Новосибирский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра прикладной математики

Избранные вопросы курса математического анализа

Числовые системы

В.Н. Старовойтов

Содержание

1 Множества и отображения

1.1 Понятие множества

Понятие множества является одним из первоначальных в математике, поэтому его строгое определение связано с некоторыми трудностями. Всегда, определяя новый объект, мы опираемся на уже известные, введённые ранее понятия. Но как быть с объектами, которые находятся в самом начале этой цепочки определений? Можно предположить, что понятие множества является интуитивно ясным и не нуждается в определении, однако был построен ряд примеров множеств, само определение которых содержит в себе противоречие.

Пример 1.1. (*Б. Рассел. Парадокс брадобрея.*) В городе Н есть только один брадобрей и он бреет всех тех (и только тех), кто не бреется сам. Но тогда на вопрос о том, кто же бреет самого брадобрея, невозможно ответить. И причина этого кроется не в нашей недостаточной осведомленности, а в противоречивости формулировки. Соответственно, некорректным будет и определение множества всех тех людей из города Н, кто не бреется сам. Хотя на языке повседневного общения это определение и выглядит вполне приемлемым, его нельзя использовать в строгих математических рассуждениях. •

Для того, чтобы полностью исключить подобные парадоксы, множество определяется как объект, удовлетворяющий некоторому набору аксиом. Аксиоматический подход всегда применяется в ситуациях, когда не на что опереться при введении нового понятия. Мы воспользуемся этим подходом для определения вещественных чисел. Следует признать, что при этом наглядность приносится в жертву строгости. По этой причине мы не будем злоупотреблять аксиоматическим подходом и для определения множества ограничимся так называемой «наивной теорией множеств», которая опирается на наш повседневный опыт. При этом мы постараемся быть максимально осторожными в формулировках.

Определим *множество* как совокупность различимых объектов произвольной природы, рассматриваемую как единое целое. Сами объекты называются *элементами множества.* Вообще говоря, это определение неприемлемо, так как опирается на понятие «совокупность», которое фактически является синонимом понятия «множество». В оправдание скажем, что слово «множество» мы здесь использовали, как определяемый математический термин, а «совокупность» — как слово русского языка, призванное объяснить этот термин. Как бы то ни было, будем считать, что нам известны понятия «множество» и «элемент множества». Для обозначения множеств мы будем использовать прописные буквы латинского алфавита (A, B, C, ...), а для элементов — строчные (a, b, c, ...). Тот факт, что некоторый объект x является элементом множества A, на математическом языке записывается следующим образом: $x \in A$. Если же x не является элементом A, то пишут $x \notin A$ или $x \overline{\in} A$. Мы будем использовать первое из этих обозначений.

В качестве синонимов термина «множество» мы также будем использовать термины «класс», «система», «семейство», «набор» и другие. Употребление того или иного из этих терминов с одной стороны является данью традиции, с другой — призвано избежать парадоксов наивной теории множеств. Приведём ещё один пример.

Пример 1.2. (*Б. Рассел*) Противоречивым является понятие множества всех множеств. Действительно, пусть A — множество тех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Попробуем ответить на вопрос, является ли A элементом множества A.

Положительным ответ быть не может в силу определения A. Значит, A не является элементом множества A. Но в этом случае, опять же следуя определению, мы получим, что A является элементом множества A. Получили противоречие. $\bullet$

Чтобы избежать подобных парадоксов и не путать множества с элементами, лучше использовать для них различные термины: «класс таких-то множеств» или «семейство таких-то множеств».

Существует два основных способа описания множеств:

1°. Если множество A состоит из конечного числа элементов, то можно просто все эти элементы перечислить, записав их в фигурных скобках через запятую. Например, если A есть множество букв, составляющих слово «математика», то $A = \{$м,а,т,е,и,к$\}$. Заметим, что каждая буква встречается в фигурных скобках только один раз (элементы множества должны быть различимы).

2°. Пусть $\mathcal{P}$ — какое-либо свойство, и запись $\mathcal{P}(x)$ означает, что объект x обладает свойством $\mathcal{P}$. Тот факт, что A есть множество объектов, обладающих свойством $\mathcal{P}$, записывают так: $A = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}$. Если мы дополнительно потребуем, чтобы эти объекты выбирались из некоторого другого множества B, то запишем $A = \{x \in B \mid \mathcal{P}(x)\}$. Читается эта запись так: множество A состоит из тех (и только тех) элементов множества B, которые обладают свойством $\mathcal{P}$. Вертикальная черта является обозначением для слов «которые» или «такие что».

Пример 1.3.
а) Запишем на математическом языке фразу «Петя любит морковку». Любить морковку могут не только люди, но и животные. Мы предположим, что Петя — человек. Обозначим Петю символом p, множество всех людей — символом M, а свойство некоторого индивида x (не обязательно человека) любить морковку — символом $\mathcal{P}(x)$. Тогда наша фраза будет выглядеть так: $p \in \{x \in M \mid \mathcal{P}(x)\}$.
б) Пусть A — множество букв русского алфавита. Тогда $B = \{x \in A \mid x$ — гласная$\}$ — множество гласных букв. Заметим, что здесь мы можем воспользоваться и первым способом описания множеств: $B = \{$а, е, ё, и, о, у, ы, э, ю, я$\}$. $\bullet$

Множества A и B *равны* (обозначение: $A = B$), если они состоят из одних и тех же объектов. Выражение $A \neq B$ означает, что множества A и B не равны, то есть не все элементы одного из них являются элементами другого. Равенство есть *отношение эквивалентности* между множествами, так как оно обладает следующими свойствами:

1°. *рефлексивность* ($A = A$);

2°. *симметричность* (если $A = B$, то $B = A$);

3°. *транзитивность* (если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$).

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A является *подмножеством* множества B (или *A содержится в B*). Мы будем обозначать этот факт так: $A \subset B$. Скажем, что A является *собственным подмножеством* B (обозначение: $A \Subset B$), если $A \subset B$ и $A \neq B$.

Очевидно, что справедливы следующие утверждения:

1°. $A \subset A$;

2°. если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$;

3°. если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Удобно ввести множество, совсем не имеющее элементов и называемое *пустым множеством*. Для его обозначения используется символ $\varnothing$. Будем считать, что пустое множество является подмножеством любого множества. Впрочем, этот факт может быть доказан. Его доказательство будет приведено в примере 1.6 в конце следующего пункта.

1.2 Логическая символика

Математический текст представляет собой последовательность утверждений и их доказательств, для изложения которых помимо специальных символов чаще всего используется обычный язык. Иногда, однако, бывает полезно записать то или иное утверждение формальным языком. Такая потребность может возникнуть, например, если мы хотим построить отрицание утверждения, имеющего сложную структуру. Кроме того, в длинной последовательности несложных умозаключений легче разобраться, если она написана более компактно. Мы введём символы $\urcorner, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$, заимствованные из математической логики, и покажем, как можно с их помощью записывать утверждения.

Утверждение (*высказывание*) есть повествовательное предложение, которое может быть либо истинным, либо ложным. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — утверждения, тогда

утверждение $\urcorner\mathcal{A}$ (*не* $\mathcal{A}$) истинно тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ ложно;

утверждение $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$) истинно тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ истинны;

утверждение $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ *или* $\mathcal{B}$) истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из утверждений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ истинно;

утверждение $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ *влечёт* $\mathcal{B}$, *из* $\mathcal{A}$ *следует* $\mathcal{B}$) означает, что $\mathcal{A}$ истинно только тогда, когда истинно $\mathcal{B}$;

утверждение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ *равносильно* $\mathcal{B}$) означает, что из истинности $\mathcal{A}$ следует истинность $\mathcal{B}$ и из истинности $\mathcal{B}$ следует истинность $\mathcal{A}$.

В формулировках теорем часто используют следующие конструкции: «если $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}$», «для того, чтобы $\mathcal{A}$, необходимо, чтобы $\mathcal{B}$», «для того, чтобы $\mathcal{B}$, достаточно, чтобы $\mathcal{A}$», которые означают $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, а также «$\mathcal{A}$ справедливо тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$», «для того, чтобы $\mathcal{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{B}$», означающие $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.

Чтобы избежать путаницы, иногда мы будем заключать утверждения в круглые скобки. Несложно вывести следующие утверждения:

1°. $\urcorner(\urcorner\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$,

2°. $\urcorner(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\urcorner\mathcal{A}) \vee (\urcorner\mathcal{B})$,

3°. $\urcorner(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\urcorner\mathcal{A}) \wedge (\urcorner\mathcal{B})$,

4°. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\urcorner\mathcal{A}) \vee \mathcal{B}$,

5°. $\urcorner(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge (\urcorner\mathcal{B})$.

Утверждение 1° используется в доказательствах «от противного». Этот метод доказательства основан на том, что если $\urcorner\mathcal{A}$ ложно, то $\urcorner(\urcorner\mathcal{A})$, а значит, и $\mathcal{A}$ истинно. Для установления ложности $\urcorner\mathcal{A}$ обычно предполагают его истинность и приходят к противоречию. Заметим также, что утверждение 4° проще вывести из 5°, используя первые два утверждения:

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \urcorner(\urcorner(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})) \Leftrightarrow \urcorner(\mathcal{A} \wedge (\urcorner\mathcal{B})) \Leftrightarrow (\urcorner\mathcal{A}) \vee \mathcal{B}.$$

Символы $\forall$ и $\exists$ называются *кванторами*. Квантор всеобщности $\forall$ служит сокращением слов «для любого», «для всех», а квантор существования $\exists$ — для слов «существует», «найдётся». Мы иногда будем использовать ещё одно сокращение: символ $\exists!$ будет означать «существует единственный». Использование кванторов мы поясним на примерах.

Пример 1.4. Пусть A и B — какие-либо множества.

а) $A \neq \varnothing$ есть утверждение $(\exists x)(x \in A)$.

б) $A \subset B$ есть утверждение $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$. Мы также будем записывать это утверждение (и подобные ему) в другой форме: $(\forall x \in A)(x \in B)$.

в) $A \Subset B$ есть утверждение $(A \subset B) \wedge (A \neq B)$, которое можно записать и следующим образом: $\big((\forall x \in A)(x \in B)\big) \wedge \big((\exists x \in B)(x \notin A)\big)$. •

Отрицание утверждений, в которых присутствуют кванторы, строится по следующему принципу:

$$\urcorner((\forall x)\mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\urcorner\mathcal{A}(x)),$$
$$\urcorner((\exists x)\mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\urcorner\mathcal{A}(x)).$$

Здесь $\mathcal{A}(x)$ — какое-либо утверждение, касающееся объекта x.

Пример 1.5. Выпишем отрицания утверждений из примера 1.4.

а) $\urcorner(A \neq \varnothing)$ есть утверждение $(\forall x)(x \notin A)$, которое означает, что $A = \varnothing$.

б) $\urcorner(A \subset B)$ есть утверждение $(\exists x)\big((x \in A) \wedge (x \notin B)\big)$ или, в более короткой форме, $(\exists x \in A)(x \notin B)$.

в) $\urcorner(A \Subset B)$ есть утверждение $\big((\exists x \in A)(x \notin B)\big) \vee \big((\forall x \in B)(x \in A)\big)$. •

Пример 1.6. Пусть A — произвольное множество. Докажем, что $\varnothing \subset A$. Запишем это утверждение формальным языком: $(\forall x)((x \in \varnothing) \Rightarrow (x \in A))$. Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что истинным является отрицание этого утверждения: $(\exists x)((x \in \varnothing) \wedge (x \notin A))$. Но это утверждение не может быть истинным, так как из него следует $(\exists x)(x \in \varnothing)$, что противоречит определению пустого множества. •

1.3 Операции над множествами

В этом пункте мы изучим способы построения новых множеств. Для произвольных множеств A и B определим следующие множества:

1°. *пересечение* множеств A и B есть множество $A \cap B$ тех элементов множества A, которые принадлежат B;

2°. *объединение* множеств A и B есть множество $A \cup B$ объектов, которые содержатся хотя бы в одном из множеств A и B;

3°. *разность* множеств A и B есть множество $A \setminus B$ элементов A, не входящих в B;

4°. *симметрическая разность* множеств A и B есть множество $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Приведём формальные определения этих множеств:

$$
\begin{aligned}
&A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\},\\
&A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\},\\
&A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \{x \in A \mid x \notin B\}.
\end{aligned}
$$

Отметим некоторые свойства введённых операций.

1°. *Симметричность* пересечения и объединения:

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$$

2°. *Ассоциативность* пересечения и объединения:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Эти два свойства очевидны. В силу ассоциативности мы можем не беспокоиться о порядке выполнения операции пересечения (так же, как и операции объединения) множеств. Если $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ — какой-либо набор множеств, то мы имеем право написать $A \cap B \cap C \cap \ldots \cap Z$ и $A \cup B \cup C \cup \ldots \cup Z$. Произвольная расстановка скобок в этих операциях никак не повлияет на результат.

3°. *Дистрибутивность*:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

$\triangleright$ Докажем лишь первое из этих соотношений. Второе доказывается аналогично. Сначала установим, что $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Пусть x — произвольный элемент из $(A \cup B) \cap C$. Тогда $x \in C$ и $x \in A \cup B$. То есть точно известно, что $x \in C$. Если к тому же $x \in A$, то $x \in A \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Если $x \in B$, то $x \in B \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Таким образом, из того, что $x \in (A \cup B) \cap C$ следует, что $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Это означает, что $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Нам осталось доказать обратное включение $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$. Пусть x — произвольный элемент из $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$. В любом случае $x \in C$. Кроме того, $x \in A$ или $x \in B$, то есть $x \in A \cup B$. Таким образом, $x \in (A \cup B) \cap C$ и доказываемое равенство установлено. $\triangleleft$

Упражнение 1.7. Доказать, что $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. •

Пусть M — некоторое множество и $A \subset M$. Множество $C_M A = M \setminus A$ называется *дополнением A в M*. Несложно видеть, что $C_M \varnothing = M$ и $C_M M = \varnothing$. Для любых подмножеств A и B множества M справедливы следующие соотношения, называемые *законами де Моргана*:

$$C_M(A \cap B) = C_M A \cup C_M B, \quad C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B.$$

Докажем первое из этих равенств, а второе оставим в качестве упражнения. Если x — какой-либо элемент множества M, то

$$x \in C_M(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in C_M A) \vee (x \in C_M B) \Leftrightarrow x \in C_M A \cup C_M B.$$

Доказываемое равенство следует из этой цепочки равносильных утверждений.

Введём ещё одну операцию над множествами. *Декартовым произведением* $A \times B$ множеств A и B называется множество упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$. Упорядоченность пары (a, b) означает, что в ней на первом месте стоит элемент из A, а на втором — элемент из B. Элементы $a \in A$ и $b \in B$ называются *координатами* элемента $(a, b) \in A \times B$. Если дано n множеств $X_1, \dots, X_n$, то определим $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ как множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$.

1.4 Отображения

Чтобы получить представление о том, что такое отображение, мы сначала дадим нестрогое определение этого понятия и приведём несколько примеров. Строгое определение мы дадим в конце пункта. Пусть X и Y — множества. *Отображение* множества X в множество Y есть правило (или закон), согласно которому каждому элементу множества X ставится в соответствие один элемент множества Y. При этом X называется *областью определения* отображения. В качестве синонимов термина «отображение» мы, в зависимости от ситуации, будем использовать термины «функция», «преобразование», «оператор» и другие. Нестрогость данного определения заключается в том, что мы использовали в нём неопределённое понятие «правило» и фактически синоним «соответствие» слова «отображение».

Выражение $F : X \to Y$ означает, что некоторое отображение F действует из X в Y. При этом для его области определения X мы часто будем использовать обозначение $\operatorname{dom} F$. Если $x \in \operatorname{dom} F$, то $F(x)$ есть *образ элемента* x при отображении F. Если $A \subset \operatorname{dom} F$, то $F(A) = \{y \in Y \mid (\exists x \in A)(y = F(x))\}$ есть *образ множества* A при отображении F. Множество $\operatorname{im} F = F(\operatorname{dom} F)$ называется *множеством значений* отображения F. Если $B \subset Y$, то множество $F^{-1}(B) = \{x \in \operatorname{dom} F \mid F(x) \in B\}$ называется *прообразом множества* B при отображении F. Очевидно, что $F^{-1}(\operatorname{im} F) = \operatorname{dom} F$. Заметим, что прообраз $F^{-1}(B)$ определён для любого множества $B \subset Y$. Можно, например, взять множество B, состоящим из одного элемента или не имеющим общих элементов с множеством $\operatorname{im} F$. В последнем случае $F^{-1}(B) = \varnothing$. Даже если $B = \varnothing$, то его прообраз определен и, как следует из определения, $F^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Пример 1.8. Пусть M — некоторое множество и $\mathscr{P}(M)$ — множество всех его подмножеств. Определим отображение $F : \mathscr{P}(M) \to \mathscr{P}(M)$ следующим образом: $F(A) = C_M A$ для любого множества $A \subset M$. Очевидно, что $\operatorname{dom} F = \operatorname{im} F = \mathscr{P}(M)$. •

Пример 1.9 (*Оператор проектирования*)**.** Пусть A и B — какие-либо множества. Определим отображение $P : A \times B \to A$ следующим образом: если $x = (a, b) \in A \times B$, то $P(x) = a$. Очевидно, что $\operatorname{dom} P = A \times B$ и $\operatorname{im} P = A$. Отображение P называется *оператором проектирования*. •

Пример 1.10. Отображение $I_X : X \to X$, такое что $I_X(x) = x$ для всех $x \in X$, называется *тождественным*. Отображение $F : X \to Y$ называется *постоянным*, если существует такое $y \in Y$, что $F(x) = y$ для всех $x \in X$. •

Определение 1.11. Отображение $F : X \to Y$ называется *сюръективным* (или *накрывающим*), если $\operatorname{im} F = Y$, то есть $(\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ (F(x) = y)$.
Отображение $F : X \to Y$ называется *инъективным* (или *взаимно однозначным*), если

$((\forall x_1 \in X) \wedge (\forall x_2 \in X))(x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; F(x_1) \neq F(x_2))$.
Отображение F называется *биективным*, если оно сюръективно и инъективно. $\bullet$

Отметим, что отображение $F : X \to Y$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда множество $F^{-1}(y)$ (то есть прообраз элемента y) состоит из одного элемента для любого $y \in \operatorname{im} F$. Любое взаимно однозначное отображение $F : X \to Y$ можно сделать биективным, если взять $Y = \operatorname{im} F$.

