) + d + \ldots + 1 = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$$

$\mathbb{P}Q_d$ – пр-во кривых степени d

$$\dim \mathbb{P}Q_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 = \frac{d^2+3d}{2}$$

$Rt_d \subset \mathbb{P}Q_d$ – подпр-во рациональных кривых

$$\dim Rt_d = \frac{d^2+3d}{2} - \frac{d^2-3d+2}{2} = 3d-1$$

наличие особой точки, явл-ся точкой пр-го самопересечения есть условие коразмерности 1.

Условие прохождения кривой через точку задаёт гиперплоскость в пр-ве $\mathbb{P}Q_d$.

Значит, можно ожидать, что кол-во рациональных кривых, проходящих через $3d-1$ точку общего положения, конечно.

Обозначим его через N_d

$$\underbrace{N_1 = 1 \quad N_2 = 1}_{\text{элементарно}} \quad \underbrace{N_3 = 12 \quad N_4 = 620}_{\text{19 век}}$$

Числа N_d при $d \geq 5$ не были известны пока не был получен следующий рез-т в середине 1990х годов

Теорема (Концевич)
Итоговая рекурсия

$$N_d = \frac{1}{3d-3} \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1,d_2\geq 1}} N_{d_1} N_{d_2} \binom{3d-3}{3d_1-2} d_1 d_2^2 (2d_2-d_1), \quad d \geq 2.$$

Пример

$$N_5 = 87304$$

Набросок док-ва теоремы

$\mathbb{P}Q_d \rightsquigarrow$ пространство отображений $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^2$.

Отображения

$$\underbrace{(C; x_1, \dots, x_n)}_{\text{нод-ная кривая}} \longrightarrow \mathbb{CP}^2$$

Изоморфизм

$$\begin{tikzcd}
(C; x_1, \dots, x_n) \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr] & & (C'; x_1', \dots, x_n') \arrow[dl] \\
& \mathbb{CP}^2 &
\end{tikzcd}$$

Стабильность $\Longleftrightarrow$ конечность группы автоморфизмов.

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{CP}^2, d) := \left\{ \begin{array}{l} \text{классы изоморфизма} \\ \text{стабильных отображений} \\ \varphi: (C; x_1, \dots, x_n) \to \mathbb{CP}^2, \\ g(C) = 0, \ \varphi_*[C] = d \in \mathbb{Z} = H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}) \end{array} \right\}, \ d \geq 0.$$

проективные алгебраические многообразия

$\dim \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{CP}^2, d) = 3d-1+n$.

Легко понять, что $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{CP}^2, 0) = \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \times \mathbb{CP}^2$.

$$ev_i: \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{CP}^2, d) \longrightarrow \mathbb{CP}^2$$

$$ev_i\left(\left[\varphi: (C; x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \mathbb{CP}^2\right]\right) := \varphi(x_i)$$

Для $\alpha \in H^{2k}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{CP}^2, d))$ введем обозначение

$$\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{CP}^2, d)]} \alpha := \begin{cases} \Theta(\alpha \cap \underbrace{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{CP}^2, d)]}_{\text{фундаментальный класс}}) \in \mathbb{C}, & \text{если } k = 3d-1+n, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $\Theta: H_0(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{CP}^2, d)) \longrightarrow \mathbb{C}$.

$h \in H^2(\mathbb{C}P^2)$ – класс гиперплоскости.

$$\boxed{N_d = \int\limits_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,3d-1}(\mathbb{C}P^2,d)]} \prod_{i=1}^{3d-1} ev_i^*(h^2), \quad d \geqslant 1.}$$

$v_i \in H^{2k_i}(\mathbb{C}P^2)$

Обозначение:

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_d := \int\limits_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{C}P^2,d)]} \prod_{i=1}^{n} ev_i^*(v_i)$$

Значит, $N_d = \langle \underbrace{h^2, \ldots, h^2}_{3d-1 \text{ раз}} \rangle_d$.

