

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ  
НА ГРАФАХ КЭЛИ

Е.В. Константинова

Кафедра Теоретической Кибернетики

Новосибирск — 2010

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Определения, понятия, примеры</b>	<b>6</b>
1.1 Группы	6
1.1.1 Симметрическая группа $Sym_n$	8
1.1.2 Гипероктаэдральная группа $B_n$	9
1.2 Графы	10
1.2.1 Регулярные и транзитивные графы	10
1.2.2 Дистанционно–регулярные и –транзитивные графы	12
1.3 Графы Кэли	16
1.3.1 Простейшие примеры графов Кэли	16
1.3.2 Основные свойства графов Кэли	17
1.3.3 Граф Хэмминга: дистанционно–транзитивный граф Кэли	19
1.3.4 Граф Джонсона: дистанционно–транзитивный граф, не являющийся графом Кэли	20
1.3.5 Граф Кнезера: когда он является графом Кэли?	21
1.3.6 Графы Кэли на симметрической группе $Sym_n$	23
1.3.7 Графы Кэли на гипероктаэдральной группе $B_n$	26
<b>2 Гамильтоновость графов Кэли</b>	<b>29</b>
2.1 Гамильтоновость гиперкуба и код Грея	29
2.2 Комбинаторные условия для гамильтоновости	31
2.3 Гипотезы Ловаса и Бабаи	34
2.4 Гамильтоновость графов Кэли на произвольной конечной группе	36
2.5 Гамильтоновость графов Кэли на симметрической группе	39
2.6 Гамильтоновость Рамсаке графа	41
2.7 Другие циклы Рамсаке графа	44
2.7.1 Циклы длины шесть	46
2.7.2 Циклы длины семь	47
<b>3 Определение диаметра графа Кэли</b>	<b>53</b>
3.1 Диаметр графов Кэли на абелевых и неабелевых группах	54
3.2 Диаметр графов Кэли на симметрической и знакопеременной группах	56
3.3 Рамсаке problem	59

3.3.1	Верхняя оценка Гейтса и Пападимитроу на диаметр Рамсаке графа . . . . .	62
3.3.2	Нижняя оценка Гейтса и Пападимитроу на диаметр Рамсаке графа . . . . .	68
3.3.3	Улучшенные оценки Хейдари и Садбороу на диаметр Рамсаке графа . . . . .	72
3.3.4	Точные значения диаметра Рамсаке графа . . . . .	76
3.4	Burnt Рамсаке problem . . . . .	76
3.4.1	Улучшенные оценки на диаметр Burnt Рамсаке графа . . . . .	79
3.4.2	Точные значения диаметра Burnt Рамсаке графа . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Сортировка реверсалами</b>	<b>82</b>
<b>5</b>	<b>Эффективное восстановление вершин в графе</b>	<b>85</b>
5.1	Граф Хэмминга $L_n(q)$ . . . . .	87
5.2	Графа Джонсона $J(n, m)$ . . . . .	88
5.3	Реверсальный граф $R_n$ . . . . .	89
5.3.1	Перестановки и реверсалы . . . . .	89
5.3.2	Структурные свойства реверсального графа $R_n$ . . . . .	92
5.3.3	Восстановление перестановок в реверсальном графе $R_n$ . . . . .	101
	<b>Литература</b>	<b>103</b>

# Введение

Понятие графа является одним из наиболее важных при описании структуры дискретных систем. В общем виде, граф описывает структуру связей между отдельными частями системы и в силу своей общности используется во многих математических моделях. Задачи, возникающие на графах, весьма разнообразны: исследование структуры и свойств графов, изучение специальных классов графов, построение быстрых алгоритмов для решения различных задач на графах и т. д.

Графы находят свое применение во многих областях знаний, в частности, в химии для описания химических структур и путей сложных реакций; в биологии для описания генных сетей; в информатике и программировании для хранения и поиска данных; в схемотехнике для описания топологии печатных плат и микросхем; в логистике для анализа инфраструктуры товаропотоков; в социологии для представления отношений внутри некоторого социума.

Определение графа Кэли было введено английским математиком Артуром Кэли в 1878 для представления и объяснения понятия абстрактной группы, порождаемой множеством генераторов. В последние годы, теория графов Кэли развивается, как отдельная большая область алгебраической теории графов. Графы Кэли находят свое применение как в классических задачах чистой математики, таких как классификация, изоморфизм и перечисление графов, так и в прикладных задачах.

В предлагаемом курсе лекций изучаются комбинаторные задачи на графах Кэли. Большинство из этих задач на сегодняшний день являются открытыми, в частности, определение гамильтоновости произвольного графа Кэли, а также подсчет числа гамильтоновых циклов, и определение диаметра произвольного графа Кэли. Для некоторых классов графов эти задачи удастся решить. Особый интерес представляет исследование

циклической структуры графов Кэли, в частности, в графах Кэли, описывающих компьютерные сети. Последние достижения в этой области будут предложены для изучения.

Большое внимание уделяется графам Кэли на симметрической и гипероксаэдральной группах, имеющих прикладное значение. В частности, в молекулярной биологии перестановки и помеченные перестановки используются для представления генных последовательностей, а некоторые операции на перестановках соответствуют эволюционным событиям. Одной из таких операций является инверсия элементов перестановки (реверсал). Задача определения наименьшего числа реверсалов, переводящих заданную перестановку в единичную, исследуется в молекулярной биологии и называется сортировка реверсалами.

Эта задача напрямую связана с известной комбинаторной задачей Рамсаке problem, в которой ключевую роль играет Рамсаке граф, являющийся графом Кэли на симметрической группе. Рамсаке problem состоит в определении диаметра Рамсаке graph, является открытой на сегодняшний день и может быть рассмотрена, как частный случай общей задачи определения диаметра графа Кэли. Известные на сегодняшний день результаты по этой теме будут изложены в курсе лекций.

Также рассматривается задача эффективного восстановления вершин в графе, которая естественным образом возникает в теории кодирования и первоначально исследовалась для дистанционно-регулярных графов. В частности, для графа Хэмминга, который является графом Кэли. Позднее решение этой задачи было найдено для графов Кэли, не являющихся дистанционно-регулярными. Для таких графов решение задачи становится более трудным. По-прежнему многие вопросы в рамках этой задачи остаются открытыми.

В целом, основное внимание этого курса уделяется современным комбинаторным задачам на графах Кэли, имеющим прикладное значение, но при этом, напрямую связанных с классическими постановками задач в теории графов, алгебраической теории графов, теории кодирования.

Автор выражает признательность А.Н. Медведеву за рисунки, подготовленные для этого учебного пособия.

# Глава 1

## Определения, понятия, примеры

В этой главе вводятся основные определения и понятия из теории групп и теории графов, приводятся примеры. Также обсуждаются некоторые комбинаторные и структурные свойства графов Кэли, которые более детально будут изучаться позднее. Некоторые понятия, которые не приводятся в этом разделе, могут быть найдены в книгах [11, 13, 15, 62, 67].

### 1.1 Группы

*Группой* называется множество элементов  $G$  с бинарной операцией  $\circ$  на нем, такое, что выполняются следующие аксиомы:

Аксиома 1. (*ассоциативность*) Для любых элементов  $f, g, h \in G$  верно:  
$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Аксиома 2. (*о единичном элементе*) В группе  $G$  существует единственный элемент  $I$ , такой, что:  $g \circ I = I \circ g = g$ .

Аксиома 3. (*об обратном элементе*) Для любого элемента  $g \in G$  существует единственный элемент  $g^{-1} \in G$ , такой, что:  
$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = I.$$

Если при этом выполнена еще одна аксиома:

Аксиома 4. (*коммутативность*) Для любых элементов  $g, h \in G$  верно:  
$$g \circ h = h \circ g.$$

то группа называется *коммутативной* или *абелевой*.

Обычно под бинарной операцией понимается сложение или умножение элементов. При умножении элементов  $f$  и  $g$  результат бинарной операции обозначается  $fg$ . Это *мультипликативная* запись. *Аддитивная* запись  $f+g$  используется, когда результатом бинарной операции является сумма двух элементов.

При мультипликативной записи единичный элемент группы традиционно называется единицей и обозначается  $e$  или  $I$ . При аддитивной записи единичный элемент называется нулем и обозначается  $0$ .

Простейшими примерами групп являются числовые группы, к которым относятся все числовые системы. В частности, целые  $\mathbb{Z}$ , рациональные  $\mathbb{Q}$ , действительные  $\mathbb{R}$ , комплексные числа  $\mathbb{C}$  образуют аддитивные абелевы группы. Ненулевые рациональные  $\mathbb{Q}^*$ , действительные  $\mathbb{R}^*$ , комплексные числа  $\mathbb{C}^*$  образуют мультипликативные абелевы группы.

Если множество  $G$  является конечным, то группа  $G$  называется *конечной*. *Порядок* конечной группы определяется числом элементов в ней.

Пусть  $G$  является конечной группой и пусть  $S \subset G$ . Множество  $S$  называется *порождающим множеством* (*generating set*) группы, а его элементы - *порождающими* (*generators*), если любой элемент группы  $G$  может быть представлен как конечная последовательность порождающих (с учетом бинарной операции на группе). Порождающее множество группы также принято называть *системой образующих*.

Например, конечная аддитивная группа  $\mathbb{Z}_n$  целых чисел по модулю  $n$  порождается множеством всех ненулевых элементов  $\mathbb{Z}_n$ .

Конечная группа  $G$  называется *циклической*, если она может быть порождена одним элементом  $g$ , т.е. элементы группы являются степенями  $g$  (или, если использовать аддитивную терминологию, представимы в виде  $ng$ , где  $n$  - целое число). Например, элементы циклической группы порядка три могут быть записаны в виде:  $g, g^2, e, g, g^2, e, \dots$ , где  $e = g^0$ .

Две группы  $G$  и  $H$  с бинарными операциями  $\circ$  и  $*$  являются *изоморфными*, если имеется взаимно однозначное отображение  $\varphi$  группы  $G$  в группу  $H$  такое, что при этом сохраняется бинарная операция, т.е. образ произведения равняется произведению образов  $\varphi(f * g) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$ . Например, каждая конечная циклическая группа изоморфна группе  $\mathbb{Z}_n$ .

*Диэдральная группа* (группа диэдра)  $D_m$  состоит из  $2m$  элементов,  $m$  из которых являются поворотами на  $2\pi k/m$ ,  $0 \leq k < m$ , а другие  $m$  есть симметрии относительно прямых, соединяющих вершины  $m$ -угольника и середины его сторон с его центром. Порождающее множество диэдральной группы  $D_m$  состоит из двух преобразований: поворота на угол  $2\pi/m$  и любой из симметрий. Таким образом, группа  $D_m$  порождается вращениями и отражениями правильного  $m$ -многоугольника.

Рассмотрим еще два примера групп на перестановках и помеченных перестановках.

### 1.1.1 Симметрическая группа $Sym_n$

*Перестановкой*  $\pi$  на множестве  $X = \{1, \dots, n\}$  называется взаимно однозначное отображение множества  $X$  на себя. Будем записывать перестановку  $\pi$  в одну строку в виде  $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$ , где  $\pi_i = \pi(i)$  является образом  $i$ -го элемента для всех  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Произведением двух перестановок  $\pi \circ \sigma$  является перестановка, которая получается применением перестановки  $\sigma$ , а затем перестановки  $\pi$ . Эта операция также называется композицией отображения, а порядок умножения соответствует порядку записи композиции функций:  $(\pi \circ \sigma)(i) = (\pi(\sigma(i)))$ .