Несложно проверить, что сюръективными являются отображения из примеров 1.8 и 1.9, а также тождественное отображение. Инъективными — отображение из примера 1.8 и тождественное отображение, которые, таким образом, являются ещё и биективными.

Два отображения F_1 и F_2 называются *равными* (пишется $F_1 = F_2$), если $\operatorname{dom} F_1 = \operatorname{dom} F_2$ и $F_1(x) = F_2(x)$ для всех x из области определения этих отображений.

Пусть даны два отображения $F : X \to Y$ и $G : Y \to Z$. *Суперпозицией* (или *композицией*) отображений F и G называется отображение $G \circ F : X \to Z$, такое что $(G \circ F)(x) = G(F(x))$ для всех $x \in X$.

Лемма 1.12. *Пусть даны отображения $F : X \to Y$ и $G : Y \to X$. Если $F \circ G = I_Y$, то F — сюрьекция, а G — инъекция.*

$\triangleright$ Для произвольного $y \in Y$ положим $x = G(y) \in X$. Тогда $F(x) = F(G(y)) = (F \circ G)(y) = I_Y(y) = y$. Таким образом, для произвольного $y \in Y$ мы нашли такое $x \in X$, что $F(x) = y$. Следовательно F — накрывающее отображение.

Докажем инъективность отображения G. Возьмём произвольные y_1 и y_2 из Y. Если $y_1 \neq y_2$, то по условию леммы $(F \circ G)(y_1) \neq (F \circ G)(y_2)$. Отсюда следует, что $G(y_1) \neq G(y_2)$, так в противном случае мы получили бы, что $(F \circ G)(y_1) = (F \circ G)(y_2)$. $\triangleleft$

Определение 1.13. Отображение $G : Y \to X$ называется *обратным* к отображению $F : X \to Y$, если $F \circ G = I_Y$ и $G \circ F = I_X$. Обратное к F отображение обозначается F^{-1}. $\bullet$

Не у каждого отображения есть обратное. Примером может служить уже известный нам оператор проектирования (пример 1.9). Возьмем $X = A \times B$, $Y = A$ и $F = P$. Предположим, что существует отображение $G : A \to A \times B$, которое является обратным к P. Если $a \in A$, то $G(a) = (g_A(a), g_B(a))$, где $g_A(a) \in A$ и $g_B(a) \in B$. Фактически g_A и g_B являются отображениями из A в A и B соответственно. Для того, чтобы выполнялось равенство $P \circ G = I_A$, мы должны положить $g_A(a) = a$ для всех $a \in A$. При этом отображение $g_B : A \to B$ можно взять произвольным. Мы, однако, должны его зафиксировать, чтобы G было полностью определено. Для каждого $a \in A$ обозначим через a_B образ элемента a при отображении g_B. Таким образом, $G(a) = (a, a_B)$. Теперь проверим равенство $G \circ P = I_{A \times B}$. Если $(a, b) \in A \times B$, то $P\big((a, b)\big) = a$ и $G \circ P\big((a, b)\big) = (a, a_B)$. Видим, что требуемое равенство выполняется не для всех $(a, b) \in A \times B$, а только для тех, у которых $b = a_B$. Поэтому $G \circ P \neq I_{A \times B}$ и G не является обратным отображением к P.

Отображение из примера 1.8, напротив, имеет обратное. Интересно отметить, это отображение является обратным самому себе. В чём же состоит принципиальное отличие отображений из этих примеров, почему у одного есть обратное, а у другого — нет? Оба являются сюръективными, но в отличие от оператора проектирования отображение из примера 1.8 является ещё и инъективным. Следующая теорема утверждает, что свойства сюръективности и инъективности отображения являются ключевыми для существования у него обратного.

Теорема 1.14. *Для того, чтобы отображение имело обратное, необходимо и достаточно, чтобы оно было биективным.*

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим произвольное отображение $F : X \to Y$ и предположим, что оно имеет обратное $F^{-1} : Y \to X$. Докажем, что F является и инъекцией, и сюръекцией. По определению обратного отображения справедливы следующие равенства: $F \circ F^{-1} = I_Y$ и $F^{-1} \circ F = I_X$. В силу леммы 1.12 из первого равенства следует сюръективность F, а из второго — его инъективность.

Достаточность. Пусть $F : X \to Y$ — биективное отображение. Покажем, его обратимость. Так как F — сюръекция, для каждого $y \in Y$ существует такой $x_y \in X$, что $F(x_y) = y$. Более того, элемент x_y определён единственным образом в силу того, что F — инъекция. Определим отображение $G : Y \to X$ следующим образом: $G(y) = x_y$ для всех $y \in Y$. Тогда $G(F(x_y)) = x_y$ и $F(G(y)) = y$, то есть $G \circ F = I_X$ и $F \circ G = I_Y$. Поэтому $G = F^{-1}$. □

Внимательный читатель может обнаружить изъян в завершающей стадии приведённого доказательства. В самом деле, равенство $G \circ F = I_X$ равносильно тому, что $G(F(x)) = x$ для всех $x \in X$. Мы же установили только, что $G(F(x_y)) = x_y$ для всех $y \in Y$. Покажем, как можно устранить эту неточность. Пусть x — произвольный элемент из X. Тогда, взяв $y = F(x) \in Y$, мы получим, что $x = x_y$. Таким образом, $G(F(x)) = x$ для всех $x \in X$.

Следствие 1.15. *Если обратное отображение существует, то оно единственно.*

$\triangleright$ Предположим, что отображение $F : X \to Y$ имеет два обратных отображения: G_1 и G_2. Для произвольного $y \in Y$ положим $x_1 = G_1(y)$ и $x_2 = G_2(y)$. Так как $F \circ G_1 = I_Y$ и $F \circ G_2 = I_Y$, $F(x_1) = F(x_2) = y$. Но, в силу утверждения теоремы, F — биективное, а значит, взаимно однозначное отображение. Поэтому $x_1 = x_2$, то есть $G_1(y) = G_2(y)$. Из произвольности y следует, что $G_1 = G_2$. $\triangleleft$

Пусть заданы отображения $F_1 : X_1 \to Y$ и $F_2 : X_2 \to Y$. Если $X_1 \subset X_2$ и $F_1(x) = F_2(x)$ для всех $x \in X_1$, то F_1 называется *сужением* отображения F_2, а F_2 — *продолжением* отображения F_1.

В заключение этого пункта дадим строгое определение отображения. Это можно сделать, используя знакомое со школы понятие графика функции.

Определение 1.16. *Отображением* множества X в множество Y называется такое подмножество G декартова произведения $X \times Y$, что $\forall x \in X \ \exists! y \in Y \mid (x, y) \in G$. •

Это определение приемлемо с логической точки зрения. Оно опирается на введённые ранее понятия. Фактически, мы отождествили отображение и его график. С таким определением тоже можно работать, однако прежнее определение, пусть даже и не совсем корректное, всё же является более понятным и привычным.

1.5 Аксиома выбора

В этом пункте мы скажем несколько слов об одном важном в математике соглашении, которое называется *аксиомой выбора* и звучит так: для всякого семейства непустых множеств существует правило, согласно которому каждому множеству семейства сопоставляется один из элементов этого множества. Это правило называется *функцией выбора* для заданного семейства.

Казалось бы, справедливость аксиомы выбора не вызывает сомнений. Если есть непустое множество, то мы можем выбрать в нём какой-нибудь элемент. Если есть семейство непустых множеств, то так же мы можем поступить с каждым множеством этого семейства. Какие могут быть вопросы? Проблема тут кроется в возможности выбрать какой-нибудь элемент из множества. А какой? Вообще говоря, необходим алгоритм, с помощью которого мы осуществим выбор, однако такой алгоритм не всегда можно указать. Бертран Рассел когда-то пошутил: «Если мне придётся выбирать по одному ботинку из каждой пары бесконечного множества ботинок, то я с лёгкостью смогу сделать это, взяв, например, левый. Но если мне нужно выбрать по одному носку из каждой пары, которых тоже бесконечно много, возникнут затруднения». Дело в том, что в каждой паре носки абсолютно одинаковы, и мы не можем сказать, какой из них мы выбираем. Аксиома выбора позволяет утверждать, что такой выбор возможен и соответствующая функция выбора существует, хотя мы её и не знаем. То есть аксиома выбора носит неконструктивный характер, что и является главной причиной неоднозначного отношения к ней. Многие математики полагают, что та или иная теорема справедлива, если используемые при её доказательстве объекты построены явно.

Следует отметить, что абсолютное большинство математиков не считает неконструктивность доказательства существенным недостатком. Например, доказательства, построенные рассуждениями от противного, всегда являются неконструктивными. Мы предполагаем существование какого-либо объекта или выполнение какого-либо свойства и приходим к противоречию. До конца XIX века аксиома выбора использовалась безоговорочно, а сформулирована она была немецким математиком Э. Цермело в 1904 году. Уже после этого вокруг неё разгорелись споры. Дело в том, что аксиома выбора влечёт ряд парадоксальных следствий. Например, из неё следует, что единичный шар можно разбить на пять конгруэнтных (одинаковых) частей, а затем сложить из них два шара такого же размера (парадокс Банаха — Тарского). Б. Рассел так отозвался об аксиоме выбора: «Сначала она кажется очевидной, но чем больше вдумываешься, тем более странными кажутся выводы из этой аксиомы, под конец же вообще перестаешь понимать, что же она означает». С другой стороны, оказалось, что некоторые утверждения, совершенно необходимые для построения математического анализа, не могут быть получены без аксиомы выбора. Вообще говоря, для доказательства этих утверждений необходима не полная, а так называемая счётная форма аксиомы, однако без предположения такого типа обойтись нельзя или ещё не придумано как. Тот факт, что для доказательства используется аксиома выбора не означает, что мы не сможем совершить построение другим способом.

Аксиома выбора независима от остальных аксиом теории множеств. Как доказал П. Коэн, её нельзя ни доказать, ни опровергнуть в этой системе аксиом. Таким образом, можно строить математику как с использованием этой аксиомы, так и без неё. Конечно, во втором случае придётся отказаться от многих важных результатов. Мы будем считать, что аксиома выбора справедлива и даже не будем на неё ссылаться в тех случаях, когда она используется. То есть справедливость утверждения, которое содержится в формулировке этой аксиомы, предполагается естественным.

2 Вещественные числа

В школьном курсе математики вводятся натуральные, целые, рациональные и действительные числа. В данном параграфе мы систематизируем эти знания. Заметим ещё, что действительные числа часто называют *вещественными*. Такой терминологии будем придерживаться и мы.

2.1 Поле

Если A — непустое множество, то любое отображение множества $A \times A$ в A называется *бинарной операцией* на A. Мы уже сталкивались с бинарными операциями. Например, объединение подмножеств некоторого множества M есть бинарная операция на $\mathscr{P}(M)$. Так как мы собираемся определить некоторую числовую систему, введём две бинарные операции, называемые *сложением* и *умножением*. Если x и y — элементы какого-либо множества, то результат применения к ним этих операций традиционно обозначается через $x + y$ и xy (или $x \cdot y$) соответственно. При этом $x + y$ называется *суммой*, а xy — *произведением* элементов x и y. В арифметике уже встречались операции с такими названиями, а их свойства, так же как и множество, на котором они определены, вводились постепенно, шаг за шагом. И, вообще говоря, было не совсем ясно, обладают ли они ещё какими-либо свойствами, или то, что изучено, является последним шагом в этой цепочке. В этом пункте мы, используя аксиоматический подход, определим операции сложения и умножения вместе с областью их определения, как объекты, обладающие определённым, фиксированным набором свойств.

Определение 2.1. Непустое множество X называется *полем*, если на нём определены две бинарные операции, называемые сложением и умножением, которые обладают следующими свойствами:

S1. (*закон ассоциативности для сложения*)
если $x, y, z \in X$, то $x + (y + z) = (x + y) + z$;

S2. (*существование нуля*)
существует элемент $0 \in X$, такой что $x + 0 = 0 + x = x$ для всех $x \in X$;

S3. (*существование противоположного элемента*)
для каждого $x \in X$ существует элемент $(-x) \in X$, такой что $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

S4. (*закон коммутативности для сложения*)
если $x, y \in X$, то $x + y = y + x$.

M1. (*закон ассоциативности для умножения*)
если $x, y, z \in X$, то $x(yz) = (xy)z$;

M2. (*существование единицы*)
существует элемент $1 \in X$, такой что $1 \neq 0$ и $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ для всех $x \in X$;

M3. (*существование обратного элемента*)
для каждого $x \in X \setminus \{0\}$ существует элемент $\dfrac{1}{x} \in X$, такой что $x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot x = 1$;

M4. (*закон коммутативности для умножения*)
если $x, y \in X$, то $xy = yx$.

D. (*закон дистрибутивности*)
если $x, y, z \in X$, то $x(y+z) = xy + xz$. •

Сделаем несколько замечаний к этому определению. Бинарная операция $x + (-y)$ называется *вычитанием*, а её результат, называемый *разностью элементов x и y*, обычно записывают короче: $x - y$. Обратный элемент, введённый в свойстве M3, обозначается также через x^{-1} или $1/x$. Бинарная операция $x \cdot \dfrac{1}{y} = xy^{-1}$ называется делением. Её результат, как правило, обозначают выражением $\dfrac{x}{y}$ (или x/y), которое называется *дробью* (или *частным* элементов x и y). При этом x называется *числителем* дроби, а y — *знаменателем*.

Определение 2.2. Поле X называется *упорядоченным*, если оно содержит подмножество X_+, такое что

P1. если $x, y \in X_+$, то $x + y \in X_+$ и $xy \in X_+$;

P2. для каждого $x \in X$ реализуется одна и только одна из следующих трёх возможностей: $x \in X_+$, $x = 0$, $(-x) \in X_+$. •

Элемент x упорядоченного поля X называется *положительным*, если $x \in X_+$, и *отрицательным*, если $(-x) \in X_+$. Таким образом, X_+ есть множество положительных элементов упорядоченного поля X.

Пусть x и y — элементы упорядоченного поля X. Введём следующие обозначения:
$x > y$ (элемент x больше элемента y) $\Leftrightarrow$ $(x - y) \in X_+$;
$x \geqslant y$ (элемент x больше или равен элементу y) $\Leftrightarrow$ $((x - y) \in X_+$ или $x = y)$;
$x < y$ (элемент x меньше элемента y) $\Leftrightarrow$ $(y - x) \in X_+$;
$x \leqslant y$ (элемент x меньше или равен элементу y) $\Leftrightarrow$ $((y - x) \in X_+$ или $x = y)$.

Выражения, содержащие знаки $<$, $>$, $\leqslant$ и $\geqslant$ называются *неравенствами*. Неравенства, содержащие знаки $<$ и $>$ называются *строгими*, а неравенства со знаками $\leqslant$ и $\geqslant$ — *нестрогими*.

Выражение $a < x < b$, равносильно двум неравенствам: $a < x$ и $x < b$. Заметим также, что включение $x \in X_+$ равносильно неравенству $x > 0$.

Определение 2.3. Упорядоченное поле X называется *полным* (или *непрерывным*), если оно обладает следующим свойством: для любых непустых подмножеств A и B поля X, таких что $a \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$, существует такой элемент $c \in X$, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$. •

2.2 Поле вещественных чисел

Определим *вещественные числа* как элементы некоторого полного упорядоченного поля $\mathbb{R}$, которое называется *полем вещественных чисел*. Элементы множества $\mathbb{R}_+$ назовём *положительными* вещественными числами, а противоположные к ним — *отрицательными*. Это определение вызывает естественный вопрос о том, какое именно поле берётся в качестве $\mathbb{R}$? Оказывается, полное упорядоченное поле в некотором смысле единственно. Чтобы понять, в каком именно смысле, введём понятие *изоморфизма*.

Определение 2.4. Два упорядоченных поля X и X' называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $F : X \to X'$, такое что $F(x + y) = F(x) + F(y)$, $F(xy) = F(x)F(y)$ и $x < y \Leftrightarrow F(x) < F(y)$ для всех $x, y \in X$. При этом F называется *изоморфизмом* упорядоченных полей X и X'. •

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.5. *Любые два полных упорядоченных поля изоморфны.*

Доказательство этой теоремы является довольно громоздким, хотя и не сложным. По этой причине мы не будем его здесь воспроизводить, а оставим читателю в качестве упражнения. Таким образом, с точностью до изоморфизма полное упорядоченное поле, а значит и поле вещественных чисел, определено единственным образом.