$1, h, h^2$ – базис в $H^*(\mathbb{C}P^2)$

Имеются св-ва

$$\langle v_1, \ldots, v_n, 1 \rangle_d = \begin{cases} 0, & \text{если } d \geqslant 1, \\ \left(\int\limits_{[\mathbb{C}P^2]} v_1 v_2 \right) \delta_{n,2}, & \text{если } d = 0. \end{cases}$$

$$\langle v_1, \ldots, v_n, h \rangle_d = \begin{cases} d \langle v_1, \ldots, v_n \rangle, & \text{если } d \geqslant 1, \\ \left(\int\limits_{[\mathbb{C}P^2]} v_1 v_2 h \right) \delta_{n,2}, & \text{если } d = 0. \end{cases}$$

Отсюда мы получаем, что производящий ряд

формальные переменные

$$F(t_0, t_1, t_2, q) := \sum_{n,d \geqslant 0} \frac{q^d}{n!} \sum_{0 \leqslant k_1, \ldots, k_n \leqslant 2} \langle h^{k_1}, \ldots, h^{k_n} \rangle_d \, t_{k_1} \cdots t_{k_n}$$

имеет вид

$$F = \frac{t_0^2 t_2}{2} + \frac{t_0 t_1^2}{2} + \sum_{d \geqslant 1} q^d N_d e^{d t_1} \frac{t_2^{3d-1}}{(3d-1)!}.$$

Ключевое соотношение для вычисления ряда F пол-ся следующим образом.

$st : \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{C}P^2, d) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

$st([\varphi : (C; x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \mathbb{C}P^2]) := [(C; x_1, \ldots, x_n)]$.

<u>Утверждение</u>

$$\int\limits_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{C}P^2,d)]} \Big(\prod_{i=1}^{n} ev_i^*(v_i)\Big)\, st^*(\delta_0^I) = \sum_{\substack{d_1+d_2=d\\ \alpha+\beta=2}} \langle v_I, h^\alpha\rangle_{d_1} \langle h^\beta, v_J\rangle_{d_2},$$

где $\{1,\ldots,n\} = I \sqcup J$, $|I|,|J| \geq 2$, $v_i \in H^{2k_i}(\mathbb{C}P^2)$ и через v_I мы обозначаем строчку $v_{i_1},\ldots,v_{i_{|I|}}$, где $I=\{i_1,\ldots,i_{|I|}\}$.

Вместе с соотношением

$$\left[\,(1\;2\;\ldots)(3\;4\;\ldots)\,\right] = \left[\,(1\;3\;\ldots)(2\;4\;\ldots)\,\right] \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$$

утверждение даёт следующее соотношение для ряда F:

$$\sum_{\mu+\nu=2} \frac{\partial^3 F}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\mu} \frac{\partial^3 F}{\partial t_\nu \partial t_\gamma \partial t_\delta} = \sum_{\mu+\nu=2} \frac{\partial^3 F}{\partial t_\alpha \partial t_\gamma \partial t_\mu} \frac{\partial^3 F}{\partial t_\nu \partial t_\beta \partial t_\delta},$$

верное для любой четверки $0 \leq \alpha,\beta,\gamma,\delta \leq 2$.

Выбрав $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=1$, $\delta=2$, мы получим

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial t_1^2 \partial t_2}\right)^2 = \frac{\partial^3 F}{\partial t_1^3} \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_2^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial t_2^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^3 F}{\partial t_2^3} = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial t_1^2 \partial t_2}\right)^2 - \frac{\partial^3 F}{\partial t_1^3} \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_2^2}. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_d}{(3d-4)!} = \sum_{\substack{d_1,d_2\geq 1\\ d_1+d_2=d}} \underbrace{\left(\frac{d_1^2 d_2^2}{(3d_1-2)!(3d_2-2)!} - \frac{d_2^3 d_1}{(3d_2-1)!(3d_1-3)!}\right)}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle \frac{d_1 d_2^2(2d_2-d_1)}{(3d_1-2)!(3d_2-1)!}} N_{d_1} N_{d_2}, \quad d \geq 2.$$

Теорема Концевича доказана $\square$

Источники

- D. Zvonkine. An introduction to moduli spaces of curves and their intersection theory.
- М. Э. Казарян, С. К. Ландо, В. В. Прасолов. Алгебраические кривые. По направлению к пространствам модулей.
- J. W. Robbin, D. A. Salamon. A construction of the Deligne-Mumford orbifold.