Группа  $Sym_n$  всех перестановок на множестве  $\{1, \dots, n\}$ , называется *симметрической группой* порядка  $|Sym_n| = n!$ . Бинарной операцией на этой группе является операция произведения перестановок, а единичный элемент соответствует тождественной перестановке  $I = [1, 2, \dots, \pi_n]$ . Обратным элементом любой перестановки является обратная к ней. Симметрическая группа некоммукативна при  $n \geq 3$ . Легко убедиться, что  $[231] \circ [132] = [213] \neq [321] = [132] \circ [231]$ .

Симметрическая группа  $Sym_n$  порождается различными системами образующих, в частности, транспозициями  $(i, i + 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , двух соседних элементов. Множество  $S = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n - 1, n)\}$  известно как  $(n - 1)$ -множество Коксетера, порождающее  $Sym_n$ . Оно играет важную роль в комбинаторике групп Коксетера (более детально см. [14]).



### 1.1.2 Гипероктаэдральная группа $B_n$

*Гипероктаэдральная группа (a hyperoctahedral group)  $B_n$*  является важным типом групп, реализующих симметрии гиперкуба и задающихся его размерностью  $n$ . Существует несколько способов описания этой группы, первое из которых было предложено Янгом [58] в 1930г. Им же было предложено и название самой группы.

Мы приводим представление этой группы через симметрическую группу. *Помеченная симметрическая группа (the signed symmetric group)  $B_n$*  определяется как группа всех перестановок  $\pi^\sigma$ , действующих на множестве  $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$  так, что  $\pi^\sigma(-i) = -\pi^\sigma(i)$  для всех  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Элемент группы  $B_n$  является *помеченной перестановкой*, т.е. перестановкой с прикрепленным к каждому элементу знаком  $+$  или  $-$ .

Таким образом, помеченная перестановка характеризуется следующими данными:

- элементами  $|\pi(|i|)|$ , переставляющими  $\{1, \dots, n\}$
- знаком  $\pi^\sigma(i)$  для всех  $1 \leq i \leq n$ .

Имеется взаимно однозначное отображение между группой  $B_n$  и группой  $\mathbb{Z}_2 \wr Sym_n$ , являющейся веночным произведением (*wreath product*) знакопеременной циклической группы  $\mathbb{Z}_2$  с симметрической группой  $Sym_n$ , что дает нам  $|B_n| = 2^n n!$ .

Сохраняющее порядок отображение между  $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$  и  $\{1, \dots, n\}$  дает вложение группы  $B_n$  в симметрическую группу  $Sym_{2n}$ , при этом  $\pi(2n + 1 - i) = 2n + 1 - \pi(i)$ .

Группа  $B_n$  с порождающим множеством  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ , где порождающие элементы представлены транспозициями  $s_0 = (1, -1)$  и  $s_i = (i, i+1)(-i, -i-1)$  для каждого  $1 \leq i \leq n-1$ , является классической группой Коксетера типа  $B$  (см. [14]).

Для помеченных перестановок  $\pi^\sigma$  мы также будем использовать их компактную запись в одну строку в виде  $[\pi_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_i, \dots, \pi_n]$ , где верхнее подчеркивание элемента означает, что он имеет отрицательный знак.

Помеченные перестановки играют важную роль задачах на графах Кэли, возникающих в биоинформатике, в частности, в задачах сортировки реверсалами, которые будут рассмотрены в Главе 4.

## 1.2 Графы

*Граф*  $\Gamma = (V, E)$  состоит из конечного непустого множества  $V$  вершин и множества  $E$  ребер (неупорядоченных пар различных вершин). *Порядок* графа определяется мощностью его множества вершин. Любые две вершины являются *смежными*, если они принадлежат одному ребру. *Степенью* вершины называется число инцидентных ей ребер.

Граф является *связным*, если между любой парой вершин этого графа существует, по крайней мере, один путь, связывающий их.

Два графа  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  *изоморфны*,  $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ , если между их множествами вершин существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность.

В *полном* графе  $K_n$  каждая пара его  $n$  вершин смежна. В *полном двудольном* графе  $K_{p,q}$  с  $p$  и  $q$  вершинами в каждой доле все вершины одной доли смежны со всеми вершинами другой доли, но не смежны внутри долей. *Цикл* на  $n$  вершинах принято обозначать  $C_n$ .

### 1.2.1 Регулярные и транзитивные графы

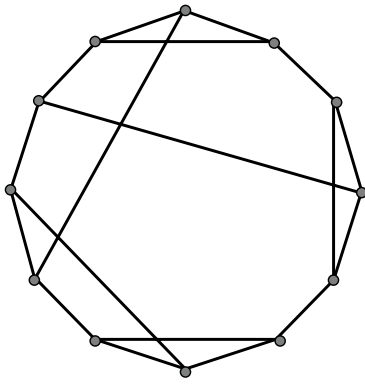
Граф  $\Gamma$  называется *регулярным степени  $k$* , если каждая его вершина имеет степень  $k$ . Регулярный граф степени три называется *кубическим*.

*Аutomорфизмом* графа  $\Gamma$  называется отображение  $\alpha$  множества вершин на себя, сохраняющее смежность, т.е. если  $\{u, v\}$  является ребром  $\Gamma$ , то и  $\{\alpha(u), \alpha(v)\}$  является ребром  $\Gamma$ . Очевидно, что автоморфизм переводит друг в друга только вершины, имеющие одинаковые степени. Множество таких автоморфизмов образует *вершинную группу графа* или просто группу графа. Группа подстановок на множестве ребер называется *реберной группой графа*.

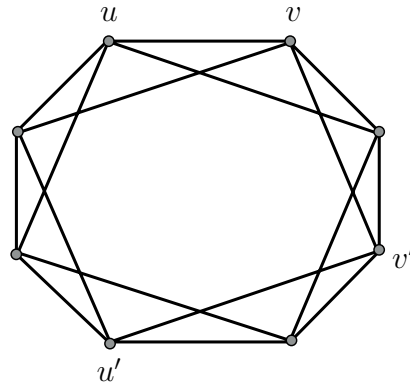
Граф  $\Gamma$  называется *вершинно-транзитивным*, если для любых двух вершин  $u, v \in V(\Gamma)$  существует автоморфизм  $\alpha$ , при котором  $\alpha(u) = v$ .

Всякий вершинно-транзитивный граф является регулярным. Однако, не всякий регулярный граф является вершинно-транзитивным. Например, граф Фрухта (Frucht graph), изображенный на Рисунке 1.

Граф  $\Gamma$  называется *реберно-транзитивным*, если для любой пары ребер  $x, y \in E(\Gamma)$  существует автоморфизм  $\alpha$ , при котором  $\alpha(x) = y$ .



Граф Фрухта



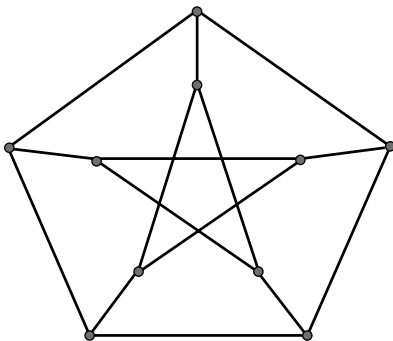
Г

Рисунок 1. Граф Фрухта: регулярный, но не вершинно-транзитивный.  
Граф Г: вершинно-транзитивный, но не реберно-транзитивный.

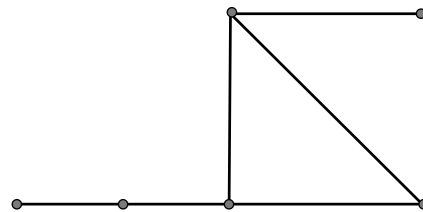
Эти свойства не являются взаимозаменяющими, поскольку имеются вершинно-транзитивные графы, не являющиеся реберно-транзитивными, и наоборот. На Рисунке 1 представлен вершинно-транзитивный граф, не являющийся реберно-транзитивным, поскольку между ребрами  $\{u, v\}$  и  $\{u', v'\}$  не существует нужного автоморфизма.

Полный двудольный граф  $K_{p,q}$ , где  $p \neq q$ , является примером реберно-транзитивного, но не вершинно-транзитивного графа.

На Рисунке 2 представлен граф Петерсона, являющийся одновременно вершинно- и реберно-транзитивным, и граф, не обладающий ни одним из этих свойств.



Граф Петерсона



Граф Г

Рисунок 2. Вершинно- и реберно-транзитивный граф Петерсона;  
граф Г, не обладающий ни одним из этих свойств

### 1.2.2 Дистанционно-регулярные и -транзитивные графы

Под *расстоянием*  $d(u, v)$  между вершинами  $u, v$  в графе  $\Gamma = (V, E)$  понимается длина кратчайшей цепи, связывающей эти две вершины. *Диаметром*  $d(\Gamma)$  графа  $\Gamma$  называется расстояние между двумя наиболее удаленными вершинами в графе, т.е.  $d(\Gamma) = \max\{d(u, v) : u, v \in V\}$ .

*Метрической сферой* радиуса  $i$  с центром в вершине  $v \in V(\Gamma)$  называют множество

$$S_i(v) = \{u \in V(\Gamma) : d(v, u) = i\}.$$

Вершины множества  $S_i(v)$  являются  $i$ -*окрестностью* вершины  $v \in V(\Gamma)$ . Представление графа в виде разбиения на  $i$ -окрестности относительно некоторой вершины называют *словым* представлением графа.

Пусть  $v \in V(\Gamma), u \in S_i(v)$ . Введем следующее обозначение:

$$c_i = c_i(v, u) = |\{x \in S_{i-1}(v) : d(x, u) = 1\}|,$$

$$a_i = a_i(v, u) = |\{x \in S_i(v) : d(x, u) = 1\}|,$$

$$b_i = b_i(v, u) = |\{x \in S_{i+1}(v) : d(x, u) = 1\}|.$$

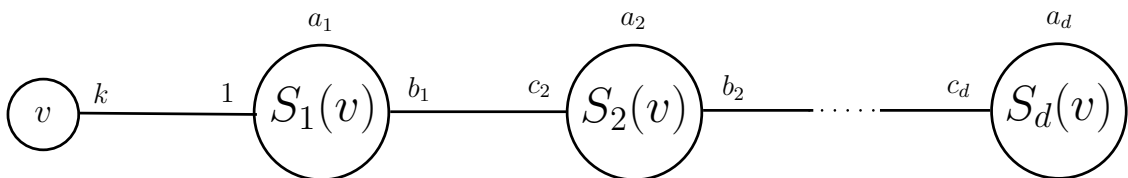
Очевидно, что в  $k$ -регулярном графе  $a_0 = 0, c_0 = 0, b_0 = k, b_d = 0, c_1 = 1$  и  $a_i + b_i + c_i = k$  для любого  $i = 0, 1, \dots, d$ , где  $d = d(\Gamma)$ .

Связный  $k$ -регулярный граф  $\Gamma$  диаметра  $d$  называется *дистанционно-регулярным* с массивом пересечений

$$\{b_0 = k, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1 = 1, c_2, \dots, c_d\},$$

если для любого  $i = 0, 1, \dots, d$  параметры  $b_i, c_i$  не зависят от выбора пары вершин  $u, v \in V(\Gamma)$  таких, что  $d(u, v) = i$ .