Замечание 2.6. Вообще говоря, изложенные соображения согласуются с нашими обычными представлениями о числах. Мы используем числа, например, для измерения массы и длины. Казалось бы, что может быть общего у трёх килограммов картошки и трёх километров пути? Километры и килограммы складывать нельзя, то есть для измерения массы и расстояния мы используем разные упорядоченные поля. Тем не менее, в обоих случаях мы употребляем число три (или какое-либо другое) и пользуемся перечисленными в предыдущем пункте аксиомами поля. То есть мы неявно предполагаем, что эти аксиомы справедливы и для масс, и для протяжённостей. Это, фактически, и означает изоморфность соответствующих упорядоченных полей. Таким образом, говоря о вещественных числах, мы отвлекаемся от их конкретного представления и фокусируем внимание только на операциях, которые мы над ними выполняем. •

Выведем некоторые свойства вещественных чисел непосредственно из определения. Читателю, окончившему среднюю школу, может показаться смешным, что мы будем доказывать очевидные факты. На самом деле, мы их не доказываем, а выводим из фиксированной системы аксиом. Эти аксиомы (кроме, быть может, аксиомы полноты) сформулированы в полном соответствии со школьными представлениями о числах. В то же время, есть много фактов, которые в школьной программе предлагается принять на веру и которые не фигурируют в нашем списке аксиом. Почему, например, при умножении числа на нуль получается нуль? Как уже говорилось выше, мы зафиксировали некоторый набор свойств, которыми должны обладать числа, а все другие свойства должны быть их следствиями.

Теорема 2.7 (*Следствия из аксиом поля*)**.**

1°. *В $\mathbb{R}$ существуют только один нуль и только одна единица.*

2°. *У каждого $x \in \mathbb{R}$ существует только один противоположный элемент (вещественное число).*

3°. *(закон сокращения для сложения) Если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a + c = b + c$, то $a = b$.*

4°. *У каждого $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует только один обратный элемент.*

5°. *(закон сокращения для умножения) Если $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ и $ac = bc$, то $a = b$.*

6°. *Для каждого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $x \cdot 0 = 0$.*

7°. *Если $xy = 0$, то либо $x = 0$, либо $y = 0$.*

8°. *Для каждого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $(-1) \cdot x = -x$.*

Доказательство. При доказательстве перечисленных фактов мы будем использовать аксиомы из определения поля. Предлагаем читателям самостоятельно разобраться, где какая аксиома применяется.

1°. Докажем только единственность нуля. Для единицы утверждение доказывается аналогично. Предположим, что в $\mathbb{R}$ существуют два нуля, которые мы обозначим через 0_1 и 0_2. Тогда из определения нуля следует, что $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. То есть эти нули равны.

2°. Если x_1 и x_2 — элементы, противоположные $x \in \mathbb{R}$, то

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.$$

3°. Если $a+c = b+c$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ будут также равны числа $(a+c)+x$ и $(b+c)+x$. Возьмём $x = -c$. Тогда

$$a = a + 0 = a + (c + (-c)) = (a + c) + (-c) = (b + c) + (-c) = b + (c + (-c)) = b + 0 = b.$$

Следовательно $a = b$.

4°. Пусть x_1 и x_2 — элементы, обратные $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда

$$x_1 = x_1 \cdot 1 = x_1 \cdot (xx_2) = (x_1x)x_2 = 1 \cdot x_2 = x_2.$$

5°. Если $ac = bc$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ будут также равны числа $(ac)x$ и $(bc)x$. Поскольку $c \neq 0$, мы можем взять $x = c^{-1}$. Тогда

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (c \cdot c^{-1}) = (ac) \cdot c^{-1} = (bc) \cdot c^{-1} = b \cdot (c \cdot c^{-1}) = b \cdot 1 = b.$$

Следовательно $a = b$.

6°. Как следует из определения нуля, $0 + 0 = 0$. Поэтому

$$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0.$$

Применяя закон сокращения для сложения, мы получим, что $x \cdot 0 = 0$.

7°. Если $xy = 0$ и, например, $y \neq 0$, то из равенства $xy = y \cdot 0$ и закона сокращения для умножения следует, что $x = 0$.

8°. Из равенства $1 + (-1) = 0$ получаем, что $x + (-1)x = 0$ для произвольного $x \in \mathbb{R}$. Поэтому число $(-1)x$ является противоположным к x. Из единственности противоположного числа следует, что $(-1)x = -x$. $\square$

Теорема 2.8 (*Следствия из аксиом порядка*). *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$. Тогда*

1°. *(транзитивность) если $a \geqslant b$ и $b > c$, то $a > c$;*

2°. *если* $a > b$, *то* $a + c > b + c$;

3°. *(сложение неравенств) если* $x > y$ *и* $a > b$, *то* $x + a > y + b$;

4°. *если* $a > b$ *и* $c > 0$, *то* $ac > bc$.

5°. *если* $a > b$ *и* $c < 0$, *то* $ac < bc$.

6°. *Для любого* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *выполняется неравенство* $xx > 0$.

Доказательство.

1°. Если $a = b$ и $b > c$, то $a - c = b - c \in \mathbb{R}_+$. Если же $a > b$, то поскольку $(a - b) \in \mathbb{R}_+$ и $(b - c) \in \mathbb{R}_+$, в $\mathbb{R}_+$ будет и $a - c = (a - b) + (b - c)$.

2°. $(a + c) - (b + c) = (a - b) + (c - c) = a - b \in \mathbb{R}_+$.

3°. Так как $x - y \in \mathbb{R}_+$ и $a - b \in \mathbb{R}_+$, из определения множества $\mathbb{R}_+$ следует, что $(x + a) - (y + b) = (x - y) + (a - b) \in \mathbb{R}_+$.

4°. Так как $(a - b) \in \mathbb{R}_+$ и $c \in \mathbb{R}_+$, из определения множества $\mathbb{R}_+$ следует, что $ac - bc = (a - b)c \in \mathbb{R}_+$.

5°. Аналогично предыдущему утверждению, так как $(a - b) \in \mathbb{R}_+$ и $(-c) \in \mathbb{R}_+$, получаем $bc - ac = (b - a)c = (a - b)(-1)c = (a - b)(-c) \in \mathbb{R}_+$.

6°. Если $x \in \mathbb{R}_+$, то включение $xx \in \mathbb{R}_+$ следует из определения множества $\mathbb{R}_+$. Предположим, что $(-x) \in \mathbb{R}_+$. Как следует из пунктов 8 и 2 теоремы 2.7, $(-1)(-1) = 1$. Поэтому $xx = (-1)x(-1)x = (-x)(-x) \in \mathbb{R}_+$. □

Заметим, что из последнего утверждения этой теоремы следует, что $1 > 0$, так как $1 = 1 \cdot 1$ и $1 \neq 0$.

Для каждого $x \in \mathbb{R}$ определим его *абсолютную величину* или *модуль* $|x|$ следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Также, поставим каждому $x \in \mathbb{R}$ в соответствие число $\operatorname{sgn} x$ (читается сигнум или знак):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $|x| \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и из $|x| = 0$ следует $x = 0$. Кроме того, $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$ и $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$. Выведем ещё несколько свойств модуля вещественного числа.

Теорема 2.9. *Пусть* $x, y \in \mathbb{R}$. *Тогда*

1°. $|xy| = |x| \cdot |y|$;

2°. *если* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, *то* $(|x| < \varepsilon) \Leftrightarrow (-\varepsilon < x < \varepsilon)$, $\quad (|x| \leqslant \varepsilon) \Leftrightarrow (-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon)$;

3°. *(неравенство треугольника)* $|x+y| \leqslant |x|+|y|$;

4°. $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$.

Доказательство.

1°. Это равенство сразу следует из того, что $(-1)(-1)=1$ и $\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\operatorname{sgn}y$.

2°. Доказательство очевидно. Достаточно рассмотреть случаи $x \geqslant 0$ и $x<0$.

3°. Взяв в предыдущем утверждении $\varepsilon=|x|$, мы получим неравенство $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. Аналогично, $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$. Складывая эти неравенства, получим

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|.$$

Из этого неравенства и предыдущего утверждения следует неравенство треугольника.

4°. Так как $x=(x-y)+y$ и $y=(y-x)+x$, из неравенства треугольника получаем:

$$|x| \leqslant |x-y|+|y| \quad \text{и} \quad |y| \leqslant |y-x|+|x|.$$

Из этих неравенств следует, что

$$-|x-y| \leqslant |x|-|y| \leqslant |x-y|,$$

откуда, применив утверждение 2° с $\varepsilon=|x-y|$, получим требуемое неравенство. □

Выведем теперь некоторые следствия из свойства полноты множества вещественных чисел. Скажем, что множество $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено снизу*, если существует такое $a \in \mathbb{R}$, что $x \geqslant a$ для всех $x \in A$. Аналогично, множество $A \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху*, если существует такое $b \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant b$ для всех $x \in A$. При этом a называется *нижней гранью* или *минорантой* множества A, а b — его *верхней гранью* или *мажорантой*. Если множество ограничено и сверху, и снизу, то оно называется *ограниченным*.

Если c есть верхняя (нижняя) грань множества A и $c \in A$, то c называется *максимумом* (*минимумом*) множества A. Записывается это так: $c=\max A$ ($c=\min A$).

Определение 2.10. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *точной нижней гранью* или *инфимумом* непустого множества A (записывается $a=\inf A$), если
а) a является нижней гранью A;
б) для любого $y>a$ существует такое $x \in A$, что $x<y$.

Число $b \in \mathbb{R}$ называется *точной верхней гранью* или *супремумом* непустого множества A (записывается $b=\sup A$), если
а) b является верхней гранью A;
б) для любого $y<b$ существует такое $x \in A$, что $x>y$. •

Эти определения можно сформулировать по-другому: для произвольного $\varepsilon>0$ существуют такие $x,y \in A$, что $x>\sup A-\varepsilon$ и $y<\inf A+\varepsilon$.

Супремум ограниченного сверху множества $A \subset \mathbb{R}$ обладает следующими очевидными свойствами:

1°. если $\sup A \in A$, то $\sup A=\max A$;

2°. $\sup A$ есть наименьшая верхняя грань множества A;

3°. $\sup A$ определён единственным образом;

4°. множество $-A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$ ограничено снизу и $\inf(-A) = -\sup A$.

Аналогичными свойствами обладает $\inf A$. Предлагаем читателю сформулировать их самостоятельно.

Пример 2.11. Рассмотрим множество $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$. Нетрудно видеть, что $\sup A = 1$, $\max A$ не существует, $\inf A = \min A = 0$, $\inf(-A) = -1$, $\sup(-A) = 0$. •

Пока что мы не выяснили ответ вопрос о существовании точных граней множества. Так как $\inf A = -\sup(-A)$, достаточно разобраться с точной верхней гранью.

Теорема 2.12. *Если непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что $c = \sup A$.*

Доказательство. Поскольку множество A ограничено сверху, множество B его верхних граней не пусто. По определению верхней грани, $a \leqslant b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. В силу полноты $\mathbb{R}$ существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $a \leqslant c \leqslant b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Число c является верхней гранью для A, то есть $c \in B$. Так как $c \leqslant b$ для любого $b \in B$, c есть наименьшая верхняя грань. Следовательно $c = \sup A$. □

Мы воспользовались в доказательстве тем, что супремум есть наименьшая верхняя грань. Можно было бы провести доказательство, исходя из определения супремума. Покажем, что для любого $y < c$ существует такое $x \in A$, что $x > y$. Предположим, что это утверждение ложно. Тогда существует такое число $y < c$, что $x \leqslant y$ для всех $x \in A$. Это означает, что y является верхней гранью для A, то есть $y \in B$. Из определения числа c следует, что $c \leqslant y$, а из нашего предположения — что $y < c$. Полученное противоречие доказывает, что $c = \sup A$.

Теорема 2.13. *Пусть A и B — непустые ограниченные сверху (снизу) множества в $\mathbb{R}$. Если $A \subset B$, то $\sup A \leqslant \sup B$ ($\inf A \geqslant \inf B$).*

Доказательство. Докажем утверждение для ограниченных сверху множеств. Для каждого $x \in B$ справедливо неравенство $x \leqslant \sup B$. Так как $A \subset B$, это неравенство справедливо и для всех $x \in A$. Следовательно $\sup B$ является верхней гранью для A. Поскольку $\sup A$ есть наименьшая верхняя грань множества A, $\sup A \leqslant \sup B$. □

В заключение пункта введём ещё одно понятие. В некоторых ситуациях удобно использовать множество вещественных чисел, дополненное двумя элементами $-\infty$ и $+\infty$, называемыми *минус бесконечность* и *плюс бесконечность* соответственно. Множество вещественных чисел с этими двумя элементами называется *расширенной числовой прямой* и обозначается $\overline{\mathbb{R}}$. Бесконечные элементы наделяются следующими свойствами:

1°. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$;

2°. $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$ и $x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

3°. $x \cdot (+\infty) = +\infty$ и $x \cdot (-\infty) = -\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$;

4°. $-\infty < x < +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

5°. выражения $(+\infty)+(-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ не имеют смысла и называются *неопределённостями.*

2.3 Важнейшие классы вещественных чисел

2.3.1 Натуральные числа

Множество вещественных чисел содержит несколько классов чисел, которые исторически появились значительно раньше самих вещественных чисел. К таковым относятся, например, натуральные числа. В школе их определяют как числа вида 1, $1+1$, $(1+1)+1$ и так далее и обозначают 1, 2, 3 и так далее. Мы сохраним введённые в школе обозначения, но не примем данное там определение. Суть претензий заключается в наличии слов «и так далее». Поскольку мы не можем перечислить все натуральные числа, необходимо предложить некоторую процедуру, с помощью которой мы могли бы однозначно определить, является число натуральным или нет. Кроме того, хотелось бы дать такое определение множества натуральных чисел, которое позволило бы доказывать полезные, содержательные утверждения.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если $1 \in A$ и для любого $x \in A$ число $(x+1)$ также принадлежит A. Очевидно, что множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ являются индуктивными.

Пересечение любой совокупности индуктивных множеств является индуктивным множеством. В самом деле, единица принадлежит каждому из множеств этой совокупности, а поэтому и их пересечению. Если какое-либо число x принадлежит пересечению, то оно принадлежит каждому из составляющих совокупность множеств. Поскольку все эти множества индуктивны, каждому из них принадлежит и число $x+1$. Поэтому $x+1$ принадлежит их пересечению.

Из доказанного, в частности, следует, что пересечение всех индуктивных множеств является индуктивным множеством. Это пересечение называется *множеством натуральных чисел* и обозначается символом $\mathbb{N}$. Выведем ещё несколько свойств множества натуральных чисел.

Утверждение 2.14 (*Принцип математической индукции*)**.** *Если $A \subset \mathbb{N}$ и A — индуктивное множество, то $A = \mathbb{N}$.*

$\triangleright$ Это утверждение сразу следует из определения множества $\mathbb{N}$, согласно которому $\mathbb{N}$ должно быть подмножеством каждого индуктивного множества и в том числе A. С другой стороны, по условию $A \subset \mathbb{N}$. Таким образом, $A = \mathbb{N}$. $\triangleleft$

Часто принцип математической индукции используется в другой формулировке: пусть $P(n)$ — какое-либо утверждение, касающееся натурального числа n. Если $P(1)$ истинно, а из истинности $P(n)$ следует истинность $P(n+1)$, то $P(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$. Эта формулировка, очевидно, эквивалентна предыдущей. Для доказательства того, что из первой формулировки следует вторая, достаточно взять $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$. Для доказательства обратного утверждения определим $P(n)$, как утверждение $(n \in A)$.

Данное нами определение множества натуральных чисел является довольно абстрактным и не даёт представления о структуре этого множества. Следующая теорема позволяет выяснить, какими арифметическими свойствами обладают натуральные числа. Основным инструментом при её доказательстве будет служить принцип математической индукции.

Теорема 2.15 (*О структуре множества $\mathbb{N}$*)**.**

1°. *$n \geqslant 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$;*

2°. *если k и m — натуральные числа, то $(k+m) \in \mathbb{N}$ и $km \in \mathbb{N}$;*

3°. *если* $k \in \mathbb{N}$ *и* $k \neq 1$, *то* $(k-1) \in \mathbb{N}$;

4°. *если* k *и* m — *натуральные числа и* $k < m$, *то* $(m-k) \in \mathbb{N}$;

5°. *для любого* $k \in \mathbb{N}$ *не существует натурального числа* n, *такого, что* $k < n < k+1$.

Доказательство.

1°. Определим множество $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 1\} \subset \mathbb{N}$. Покажем, что A — индуктивное множество. Поскольку $1 \geqslant 1$, единица принадлежит A. Если какое-либо натуральное число n принадлежит множеству A, то $n \geqslant 1$ и, как следует из порядковых свойств вещественных чисел, $n+1 \geqslant 1+1 \geqslant 1+0 = 1$. То есть $(n+1) \in A$. Таким образом, A является индуктивным множеством. Согласно принципу математической индукции, $A = \mathbb{N}$. Но это и означает, что $n \geqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

2°. Сначала рассмотрим $k+m$. Зафиксируем произвольное число $k \in \mathbb{N}$ и покажем, что $(k+n) \in \mathbb{N}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Воспользуемся принципом математической индукции. Определим множество $A = \{m \in \mathbb{N} \mid (k+m) \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$. Поскольку $\mathbb{N}$ — индуктивное множество и $k \in \mathbb{N}$, мы получаем, что $(k+1) \in \mathbb{N}$. Но это означает, что $1 \in A$. Если $n \in A$, то по определению A число $k+n$ является натуральным. Из индуктивности $\mathbb{N}$ следует, что $k + (n+1) = (k+n)+1 \in \mathbb{N}$. Поэтому $n+1 \in A$. Таким образом, A — индуктивное множество и, как следствие, $A = \mathbb{N}$.

   Для доказательства утверждения, касающегося произведения натуральных чисел, воспользуемся для разнообразия второй формулировкой принципа математической индукции. Зафиксируем произвольное число $k \in \mathbb{N}$ и докажем истинность утверждения $P(n) = (kn \in \mathbb{N})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. $P(1)$ истинно, так как $k \cdot 1 = k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $P(n)$ истинно и покажем, что истинно утверждение $P(n+1)$. Заметим, что $k(n+1) = kn + k$. Так как $kn \in \mathbb{N}$ в силу истинности $P(n)$ и $k \in \mathbb{N}$, из первой части доказываемого утверждения следует, что $(kn+k) \in \mathbb{N}$. То есть $k(n+1) \in \mathbb{N}$ и утверждение $P(n+1)$ истинно.

3°. Это утверждение может быть сформулировано так: $(\forall k \in \mathbb{N})((k \neq 1) \Rightarrow (k-1) \in \mathbb{N})$. Определим множество $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 1 \vee (x-1) \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$. Утверждение будет доказано, если мы покажем, что $A = \mathbb{N}$. По определению множества A, $1 \in A$. Предположим, что $n \in A$, и рассмотрим число $(n+1)$. Заметим, что $n \in \mathbb{N}$, так как $A \subset \mathbb{N}$. Поэтому натуральным является и число $(n+1)-1$, поскольку оно совпадает с n. Но это означает, что $(n+1) \in A$. Таким образом, из принципа математической индукции следует, что $A = \mathbb{N}$.

4°. Воспользуемся второй формулировкой принципа математической индукции. Определим утверждение $P(k)$ следующим образом: $(\forall m \in \mathbb{N})((m > k) \Rightarrow (m-k) \in \mathbb{N})$. Необходимо доказать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ утверждение $P(k)$ истинно. $P(1)$ истинно в силу утверждения 3°. Предположим, что истинно $P(n)$, и докажем $P(n+1)$. Возьмём произвольное натуральное число $m > n+1$. Так как при этом $m > n$, из $P(n)$ следует, что $(m-n) \in \mathbb{N}$. Кроме того, неравенство $m > n+1$ означает, что $m - n > 1$. Поэтому из утверждения 3° вытекает, что $m - (n+1) = (m-n) - 1 \in \mathbb{N}$. Таким образом, утверждение $P(n+1)$ истинно.

5°. Проведем доказательство от противного. Зафиксируем произвольное число $k \in \mathbb{N}$ и предположим, что существует натуральное число n, удовлетворяющее неравенству $k < n < k+1$. Поскольку $n \in \mathbb{N}$ и $n > k$, из утверждения 4° следует, что $(n-k) \in \mathbb{N}$. В то же время, $n - k < (k+1) - k = 1$, что противоречит утверждению 1°. □

В дополнение к доказанной теореме отметим ещё два свойства натуральных чисел: если $n \in \mathbb{N}$, то $(-n) \notin \mathbb{N}$ и $1/n \notin \mathbb{N}$ при $n \neq 1$. Эти свойства сразу следуют из теоремы 2.15.

Замечание 2.16. На основе теоремы 2.15 мы можем представить, какие вещественные числа входят в определенное нами множество натуральных чисел. Во первых, $1 \in \mathbb{N}$ и все остальные натуральные числа больше единицы. Далее, в силу индуктивности $\mathbb{N}$, числа $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4 = 3+1$ и так далее являются натуральными. Более того, из утверждения 5° теоремы 2.15 следует, что других натуральных чисел нет. Фактически это и есть школьное определение натуральных чисел. •

Замечание 2.17. Натуральные числа можно использовать для подсчета количества элементов конечных множеств. Пусть $\mathbb{N}_m = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant m\}$. Скажем, что множество A является *конечным*, если существует биективное отображение этого множества на $\mathbb{N}_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. При этом число m называется количеством элементов множества A. Множество A называется *бесконечным*, если оно не является конечным. Подробнее с такого рода вопросами мы познакомимся в параграфе, посвященном кардинальным числам, а сейчас отметим лишь пару очевидных свойств конечных и бесконечных множеств. Если A и B — конечные множества, то конечным является и множество $A \cup B$. Отсюда сразу следует, что если A — бесконечное, а B — конечное множества, то $A \setminus B$ — бесконечное множество.

Натуральные числа используют также для подсчета повторяющихся событий или объектов. Например, мы говорим, что буква «а» встречается в слове «абракадабра» пять раз. Чтобы получить это число, мы напротив каждой буквы «а» поставим единицу, а потом все эти единицы сложим. •

Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ определим вещественное число x^n как произведение $x \cdot x \cdots x$, в котором n раз стоит число x. Число x^n называется *n-й степенью числа x* и читается «*x в степени n*». Исторически принято выделять два специальных случая: x^2 называется «*x в квадрате*», а x^3 — «*x в кубе*». Очевидно, что $x^1 = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, по определению положим, что $x^0 = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.18 (*Неравенство Бернулли*)**.** *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in \mathbb{R}$, таких что $x \geqslant -1$, справедливо неравенство: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.*

Доказательство. Возьмём произвольное $x \geqslant -1$. Для доказательства неравенства Бернулли воспользуемся принципом математической индукции. Если $n = 1$, то доказываемое неравенство, очевидно, справедливо: $(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$. Предположим, что неравенство справедливо для какого-либо $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$. В самом деле, воспользовавшись предположением индукции и неотрицательностью числа $1 + x$, мы получим:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x.$$

Последнее неравенство в этой цепочке справедливо, так как $x^2 \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Из принципа математической индукции следует, что доказываемое неравенство справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Теорема 2.19 (*Принцип Архимеда*). *Множество натуральных чисел не является ограниченным сверху. Другими словами, для любого $x \in \mathbb{R}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > x$.*

Доказательство. Проведём доказательство от противного. Предположим, что $\mathbb{N}$ — ограниченное сверху множество. Тогда, как следует из теоремы 2.12, существует такое вещественное число c, что $c = \sup \mathbb{N}$. По определению точной верхней грани, для любого вещественного числа y, меньшего c, должно существовать такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > y$. Возьмём $y = c - 1$. Тогда $n > c - 1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то есть $n + 1 > c$. Но $\mathbb{N}$ — индуктивное множество, поэтому $(n+1) \in \mathbb{N}$. Получили два противоречащих друг другу утверждения: «$c = \sup \mathbb{N}$ » и «существует натуральное число k ($k = n + 1$), которое больше c». □

Это, казалось бы тривиальное, утверждение имеет полезные следствия.

Следствие 2.20. *Для любых $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}_+$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $a < nb$.*

▷ Зафиксируем произвольные $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}_+$. Предположим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a \geqslant nb$. Но тогда множество $\mathbb{N}$ ограничено сверху вещественным числом a/b, что противоречит принципу Архимеда. ◁

Доказанное следствие имеет простую трактовку из повседневной жизни: за конечное число шагов (длины b) можно пройти любое расстояние (a).

Следствие 2.21. *Пусть вещественные числа x, y и z таковы, что $y \leqslant x \leqslant y + z/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x = y$.*

▷ Опять проведём доказательство от противного. Предположим, что $x \neq y$, то есть $x > y$. Положив в предыдущем следствии $a = z$ и $b = x - y$, мы получим, что $n(x - y) > z$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно для этого n справедливо неравенство $x > y + z/n$, которое противоречит условию. ◁

Заметим, что в формулировке этого следствия мы могли бы потребовать выполнения другого неравенства: $y - z/n \leqslant x \leqslant y$. Утверждение при этом не изменилось бы. Кроме того, утверждение останется в силе, если эти неравенства будут выполняться лишь для всех натуральных чисел n, больших некоторого фиксированного числа.

2.3.2 Целые числа

Скажем, что вещественное число x является *целым*, если либо $x \in \mathbb{N}$, либо $x = 0$, либо $(-x) \in \mathbb{N}$. Множество всех целых чисел обозначим символом $\mathbb{Z}$. Таким образом, $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Основное отличие $\mathbb{Z}$ от $\mathbb{N}$ состоит в том, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ его противоположный элемент $(-n)$ также принадлежит $\mathbb{Z}$. Из этого, в частности, следует, что множество целых чисел не ограничено ни сверху, ни снизу. Кроме того, нетрудно доказать, что для всех k и n из $\mathbb{Z}$ их разность $(k - n)$ (так же как и $(n - k)$) тоже является элементом $\mathbb{Z}$.

Другие свойства целых чисел аналогичны соответствующим свойствам натуральных чисел. Мы докажем только одно утверждение, касающееся целых чисел.

Теорема 2.22. *Для каждого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $n \in \mathbb{Z}$, такое что $n \leqslant x < n + 1$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $x \in \mathbb{R}$ и для каждого $k \in \mathbb{Z}$ определим множество $A_k = \{y \in \mathbb{R} \mid k \leqslant y < k+1\}$. Заметим, что $A_k \cap A_\ell = \varnothing$, если k и ℓ — различные целые числа. В самом деле, предположим, что $k \neq \ell$ и $A_k \cap A_\ell \neq \varnothing$. Тогда существует такое $y \in \mathbb{R}$, что $k \leqslant y < k+1$ и $\ell \leqslant y < \ell+1$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $k < \ell$, поэтому $k < \ell \leqslant y < k+1$. То есть $k < \ell < k+1$, а это противоречит свойству целых чисел, аналогичному утверждению 5° из теоремы 2.15. Предлагаем читателю доказать это утверждение для целых чисел самостоятельно.

Как следует из принципа Архимеда, существует такое натуральное число m, что $|x| < m$. Поэтому $-m < x < m$. Это неравенство означает, что

$$x \in \cup_{k=-m}^{k=m-1} A_k = A_{-m} \cup A_{-m+1} \cup \ldots \cup A_{m-1}.$$

Следовательно x принадлежит одному (и только одному) из множеств A_k, $k \in \{-m, -m+1, \ldots, m-1\}$. Возьмём в качестве n то целое число из набора $\{-m, -m+1, \ldots, m-1\}$, для которого $x \in A_n$. Тогда $n \leqslant x < n+1$, что и требовалось доказать. □

Для каждого вещественного числа x целое число n, такое что $n \leqslant x < n+1$, называется *целой частью числа* x. Целая часть числа x обозначается через $[x]$. *Дробная часть числа* x обозначается через $\{x\}$ и определяется как $x - [x]$. Не следует путать дробную часть числа x с множеством, состоящим из одного элемента x.

Отметим ещё, что множество $\mathbb{Z}$ делится на два непересекающихся подмножества — чётных и нечётных чисел. Число $n \in \mathbb{Z}$ называется *чётным*, если существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $n = 2k$. Число $n \in \mathbb{Z}$ называется *нечётным*, если существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $n = 2k - 1$.

2.3.3 Рациональные и иррациональные числа

Вещественные числа вида k/n, где $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, называются *рациональными*. Множество всех рациональных чисел обозначается через $\mathbb{Q}$. Вещественные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*. При определении рационального числа k/n возникает проблема, связанная с тем, что дробь $km/(nm)$ задаёт одно и то же число для каждого $m \in \mathbb{N}$. То есть рациональные числа задаются неоднозначно. Мы обойдём эту проблему следующим образом. Натуральное число $\ell \neq 1$ называется *делителем* целого числа k, если $k = m\ell$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Скажем, что дробь k/n является *несократимой*, если числа k и n не имеют общих делителей (такие числа называются *взаимно простыми*). Теперь мы можем рассматривать рациональные числа, как несократимые дроби. При этом для каждого $p \in \mathbb{Q}$ существуют однозначно определённые $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, такие что $p = k/n$.

Нетрудно проверить, что $\mathbb{Q}$ есть упорядоченное поле. В то же время, как мы увидим далее, поле $\mathbb{Q}$ не является полным. Для начала мы покажем, что $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Это будет означать, что иррациональные числа существуют. Исторически иррациональные числа возникли при попытке решить квадратное уравнение $x^2 = a$, где $a \in \mathbb{R}_+$. Положительное решение этого уравнения называется *квадратным корнем* из числа a и обозначается $\sqrt{a}$ или $a^{1/2}$. Для некоторых a, например для $a = 2$, не удалось найти рациональное число x, удовлетворяющее этому уравнению. С другой стороны, из геометрических соображений становится ясно, что решение должно существовать. В самом деле, исходя из теоремы Пифагора, x является длиной гипотенузы прямоугольного треугольника с длиной катетов, равной единице. Мы сейчас покажем, что в $\mathbb{R}_+$ существует единственное решение квадратного уравнения.

Теорема 2.23 (О квадратном корне)**.** *Для каждого $a \in \mathbb{R}_+$ существует единственное число $x \in \mathbb{R}_+$, такое что $x^2 = a$.*

Доказательство. Сначала установим единственность решения. Предположим, что существуют два положительных вещественных числа x_1 и x_2, квадраты которых равны a. Тогда $x_1^2 - x_2^2 = 0$. Но $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$, поэтому либо $x_1 - x_2 = 0$, либо $x_1 + x_2 = 0$. Второй вариант невозможен ввиду положительности x_1 и x_2. Таким образом, $x_1 = x_2$, то есть решение всё-таки единственно.

Для доказательства существования решения рассмотрим множество

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < a\}.$$

Это множество ограничено сверху, например, числом $(a+1)$. В самом деле, предположим, что существует такое число $x \in A$, что $x > a+1$. Тогда $x^2 > (a+1)^2 > a$, а это противоречит тому, что $x \in A$.

В силу ограниченности множества A сверху, существует число $c = \sup A \in \mathbb{R}_+$. Покажем, что $c^2 = a$, то есть c и является искомым квадратным корнем из числа a.

Предположим, что $c^2 < a$. Тогда существует такое положительное вещественное число ε, что $c^2+\varepsilon < a$. Например, можно взять $\varepsilon = (a-c^2)/2$. Из принципа Архимеда следует, что существует $n \in \mathbb{N}$, для которого $2c + 1 < n\varepsilon$. Проверим, что число $(c + 1/n)$ принадлежит множеству A. Действительно,

$$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + \left(2c + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \leqslant c^2 + \left(2c + 1\right) \cdot \frac{1}{n} < c^2 + \varepsilon < a.$$

Следовательно, поскольку $c + 1/n > c$ и $(c + 1/n) \in A$, число c не может быть верхней гранью множества A. Получили противоречие.

Таким образом, $c^2 \geqslant a$. Согласно определению точной верхней грани, для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $x \in A$, что $x > (c - 1/k)$. Так как $x \in A$, мы получаем: $a > x^2 > (c - 1/k)^2 > c^2 - 2c/k$. Следовательно, для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство:

$$a \leqslant c^2 \leqslant a + \frac{2c}{k}.$$

Применяя следствие 2.21 принципа Архимеда, приходим к выводу, что $c^2 = a$. □

Упражнение 2.24. Доказать, что для произвольных $a \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ существует единственное число $x \in \mathbb{R}_+$, такое что $x^n = a$. Это решение называется *корнем степени n* из числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$ или $a^{1/n}$. Отметим ещё, что корень степени 3 называется *кубическим*. •

Вернёмся к иррациональным числам и докажем, что по крайней мере одно число такого типа существует.

Теорема 2.25. *Вещественное число $\sqrt{2}$ является иррациональным.*

Доказательство. Согласно предыдущему утверждению, в поле вещественных чисел существует единственное положительное решение уравнения $x^2 = 2$. Это решение обозначают через $\sqrt{2}$. Предположим, что $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Тогда существуют однозначно определённые взаимно простые натуральные (так как $\sqrt{2} > 0$) числа k и n, такие что $\sqrt{2} = k/n$ и, как следствие, $k^2 = 2n^2$. Из последнего равенства следует, что число k^2 является чётным, то есть среди делителей числа k присутствует 2. Поэтому $k = 2m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда $2m^2 = n^2$, а это означает, что n — чётное число, то есть среди его делителей тоже присутствует 2. Таким образом, числа k и n не являются взаимно простыми вопреки нашему предположению. Полученное противоречие доказывает, что $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Итак, $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Мы доказали два утверждения, чтобы установить существование одного вещественного числа, которое не является рациональным. На самом деле иррациональных чисел много. Очень много! Их, в каком-то смысле, значительно больше, чем рациональных. Мы подробнее исследуем этот вопрос в параграфе, посвящённом кардинальным числам. Интересно отметить, что множество иррациональных чисел полем не является, так как разность двух иррациональных чисел (также как и произведение) может быть числом рациональным.

Ещё один вывод, который позволяет сделать теорема 2.25, состоит в том, что поле $\mathbb{Q}$ не является полным. В самом деле, рассмотрим множества $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ и } x^2 < 2\}$ и $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ и } x^2 > 2\}$. Так же, как в доказательстве теоремы 2.23, мы можем показать, что $a < b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$. Однако единственным числом, разделяющим эти множества, является $\sqrt{2}$, которое не принадлежит $\mathbb{Q}$.

Из следующего утверждения можно сделать вывод, что рациональных чисел тоже довольно много.

Теорема 2.26. *Если a и b — вещественные числа и $a < b$, то существует такое рациональное число p, что $a < p < b$.*

Доказательство. Согласно принципу Архимеда существует такое натуральное число n, что $1 < (b - a)n$. Это неравенство можно записать немного иначе: $bn > an + 1$. С другой стороны, как следует из теоремы 2.22, $k \leqslant an < k + 1$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $bn > k + 1$. Таким образом, $an < k + 1 < bn$ и в качестве p мы можем взять рациональное число $(k + 1)/n$. □

В заключение пункта отметим ещё одно разбиение множества $\mathbb{R}$ на непересекающиеся классы. Вещественное число называется *алгебраическим*, если оно является решением какого-либо уравнения вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с $n \in \mathbb{N}$ и с рациональными или, что эквивалентно, целыми коэффициентами a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. В противном случае число называется *трансцендентным*. Мы не будем заниматься изучением этих чисел.