Схематическое представление массива пересечений дистанционно-регулярного графа выглядит следующим образом:



Примеры дистанционно–регулярных графов:

- полный граф  $K_n$  с массивом пересечений  $\{n - 1; 1\}$ ;
- граф Петерсона с массивом пересечений  $\{3, 2; 1, 1\}$ ;
- полный двудольный граф  $K_{3,3}$  с массивом пересечений  $\{3, 2; 1, 3\}$ .

Дистанционно–регулярный граф диаметра  $d = 2$  называется *сильно–регулярным*. Говорят, что сильно–регулярный граф имеет параметры  $(v, k, \lambda, \mu)$ , где  $v$  - порядок графа,  $k$  - степень вершин,  $\lambda$  - число общих соседей у любых двух смежных вершин в графе,  $\mu$  - число общих соседей у любых двух несмежных в графе.

Примеры сильно–регулярных графов:

- цикл длины пять  $C_5$  с параметрами  $(5, 2, 0, 1)$ ;
- граф Петерсона с параметрами  $(10, 3, 0, 1)$ .

Связный граф  $\Gamma$  называется *дистанционно–транзитивным*, если для любых двух пар произвольно выбранных вершин  $(v, u)$  и  $(v', u')$ , находящихся на одном и том же расстоянии  $d(v, u) = d(v', u')$ , существует автоморфизм  $\sigma$  в графе  $\Gamma$  такой, что  $\sigma(v) = v'$  и  $\sigma(u) = u'$ .

Примеры дистанционно–транзитивных графов:

- полный граф  $K_n$ ;
- цикл  $C_n$ ;
- граф Петерсона;

Следующее утверждение является очевидным.

**Утверждение 1.2.1** *Любой дистанционно–транзитивный граф является вершинно–транзитивным.*

Однако, обратное не всегда верно. Существуют вершинно–транзитивные графы, которые не являются дистанционно–транзитивными.

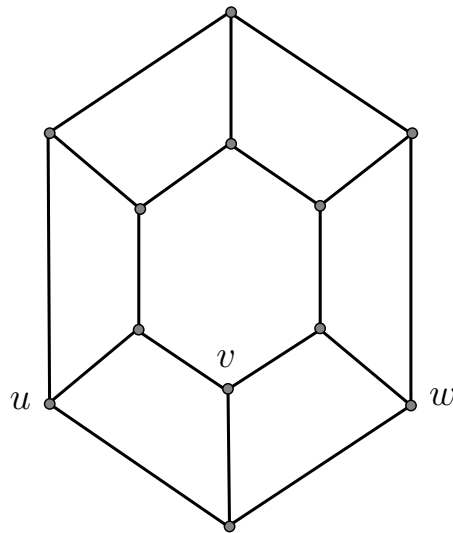


Рисунок 3. Циклическая 6–лестница  $L_6$

Например, циклическая 6–лестница  $L_6$  на Рисунке 3 является вершинно–транзитивным графом: его можно вращать и отражать относительно осей симметрии на плоскости. Однако, этот граф не является дистанционно–транзитивным, поскольку для вершин  $u, v$  и  $u, w$  таких, что  $d(u, v) = d(u, w) = 2$  верно следующее: между вершинами  $u, v$  имеется два пути длины два, тогда как для вершин  $u, w$  такой путь в графе только один.

Еще одно очевидное утверждение.

**Утверждение 1.2.2** *Любой дистанционно–транзитивный граф является дистанционно–регулярным.*

Однако, обратное не всегда верно. Наименьшим дистанционно–регулярным графом, не являющимся дистанционно–транзитивным является граф Шриханде (см. Рисунок 4), найденный С.С. Шриханде в 1959 [56] и обладающий следующими свойствами:

- 6–регулярный с 16 вершинами и 48 ребрами диаметра два;
- сильно–регулярный с параметрами  $(16, 6, 2, 2)$ .

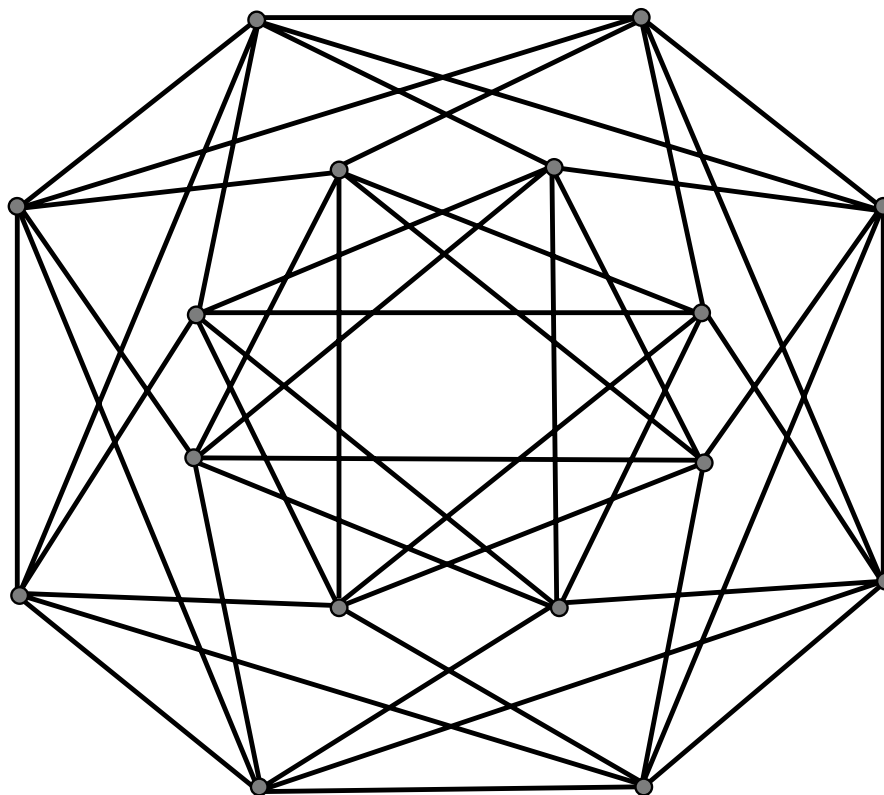


Рисунок 4. Граф Шриханде: дистанционно-регулярный, но не дистанционно-транзитивный

## 1.3 Графы Кэли

Рассмотрим конечную группу  $G$  с порождающим множеством  $S \subset G$ .

Множество  $S$  является *свободным от единичного элемента* (*identity free*), если  $I \notin S$ , и является *симметричным* (*symmetric*), если из  $s \in S$  следует  $s^{-1} \in S$ , т.е. для всякого порождающего элемента обратный к этому элементу также содержится в порождающем множестве. Последнее условие записывается как  $S = S^{-1}$ , где  $S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$ .

В *графе Кэли* (*Cayley graph*)  $\Gamma = \text{Cay}(G, S) = (V, E)$  вершины соответствуют элементам группы, т.е.  $V = G$ , а ребра соответствуют умножению элемента группы справа на элемент порождающего множества, т.е.  $E = \{g, gs\} : g \in G, s \in S\}$ .

Поскольку  $S$  является свободным от единичного элемента, следовательно, граф  $\Gamma$  не содержит петель.

Симметричность порождающего множества означает, что граф является неориентированным и без кратных ребер, т.е. если в графе имеется ребро из  $g$  в  $gs$ , то следовательно, оно совпадет с ребром из  $gs$  в  $(gs)s^{-1} = g$ .

### 1.3.1 Простейшие примеры графов Кэли

1. Полный граф  $K_n$  является графом Кэли на конечной аддитивной группе  $\mathbb{Z}_n$  целых чисел по модулю  $n$ , порожденной множеством всех ненулевых элементов  $\mathbb{Z}_n$ .
2. Цикл  $C_n$  длины  $n$  является другим примером графа Кэли на конечной циклической группе  $\mathbb{Z}_n$  порядка  $n$ , порождающее множество которого состоит из двух элементов.
3. Цикл  $C_6$  длины 6 является примером графа Кэли на симметрической группе  $Sym_3$  с порождающим множеством транспозиций  $t = \{(12), (13)\}$ .
4. Полный двудольный граф  $K_{3,3}$  является графом Кэли на симметрической группе  $Sym_3$  с порождающим множеством всех транспозиций  $T = \{(12), (23), (13)\}$  на множестве  $\{1, 2, 3\}$ . На Рисунке 5 представлен граф Кэли  $T_3 = \text{Cay}(Sym_3, T)$ , изоморфный  $K_{3,3}$ .



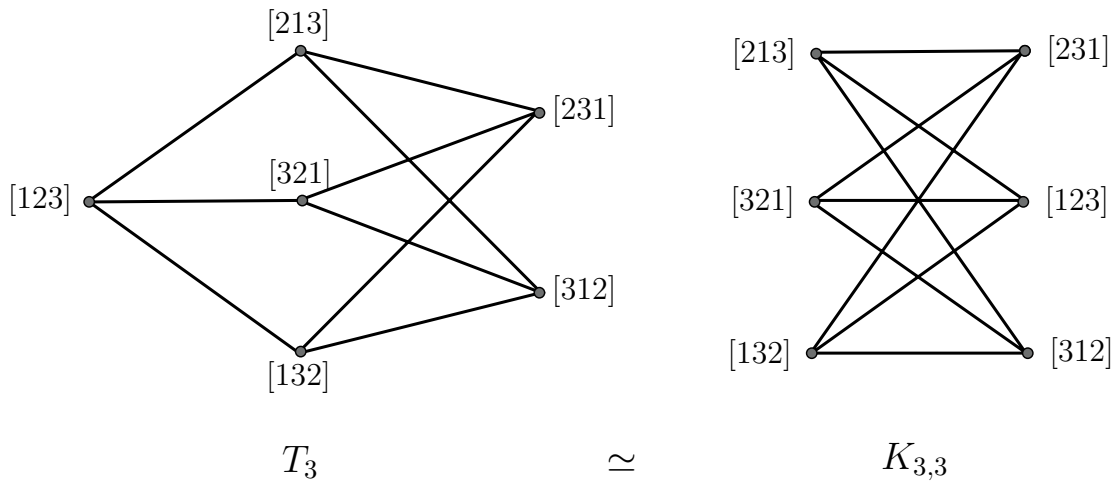


Рисунок 5. Граф Кэли  $T_3$ , изоморфный графу  $K_{3,3}$

### 1.3.2 Основные свойства графов Кэли

**Утверждение 1.3.1** Пусть  $S$  есть порождающее множество группы  $G$ . Тогда граф Кэли  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$  является:

- (i) связным  $S$ -регулярным графом;
- (ii) вершинно-транзитивным графом.

*Доказательство.* (i) Поскольку  $S$  является порождающим множеством, следовательно,  $\Gamma$  является связным, а поскольку  $S$  является симметричным, следовательно, каждая вершина в графе  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$  имеет степень равную  $|S|$ , т.е. граф  $\Gamma$  является  $S$ -регулярным.

(ii) Граф Кэли является вершинно-транзитивным, поскольку отображение  $\alpha_g : v \mapsto vg$  является автоморфизмом для любой вершины графа  $\Gamma$ . В самом деле, поскольку  $(ug)(vg)^{-1} = ugg^{-1}v^{-1} = uv^{-1}$ , следовательно, вершина  $vg$  смежна с вершиной  $ug$  тогда и только тогда, когда вершина  $v$  смежна с вершиной  $u$ . Таким образом, автоморфизм  $\alpha_{v^{-1}u}$  переводит  $v$  в  $u$ .  $\square$

Верно также следующее утверждение.