2.4 Позиционные системы счисления

Для записи конкретных вещественных чисел используются специальные символы или знаки, называемые *цифрами*. Количество используемых знаков может быть различным. В повседневной жизни мы имеем дело с десятичной системой счисления. Такое название возникло в связи с тем, что в этой системе используется десять символов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. В компьютерах часто используется шестнадцатеричная система, символами которой являются 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Существуют и другие системы, однако количество символов в системе не может быть меньше двух, так как в самой аксиоматике вещественных чисел, а именно, в определении поля уже используется два символа: 0 и 1. Если мы только этими знаками и ограничимся, то получим двоичную систему счисления. Прибавив к ним ещё один символ, например 2, мы придём к троичной системе и так далее. Натуральное число, задающее количество используемых символов, называется *основанием системы счисления.*

Запись одного и того же вещественного числа будет различной в разных системах счисления. Чтобы избежать путаницы и подчеркнуть, в какой именно системе записано число, мы будем писать его с индексом, который, однако, представлен в десятичной системе. Например, выражение $a = 17_{10}$ означает, что число a в десятичной системе счисления имеет вид 17. То же самое число в двоичной системе записывается следующим образом: $a = 10001_2$. Мы сейчас разберёмся, как переводить представление числа из одной системы в другую на примере десятичной, двоичной и троичной систем.

Начнём с натуральных чисел. Возьмём, например, число 239, записанное в десятичной системе. Эта запись означает следующее:

$$239_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

Таким образом, если мы будем нумеровать позиции цифр справа налево, начиная с нуля, то число будет суммой этих цифр, умноженных на 10 в степени, равной номеру их позиций. То есть информацию несёт не только сама цифра, но и позиция, на которой она расположена. По этой причине такие системы счисления называют *позиционными.* В Древнем Риме использовалась другая система, которая теперь называется римской.

Чтобы записать число 10001_2 в десятичной системе, необходимо заметить, что $2^4 = 16_{10}$, $2^3 = 8_{10}$, $2^2 = 4_{10}$, $2 = 2_{10}$ и $2^0 = 1$. Символы 0 и 1 в любой системе счисления означают нуль и единицу соответственно. Поэтому

$$\begin{aligned} 10001_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 16_{10} + 0 \cdot 8_{10} + 0 \cdot 4_{10} + 0 \cdot 2_{10} + 1 \cdot 1 = 16_{10} + 1 = 17_{10}. \end{aligned}$$

Запишем число 239_{10} в двоичной системе счисления. Необходимо определить цифры $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$, такие что

$$239_{10} = \alpha_n \cdot 2^n + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \cdot 2^0.$$

При этом все α_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, должны быть либо 0, либо 1, поскольку только эти символы используются в двоичной системе. Натуральное число n нам пока неизвестно. Сначала определим α_0. В представлении числа 239 все слагаемые, кроме последнего, при делении на 2 не дают остатка, то есть являются чётными числами. Делимость последнего слагаемого на 2 зависит от того, будет α_0 равно нулю или единице. Так как

$$239_{10} = 119_{10} \cdot 2_{10} + 1 = 119_{10} \cdot 2_{10} + 1 \cdot 2^0,$$

приходим к выводу, что $\alpha_0 = 1$. Аналогично,

$$\begin{aligned} 119_{10} &= 59_{10} \cdot 2_{10} + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 1, \\ 59_{10} &= 29_{10} \cdot 2_{10} + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 1, \\ 29_{10} &= 14_{10} \cdot 2_{10} + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 1, \\ 14_{10} &= 7_{10} \cdot 2_{10} + 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 = 0, \\ 7_{10} &= 3_{10} \cdot 2_{10} + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_5 = 1, \\ 3_{10} &= 1 \cdot 2_{10} + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_6 = 1, \\ 1 &= 0 \cdot 2_{10} + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_7 = 1. \end{aligned}$$

В итоге получаем, что $239_{10} = 11101111_2$. Таким образом, алгоритм перевода числа из десятичной системы счисления в двоичную состоит в последовательном выполнении деления на 2, при этом остатки записываются справа налево.

Запишем то же самое число в троичной системе. Необходимо найти такие числа $\beta_k \in \{0,\ 1,\ 2\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, что

$$239_{10} = \beta_n \cdot 3^n + \beta_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \ldots + \beta_0 \cdot 3^0.$$

Теперь будем выполнять деление на 3 и находить остатки:

$$\begin{aligned}
239_{10} &= 79_{10} \cdot 3_{10} + 2 &&\Rightarrow \quad \beta_0 = 2,\\
79_{10} &= 26_{10} \cdot 3_{10} + 1 &&\Rightarrow \quad \beta_1 = 1,\\
26_{10} &= 8_{10} \cdot 3_{10} + 2 &&\Rightarrow \quad \beta_2 = 2,\\
8_{10} &= 2_{10} \cdot 3_{10} + 2 &&\Rightarrow \quad \beta_3 = 2,\\
2_{10} &= 0 \cdot 3_{10} + 2 &&\Rightarrow \quad \beta_4 = 2.
\end{aligned}$$

Таким образом, $239_{10} = 22212_3$.

Если p — положительное вещественное число, то его можно представить в виде:

$$p = \alpha_n \cdot s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \cdot s^0 + \alpha_{-1} \cdot s^{-1} + \alpha_{-2} \cdot s^{-2} + \ldots + \alpha_{-k} \cdot s^{-k} + \ldots,$$

где $s \geqslant 2$ — натуральное число, являющееся основанием системы счисления, $s^{-k} = 1/(s^k)$ — число, обратное к s^k, $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. В позиционной записи числа символы с отрицательными индексами отделяются запятой:

$$p_s = \alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_0, \alpha_{-1} \alpha_{-2} \ldots \alpha_{-k} \ldots.$$

Например, число $1/6$ в десятичной записи выглядит так: $0,166666\ldots$. Многоточие означает, что далее следует бесконечное число символов 6. Вообще говоря, если какая-либо совокупность цифр в позиционном представлении числа повторяется, то эту повторяющуюся часть называют *периодом дроби* и пишут в скобках: $1/6 = 0,16(6)$, $3/7 = 0,(428571)$. Для обозначения отрицательных чисел перед их представлением в какой-либо системе счисления ставится знак минус. Если вещественное число не является целым, то его представление в десятичной системе счисления называется *десятичной дробью*. Аналогично определяются *двоичные дроби*.

Перевод двоичной дроби в десятичную осуществляется совершенно аналогично тому, как мы это делали для натуральных чисел. Рассмотрим обратную процедуру. Найдём двоичное представление числа $0,125_{10}$. Необходимо найти $\alpha_i \in \{0, 1\}$ в представлении:

$$0,125_{10} = \alpha_{-1} \cdot 2^{-1} + \alpha_{-2} \cdot 2^{-2} + \alpha_{-3} \cdot 2^{-3} + \ldots$$

Умножив это равенство на 2, мы получим:

$$0,25_{10} = \alpha_{-1} + \alpha_{-2} \cdot 2^{-1} + \alpha_{-3} \cdot 2^{-2} + \ldots$$

Все слагаемые в правой части положительны и $0,25_{10} < 1$, поэтому α_{-1} не может быть равным 1. Следовательно, $\alpha_{-1} = 0$. Умножив всё равенство ещё раз на 2, мы получим:

$$0,5_{10} = \alpha_{-2} + \alpha_{-3} \cdot 2^{-1} + \alpha_{-4} \cdot 2^{-2} + \ldots$$

Из тех же соображений $\alpha_{-2} = 0$. Очередное умножение на 2 приведёт к равенству:

$$1 = \alpha_{-3} + \alpha_{-4} \cdot 2^{-1} + \dots$$

Нетрудно видеть, что это равенство допускает оба возможных значения коэффициента α_{-3}, то есть и нуль, и единицу. Чтобы установить этот факт, вспомним формулу суммы геометрической прогрессии: $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1$. Если $\alpha_{-3} = 1$, то $\alpha_{-k} = 0$ для всех натуральных $k > 3$. Если же $\alpha_{-3} = 0$, то $\alpha_{-k} = 1$ для всех натуральных $k > 3$. Таким образом, число $0,125_{10}$ имеет два представления в двоичной системе: $0,001_2$ и $0,0001(1)_2$. Никакого противоречия здесь нет, поскольку, как следует из формулы для суммы геометрической прогрессии, $0,001_2 = 0,0001(1)_2$.

Описанная ситуация, связанная с неоднозначностью записи числа, встречается во всех позиционных системах счисления. Например, $5,7(9)_{10} = 5,8_{10}$. Неоднозначность возникает, когда в записи числа, начиная с некоторой позиции после запятой и до бесконечности (в периоде), стоит последняя цифра используемой системы счисления.

Интересно ещё отметить, что некоторые рациональные числа в одной системе счисления представляются в виде дроби с конечным числом знаков после запятой, а в другой — с бесконечным. Возьмём, например, число 1/3. Нетрудно проверить, что $1/3 = 0,3(3)_{10} = 0,1_3$.

3 Числовая прямая

3.1 Понятие числовой прямой

Часто в анализе из соображений наглядности бывает удобно пользоваться геометрическими объектами. Мы представляем себе множества в виде фигур на плоскости, рисуем графики функций и т.д. В этом пункте мы отождествим вещественные числа с точками прямой линии.

Возьмём произвольную прямую и отметим на ней две произвольные несовпадающие точки, которые назовём 0 и 1. Будем считать, что прямая является горизонтальной и что точка 1 лежит правее точки 0. Множество точек, лежащих на прямой правее точки 0, назовём *положительной полуосью*, а левее — *отрицательной*. Таким образом, точка 1 лежит на положительной полуоси. Отрезок прямой, заключенный между точками 0 и 1, будет задавать эталон единичной длины. Используя геометрические построения (например, с помощью циркуля и линейки без делений), отметим на положительной полуоси точки так, чтобы расстояние от них до нуля задавалось натуральным числом. Так, если $k \in \mathbb{N}$, то мы с помощью циркуля отложим k раз справа от точки 0 отрезок единичной длины и отметим точку, которая будет соответствовать числу k. Аналогично, на отрицательной полуоси отметим точки, соответствующие отрицательным целым числам. В результате этой процедуры мы отметим на прямой точки, соответствующие всем целым числам. Мы будем их называть соответствующим числом: точка 3, точка -5 и т.д. Так как с помощью геометрических построений мы можем разделить отрезок прямой на любое число равных отрезков, можно считать, что нами отмечены и все точки, соответствующие рациональным числам. Мы также присвоим им названия соответствующих чисел. Но на прямой ещё останутся точки, расстояние от которых до нуля является несоизмеримым с единицей. Например, как мы уже знаем, длина гипотенузы прямоугольного треугольника с единичными катетами равна $\sqrt{2}$, а это число рациональным не является.

Прежде, чем доказать, что каждой точке на прямой соответствует некоторое вещественное число, введём на этой прямой отношение порядка. Пусть x и y — точки на прямой. Скажем, что $x < y$, если точка x лежит левее точки y. Используя это соглашение, мы можем всю терминологию вещественных чисел применить к точкам на прямой.

Возьмём на прямой произвольную точку C, не являющуюся рациональной, и определим два множества A и B рациональных точек, лежащих левее и правее точки C соответственно. По аксиоме полноты найдётся такое вещественное число c, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$ и всех $b \in B$. Такое число единственно. В самом деле, предположим, что существует два различных числа, обладающих таким разделяющим свойством Меньшее из этих чисел обозначим через c_1, а большее — через c_2. В силу теоремы 2.26 существует такое рациональное число c_3, что $c_1 < c_3 < c_2$. Таким образом, $a \leqslant c_1 < c_3 < c_2 \leqslant b$ для всех $a \in A$ и всех $b \in B$, то есть c_3 не принадлежит ни A, ни B. Но множество $A \cup B$ содержит все рациональные точки. Полученное противоречие доказывает единственность числа c. Это число и ставится в соответствие точке C.

Итак, каждой точке прямой мы поставили в соответствие какое-либо вещественное число. Эта прямая называется *числовой прямой* и обозначается так же, как и множество вещественных чисел, через $\mathbb{R}$.

Вообще говоря, теперь ещё необходимо показать, что каждому вещественному числу соответствует некоторая точка на прямой. Этот факт следует из свойства непрерывности прямой, которое аналогично аксиоме полноты для вещественных чисел: если множество A на прямой лежит левее множества B, то на прямой существует точка, лежащая между этими множествами. Фактически это свойство означает, что на прямой нет разрывов. Рациональные числа мы на прямой уже отметили. Осталось рассмотреть иррациональные. Пусть x — какое-либо иррациональное число. Определим множества $A = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < x\}$ и $B = \{p \in \mathbb{Q} \mid p > x\}$. Тогда x есть единственное вещественное число, удовлетворяющее неравенству $a \leqslant x \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$. Но множества A и B на прямой уже отмечены, причём A лежит левее B. Из непрерывности прямой следует существование точки, лежащей между этими множествами. Эту точку мы и поставим в соответствие числу x. Если предположить, что таких точек две, то они расположены на положительном расстоянии друг от друга. Поэтому между ними должна найтись рациональная точка, которая, таким образом, не принадлежит ни A, ни B. А это противоречит тому, что множество $A \cup B$ содержит все рациональные точки.

Хотя в дальнейшем мы часто будем использовать геометрический язык и представлять числа точками числовой прямой, формальные доказательства будут опираться на аксиоматику вещественных чисел и на уже доказанные факты.

3.2 Топологические аспекты числовой прямой

Введём следующие обозначения: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ — *интервал* (или *открытый интервал, открытый промежуток*), $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — *отрезок* (или *замкнутый интервал, замкнутый промежуток*), $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ и $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ — *полуинтервалы.* Интервалы, отрезки и полуинтервалы будем называть *промежутками* и обозначать $\langle a, b\rangle$. Часто по аналогии числовую прямую $\mathbb{R}$ обозначают через $(-\infty, +\infty)$.

Дадим несколько определений. *Окрестностью* точки $x \in \mathbb{R}$ называется любой интервал, содержащий эту точку. Для каждого $\varepsilon > 0$ интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ называется *ε-окрестностью* точки x. Множество называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторую её окрестность. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если множество $\mathbb{R} \setminus A$ открыто.

Пример 3.1. а) Пустое множество $\varnothing$ считается открытым по определению. Числовая прямая $\mathbb{R}$, очевидно, является открытым множеством.
б) Так как $\mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \varnothing$ — открытые множества, множества $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ являются также и замкнутыми.
в) Любой интервал (a, b) является открытым множеством, поскольку он сам является окрестностью любой своей точки.
г) Любой отрезок $[a, b]$ является замкнутым множеством, поскольку множество $A = \mathbb{R} \setminus [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \vee x > b\}$ открыто. В самом деле, если, например, $x > b$, то $x \in \big((x+b)/2, x+1\big) \subset A$.
д) Аналогично можно показать что точка является замкнутым множеством.
е) Полуинтервал не является ни замкнутым, ни открытым множеством. $\bullet$

Длиной промежутка $\langle a, b\rangle$ называется величина $(b - a)$. Если I — промежуток, то его длину будем обозначать через $|I|$. *Расстоянием* между точками a и b называется длина промежутка с концами a и b, которая, очевидно, равна $|a - b|$.

Пусть X — какое-либо множество (не обязательно числовое). Всякое отображение $f : \mathbb{N} \to X$ называется *последовательностью элементов множества* X. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через x_k образ числа k при отображении f. Таким образом, $x_k \in X$. Обычно для последовательности вместо f используют одно из следующих обозначений: $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ или просто $\{x_k\}$, если область изменения индекса k ясна из контекста.

Теорема 3.2 (О вложенных отрезках). *Если $\{I_k\}$ — последовательность отрезков числовой прямой, таких что $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$ (т.е., $I_k \supset I_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$), то существует точка $c \in \mathbb{R}$, которая принадлежит всем этим отрезкам (т.е., $c \in \cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$).*

Более того, если для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ существует такое $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $|I_{k_\varepsilon}| < \varepsilon$, то c — единственная точка в $\cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$.

Доказательство. Сначала докажем существование точки c. Заметим, что для любых двух отрезков $I_n = [a_n, b_n]$ и $I_m = [a_m, b_m]$ последовательности $\{I_k\}$ справедливо неравенство $a_n \leqslant b_m$. В противном случае мы получили бы, что $a_m \leqslant b_m < a_n \leqslant b_n$, то есть $I_m \cap I_n = \varnothing$, а это противоречит условию. Из полноты множества $\mathbb{R}$ следует, что существует точка c, разделяющая множества $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. То есть $a_k \leqslant c \leqslant b_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Но это и означает, что $c \in I_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Исследуем вопрос о единственности точки c. Предположим, что существуют две точки, принадлежащие всем отрезкам I_k. Обозначим их через c_1 и c_2 и возьмём $\varepsilon = (c_2 - c_1)/2$. По условию, должен существовать отрезок I_{k_ε}, длина которого меньше ε. Но тогда он не может содержать и c_1, и c_2. Получили противоречие, которое и доказывает теорему. $\square$

Система множеств S называется *покрытием множества* A, если $A \subset \cup_{U\in S} U$. То есть A является подмножеством объединения всех множеств системы S. Если $S' \subset S$ и $A \subset \cup_{U\in S'} U$, то S' называется *подпокрытием* покрытия S. Сразу заметим, что любое подпокрытие также является покрытием множества. Если система S состоит из конечного числа множеств, то она называется *конечным покрытием*.

Для доказательства следующей теоремы нам потребуется один вспомогательный результат, который, вообще говоря, аналогичен принципу Архимеда.

Лемма 3.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $1 < \varepsilon 2^n$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$.*

$\triangleright$ Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно следствию 2.20 принципа Архимеда существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $1 < \varepsilon(n+1)$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$. Утверждение леммы теперь следует из неравенства Бернулли с $x = 1$, а именно из того, что $2^n \geqslant 1 + n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. $\triangleleft$

Упражнение 3.4. Пусть q — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $q^n < \varepsilon$ для всех $n > n_\varepsilon$. $\bullet$

Теорема 3.5 (*О конечном подпокрытии*). *Любое покрытие отрезка числовой прямой системой открытых интервалов содержит конечное подпокрытие этого отрезка.*

Доказательство. Пусть I_1 — отрезок числовой прямой и S — система интервалов, покрывающая I_1. Предположим, что никакая конечная подсистема системы S не покрывает I_1. Разделим отрезок I_1 пополам, образовав из него два отрезка одинаковой длины. Хотя бы одна из половинок также не может быть покрыта никакой конечной подсистемой системы S. В противном случае весь отрезок I_1 допускал бы конечное подпокрытие, что противоречило бы предположению. Обозначим через I_2 тот отрезок из этих двух половинок, который не покрывается никакой конечной подсистемой системы S. Аналогично, разбивая отрезок I_2 пополам, получаем отрезок I_3, обладающий тем же свойством. Продолжая этот процесс, получим последовательность отрезков $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, таких что $|I_{k+1}| = |I_k|/2$, $I_{k+1} \subset I_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и каждый из этих отрезков не может быть покрыт никакой конечной подсистемой системы S.

По теореме о вложенных отрезках существует точка $c \in \mathbb{R}$, которая принадлежит всем отрезкам I_k. Поскольку S — покрытие отрезка I_1 и $c \in I_1$, существует интервал $(\alpha, \beta) \in S$, который содержит точку c. Возьмём $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}/2$ и найдём $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что $|I_{k_\varepsilon}| < \varepsilon$. Такое число k_ε существует в силу леммы 3.3. Тогда, поскольку $c \in I_{k_\varepsilon}$, $I_{k_\varepsilon} \subset (\alpha, \beta)$, что противоречит построению отрезков I_k: мы покрыли один из этих отрезков одним интервалом из системы S. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Рассмотрим теперь два примера, показывающих, что все условия теоремы важны.

Пример 3.6. Этот пример показывает, что в условии теоремы отрезок нельзя заменить интервалом. Рассмотрим интервал $(0, 1)$ и систему интервалов $S = \{(1/k, 1),\ k \in \mathbb{N}\}$. Нетрудно видеть, что $(0, 1) \subset \cup_{k\in\mathbb{N}}(1/k, 1)$. В самом деле, если $x \in (0, 1)$, то в силу принципа Архимеда существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $1/k < x$, то есть $x \in (1/k, 1)$. В то же время, никакая конечная подсистема системы S не покрывает интервал $(0, 1)$. Действительно, если $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ — произвольный конечный набор натуральных чисел и $k_* = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, то $\cup_{i=1}^n (1/k_i, 1) = (1/k_*, 1) \Subset (0, 1)$. $\bullet$

Пример 3.7. В этом примере мы рассмотрим покрытие отрезка системой отрезков. Возьмём отрезок $[0, 1]$ и систему отрезков $S = \{I_k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, где $I_0 = [-1, 0]$ и $I_k = [1/k, 1]$ при $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $[0, 1] \subset \cup_{k=0}^\infty I_k$, то есть S является покрытием отрезка $[0, 1]$. Рассуждая точно так же, как в предыдущем примере, легко убедиться в том, что никакая конечная подсистема системы S не покрывает отрезок $[0, 1]$. $\bullet$

Точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой множества* $A \subset \mathbb{R}$, если в любой её окрестности содержится хотя бы одна точка из $A \setminus \{p\}$. Обратим внимание, что предельная точка множества может и не принадлежать этому множеству. Например, точка 0 является предельной точкой интервала $(0, 1)$, все точки отрезка $[0, 1]$ являются предельными для множества $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

Утверждение 3.8. *Точка $p \in \mathbb{R}$ является предельной точкой множества $A \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда в любой её окрестности содержится бесконечное множество точек из A.*

Доказательство. В одну сторону это утверждение очевидно: если в окрестности точки p содержится бесконечное множество точек из A, то там найдётся хотя бы одна точка из $A \setminus \{p\}$ (точнее, таких точек бесконечное множество). Докажем утверждение в другую сторону.

Пусть p — предельная точка множества A и U — её окрестность, то есть содержащий p интервал. Предположим, что U содержит лишь конечный набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ точек из A. Если точка p присутствует в этом наборе (а это может случиться только тогда, когда $p \in A$), то исключим её. Таким образом, $p \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ разбивают U на $m+1$ интервал. Тот из них, в который попала точка p обозначим через V. Интервал V является окрестностью точки p и в нём нет ни одной точки из $A \setminus \{p\}$. Поэтому p не может быть предельной точкой множества A. Полученное противоречие доказывает утверждение. □

Теорема 3.9 (*Теорема Больцано — Вейерштрасса*)**.** *Если $A \subset \mathbb{R}$ — ограниченное множество, содержащее бесконечное число точек, то A имеет предельную точку.*

Доказательство. Так как A — ограниченное множество, оно содержится в некотором отрезке $I \subset \mathbb{R}$. Если A имеет предельные точки, то они должны лежать в I. В самом деле, предположим, что p — произвольная точка из множества $\mathbb{R} \setminus I$. Поскольку $\mathbb{R} \setminus I$ — открытое множество, существует лежащая в этом множестве окрестность U точки p. Тогда в U нет ни одной точки из A и, значит, p не может быть предельной точкой множества A.

Предположим, что в I нет предельных точек множества A. Тогда у каждой точки $x \in I$ есть окрестность, которая либо содержит конечное число точек из A, либо не содержит их вовсе. Совокупность таких окрестностей всех точек отрезка I образует его покрытие. Согласно теореме 3.5 это покрытие имеет конечное подпокрытие. По определению выбранных окрестностей, в объединении всех множеств этого конечного подпокрытия содержится лишь конечное число точек из A. Поэтому, так как это объединение содержит A, множество A должно быть конечным, что противоречит условию теоремы. Следовательно предположение о том, что в I нет предельных точек множества A неверно. □

3.3 Числовая окружность

Рассмотрим декартово произведение $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ двух числовых прямых. Элементы множества $\mathbb{R}^2$ мы тоже будем называть точками. Каждая точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ есть упорядоченная пара (x_1, x_2) вещественных чисел x_1 и x_2, называемых *координатами точки* $\boldsymbol{x}$. По этой причине множество $\mathbb{R}^2$ называют *координатной плоскостью.* Точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ называется *началом координат.* Каждой точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие вектор с началом в $\mathbf{0}$ и концом в $\boldsymbol{x}$. Поэтому элементы $\mathbb{R}^2$ мы будем также называть *векторами.* Векторы можно складывать и умножать на вещественное число: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ и $t\boldsymbol{x} = (tx_1, tx_2)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Величину $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| := \big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\big)^{1/2}$ называют *евклидовым расстоянием* между точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ координатной плоскости. В этом пункте у нас не встретится других расстояний, поэтому слово «евклидово» мы будем опускать. Расстояние от точки $\boldsymbol{x}$ до начала координат $\mathbf{0}$ называется *величиной* или *модулем вектора* $\boldsymbol{x}$ и обозначается $|\boldsymbol{x}|$.

Введём обозначение, которое будет постоянно использоваться в дальнейшем. Если нам задан набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ чисел или других объектов, которые можно складывать, то их сумму обозначают так: $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Таким образом, если $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$, то

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \Big(\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2 \Big)^{1/2}.$$

Пусть $\boldsymbol{a}$ — какая-либо точка координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ и $r \in \mathbb{R}_+$. Множество $S_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = r\}$ называется *окружностью радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{a}$*. В этом пункте мы будем обозначать через S окружность $S_1(\mathbf{0})$.

Наша дальнейшая цель — ввести понятие длины дуги окружности. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — точки на S, причём для того, чтобы перейти из $\boldsymbol{a}$ в $\boldsymbol{b}$ мы должны двигаться против часовой стрелки. Множество точек окружности S, заключённых между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, назовём *дугой* $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$. Точка $\boldsymbol{a}$ — начало, а $\boldsymbol{b}$ — конец дуги. Рассмотрим произвольный набор $\{\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\}$ несовпадающих точек на $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$, таких что $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{b}$. *Вписанной в дугу $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$ ломаной* с вершинами в точках $\boldsymbol{\xi}_k$ называется набор отрезков $[\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \boldsymbol{\xi}_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где отрезок $[\boldsymbol{\xi}_{k-1}, \boldsymbol{\xi}_k]$ есть множество точек $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, таких что $\boldsymbol{x} = (1-t)\,\boldsymbol{\xi}_{k-1} + t\,\boldsymbol{\xi}_k$ для некоторого $t \in [0,1]$. Если мы обозначим эту ломаную через $\bar{\boldsymbol{\xi}}$, то её длину определим как положительное вещественное число $\ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{\xi}_{i-1}|$. Множество всех вписанных в дугу $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$ ломаных обозначим через $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Назовём *длиной дуги* $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$ окружности S вещественное число

$$s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sup_{\bar{\boldsymbol{\xi}} \in L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} \ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}).$$

Кроме того, положим $s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$. Дадим несколько пояснений к этому определению. Во-первых, мы необычным образом использовали обозначение супремума. Ранее мы встречались с супремумом некоторого числового множества. Обозначение, введённое нами сейчас, означает следующее: если A есть множество всех положительных вещественных чисел, каждое из которых является длиной некоторой вписанной в дугу $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$ ломаной, то $s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sup A$. Таким образом,

$$s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sup_{\bar{\boldsymbol{\xi}} \in L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} \ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \sup\{\ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathbb{R}_+ \mid \bar{\boldsymbol{\xi}} \in L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\}.$$

В дальнейшем мы часто будем пользоваться подобными обозначениями. Далее, существование супремума множества A пока остаётся под вопросом, для положительного ответа на который достаточно установить, что множество A ограничено сверху. Мы оставим этот вопрос читателю в качестве упражнения. Сделаем подсказку: множество A ограничено сверху, например, числом 8 (периметром наименьшего квадрата, содержащего окружность S). Кроме того, при доказательстве понадобятся неравенства, которые мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 3.10. 1°. *$2ab \leqslant a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$;*

2°. *$\big|\sum_{i=1}^{2} x_i y_i\big| \leqslant \big(\sum_{i=1}^{2} x_i^2\big)^{1/2} \big(\sum_{i=1}^{2} y_i^2\big)^{1/2}$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$;*

3°. *$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$.*

$\triangleright$

1°. Для доказательства этого неравенства достаточно заметить, что $(a-b)^2 \geqslant 0$, и раскрыть скобки.

2°. Сначала заметим, что в правой части неравенства стоит не что иное, как $|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|$. Если $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ или $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, то доказываемое неравенство, очевидно, справедливо. Рассмотрим случай $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$. Неравенство будет доказано, если мы установим, что

$$\Big|\sum_{i=1}^{2} \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|}\,\frac{y_i}{|\boldsymbol{y}|}\Big| \leqslant 1.$$

Воспользуемся неравенством из утверждения 1°.

$$\Big|\sum_{i=1}^{2} \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|}\,\frac{y_i}{|\boldsymbol{y}|}\Big| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{x_i^2}{|\boldsymbol{x}|^2} + \frac{y_i^2}{|\boldsymbol{y}|^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{x}|^2} + \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{|\boldsymbol{y}|^2}\Big) = 1.$$

3°. Если $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| = 0$, то неравенство справедливо. Предположим, что $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \neq 0$. Используя неравенство из утверждения 2°, мы получим:

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = \sum_{i=1}^{2}(x_i+y_i)(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{2}(x_i+y_i)x_i + (x_i+y_i)y_i \leqslant$$
$$\leqslant |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\,|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\,|\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\,\big(|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|\big),$$

откуда сразу следует доказываемое неравенство. $\triangleleft$

Отметим на дуге $\overset{\frown}{\boldsymbol{ab}}$ произвольную точку $\boldsymbol{c}$ и докажем *аддитивность* длины дуги:

$$s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + s(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}).$$

Сначала покажем, что $s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \geqslant s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + s(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$. Обозначим через $L_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ множество тех ломаных из $L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, которые содержат точку $\boldsymbol{c}$ в качестве одной из своих вершин. Тогда

$$\sup_{\bar{\boldsymbol{\xi}}\in L_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} \ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + s(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}).$$

С другой стороны, так как $L_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \subset L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,

$$\sup_{\bar{\boldsymbol{\xi}}\in L_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} \ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \leqslant \sup_{\bar{\boldsymbol{\xi}}\in L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} \ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

откуда сразу следует доказываемое неравенство.

Далее, по определению супремума для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такая ломаная $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in L(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, что $s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leqslant \ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}) + 1/m$. Добавим к $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ одну вершину, совпадающую с точкой $\boldsymbol{c}$. Новую ломаную обозначим через $\bar{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{c}}$. Как следует из утверждения 3° леммы 3.10, $\ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \leqslant \ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{c}})$. С другой стороны, $\ell(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{c}}) \leqslant s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + s(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$. Поэтому

$$s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - 1/m \leqslant s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + s(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) \leqslant s(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Отсюда, в силу произвольности m и принципа Архимеда, следует аддитивность длины дуги.

Теперь мы можем определить понятие *угла*: $\widehat{\boldsymbol{a}0\boldsymbol{b}} := s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Обозначим через $\boldsymbol{e}$ точку $(1, 0) \in S$ и определим функцию $\varphi : S \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\varphi(\boldsymbol{a}) = s(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a})$ (от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{a}$ движемся против часовой стрелки). Для величины $\varphi(-\boldsymbol{e})$, где $-\boldsymbol{e} = (-1, 0)$, со времён Архимеда принято специальное обозначение: π. Число π является длиной половины единичной окружности S. Соответственно, длина всей окружности равна 2π. Итак, каждой точке окружности S мы поставили в соответствие число из промежутка $[0, 2\pi)$ числовой прямой. Утверждение о том, что для каждого вещественного числа $\varphi \in [0, 2\pi)$ существует такая точка $\boldsymbol{a} \in S$, что $\varphi = s(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a})$, мы доказывать не будем и примем его в качестве аксиомы. Фактически, так же как и в случае числовой прямой, это предположение означает отсутствие разрывов на окружности, что вполне соответствует нашим геометрическим представлениям.

Чтобы определить точку $\boldsymbol{a}(\varphi) \in S$ при $\varphi \notin [0, 2\pi)$, мы положим $\boldsymbol{a}(\varphi + 2\pi k) = \boldsymbol{a}(\varphi)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, для каждого $\psi \in \mathbb{R}$ мы однозначно определим такие $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $k \in \mathbb{Z}$, что $\psi = \varphi + 2\pi k$, и положим $\boldsymbol{a}(\psi) = \boldsymbol{a}(\varphi)$.

В заключение пункта определим *тригонометрические функции*. Для каждого $\psi \in \mathbb{R}$

$$\cos\psi = a_1(\psi), \quad \sin\psi = a_2(\psi),$$

где $(a_1(\psi), a_2(\psi)) = \boldsymbol{a}(\psi)$. Эти величины называются *косинусом* и *синусом* угла ψ соответственно. Если $\cos\psi \neq 0$, то величину $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\sin\psi}{\cos\psi}$ называют *тангенсом* угла ψ. Если $\sin\psi \neq 0$, то величину $\operatorname{ctg}\psi = \dfrac{\cos\psi}{\sin\psi}$ называют *котангенсом* угла ψ. Так как $\boldsymbol{a}(\psi) = \boldsymbol{a}(\psi + 2\pi k)$, для всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливы следующие соотношения:

$$\sin\psi = \sin(\psi + 2\pi k), \quad \cos\psi = \cos(\psi + 2\pi k), \quad \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(\psi + 2\pi k), \quad \operatorname{ctg}\psi = \operatorname{ctg}(\psi + 2\pi k).$$

Пусть $T \in \mathbb{R}_+$. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *T-периодической*, если $f(x + T) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. При этом число T называется *периодом* функции f. Таким образом, тригонометрические функции cos, sin, tg и ctg являются 2π-периодическими.

Несложно вывести и многие другие свойства тригонометрических функций. Мы отметим лишь некоторые из них:

$$\begin{gathered}\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1,\\ \cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,\\ \sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi.\end{gathered}$$

Доказательство этих соотношений предоставляем читателю.

4 Комплексные числа

В пункте 2.3 мы установили, что квадратное уравнение $x^2 = a$ не для всех $a \in \mathbb{R}_+$ имеет решение среди рациональных чисел. Это привело нас к понятию иррационального числа. Теперь рассмотрим уравнение $x^2 = -1$. Ясно, что никакое вещественное число не может быть его решением, так как квадрат вещественного числа всегда неотрицателен. Тем не менее, мы построим расширение поля вещественных чисел, в котором это уравнение будет иметь решение. Добавим к множеству $\mathbb{R}$ один дополнительный символ i и будем выполнять с ним арифметические операции как с обычными вещественными числами. Символ i называется *мнимой единицей* и характеризуется следующим свойством: $i^2 = -1$. В новом числовом множестве должны иметь смысл выражения вида $x+i$ и xi, где x — произвольное вещественное число.

Объекты вида $x+iy$, где x и y — вещественные числа, называются *комплексными числами*. Множество всех комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$. Чаще всего комплексные числа мы будем обозначать буквой z. Таким образом, если $z \in \mathbb{C}$, то существуют вещественные числа x и y, такие что $z = x + iy$. Число x называется *вещественной частью* комплексного числа z (обозначается $x = \mathit{Re}\, z$), а y — *мнимой частью* (обозначается $y = \mathit{Im}\, z$). Два комплексных числа совпадают, если совпадают их вещественные и мнимые части.