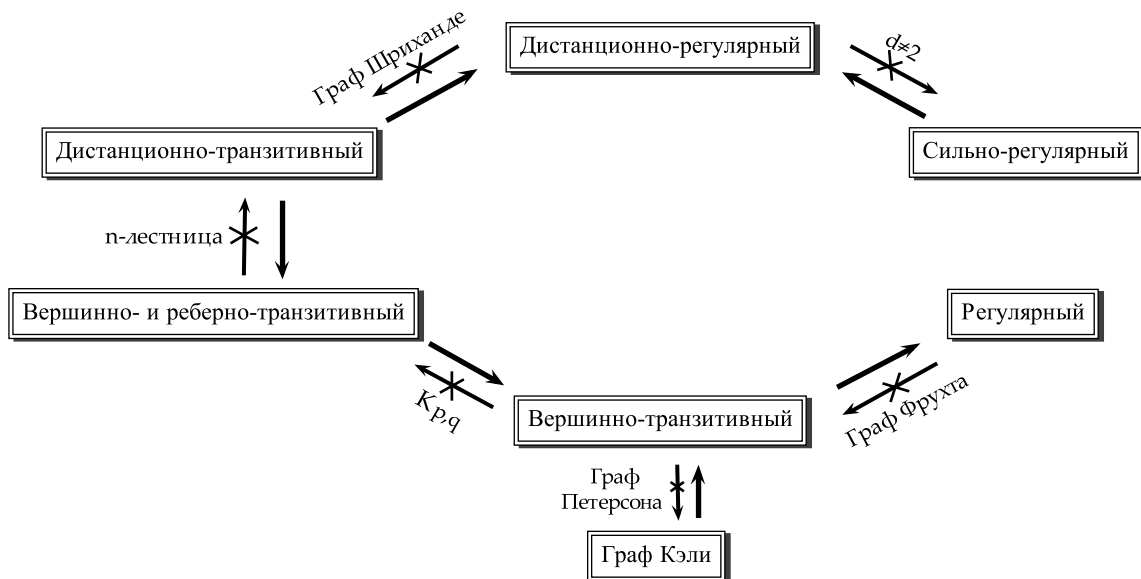
**Утверждение 1.3.2** Не каждый вершинно-транзитивный граф является графом Кэли.

*Доказательство.* Простейшим примером служит граф Петерсона, который является вершинно-транзитивным, но не является графом Кэли.

В самом деле, граф Петерсона является кубическим (3-регулярным) графом порядка 10 и диаметра 2 (см. Рисунок 2). Предположим, что граф Петерсона изоморфен некоторому графу Кэли  $Cay(G, S)$ . Тогда группа  $G$  должна быть группой порядка 10, а мощность порождающего множества  $S$  должна быть равна трем. Имеется ровно две неизоморфные группы порядка 10, а именно, диэдральная группа  $D_5$  и аддитивная группа  $\mathbb{Z}_{10}$ . Проверая все трехэлементные порождающие множества  $S$ , свободные от единичного элемента и симметричные, оказывается, что во всех случаях диаметр получаемого графа Кэли будет больше двух. В частности, в случае аддитивной группы  $\mathbb{Z}_{10}$  имеется ровно четыре трехэлементных порождающих множества:  $\{1, 9, 5\}$ ,  $\{2, 8, 5\}$ ,  $\{3, 7, 5\}$ ,  $\{4, 6, 5\}$ , для каждого из которых мы не получим граф диаметра 2.  $\square$

Идея этого доказательства принадлежит Бигсу [13].

Таким образом, схематически связь между различными типами регулярных и транзитивных графов, а также их связь с графами Кэли, можно представить следующим образом:



Приведем три примера дистанционно–транзитивных графов, один из которых является графом Кэли, другой - не является таковым, в целом, а третий - является графом Кэли только при определенных условиях.

### 1.3.3 Граф Хэмминга: дистанционно–транзитивный граф Кэли

Рассмотрим пространство Хэмминга  $F_q^n$ , состоящее из  $q^n$  векторов (слов) длины  $n$  над алфавитом  $\{0, 1, \dots, q - 1\}$ ,  $q \geq 2$ . В этом пространстве определена метрика Хэмминга  $d(x, y)$ , равная числу позиций, в которых  $x$  и  $y$  различны.

Граф Хэмминга  $L_n(q)$  определяется как граф с множеством вершин, соответствующих элементам пространства Хэмминга, при этом ребро  $\{x, y\}$  имеется в графе тогда и только тогда, когда  $d(x, y) = 1$ . Граф Хэмминга можно также определить, как декартово произведение  $n$  полных графов  $K_q$ .

Граф Хэмминга  $L_n(q)$  обладает следующими свойствами:

1. диаметр  $L_n(q)$  равен  $n$ ;
2.  $L_n(q)$  является дистанционно–транзитивным;
3.  $L_n(q)$  является графом Кэли на аддитивной группе  $F_q^n$  с порождающим множеством  $S = \{xe_i : x \in (F_q)^\times, 1 \leq i \leq n\}$ , где  $(F_q)^\times$  является декартовым произведением  $F_q$  (поле из  $q$  элементов), а  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  - стандартным базисом векторов  $F_q^n$ .
4.  $L_n(q)$  является дистанционно–регулярным; его массив пересечений задается  $b_j = (n - j)(q - 1)$  и  $c_j = j$  для  $0 \leq j \leq n$ ;

Заметим, что  $L_n(1) \cong K_1$ , а  $L_1(q) \cong K_q$ .

Если  $q = 2$ , то граф Хэмминга  $L_n(2)$  известен, как *гиперкуб*.

Если  $n = 2$ , то граф Хэмминга  $L_2(q)$  известен, как *решеточный граф* (the lattice graph). Этот граф является сильно–регулярным с параметрами  $|V(L_2(q))| = q^2$ ,  $k = 2(q - 1)$ ,  $\lambda = q - 2$ ,  $\mu = 2$ . Решеточный граф  $L_2(3)$  представлен на Рисунке 6.

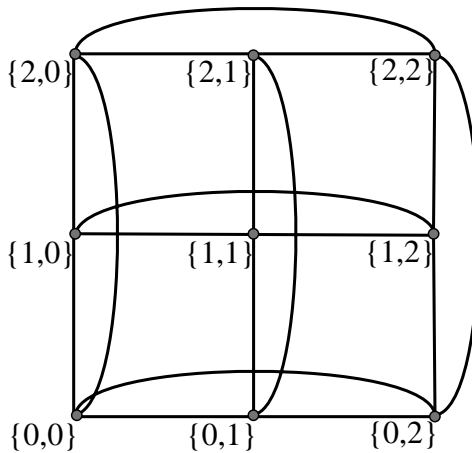


Рисунок 6. Решеточный граф  $L_2(3)$

### 1.3.4 Граф Джонсона: дистанционно–транзитивный граф, не являющийся графом Кэли

Графом Джонсона  $J(n, m)$  называется граф, вершинами которого являются  $m$ -подмножества данного  $n$ -множества  $X$ , и вершины  $x, y$  смежны тогда и только тогда, когда они пересекаются на  $(m - 1)$ -множествах.

Граф Джонсона  $J(n, m)$  обладает следующими свойствами:

1. диаметр  $d = d(J(n, m))$  графа  $J(n, m)$  равен  $\min(m, n - m)$ ;
2.  $J(n, m)$  является дистанционно–транзитивным;
3.  $J(n, m)$  не является графом Кэли (при  $m > 2$ );
4.  $J(n, m)$  является дистанционно–регулярным; его массив пересечений задается  $b_j = (m - j)(n - m - j)$  и  $c_j = j^2$  для  $0 \leq j \leq d$ ;

Заметим, что  $J(n, 1) \cong K_n$ , т.е. является графом Кэли (см. 1.3.1).

При  $m = 2$  и  $n \geq 4$  граф Джонсона называется *треугольным графом*  $T(n)$  (the triangular graph). Его вершинами являются двухэлементные подмножества  $n$ -множества и две вершины являются смежными тогда и только тогда, когда имеется пересечение по одному элементу. Этот граф является сильно–регулярным с параметрами  $|V(T(n))| = \frac{n(n-1)}{2}$ ,  $k = 2(n - 2)$ ,  $\lambda = n - 2$ ,  $\mu = 4$ .

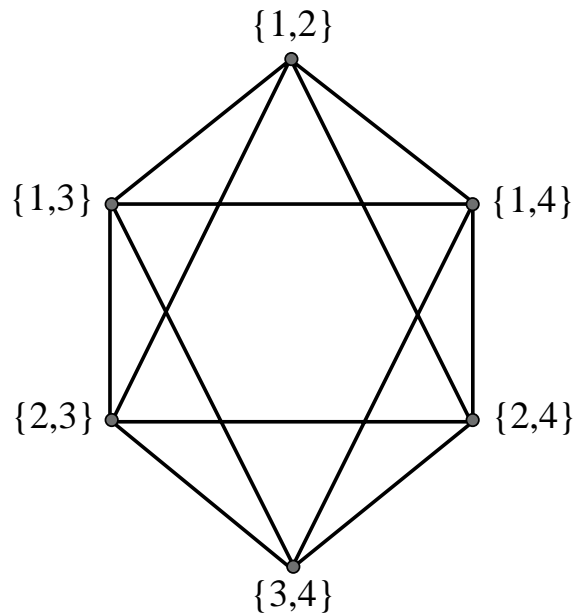


Рисунок 7. Треугольный граф  $T(4)$

На Рисунке 7 представлен треугольный граф  $T(4)$ . Он является графом Кэли на конечной циклической группе  $\mathbb{Z}_6$  порядка 6, порождающее множество которого состоит из четырех элементов  $\{1, 2, 4, 5\}$ .

Граф Джонсона является примером *кодového графа* и широко используется в теории кодирования, наряду с графом Хэмминга.

### 1.3.5 Граф Кнезера: когда он является графом Кэли?

Граф Кнезера  $K(n, k)$ ,  $k \geq 2$ ,  $n \geq 2k + 1$ , определяется как граф, в котором вершины соответствуют  $k$ -элементным подмножествам множества  $\{1, \dots, n\}$ . Вершины в данном графе соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие подмножества не пересекаются.

Граф Кнезера  $K(n, k)$  обладает следующими свойствами:

1. диаметр графа  $K(n, k)$  равен  $\lceil \frac{k-1}{n-2k} + 1 \rceil$ ;
2.  $K(n, k)$  является вершинно- и реберно-транзитивным;
3.  $K(n, k)$  является  $\binom{n-k}{k}$ -регулярным графом;

4.  $K(n, k)$  не является, в общем, сильно-регулярным, поскольку различные пары несмежных вершин могут иметь различное количество общих соседей, что определяется размером пересечений соответствующих пар множеств.

Полный граф  $K_n$  на  $n$  вершинах является графом Кнезера  $K(n, 1)$ .

На Рисунке 8 представлен граф Кнезера  $K(5, 2)$ , который изоморфен графу Петерсона.

Следующее Утверждение дает нам условия на число  $k$ , при которых соответствующий граф Кнезера является графом Кэли.