Определим сложение и умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ &z_1 z_2 = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

То есть арифметические операции с комплексными числами выполняются точно так же, как с вещественными, но при этом учитывается, что $i^2 = -1$. Несложно проверить, что $\mathbb{C}$ является полем. Нулём этого поля служит число $0 = 0+i\cdot 0$, а единицей — число $1 = 1+i\cdot 0$. Поясним, как находится обратный элемент. Пусть $z = x + iy$ — ненулевое комплексное число. *Сопряжённым* к z называется число $\overline{z} = x - iy$. Так как $z\overline{z} = x^2 + y^2 \neq 0$, обратным элементом для z будет число $\overline{z}/(x^2 + y^2)$.

Если мы отождествим вещественное число x с комплексным числом $x+i\cdot 0$, то получим, что $\mathbb{R}$ является подполем поля $\mathbb{C}$ (т.е., поле $\mathbb{C}$ является расширением поля $\mathbb{R}$). Однако в отличие от $\mathbb{R}$ поле комплексных чисел не является упорядоченным.

Комплексные числа допускают естественную геометрическую интерпретацию. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ поставим в соответствие упорядоченную пару вещественных чисел (x, y), которая задаёт некоторую точку на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$. Как мы уже отмечали, этой точке отвечает вектор с координатами (x, y). Таким образом, комплексные числа могут быть изображены точками (или векторами) на плоскости, которая по этой причине называется *комплексной плоскостью*.

Легко видеть, что сложение комплексных чисел производится как сложение соответствующих им векторов. С умножением дело обстоит немного сложнее. *Модулем комплексного числа* $z = x + iy$ называется неотрицательное вещественное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Аргументом комплексного числа* $z = x + iy \neq 0$ называется угол между векторами с координатами $(1, 0)$ и (x, y). Если мы обозначим модуль числа z через ρ, а аргумент — через φ, то получим для числа z следующее представление:

$$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Поскольку функции cos и sin являются 2π-периодическими, правая часть этого равенства не изменится, если мы вместо φ напишем $\varphi + 2\pi k$, где k — произвольное целое число. То есть каждому комплексному числу соответствует много значений угла φ. Множество всех этих значений обозначают через $\operatorname{Arg} z$. Чтобы определить аргумент числа однозначно, специально оговаривают, в каком промежутке его следует выбирать. Обычно это бывает один из полуинтервалов $[0, 2\pi)$ и $(-\pi, \pi]$. Значение аргумента в пределах выбранного промежутка обозначают через $\arg z$ и называют *главным значением аргумента*.

С помощью описанного выше представления нетрудно понять, что представляет собой произведение двух комплексных чисел. Возьмём два произвольных ненулевых комплексных числа:

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Используя тригонометрические формулы из предыдущего пункта, мы получим:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Таким образом, чтобы найти на координатной плоскости вектор, соответствующий комплексному числу z_1z_2, мы должны удлинить вектор (x_1, y_1) в ρ_2 раз и повернуть на угол φ_2 (напомним, что положительное направление поворота — против часовой стрелки). Можно, конечно, удлинить вектор (x_2, y_2) в ρ_1 раз и повернуть на угол φ_1. Результат от этого не изменится.

Упражнение 4.1. Используя полученное представление для произведения комплексных чисел и принцип математической индукции, доказать *формулу Муавра*:

$$z^k = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$

где $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$, $k \in \mathbb{N}$. •

Приведём пример использования формулы Муавра для нахождения комплексных решений алгебраических уравнений.

Пример 4.2. Найдём все комплексные числа, удовлетворяющие уравнению $z^4 = 1$. Среди вещественных чисел есть два решения этого уравнения: $+1$ и -1. Комплексных решений больше. Будем искать решение в виде $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Согласно формуле Муавра, требуется найти такие вещественные числа $\rho \in \mathbb{R}_+$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, что $\rho^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = 1$. Так как справа в этом равенстве стоит комплексное число, модуль которого равен единице, $\rho^4 = 1$. Следовательно $\rho = 1$. Таким образом, мы пришли к уравнению $\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi = 1$, которое (так как $1 = 1 + i\cdot 0$) эквивалентно следующей системе тригонометрических уравнений:

$$\cos 4\varphi = 1, \quad \sin 4\varphi = 0.$$

Решениями этой системы являются числа

$$\varphi_1 = 0 + 2\pi k_1, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2, \quad \varphi_3 = \pi + 2\pi k_3, \quad \varphi_4 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k_4,$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — произвольные целые числа. Так как комплексное число не меняется при изменении его аргумента на $2\pi k$, мы получаем в итоге следующий набор решений уравнения $z^4 = 1$: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $z_4 = -i$.

Вообще, для каждого натурального числа $n \geqslant 3$ решениями уравнения $z^n = 1$ являются вершины вписанного в единичную окружность правильного n-угольника, одна вершина которого совпадает с точкой $z = 1$. При $n = 1$ решение, очевидно, только одно: $z = 1$, а при $n = 2$ решений два: $z = 1$ и $z = -1$. •

Пример 4.3. В качестве ещё одного примера найдём выражение для $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Как следует из формулы Муавра,

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi.$$

Приравняв вещественные и мнимые части выражений слева и справа, мы получим:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Аналогично можно найти выражения для $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ при любом $n \in \mathbb{N}$. •

5 Кардинальные числа

В этом параграфе мы рассмотрим довольно необычную систему чисел, называемых кардинальными. Мы не будем определять арифметические операции для этих чисел, а установим только их порядковые свойства. Более того, мы изучим только два кардинальных числа, которые наиболее часто встречаются в анализе.

Предположим, что нам необходимо определить, в каком из двух множеств больше элементов. Если эти множества конечны, то мы можем посчитать количество элементов в каждом из них и сравнить получившиеся натуральные числа. А что делать, если множества бесконечны? В этом случае само понятие «количества элементов» теряет смысл. Вот здесь нам и приходит на помощь понятие кардинального числа или мощности множества. Чтобы пояснить основную идею сравнения «количества элементов» в бесконечных множествах, представим себе маленького мальчика, который не умеет считать. Перед ним — горка яблок и какое-то количество корзинок. Как он может ответить на вопрос о том, чего больше: яблок или корзинок? Мальчик оказался сообразительным и решил положить в каждую корзинку по одному яблоку. Если после этого останутся свободные корзинки, то корзинок больше, чем яблок. На математическом языке идея мальчика состоит в попытке установить взаимно однозначное соответствие между множествами корзинок и яблок. Эта идея и лежит в основе понятия кардинального числа.

5.1 Мощность множества

Скажем, что множество A *равномощно* множеству B, если существует взаимно однозначное отображение $F : A \to B$, такое что $F(A) = B$. Таким образом, отображение F должно быть биективным. Отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности, так как оно обладает следующими очевидными свойствами:

1°. любое множество равномощно самому себе (рефлексивность), при этом в качестве F можно взять тождественное отображение;

2°. если A равномощно B, то B равномощно A (симметричность), поскольку из того, что $F : A \to B$ — биекция, следует, что $F^{-1} : B \to A$ тоже является биективным отображением;

3°. если A равномощно B и B равномощно C, то A равномощно C (транзитивность). В самом деле, если $F : A \to B$ и $G : B \to C$ — биективные отображения, то биективным будет и отображение $G \circ F : A \to C$.

Тот факт, что множества A и B равномощны, мы будем обозначать $A \sim B$.

Совокупность всех множеств можно разбить на непересекающиеся классы равномощных множеств. *Мощностью* (или *кардинальным числом*) множества назовём класс эквивалентности, которому это множество принадлежит. Мощность какого-либо множества A

мы будем обозначать через $\operatorname{card} A$. Выражение $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$ означает, что множества A и B попали в один класс эквивалентности, а это значит, что они равномощны, то есть $A \sim B$.

Замечание 5.1. Вообще говоря, тот факт, что совокупность всех множеств можно разбить на непересекающиеся классы равномощных множеств, не является очевидным. Его доказательство, однако, выходит за рамки нашего курса. Более того, этот факт необходим нам лишь для того, чтобы каким-то образом определить понятие кардинального числа. В принципе, мы можем обойтись без этого определения и трактовать $\operatorname{card} A$, как некоторый параметр множества A, причём у равномощных множеств этот параметр будет одинаковым. •

Если A — конечное множество, то принято определять $\operatorname{card} A$ как количество элементов множества A. В частности, $\operatorname{card} \varnothing = 0$. Однако основная причина введения кардинальных чисел связана с попыткой сравнения бесконечных множеств. Ранее, в замечании 2.17, мы назвали множество бесконечным, если оно не является конечным. Дедекинд предложил называть множество бесконечным, если оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству. Сейчас мы не готовы доказать эквивалентность этих определений, поэтому отложим данный вопрос и ограничимся лишь поясняющим примером.

Пример 5.2. Рассмотрим заведомо бесконечное множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и покажем, что оно эквивалентно некоторому своему подмножеству A, не совпадающему с $\mathbb{N}$. Возьмём $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и определим отображение $F : \mathbb{N} \to A$ следующим образом: $F(k) = k+1$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что F — биекция и $\operatorname{im} F = A$. Таким образом, $\mathbb{N}$ и по Дедекинду является бесконечным множеством. Можно было бы взять и другое множество A. Если, например, A — множество чётных натуральных чисел, то в качестве биекции $F : \mathbb{N} \to A$ годится отображение $F(k) = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. •

Мощности множеств можно сравнивать. Скажем, что мощность множества A не превосходит мощности множества B ($\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$), если A равномощно некоторому подмножеству множества B (то есть $A \sim B_1$ и $B_1 \subset B$).

Упражнение 5.3. Доказать, что если $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ и $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} C$, то $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} C$. •

Нам хорошо известно, что для любых вещественных чисел a и b неравенства $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ влекут равенство $a = b$. Этот факт имеет место и для кардинальных чисел.

Теорема 5.4 (*Теорема Шрёдера — Бернштейна*)**.** *Пусть A и B — произвольные множества. Если* $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ *и* $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} A$, *то* $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

Доказательство. Так как $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ и $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} A$, существуют подмножества $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$, такие что $A \sim B_1$ и $B \sim A_1$. Биекция, связывающая множества B и A_1, переводит B_1 в некоторое подмножество A_2 множества A_1. Таким образом, мы имеем три вложенных множества $A \supset A_1 \supset A_2$, причём $A \sim A_2$, поскольку $A \sim B_1$ и $B_1 \sim A_2$. Теорема будет доказана, если мы установим, что $A \sim A_1$.

Обозначим через F биекцию, переводящую A в A_2 и определим ещё одно множество $A_3 = F(A_1)$. Так как $A \supset A_1$ и, как следствие, $F(A) \supset F(A_1)$, мы имеем включение $A_2 \supset A_3$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность вложенных множеств

$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$, таких что $A_{k+2} = F(A_k)$ для всех натуральных k. Ради единообразия обозначим множество A через A_0.

Хотя эта последовательность и является суживающейся (то есть $A_k \supset A_{k+1}$), множество $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$ может быть непустым. Введём последовательность непересекающихся множеств $C_k = A_k \setminus A_{k+1}$. Нетрудно видеть, что $C_k \sim C_{k+2}$ для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В самом деле, A_k есть объединение непересекающихся множеств A_{k+1} и C_k. Поэтому

$$A_{k+2} = F(A_k) = F(A_{k+1}) \cup F(C_k) = A_{k+3} \cup F(C_k).$$

Так как множества $F(A_{k+1})$ и $F(C_k)$ не пересекаются (F — биекция),

$$F(C_k) = A_{k+2} \setminus A_{k+3} = C_{k+2}.$$

Следовательно $C_k \sim C_{k+2}$.

Множества $A = A_0$ и A_1 отличаются на множество C_0, а именно,

$$\begin{aligned} &A = A_0 = C \cup C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots\ , \\ &A_1 = C \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots\ . \end{aligned}$$

Построим отображение $G : A \to A_1$ следующим образом:

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in C, \\ x, & x \in C_k,\ k \text{ — нечётное}, \\ F(x), & x \in C_k,\ k \text{ — чётное}. \end{cases}$$

Это отображение можно изобразить более наглядно с помощью диаграммы:

$$\begin{aligned} A &= C \cup C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \\ A_1 &= C \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup \ldots \end{aligned}$$

Очевидно, что G — биекция и $G(A) = A_1$. Таким образом, $A \sim A_1$ и теорема доказана. $\square$

Скажем, что мощность множества A меньше мощности множества B (обозначается $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$), если $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ и $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} B$.

Теорема 5.5 (*Первая теорема Кантора*)**.** *Пусть A — произвольное множество. Тогда $\operatorname{card} A < \operatorname{card} \mathscr{P}(A)$, где $\mathscr{P}(A)$ — множество всех подмножеств множества A.*

Доказательство. Если множество A является пустым, то оно не имеет элементов и $\operatorname{card} A = 0$. В то же время, $\mathscr{P}(A)$ содержит один элемент — пустое множество, поэтому $\operatorname{card} \mathscr{P}(A) = 1 > 0 = \operatorname{card} A$.

Рассмотрим теперь случай непустого множества A. Пусть B — совокупность всех подмножеств множества A, состоящих из одного элемента. Тогда $B \subset \mathscr{P}(A)$ и $B \sim A$. При этом в качестве биекции $G : A \to B$ можно взять отображение $G(x) = \{x\}$. Таким образом, $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} \mathscr{P}(A)$. Осталось показать, что $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} \mathscr{P}(A)$.

Предположим, что $\operatorname{card} A = \operatorname{card} \mathscr{P}(A)$. Тогда существует биективное отображение $F : A \to \mathscr{P}(A)$. Скажем, что элемент x множества A является «правильным», если $x \in F(x)$. Все остальные элементы множества A (то есть такие, что $x \notin F(x)$) назовём «неправильными». Пусть E — множество всех «неправильных» элементов. Поскольку

$E \in \mathscr{P}(A)$ и F — биекция, существует единственный элемент $e \in A$, такой что $F(e) = E$. Элемент e может быть либо «правильным», либо «неправильным». Если он «правильный», то $e \in F(e)$, а это означает, что e принадлежит множеству «неправильных» элементов E. Если предположить, что e — «неправильный», то $e \in E = F(e)$, то есть, e является «правильным». Получили противоречие: $e \in A$ и e не может быть ни «правильным», ни «неправильным». Следовательно $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} \mathscr{P}(A)$. □

Как следует из этой теоремы, не существует наибольшего кардинального числа. Какое бы множество A мы ни взяли, всегда можно построить множество, мощность которого больше мощности множества A.

5.2 Счётные множества

Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Множество называется *не более чем счётным*, если оно конечно или счётно.

В примере 5.2 мы показали, что множество чётных натуральных чисел является счётным. Аналогично можно показать, что счётным является и множество нечётных натуральных чисел. Из этих двух фактов легко следует счётность объединения двух непересекающихся счётных множеств. Действительно, если A и B — счётные множества, то мы можем расположить их элементы в виде последовательностей: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$, причем в этих последовательностях ни один элемент не встречается дважды. Определим отображение $F : \mathbb{N} \to A \cup B$ следующим образом: если n — нечётное натуральное число, то $F(n) = a_{(n+1)/2}$, а если n — чётное число, то $F(n) = b_{n/2}$. Так как $A \cap B = \varnothing$, отображение F является биективным.

Упражнение 5.6. Доказать, что объединение двух не более чем счётных множеств (не обязательно непересекающихся) есть не более чем счётное множество. •

Как показывает следующая теорема, счётные множества являются в некотором смысле наименьшими из бесконечных множеств.

Теорема 5.7. *Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.*

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество. Возьмём произвольный элемент a_1 множества A. Поскольку A — бесконечное множество, $A_1 := A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$ и, более того, A_1 — бесконечное множество. Поэтому существует $a_2 \in A_1$, причём $A_2 := A_1 \setminus \{a_2\}$ — бесконечное множество. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность $\{a_k\}$ элементов множества A, таких что $a_k \neq a_\ell$ при $k \neq \ell$. Таким образом, множество $B = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ является счётным и $B \subset A$. □

Следствие 5.8. *Бесконечное подмножество счётного множества является счётным.*

▷ Пусть A — счётное множество и B — его бесконечное подмножество. Так как $B \subset A$, $\operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} A = \operatorname{card} \mathbb{N}$. С другой стороны, согласно доказанной теореме B имеет счётное подмножество C. Поэтому $\operatorname{card} \mathbb{N} = \operatorname{card} C \leqslant \operatorname{card} B$. Применяя теорему Шрёдера — Бернштейна, получаем, что $\operatorname{card} B = \operatorname{card} \mathbb{N}$. ◁

Следствие 5.9. *Если A — бесконечное, а B — не более чем счётное множества, то $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A$.*

$\triangleright$ Можно считать, что $B \cap A = \varnothing$, иначе мы возьмём вместо B множество $B \setminus A$. Пусть C — какое-либо счётное подмножество множества A. Очевидно, что $A = (A \setminus C) \cup C$ и $A \cup B = (A \setminus C) \cup (C \cup B)$. В то же время, $C \sim (C \cup B)$. Поэтому $A \sim A \cup B$. В самом деле, пусть F — биекция C на $C \cup B$. Определим отображение $G : A \to A \cup B$ следующим образом:

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in A \setminus C, \\ F(x), & x \in C. \end{cases}$$

Это отображение, очевидно, является биективным. $\triangleleft$

Теперь мы готовы доказать эквивалентность двух встретившихся нам ранее определений бесконечного множества.

Теорема 5.10 (Дедекинд). *Для того, чтобы множество было бесконечным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномощно своему собственному подмножеству.*

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество. Тогда существует счетное множество $B \subset A$. Если $b \in B$, то согласно следствию 5.8 множество $B \setminus \{b\}$ является счетным. Поэтому $B \sim B \setminus \{b\}$. Поскольку $A = (A \setminus B) \cup B$ и $A \setminus \{b\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus \{b\})$, мы получаем, что $A \sim A \setminus \{b\}$. Таким образом, A равномощно своему собственному подмножеству $A \setminus \{b\}$.

Пусть теперь множество $A \sim E$, $E \subset A$ и $A \setminus E \neq \varnothing$. Покажем, что A — бесконечное множество. Предположим, что множество A является конечным. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $A \sim \mathbb{N}_n$ и поэтому $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Чтобы получить множество E, мы должны отбросить один или несколько членов множества A, например, последние: $E = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $m < n$. Поскольку $A \sim E$, мы в итоге получим, что $\mathbb{N}_n \sim \mathbb{N}_m$, чего, конечно же, быть не может. Поэтому предположение о конечности множества A неверно. $\square$

Изучим другие свойства счётных множеств.

Теорема 5.11. $\operatorname{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Доказательство. Каждой паре натуральных чисел (n, k) поставим в соответствие число $F(n, k) = (2k - 1) \cdot 2^{n-1}$. Это отображение можно изобразить в виде таблицы:

$n \diagdown k$	1	2	3	4	...
1	1	3	5	7	...
2	2	6	10	14	...
3	4	12	20	28	...
4	8	24	40	56	...
...	...	...	...	...	...

В клетках записаны значения $F(n, k)$. Обратим внимание, что в первой строке записаны все нечётные числа, а числа из следующих строк получаются удвоением чисел, стоящих одной строкой выше.

Покажем, что отображение $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ является биекцией. Если $n_1 \neq n_2$, то $F(n_1, k) \neq F(n_2, m)$ для всех натуральных k и m. Это следует из того, что в разложении чисел $F(n_1, k)$ и $F(n_2, m)$ на простые множители присутствует разное количество двоек. Если же $n_1 = n_2$ и $k \neq m$, то, очевидно, также $F(n_1, k) \neq F(n_2, m)$. Поэтому F — взаимно однозначное отображение. Его сюръективность следует из того, что любое натуральное число ℓ может быть представлено в виде $(2k-1)\cdot 2^{n-1}$ для некоторых натуральных чисел k и n. Чтобы найти эти числа, будем делить ℓ на 2 до тех пор, пока не останется нечётное число. Это нечётное число может быть представлено в виде $(2k-1)$, а количество делений на 2 равно $(n-1)$. Таким образом, отображение F является биекцией. □

Следствие 5.12. *Объединение счётного набора счётных множеств является счётным множеством.*

▷ Счётную совокупность множеств можно рассматривать как последовательность. Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность счётных множеств и $X = \cup_{k=1}^{\infty} X_k$. Так как $X_1 \subset X$ и X_1 — счётное множество, $\operatorname{card}\mathbb{N} = \operatorname{card} X_1 \leqslant \operatorname{card} X$. Остаётся показать, что $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card}\mathbb{N}$.

Множества X_k могут пересекаться, поэтому определим новую последовательность множеств $\{Y_k\}$, таких что $Y_1 = X_1$ и $Y_k = X_k \setminus \cup_{i=1}^{k-1} X_i$ при $k \geqslant 2$. Ясно, что множества Y_k между собой не пересекаются и $X = \cup_{k=1}^{\infty} Y_k$. Каждое множество Y_k может быть либо счётным, либо конечным, поэтому $Y_k = \cup_{m=1}^{\ell_k}\{y_k^m\}$, где символ ℓ_k обозначает либо какое-либо натуральное число, либо $+\infty$. Пусть $M \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ — множество всех пар натуральных чисел (k, m), таких что $k \in \mathbb{N}$ и $y_k^m \in Y_k$. Другими словами, используя некоторою вольность в обозначениях, $M = \{(k, m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid m \leqslant \ell_k\}$. Вольность заключается в том, что не совсем корректно писать $m \leqslant +\infty$. Правильнее было бы написать $M = \{(k, m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid m \leqslant \ell_k,$ если $\ell_k \in \mathbb{N},$ и $m \in \mathbb{N}$ если $\ell_k = +\infty\}$.

Определим отображение $F : M \to X$, такое что $F(k, n) = y_k^n$. Поскольку $y_{k_1}^{n_1} \neq y_{k_2}^{n_2}$ при $(k_1, n_1) \neq (k_2, n_2)$, отображение F является биективным. Следовательно $\operatorname{card} X = \operatorname{card} M \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \operatorname{card}\mathbb{N}$. Таким образом, применяя теорему Шрёдера — Бернштейна, получаем, что $\operatorname{card} X = \operatorname{card}\mathbb{N}$. ◁

Следствие 5.13. $\operatorname{card}\mathbb{Q} = \operatorname{card}\mathbb{N}$.

▷ Множество $\mathbb{Q}$ состоит из дробей n/k, где $n \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ введём множество $\mathbb{Q}_k = \{n/k \mid n \in \mathbb{Z}\}$. То есть $\mathbb{Q}_k$ есть множество рациональных чисел, у которых знаменатель равен k. Очевидно, что $\mathbb{Q} = \cup_{k=1}^{\infty}\mathbb{Q}_k$. Каждое множество $\mathbb{Q}_k$ является счётным, поэтому, как следует из предыдущего следствия, счётным является и $\mathbb{Q}$. ◁

Упражнение 5.14. Доказать, что множество алгебраических вещественных чисел счётно. •

5.3 Множества мощности континуума

Скажем, что множество имеет *мощность континуума*, если оно равномощно отрезку $[0, 1]$ числовой прямой. Для обозначения мощности континуума часто используется латинская буква c. Рассмотрим несколько примеров, связанных с конкретными множествами мощности континуума.

Пример 5.15. Интервал $(0, 1)$ является бесконечным множеством, поэтому следствие 5.9 влечёт равенства: $\operatorname{card}[0, 1] = \operatorname{card}[0, 1) = \operatorname{card}(0, 1] = \operatorname{card}(0, 1)$. •

Пример 5.16. Любой отрезок $[a, b]$ вещественной прямой имеет мощность c. В самом деле, биекцией $F : [a, b] \to [0, 1]$ будет служить отображение $F(x) = (x-a)/(b-a)$. •

Пример 5.17. Вся вещественная прямая $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума. Действительно, отображение, которое каждому вещественному числу $x \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие число $F(x) = x/(1+|x|)$, является биекцией $\mathbb{R}$ на интервал $(-1, 1)$, имеющий мощность c. Далее, мы покажем, что $\operatorname{card}\mathbb{R} = c$, с помощью других рассуждений. $\bullet$

Изучим некоторые свойства множеств мощности континуума. Сначала ответим на вопрос, не являются ли множества мощности континуума счётными.

Теорема 5.18 (*Вторая теорема Кантора*)**.** $\operatorname{card}\mathbb{N} < c$.

Доказательство. Проведём доказательство от противного. Так как $\mathbb{Q}$ — счётное множество, следствие 5.8 позволяет заключить, что множество $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ тоже является счётным. Поэтому $\operatorname{card}\mathbb{N} \leqslant \operatorname{card}[0, 1] = c$. Предположим, что $\operatorname{card}[0, 1] = \operatorname{card}\mathbb{N}$. Тогда отрезок $[0, 1]$ можно представить в виде последовательности точек: $[0, 1] = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Построим последовательность вложенных отрезков $[0, 1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots I_k \supset \ldots$, таких что I_k не содержит точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Такое построение можно провести по индукции. Во-первых, существует отрезок $I_1 \subset [0, 1]$, такой что $x_1 \notin I_1$. Если уже построен отрезок I_k с требуемыми свойствами, то возьмём в качестве I_{k+1} какой-нибудь отрезок, принадлежащий I_k и не содержащий точку x_{k+1}.

По теореме о вложенных отрезках существует точка $a \in [0, 1]$, такая что $a \in \cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. По определению множеств I_k, $a \neq x_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны, согласно нашему предположению последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ исчерпывает все точки отрезка $[0, 1]$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

До настоящего момента мы установили существование только одного иррационального числа, а именно, $\sqrt{2}$. Сейчас мы готовы доказать, что иррациональных чисел значительно больше, чем рациональных.

Следствие 5.19. *Иррациональные числа существуют. Множество иррациональных чисел отрезка* $[0, 1]$ *имеет мощность континуума.*

$\triangleright$ Если бы все числа на отрезке $[0, 1]$ были рациональными, множество $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ имело бы мощность континуума. Но это невозможно, так как ранее мы установили счётность этого множества.

Докажем вторую часть утверждения. Пусть $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}_{[0,1]}$ — множества иррациональных и рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$ соответственно. Множество A бесконечно, так как в противном случае множество $A \cup \mathbb{Q}_{[0,1]} = [0, 1]$ было бы счётным, а это не так. Тогда из следствия 5.9 вытекает, что $\operatorname{card} A = \operatorname{card}(A \cup \mathbb{Q}_{[0,1]}) = \operatorname{card}[0, 1] = c$. $\triangleleft$

Упражнение 5.20. Пусть A — множество мощности континуума, а B — его счётное подмножество. Доказать, что множество $A \setminus B$ имеет мощность континуума. $\bullet$

Утверждение 5.21. *Если A и B — непересекающиеся множества мощности континуума, то* $\operatorname{card}(A \cup B) = c$.

Доказательство. Существуют биекции $F_A : A \to [0, 1/2)$ и $F_B : B \to [1/2, 1]$. Так как $A \cap B = \varnothing$, отображение $F : A \cup B \to [0, 1]$, такое что $F(x) = F_A(x)$ при $x \in A$ и $F(x) = F_B(x)$ при $x \in B$, является биективным. Следовательно $\operatorname{card}(A \cup B) = c$. $\square$

Аналогично можно доказать, что если $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность непересекающихся множеств мощности континуума, то их объединение тоже имеет мощность c. Достаточно рассмотреть биекции $F_k : X_k \to (1/(k+1), 1/k]$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, в частности, следует уже установленный нами ранее факт: множество $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1]$ имеет мощность c.

Теорема 5.22. $\operatorname{card}\big([0,1]\times[0,1]\big) = \operatorname{card}[0,1] = c.$

Доказательство. Достаточно показать, что $\operatorname{card}\big([0,1)\times[0,1)\big) = \operatorname{card}[0,1) = c$. Будем использовать представление числа $x \in [0,1)$ в виде десятичной дроби: $x = 0, x_1x_2x_3\ldots$. Здесь x_k означают цифры от 0 до 9. Как мы уже отмечали в пункте 2.4, встречаются числа, для которых такое представление определено не единственным образом. Если у десятичной дроби начиная с некоторой позиции стоят девятки, то эта дробь будет задавать то же самое число, если мы заменим все эти девятки на нули, а к цифре на предыдущей позиции добавим единицу. Для того, чтобы определять число десятичной дробью однозначно, договоримся использовать только то представление, в котором цифра 9 не является периодом.

Определим отображение $F : [0,1)\times[0,1) \to [0,1)$ следующим образом: если $(x,y) \in [0,1)\times[0,1)$, то $F(x,y) = 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$. То есть на нечётных местах мы расставим цифры из десятичного представления числа x, а на чётных — числа y. Нетрудно заметить, что F является взаимно однозначным отображением. Его область значений, однако, не совпадает с $[0,1)$. Например, число, у которого на чётных местах стоят девятки, в соответствии с нашей договорённостью о единственности представления не имеет прообраза в $[0,1)\times[0,1)$. Тем не менее, F является биекцией из $[0,1)\times[0,1)$ в $\operatorname{im} F \subset [0,1)$. Поэтому $\operatorname{card}\big([0,1)\times[0,1)\big) \leqslant \operatorname{card}[0,1) = c$.

С другой стороны, легко построить биективное отображение G полуинтервала $[0,1)$ в некоторое подмножество квадрата $[0,1)\times[0,1)$. Например, для каждого $x \in [0,1)$ можно положить $G(x) = (x,0)$. Таким образом, $c = \operatorname{card}[0,1) \leqslant \operatorname{card}\big([0,1)\times[0,1)\big)$.

Доказываемый результат следует теперь из теоремы Шрёдера — Бернштейна. □

Из доказанной теоремы с помощью рассуждений по индукции легко вывести, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $[0,1]^n = [0,1]\times\ldots[0,1]$ имеет мощность континуума и, как следствие, $\operatorname{card}\mathbb{R}^n = c$. Эта теорема имеет и более удивительные следствия, одно и которых мы установим далее.

Следствие 5.23. *Если для каждого $\alpha \in [0,1]$ множество X_α имеет мощность континуума, то множество $X = \cup_{\alpha\in[0,1]}X_\alpha$ тоже имеет мощность континуума.*

▷ Для каждого $\alpha \in [0,1]$ обозначим через F_α биективное отображение множества X_α на $[0,1]$ и, кроме того, определим множество $Y_\alpha = X_\alpha \setminus \cup_{\sigma\in[0,\alpha)}X_\sigma$ (в качестве Y_0 возьмём X_0). Очевидно, что $\cup_{\alpha\in[0,1]}Y_\alpha = X$ и $Y_\alpha \cap Y_\beta = \varnothing$, если $\alpha \neq \beta$. Образ множества Y_α при отображении F_α обозначим через M_α. Определим отображение $F : X \to [0,1]\times[0,1]$ следующим образом: для каждого $x \in X$ положим $F(x) = (\alpha, F_\alpha(x))$, где α — единственное число из $[0,1]$, такое что $x \in Y_\alpha$. Очевидно, что F — биективное отображение множества X на множество $M = \{(\alpha,\beta) \in [0,1]\times[0,1] \mid \beta \in M_\alpha\}$. Так как $M \subset [0,1]\times[0,1]$, из доказанной выше теоремы следует, что $\operatorname{card} X \leqslant c$.

С другой стороны, $\operatorname{card} X_0 = c$ и $X_0 \subset X$. Поэтому $c \leqslant \operatorname{card} X$. Из теоремы Шрёдера — Бернштейна следует, что $\operatorname{card} X = c$. ◁

Замечание 5.24. В приведённом доказательстве можно обойтись без множеств Y_α. Как и ранее, обозначим через F_α биективное отображение множества X_α на $[0,1]$. Для каждого $x \in X$ произвольно зафиксируем (используя аксиому выбора) одно $\alpha \in [0,1]$, такое что $x \in X_\alpha$. Мы обозначим выбранное α через $\alpha(x)$. Теперь определим отображение $F : X \to [0,1]\times[0,1]$ следующим образом: для каждого $x \in X$ положим $F(x) = (\alpha(x), F_{\alpha(x)}(x))$. Нетрудно убедиться в том, что F — инъективное отображение. В самом деле, пусть $x' \neq x''$.

Если $\alpha(x') \neq \alpha(x'')$, то $F(x') \neq F(x'')$, поскольку у них отличаются первые координаты. Если $\alpha(x') = \alpha(x'') = \alpha$, то $F(x') \neq F(x'')$, так как $x', x'' \in X_\alpha$ и F_α является инъекцией на X_α. Таким образом, F является биекцией множества X на $M = \operatorname{im} F \subset [0,1] \times [0,1]$. Следовательно, $\operatorname{card} X = \operatorname{card} M \leqslant \operatorname{card} [0,1] \times [0,1] = \operatorname{card} [0,1] = c$. Обратное неравенство доказывается так же как в доказательстве следствия. •

Теорема 5.25. *Множество всех последовательностей, составленных из нулей и единиц, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Каждому числу из полуинтервала $[0,1)$ поставим в соответствие его представление в виде двоичной дроби. Для того, чтобы это представление было взаимно-однозначным, договоримся не использовать цифру 1 в качестве периода дроби. О неоднозначности представления уже говорилось в доказательстве теоремы 5.22 и в конце пункта 2.4. Таким образом, множество последовательностей из нулей и единиц, у которых единица не является периодом, имеет мощность континуума. Добавив к этому множеству множество A всех последовательностей, у которых, начиная с некоторого номера, стоят только единицы (то есть единица является периодом), мы получим множество всех последовательностей, составленных из нулей и единиц. Согласно следствию 5.9 теорема будет доказана, если мы установим счётность множества A.

Обозначим через A_k множество последовательностей, у которых, начиная с номера k, стоят единицы. Каждое из множеств A_k является конечным и $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Поэтому A — счётное множество (см. следствие 5.12). □

Следствие 5.26. *Если A — счётное множество, то $\mathscr{P}(A)$ имеет мощность континуума.*

▷ Поскольку A — счётное множество, существует биективное отображение $F : \mathbb{N} \to A$. Каждому множеству $B \subset A$ поставим в соответствие последовательность $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ по следующему правилу:

$$b_k = \begin{cases} 1, & F(k) \in B, \\ 0, & F(k) \in A \setminus B. \end{cases}$$

Это соответствие является биективным отображением $\mathscr{P}(A)$ на множество всех последовательностей, составленных из нулей и единиц. Таким образом, наше утверждение следует из доказанной выше теоремы. ◁

Заметим, что из этого утверждения и теоремы 5.5 сразу вытекает теорема 5.18 (вторая теорема Кантора).

Упражнение 5.27. Доказать, что множество последовательностей, составленных из n цифр десятичной системы счисления ($2 \leqslant n \leqslant 10$), имеет мощность континуума. •

Упражнение 5.28. Доказать, что множество чисел из отрезка $[0,1]$, в десятичном представлении которых отсутствует n цифр ($0 \leqslant n \leqslant 8$), имеет мощность континуума. •