**Утверждение 1.3.3** [25] *Граф Кнезера  $K(n, k)$  не является графом Кэли, за исключением следующих случаев:*

- (i)  $k = 2$ ,  $n$  является степенью простого числа и  $n \equiv 3 \pmod{4}$ ;
- (ii)  $k = 3$ ,  $n = 8$  или  $n = 32$ .

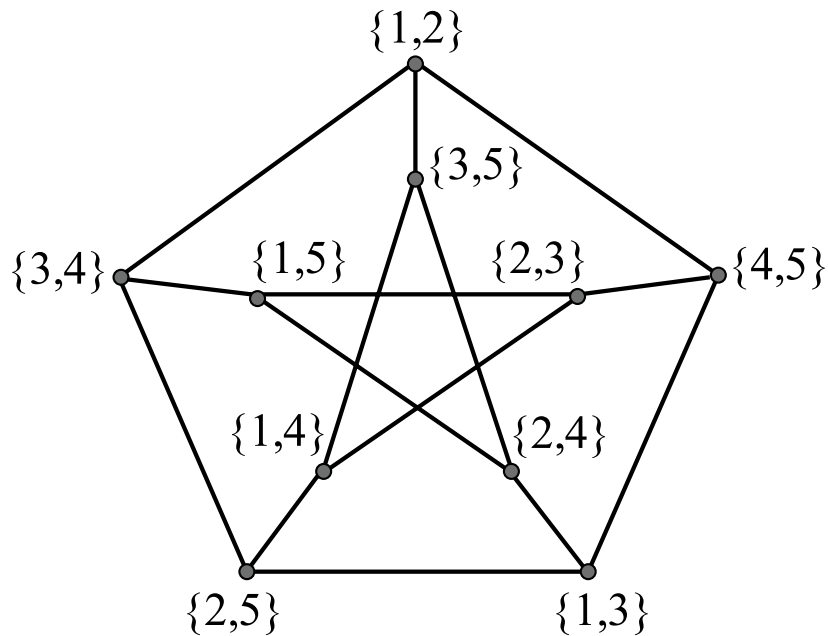


Рисунок 8. Кнезера  $K(5, 2)$ , изоморфный графу Петерсона.

### 1.3.6 Графы Кэли на симметрической группе $Sym_n$

В данном разделе представлены графы Кэли на симметрической группе  $Sym_n$ , используемые при решении прикладных задач в информатике, молекулярной биологии и биоинформатике.

Введем дополнительные понятия. Под *транспозицией*  $t_{ij}$  будем понимать перестановку, которая меняет позиции элементов  $i$  и  $j$  перестановки  $\pi = [\dots \pi_i \dots \pi_j \dots]$  при умножении на нее справа, т.е.

$$[\dots \pi_i \dots \pi_j \dots] \cdot t_{ij} = [\dots \pi_j \dots \pi_i \dots].$$

Под *реверсалом*  $r_{ij}$  понимается перестановка, меняющая порядок элементов внутри интервала  $[i, j]$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , перестановки  $\pi$  при умножении на нее справа, т.е.

$$[\dots \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1} \pi_j \dots] \cdot r_{ij} = [\dots \pi_j \pi_{j-1} \dots \pi_{i+1} \pi_i, \dots].$$

1. *Транспозиционный граф*  $T_n$  порождается транспозициями из множества  $T = \{t_{ij} \in Sym_n, 1 \leq i < j \leq n\}$ . Расстояние между вершинами в этом графе определяется, как наименьшее число транспозиций, переводящих одну перестановку в другую. Из свойств перестановок известно, что любой  $k$ -цикл может быть представлен, как произведение  $k-1$  транспозиций и не менее, т.е.  $n$ -цикл представим в виде произведения  $n-1$  транспозиций. Следовательно, диаметр данного графа есть  $n-1$ .

Транспозиционный граф  $T_n$ ,  $n \geq 3$ , имеет следующие свойства:

1. имеет порядок  $n!$  и диаметр  $n-1$ ;
2. является связным двудольным  $\binom{n}{2}$ -регулярным графом;
3. не содержит подграфы, изоморфные  $K_{2,4}$ ;
4. является реберно-транзитивным;
5. не является дистанционно-регулярным и, следовательно, не является дистанционно-транзитивным (при  $n > 3$ ).

Данный граф находит применение при решении задачи эффективного восстановления вершин по минимальному количеству вершин из заданной окрестности.

2. *Bubble-sort граф*  $BS_n$  порождается транспозициями из множества  $t = \{t_{i,i+1} \in Sym_n, 1 \leq i < n\}$ . Транспозиции  $t_{i,i+1}$  являются 2-циклами, меняющими позиции двух соседних элементов, и они хорошо известны как  $(n - 1)$ -множество Коксетера, порождающее симметрическую группу  $Sym_n$  [14]. Расстояние в графе определяется, как наименьшее число транспозиций данного типа, переводящих одну перестановку в другую.

Граф  $BS_n$ ,  $n \geq 3$ , обладает следующими свойствами:

1. имеет порядок  $n!$  и диаметр  $\binom{n}{2}$ ;
2. является связным двудольным  $(n - 1)$ -регулярным графом;
3. не содержит подграфы, изоморфные  $K_{2,3}$ ;
4. является реберно-транзитивным;
5. не является дистанционно-регулярным и, следовательно, не является дистанционно-транзитивным (при  $n > 3$ ).

Данный граф используется в теории компьютерных сетей для представления локальных сетей, а также в комбинаторике групп Коксетера.

3. *Star граф*  $S_n$  порождается транспозициями из множества  $st = \{t_{1i} \in Sym_n, 1 < i \leq n\}$ . Расстояние в графе определяется, как наименьшее число транспозиций данного типа, переводящих одну перестановку в другую. Диаметр данного графа вычисляется следующим образом:

$$diam(S_n) = \begin{cases} \frac{3(n-1)}{2}, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 1 + \frac{3(n-1)}{2}, & \text{если } n > 3 \text{ четное.} \end{cases}$$

Покажем, что это так. Пусть  $n$  является нечетным. Рассмотрим перестановку  $\pi = [1\ 3\ 2\ 5\ 4 \dots n\ n - 1]$ . Понятно, что при применении любой транспозиции из множества  $st$  к некоторой перестановке, единственный элемент перестановки меняет место (не считая первого). Легко показать, что для того, чтобы в перестановке  $\pi$  поставить элементы 3 и 2 на “правильное” место, потребуется, по крайней мере, три транспозиции для второго и третьего элементов. Поскольку всего в  $\pi$  таких пар  $\frac{(n-1)}{2}$ , следовательно, диаметр в этом случае равен  $\frac{3(n-1)}{2}$ .



Для четного  $n$  рассмотрим перестановку  $\tau = [2\ 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ \dots\ n\ n-1]$ . Мы можем за один шаг поставить на место элементы 2 и 1, но для оставшихся элементов вновь потребуется не менее трех операций, что дает нам значение диаметра равным  $1 + \frac{3(n-1)}{2}$  в этом случае.

Граф  $S_n$ ,  $n \geq 3$ , имеет следующие свойства:

1. имеет порядок  $n!$  и диаметр  $\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \rfloor$ ;
2. является связным двудольным  $(n-1)$ -регулярным графом;
3. не содержит циклы  $C_3, C_4, C_5, C_7$ ;
4. является реберно-транзитивным;
5. не является дистанционно-регулярным и, следовательно, не является дистанционно-транзитивным (при  $n > 3$ ).

Данный граф является одним из наиболее изученных в теории межкоммуникационных сетей, поскольку многие параллельные алгоритмы эффективно реализуются на архитектуре этого графа [29, 41].

4. *Реверсальный граф*  $R_n$  на симметрической группе порождается реверсалами из множества  $R = \{r_{ij} \in Sym_n, 1 \leq i < j \leq n\}$ . Расстояние в графе определяется, как наименьшее число реверсалов, переводящих одну перестановку в другую.

Реверсальный граф  $R_n$ ,  $n \geq 3$ , обладает следующими свойствами:

1. имеет порядок  $n!$  и диаметр  $n-1$ ;
2. является связным  $\binom{n}{2}$ -регулярным графом;
3. не содержит треугольники и подграфы, изоморфные  $K_{2,4}$ ;
4. не является реберно-транзитивным;
5. не является дистанционно-регулярным и, следовательно, не является дистанционно-транзитивным (при  $n > 3$ ).

Данный граф используется при решении задачи сортировки реверсалами, которая возникает в молекулярной биологии и будет рассмотрена в Главе 4, а также при решении задачи эффективного восстановления

вершин по минимальному количеству вершин из заданной окрестности, которая рассматривается в Главе 5.

5. *Рансаке граф*  $P_n$  порождается префикс–реверсалами из множества  $PR = \{r_{1,i} \in Sym_n, 1 < i \leq n\}$ . Расстояние в графе определяется, как наименьшее число префикс–реверсалов, переводящих одну перестановку в другую.

Рансаке граф  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , обладает следующими свойствами:

1. имеет порядок  $n!$ ;
2. является связным  $(n - 1)$ –регулярным графом;
3. не содержит циклы  $C_3, C_4, C_5$ ;
4. не является реберно–транзитивным;
5. не является дистанционно–регулярным и, следовательно, не является дистанционно–транзитивным (при  $n > 3$ ).

Данный граф широко известен в связи с нерешенной Рансаке problem [21], состоящей в определении диаметра этого графа. Эта задача будет представлена в Разделе 3.3 Главы 3. Кроме этого, Рансаке граф будет также рассмотрен в Разделе 2.6 Главы 2, как один из графов Кэли, для которых решена задача определения гамильтонова цикла.

### 1.3.7 Графы Кэли на гипероктаэдральной группе $B_n$

В данном разделе представлены графы Кэли на гипероктаэдральной группе  $B_n$ , используемые при решении прикладных задач в теории компьютерных сетей, информатике, молекулярной биологии и биоинформатике.

Введем дополнительные понятия. Под *знакопеременной транспозицией*  $t_{ij}^\sigma$ ,  $i \neq j$ , будем понимать перестановку, которая меняет позиции элементов  $i$  и  $j$  помеченной перестановки  $\pi^\sigma = [\dots, \pi_i, \dots, \bar{\pi}_j, \dots]$ , а также их знак при умножении на нее справа, т.е.

$$[\dots, \pi_i, \dots, \bar{\pi}_j, \dots] \cdot t_{ij}^\sigma = [\dots, \pi_j, \dots, \bar{\pi}_i, \dots],$$

а под *знакопеременной транспозицией*  $t_{ii}^\sigma$  будем понимать перестановку, которая меняет знак элемента  $i$  помеченной перестановки  $\pi^\sigma$  при умножении на нее справа, т.е.

$$[\dots, \pi_i, \dots] \cdot t_{ii}^\sigma = [\dots, \bar{\pi}_i, \dots].$$

Под *знакопеременным реверсалом*  $r_{ij}^\sigma$  понимается перестановка, меняющая порядок элементов внутри интервала  $[i, j]$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , перестановки  $\pi^\sigma$  вместе с изменением знака этих элементов при умножении на нее справа, т.е.

$$[\dots, \pi_i, \bar{\pi}_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, \pi_j, \dots] \cdot r_{ij}^\sigma = [\dots, \bar{\pi}_j, \bar{\pi}_{j-1}, \dots, \pi_{i+1}, \bar{\pi}_i, \dots].$$

При  $i = j$  будем считать, что  $r_{ii}^\sigma = t_{ii}^\sigma$ .

1. *Транспозиционный граф*  $BT_n$  на  $B_n$  порождается знакопеременными транспозициями из множества  $T^\sigma = \{t_{ij}^\sigma \in B_n, 1 \leq i < j \leq n\}$ . Расстояние между вершинами в этом графе определяется, как наименьшее число знакопеременных транспозиций, переводящих одну перестановку в другую.

Транспозиционный граф  $BT_n$ ,  $n \geq 2$ , имеет следующие свойства:

1. имеет порядок  $2^n n!$ ;
2. является связным двудольным  $\binom{n+1}{2}$ -регулярным графом;
3. не содержит подграфы, изоморфные  $K_{2,3}$ .

Данный граф используется в представлении компьютерных сетей [29].

2. *Реверсальный граф*  $BR_n$  порождается знакопеременными реверсалами из множества  $R^\sigma = \{r_{ij}^\sigma \in B_n, 1 \leq i < j \leq n\}$ . Расстояние в графе определяется, как наименьшее число знакопеременных реверсалов, переводящих одну перестановку в другую.

Граф  $BR_n$ ,  $n \geq 2$ , имеет следующие свойства:

1. имеет порядок  $2^n n!$  и диаметр  $n + 1$ ;
2. является связным  $\binom{n+1}{2}$ -регулярным графом;
3. не содержит треугольники и подграфы, изоморфные  $K_{2,3}$ ;

4. не является реберно–транзитивным;
5. не является дистанционно–регулярным и, следовательно, не является дистанционно–транзитивным (при  $n > 3$ ).

Данный граф используется при решении задачи сортировки реверсалами, которая возникает в молекулярной биологии и будет рассмотрена в Главе 4. Для этого графа также решена задача эффективного восстановления вершин по минимальному количеству вершин из заданной окрестности, которая будет рассмотрена в Главе 5.

3. *Burnt pancake graph*  $BP_n$  порождается знакопеременными префикс–реверсалами из множества  $PR^\sigma = \{r_{1i}^\sigma \in B_n, 1 \leq i \leq n\}$ , где префикс–реверсал  $r_{11}^\sigma$  меняет знак первого элемента помеченной перестановки. Расстояние в графе определяется, как наименьшее число знакопеременных префикс–реверсалов, переводящих одну перестановку в другую.

Граф  $BP_n$ ,  $n \geq 2$ , обладает следующими свойствами:

1. имеет порядок  $2^n n!$ ;
2. является связным  $n$ –регулярным графом;
3. не содержит треугольники и подграфы, изоморфные  $K_{2,3}$ ;
4. не является реберно–транзитивным;
5. не является дистанционно–регулярным и, следовательно, не является дистанционно–транзитивным (при  $n > 3$ ).

Данный граф известен в связи с открытой *Burnt Pancake problem* [16, 24], являющейся обобщением *Pancake problem* и состоящей в определении диаметра графа  $BP_n$ . Имеющиеся на сегодняшний день результаты по этой проблеме будут обсуждаться в Разделе 3.4 Главы 3. Решение задачи эффективного восстановления вершин по минимальному количеству вершин из заданной окрестности для данного графа приводится в Главе 5.

## Глава 2

# Гамильтоновость графов Кэли

Пусть  $\Gamma = (V, E)$  является связным графом. Путь, содержащий каждую вершину графа  $\Gamma$  ровно один раз, называется *гамильтоновым*. Гамильтонов путь, начальная и конечная вершины которого совпадают, называется *гамильтоновым циклом*. Граф называют *гамильтоновым*, если в нем содержится гамильтонов путь или гамильтонов цикл.

В настоящее время исследование гамильтоновости графов является одной из важных задач, решением которой занимаются специалисты в области теории графов и теории групп. Проверка гамильтоновости графа является одной из классических  $NP$ -полных проблем [23]. Гамильтоновы пути и гамильтоновы циклы играют также важную роль в теории компьютерных сетей [41, 29] и в комбинаторном дизайне [43, 20]. Например, гамильтоновость гиперкуба  $L_2(q)$  напрямую связана с кодом Грея (см. [65]), который соответствует гамильтонову циклу в гиперкубе.

### 2.1 Гамильтоновость гиперкуба и код Грея

Гиперкуб  $H_n = L_n(2)$  является частным случаем графа Хэмминга, рассмотренного в параграфе 1.3.3. Вершинами гиперкуба являются  $2^n$  векторов длины  $n$ . Две вершины гиперкуба смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им векторы различаются ровно в одной позиции. Гиперкуб является  $n$ -регулярным графом диаметра  $n$  и его можно также представить, как декартово произведение  $n$  полных графов  $K_2$ .

Гиперкуб  $H_n$  является графом Кэли на группе  $\mathbb{Z}_2^n$  с порождающим множеством  $S = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i-1}), 0 \leq i \leq n-1\}$ , где  $|S| = n$ .

Гамильтоновость гиперкуба  $H_n$  легко показывается с применением  $n$ -разрядного двоичного кода Грея, который определяется как упорядоченная последовательность из  $2^n$   $n$ -разрядных двоичных кодовых слов, каждое из которых отличается от соседнего в одном разряде.

*Алгоритм построения двоичного кода Грея* основан на рекурсии и состоит из двух этапов.

1. Фиксируем нулевое значение старшей компоненты слова (вектора) и перебираем все наборы длины  $n - 1$  для оставшихся компонент.
2. Меняем значение старшей компоненты с 0 на 1. Перебираем наборы длины  $n - 1$  в обратном порядке.

Иными словами, код Грея представляет собой последовательность  $2^n$  векторов, записанных таким образом, что вторая его половина эквивалентна первой половине, записанной в обратном порядке, за исключением старшей компоненты, которая просто инвертируется. Если разделить каждую половинку еще раз пополам, то это свойство будет сохраняться для каждой половины половинок и т.д.

В связи с такой схемой построения двоичный код Грея также называют рефлексным или отражённым двоичным кодом.

Таким образом, при  $n = 2$  код Грея имеет вид:

$$00 \ 01 \mid 11 \ 10.$$

При  $n = 3$  код Грея строится следующим образом: его первая половина получается из кода Грея при  $n = 2$  приписыванием 0 в старшей компоненте, а его вторая половина строится в соответствии со вторым пунктом алгоритма:

$$000 \ 001 \ 011 \ 010 \mid 110 \ 111 \ 101 \ 100.$$

При  $n = 4$  код Грея имеет вид:

$$0000 \ 0001 \ 0011 \ 0010 \ 0110 \ 0111 \ 0101 \ 0100 \mid 1100 \ 1101 \ 1111 \ 1110 \ 1010 \ 1011 \ 1001 \ 1000.$$

Заметим, что последовательность полученных векторов задает множество вершин гиперкуба, а поскольку каждый вектор в коде Грея от-

личается от соседнего в одном разряде, то следовательно, эта последовательность соответствует гамильтонову пути в гиперкубе. С учетом того, что первый и последний вектора также отличаются ровно в одной позиции, следовательно, код Грея описывает гамильтонов цикл в гиперкубе.

На Рисунке 9 представлены гиперкубы  $H_2, H_3, H_4$  и их гамильтоновы циклы.

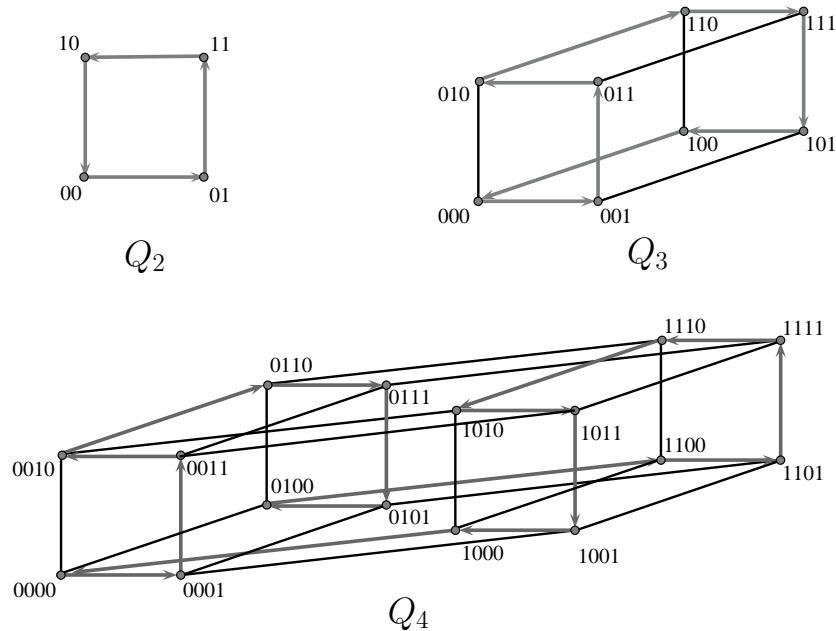


Рисунок 9. Гиперкубы  $H_2, H_3, H_4$  и их гамильтоновы циклы.

Теперь рассмотрим комбинаторные условия гамильтоновости графов Кэли, которые были получены еще в середине 20-го века.

## 2.2 Комбинаторные условия для гамильтоновости

Задача проверки гамильтоновости графа была впервые сформулирована сэром В.Р. Гамильтоном в 1850 г. (см. [26]). Первым результатом в решении задачи поиска гамильтонова цикла в графах Кэли является работа Раппопорт-Штраусс, написанная в 1959 [52]. Для конечной группы  $G$  с порождающим множеством  $S, |S| \leq 3$ , представленным инволюциями была доказана следующая теорема. Под *инволюцией* понимается элемент  $\alpha \in G$  такой, что  $\alpha^2 = 1$ .

**Теорема 2.2.1** [52] Пусть  $G$  является конечной группой, порожденной тремя инволюциями  $\alpha, \beta, \gamma$  такими, что  $\alpha\beta = \beta\alpha$ . Тогда граф Кэли  $\Gamma = \text{Cay}(G, \{\alpha, \beta, \gamma\})$  имеет гамильтонов цикл.

*Доказательство.* Для любого  $z \in G$  и любого  $X \subset G$  обозначим

$$\vartheta_z(X) = \{g \in G - X : g = xz, x \in X\}.$$

Обозначим через  $H = \langle \beta, \gamma \rangle$  подгруппу группы  $G$  порядка  $|H| = 2m$ , т.е. подмножество  $H$  является группой относительно операции, определённой в  $G$ .

Пусть  $X_1 = H$ . Поскольку  $H$  является диэдральной группой, то  $X_1$  содержит гамильтонов цикл следующего вида:

$$1 \rightarrow \beta \rightarrow \beta\gamma \rightarrow \beta\gamma\beta \rightarrow \dots \rightarrow (\beta\gamma)^{m-1}\beta \rightarrow (\beta\gamma)^m = 1 \quad (2.1)$$

Построим гамильтонов цикл в  $\Gamma$  по индукции. На шаге  $i$  мы получаем цикл, который покрывает вершины множества  $X_i \subset G$ . Более того, каждое множество  $X_i$  удовлетворяет следующему условию:  $\vartheta_\beta(X_i) = \vartheta_\gamma(X_i) = 0$ . Это эквивалентно тому, что каждое множество  $X_i$  является объединением левых классов смежности подгруппы  $H$  в  $G$ , где под левым классом смежности элемента  $g \in G$  по подгруппе  $H$  в  $G$  понимается множество  $gH = \{gh \mid h \in H\}$ . По определению  $\vartheta_\beta(X_1) = \vartheta_\gamma(X_1) = 0$ . Это дает нам базу индукции.

Теперь предположим, что  $X_i$  определено, как ранее. Тогда либо имеем  $\vartheta_\alpha(X_i) = 0$  и в этом случае цикл на всех вершинах множества  $X_i = G$  является искомым гамильтоновым циклом, либо найдется  $y \in \vartheta_\alpha(X_i) \subset G - X_i$ . Заметим, что  $yH \cap X_i = 0$ , поскольку иначе должно выполняться  $yh = x \in X_i$  для некоторого  $h \in H$ , что означает  $y = xh^{-1} \in X_i$ , поскольку  $h \in \langle \beta, \gamma \rangle$  и  $z\beta, z\gamma \in X$  для всех  $z \in X$ .

Пусть  $X_{i+1} = X_i \cup yH$ . Очевидно, что  $\vartheta_\beta(X_{i+1}) = \vartheta_\gamma(X_{i+1}) = 0$ . По индуктивному предположению,  $x = y\alpha \in X_i$  принадлежит некоторому циклу на всех вершинах  $X_i$ . Тогда  $x$  должна быть соединена с  $x\beta$  и  $x\gamma$ , поскольку  $x\alpha^{-1} = y \notin X_i$ . Рассмотрим цикл в  $yH$ , полученный умножением цикла, описанного (2.1), на  $y$ . Напомним, что по условию Теоремы  $\alpha\beta = \beta\alpha$ . Это означает, что  $x\beta\alpha = y\beta$ . Уберем ребра  $\{x; x\beta\}$  и  $\{y; y\beta\}$  из циклов в  $X_i$  и  $yH$ , а добавим ребра  $\{x; y\}$  и  $\{x\beta; y\beta\}$ . Это дает нам



цикл, который покрывает все вершины множества  $X_{i+1}$ , что завершает шаг индукции и доказательство.  $\square$

Конечные группы, порожденные двумя элементами, были рассмотрены Ранкиным [51] в 1966. Он получил следующий результат.

**Теорема 2.2.2** [51] Пусть  $G$  является конечной группой, порожденной двумя элементами  $\alpha, \beta$  такими, что  $(\alpha\beta)^2 = 1$ . Тогда граф Кэли  $\Gamma = \text{Cay}(G, \{\alpha, \beta\})$  имеет гамильтонов цикл.

*Доказательство.* Мы используем то же самое индукционное предположение, что и в Теореме 2.2.1. Кроме этого, нам понадобится некоторое дополнительное условие.

Пусть  $H = \langle \beta \rangle$ ,  $X_1 = H$  и предположим, что  $\vartheta_\alpha(X_i) = \vartheta_{\alpha^{-1}}(X_i) = 0$ . Мы также предположим по индукции, что в графе  $\Gamma$  имеется ориентированный гамильтонов цикл  $C_i$  на множестве  $X_i$ , который содержит только метки  $\beta$  и  $\alpha^{-1}$ . Будем называть это предположение *условием на метки*.

Базисом индукции является условие  $\vartheta_\alpha(X_1) = \vartheta_{\alpha^{-1}}(X_1) = 0$ .

В качестве шага индукции рассмотрим элемент  $y = x\alpha \in \vartheta_\alpha(X_i) - X_i$ . Заметим, что ребро, ориентированное к  $x \in X_i$  в цикле  $C_i$  не может иметь ни метку  $\alpha^{-1}$  (иначе имеем ребро  $\{y, x\}$ , в то время как  $y \notin X_i$ ), ни метки  $\alpha$  или  $\beta^{-1}$  (по условию на метки). следовательно, это ребро должно иметь метку  $\beta$  и ребро  $\{x\beta^{-1}, x\} \in C_i$ .

Теперь рассмотрим цикл  $R$  на  $yH$  с метками  $\beta$  на всех ребрах и заметим, что

$$x \rightarrow x\alpha = y \rightarrow x\alpha\beta = y\beta \rightarrow x\beta^{-1} = x\alpha\beta\alpha \rightarrow x$$

является квадратом, который соединяет  $R$  и  $C_i$ . Формально запишем это, как

$$C_{i+1} = C_i \cup R + \{x, y\} + \{y\beta, x\beta^{-1}\} - \{x\beta^{-1}, x\} - \{y, y\beta\}$$

и заметим, что  $C_i$  является гамильтоновым циклом на  $X_{i+1} = X_i \cup yH$ . Пусть  $C_{i+1}$  наследует ориентацию цикла  $C_i$  и убедимся в том, теперь цикл  $C_{i+1}$  удовлетворяет условию на метки в соответствии с этой ориентацией.

В случае, когда  $y = x\alpha^{-1} \notin X_i$ , рассмотрим ребро, выходящее из  $x \in X_i$  аналогично тому, как описано выше. Если  $\vartheta_\alpha(X_i) = \vartheta_{\alpha^{-1}}(X_i) = 0$ , то мы имеем  $X_i = G$ , что завершает доказательство.  $\square$

Обе Теоремы изложены в соответствии с доказательством, предложенным И. Паком и Р. Радоичичем [48], поскольку они будут использованы в Разделе 2.4 в доказательстве полученного ими результата по гамильтоновости графов Кэли для конечных групп с маленьким порождающим множеством.

## 2.3 Гипотезы Ловаса и Бабаи

В настоящее время исследование гамильтоновости графов является одной из важных задач, решением которой занимаются специалисты в области теории графов и теории групп. Гамильтоновы пути и гамильтоновы циклы играют также важную роль в теории компьютерных сетей [41, 29] и в комбинаторном дизайне [43, 20]. Например, гамильтоновость гиперкуба  $L_2(q)$  напрямую связана с кодом Грея (см. [65]), который соответствует гамильтонову циклу в гиперкубе. Проверка гамильтоновости графа является одной из классических  $NP$ -полных проблем [23].

К известнейшим проблемам в этой области относится задача гамильтоновости вершинно-транзитивных графов, поставленная Лади Ловасом в 1970 и сформулированная им в виде следующего вопроса.

**Проблема 2.3.1** *Всякий ли вершинно-транзитивный граф с более чем двумя вершинами имеет гамильтонов путь?*

На самом деле, исследовательская задача была сформулирована Ловасом для симметричных (вершинно-транзитивных) графов в следующем виде [45]:

*“ ... построить конечный связный неориентированный граф, являющийся симметричным и не содержащий простой путь на всех вершинах графа. Граф является симметричным, если для любых двух вершин  $x$  и  $y$  в графе имеется автоморфизм, переводящий  $x$  в  $y$ . ”*

В большинстве научных обзоров, посвященных исследованию гамильтоновости графов (например, см. [19]), эта проблема формулируется в утвердительном виде и рассматривается как гипотеза Ловаса.

**Гипотеза 2.3.1** (*Гипотеза Ловаса, L. Lovász, 1970*). *Всякий вершинно-транзитивный граф имеет гамильтонов путь*

При этом, оказалось, что имеется и противоположная точка зрения на эту проблему. В частности, Бабаи [8] высказал следующую гипотезу.

**Гипотеза 2.3.2** (*Гипотеза Бабаи, L. Babai, 1996*) *Для некоторого  $\varepsilon > 0$ , существует бесконечно много вершинно-транзитивных графов (и даже графов Кэли)  $\Gamma$ , не содержащих циклов длины  $\geq (1 - \varepsilon)|V(\Gamma)|$ .*

Единственный результат, полученный в этом направлении для вершинно-транзитивных графов Бабаи [4] в 1979 г., состоит в том, что вершинно-транзитивный граф с  $n$  вершинами имеет цикл длины  $\geq \sqrt{3n}$ . Очевидно, что это не дает ответа на его гипотезу.

На сегодняшний день неизвестно, имеются ли вершинно-транзитивные графы, не содержащие гамильтоновы пути.

Однако известно, что имеется четыре вершинно-транзитивных графа на более чем двух вершинах, которые имеют гамильтонов путь, но не имеют гамильтонова цикла: граф Петерсона, граф Коксетера (единственный кубический дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений  $\{3, 2, 2, 1; 1, 1, 1, 2\}$  на 28 вершинах и с 42 ребрами), представленный на Рисунке 10, а также два графа, которые получаются из графов Петерсона и Коксетера заменой каждой вершины треугольником с сохранением смежности вершин.

Было замечено, что ни один из таких графов не является графом Кэли, поэтому сразу несколько математиков сформулировали следующую гипотезу.

**Гипотеза 2.3.3** *Каждый граф Кэли на конечной группе имеет гамильтонов цикл.*

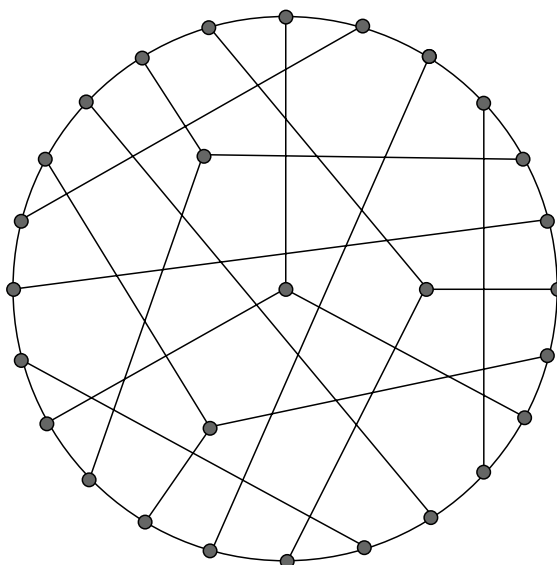


Рисунок 10. Граф Коксетера.

(единственный кубический дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений  $\{3, 2, 2, 1; 1, 1, 1, 2\}$  на 28 вершинах и с 42 ребрами).

Для последней гипотезы имеется несколько полученных на сегодняшний день результатов. В частности, в 1983 г. Д. Марусич [47] доказал, что граф Кэли на абелевой группе является гамильтоновым, а в 1986г. Д. Вайтом было доказано, что графы Кэли на  $p$ -группах являются гамильтоновыми, где под  $p$ -группой понимается группа, порядок которой равен некоторой степени простого числа. Альспах и Жанг в 1989 г. доказали, что всякий связный кубический граф Кэли на диэдральной группе является гамильтоновым [1].

Одним из последних и наиболее впечатляющих результатов является доказательство гамильтоновости графов Кэли на произвольной конечной группе с маленьким порождающим множеством, которое предлагается в следующем разделе.

## 2.4 Гамильтоновость графов Кэли на произвольной конечной группе

В 2009 г. И. Пак и Р. Радоичич [48] получили общий результат для конечных групп с маленьким порождающим множеством.

**Теорема 2.4.1** (Пак, Радичич, 2009) *Граф Кэли  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$  на конечной группе  $G$  порядка  $|G| > 3$  с порождающим множеством  $S$  размерности  $|S| \leq \log_2 |G|$  содержит гамильтонов цикл.*

Введем дополнительные понятия. Пусть  $G$  есть конечная группа порядка  $n$  и  $H \subset G$  является подгруппой группы  $G$ . Тогда *левым и правым смежными классами* группы  $G$  по подгруппе  $H$  называются множества  $gH = \{gh \mid h \in H\}$  и  $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ , где  $g \in G$  есть некоторый элемент. Всякий элемент из  $gH$  или  $Hg$  называется *представителем* этого смежного класса. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *нормальной* (пишут  $H \triangleleft G$ ), если ее левый и правый смежные классы совпадают, т.е.  $gH = Hg$  для любого  $g \in G$ . Группа называется *простой*, если ее нормальными подгруппами являются только тривиальная подгруппа, содержащая единичный элемент, и вся группа.

*Факторгруппой  $G/H$*  группы  $G$  по нормальной подгруппе  $H$  называют множество смежных классов подгруппы  $H$  с умножением, определяемым следующим образом:  $(aH) \cdot (bH) = (ab)H$ . Группа  $G$  может быть представлена в виде *композиционной серии*:

$$1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G,$$

где  $H_i$  является максимальной нормальной подгруппой  $H_{i+1}$  для всех  $0 \leq i \leq n$ . Факторгруппа  $H_{i+1}/H_i$  в таком представлении называется *композиционным фактором*.

Обозначим через  $l(G)$  число всех композиционных факторов группы  $G$ , при этом будем считать, что  $l(G) = r(G) + m(G)$ , где  $r(G)$  и  $m(G)$  есть число абелевых и неабелевых композиционных факторов.

Докажем несколько дополнительных утверждений.

**Утверждение 2.4.1** *Для конечной группы  $G$  с нормальной подгруппой  $H \triangleleft G$  предположим, что  $S = S_1 \cup S_2$  является порождающим множеством группы  $G$ , причем  $S_1 \subset H$  порождает  $H$ , а проекция  $S'_2$  множества  $S_2$  на факторгруппу  $G/H$  порождает  $G/H$ . Предположим также, что графы Кэли  $\Gamma_1 = \text{Cay}(H, S_1)$  и  $\Gamma_2 = \text{Cay}(G/H, S'_2)$  содержат гамильтоновы пути. Тогда граф Кэли  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$  также содержит гамильтонов путь.*

*Доказательство.* Пусть  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$  будет графом Кэли, содержащим гамильтонов путь. В силу вершинной транзитивности  $\Gamma$  гамильтонов путь может начинаться с любой вершины  $g \in G$ .

Пусть  $k = |G/H|$  есть порядок факторгруппы  $|G/H|$  и  $g_1 = 1 \in G$ . Рассмотрим гамильтонов путь в графе  $\Gamma_2 = \text{Cay}(G/H, S'_2)$ , он будет иметь вид:

$$H \rightarrow Hg_1 \rightarrow Hg_2 \rightarrow Hg_3 \rightarrow \dots \rightarrow Hg_k.$$

Далее применим ту же идею доказательства, что была использована в Теореме 2.2.1. Зафиксируем гамильтонов путь, начинающийся вершиной  $1 \in G$  в правом смежном классе  $Hg_1$ . Предположим, что конечной вершиной этого пути является вершина  $h_1g_1$ . Добавим к нему ребро  $\{h_1g_1, h_1g_2\}$  и рассмотрим гамильтонов путь в правом смежном классе  $Hg_2$ , начинающийся и заканчивающийся вершинами  $h_1g_2$  и  $h_2g_2$ , соответственно. Продолжаем эту процедуру, пока конечной вершиной не станет  $h_kg_k$ , что завершает построение гамильтонова пути в графе  $\Gamma$ .  $\square$

**Теорема 2.4.2** Пусть  $G$  является конечной группой с числами  $r(G)$  и  $t(G)$  ее абелевых и неабелевых композиционных факторов. Тогда найдется порождающее множество  $S$ ,  $|S| \leq r(G) + 2t(G)$ , группы  $G$  такое, что граф Кэли  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$  содержит гамильтонов путь.

*Доказательство.* Из классификации простых конечных групп следует, что любая неабелева конечная простая группа может быть порождена двумя элементами, один из которых является инволюцией. Следовательно, мы можем применить Теорему 2.2.2 и заключить, что граф Кэли для любой неабелевой конечной простой группы с порождающим множеством  $S$ ,  $|S| = 2$ , содержит гамильтонов цикл. Если группа  $G$  является циклической, то достаточно одного элемента в порождающем множестве.

Теперь воспользуемся Утверждением 2.4.1. Заметим, что в обозначении этого утверждения любое порождающее множество  $S'_2$  факторгруппы  $G/H$  может быть поднято до  $S_2 \subset G$ , где  $S = S_1 \cup S_2$  является порождающим множеством группы  $G$ . Более того, если  $H$  и  $G/H$  имеют порождающие множества размерности  $k_1$  и  $k_2$  и при этом соответствующие графы Кэли содержат гамильтоновы пути, то тогда  $G$  будет иметь порождающее множество размерности  $k_1 + k_2$ .

Теперь зафиксируем любую композиционную серию конечной группы  $G$ . Из Утверждения 2.4.1 следует, что мы можем построить порождающее множество размерности  $r(G) + 2m(G)$  и при этом соответствующий граф Кэли  $\Gamma = Cay(G, S)$  будет содержать гамильтонов путь, что завершает доказательство.  $\square$

Теперь докажем Теорему 2.4.1.

*Доказательство.* Доказательство Теоремы следует из Теоремы 2.4.2. В самом деле, зафиксируем некоторую композиционную серию группы  $G$ . Пусть  $r = r(G)$  и  $m = m(G)$ . Обозначим через  $K_1, \dots, K_r$  и  $L_1, \dots, L_m$  абелевы и неабелевы композиционные факторы группы  $G$ , соответственно. Поскольку наименьшая неабелева простая группа имеет порядок, равный 60, то  $|L_j| \geq 60 > 4$  для всех  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Имеем:

$$2^{r+2m} = 2^r \cdot 4^m \leq \prod_{i=1}^r |K_i| \cdot \prod_{j=1}^m |L_j| = |G|.$$

Следовательно,  $r(G) + 2m(G) \leq \log_2 |G|$ , где равенство достигается только для  $G \cong \mathbb{Z}_2^n$ , что дает нам гиперкуб, на котором гамильтонов цикл описывается кодом Грея. В других случаях остается только добавить к порождающему множеству еще один элемент группы, чтобы соединить концы гамильтонова пути, что дает нам гамильтонов цикл и завершает доказательство Теоремы.  $\square$

## 2.5 Гамильтоновость графов Кэли на симметрической группе

Имеется несколько результатов по гамильтоновости графов Кэли на симметрической группе. В частности, отметим два результата для графов Кэли, порожденных транспозициями. Первый был получен В.Л. Компельмахером и В.А. Лисковцом в 1975г. [63]. Они задавались следующим вопросом: "можно ли все перестановки заданной длины расположить так, чтобы каждая следующая получалась из предыдущей одной транспозицией из произвольного фиксированного базиса?"

Таким образом, этот вопрос можно рассматривать, как вопрос о существовании гамильтонова цикла в графе Кэли, порождающее множество которого представлено множеством транспозиций. Ответом на этот вопрос является следующий результат.

**Теорема 2.5.1** (Компельмахер, Лисковец, 1975) *Для любого порождающего множества  $S$ , представленного транспозициями, граф Кэли  $\text{Cay}(Sym_n, S)$  является гамильтоновым.*

Любой граф Кэли на симметрической группе, порожденный транспозициями, является двудольным, поскольку любая транспозиция переводит четную перестановку в нечетную, и наоборот. Следовательно, в одной доле будут все четные перестановки, а в другой - все нечетные. В 1982г. результат, полученный Компельмахером и Лисковцом был обобщен в следующем виде [57].

**Теорема 2.5.2** (Tchuente, 1982) *Если порождающее множество  $S$  симметрической группы  $Sym_n$  состоит из транспозиций, то в графе Кэли  $\text{Cay}(Sym_n, S)$  всегда найдется гамильтонов путь между любыми двумя вершинами разных долей графа.*

Таким образом, графы Кэли на симметрической группе, порожденной любыми множествами транспозиций, всегда гамильтоновы.

Независимо, в теории межкоммуникационных сетей были получены результаты для графов Кэли на симметрической группе с порождающим множеством, представленным заданным множеством транспозиций. В частности, в 1991 г. было показано, что гамильтоновыми являются Star граф  $S_n$  [32] и Bubble-sort граф  $BS_n$  [33]. В последней работе также показана гамильтоновость Рапсаке графа  $P_n$ . Первый результат о гамильтоновости этого графа был получен в 1984 г. Заксом [61].

Все эти частные результаты объединяет тот факт, что данные графы имеют иерархическую структуру, которая, с одной стороны, играет важную роль при разработке архитектуры компьютерных сетей, а с другой стороны, помогает находить простые и красивые алгоритмы для поиска гамильтонова цикла. В следующем разделе на примере Рапсаке графа опишем принцип его иерархического построения и приведем способ построения в нем гамильтонова цикла.



## 2.6 Гамильтоновость Рапсаке графа

Рапсаке граф  $P_n$  определяется на симметрической группе  $Sym_n$  перестановок  $\pi = [\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n]$ , где  $\pi_i = \pi(i)$  для любого  $i \in \{1, \dots, n\}$ , с порождающим множеством  $PR = \{r_i \in Sym_n, 2 \leq i \leq n\}$  всех префикс-реверсалов  $r_i$ , меняющих порядок элементов внутри интервала  $[1, i]$ ,  $2 \leq i \leq n$ , перестановки  $\pi$  при умножении на нее справа:  $[\pi_1 \dots \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_n] r_i = [\pi_i \dots \pi_1 \pi_{i+1} \dots \pi_n]$ .

Из Утверждения 1.3.1, в частности, следует, что данный граф является вершинно-транзитивным  $(n-1)$ -регулярным неориентированным графом без петель и кратных ребер порядка  $n!$ . Некоторые другие его свойства были представлены ранее в Разделе 1.1.1.

Кроме этого, граф  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , обладает иерархической структурой, а именно, он состоит из  $n$  копий  $P_{n-1}(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , в каждой из которых множество вершин представлено как

$$V_i = \{[\pi_1 \dots \pi_{n-1} i], \text{ где } \pi_k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}, 1 \leq k \leq n-1\},$$

$|V_i| = (n-1)!$ , а множество ребер представлено как

$$E_i = \{[\pi_1 \dots \pi_{n-1} i], [\pi_1 \dots \pi_{n-1} i] r_j\}, 2 \leq j \leq n-1\},$$

$$|E_i| = \frac{(n-1)!(n-2)}{2}.$$

Любые две копии  $P_{n-1}(i)$ ,  $P_{n-1}(j)$ ,  $i \neq j$ , соединяются  $(n-2)!$  ребрами вида  $\{[i \pi_2 \dots \pi_{n-1} j], [j \pi_{n-1} \dots \pi_2, i]\}$ , где

$$[i \pi_2 \dots \pi_{n-1} j] r_n = [j \pi_{n-1} \dots \pi_2 i].$$

Префикс-реверсалы  $r_j$ ,  $2 \leq j \leq n-1$ , определяют внутренние ребра в каждой из  $n$  копий  $P_{n-1}(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , а префикс-реверсал  $r_n$  определяет внешние ребра между копиями. Копии  $P_{n-1}(i)$  будем также называть  $(n-1)$ -копиями.

Всего в графе имеется  $|E_{ext}| = \frac{n!}{2}$  внешних ребер и  $|E_{int}| = n \frac{(n-1)!(n-2)}{2} = \frac{n!(n-2)}{2}$  внутренних ребер. Число вершин увеличивается при переходе от  $P_{n-1}$  к  $P_n$  в  $n$  раз, число ребер увеличивается в  $n \frac{n-1}{n-2}$  раз.

На Рисунке 11 показано иерархическое строение графов  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$ .

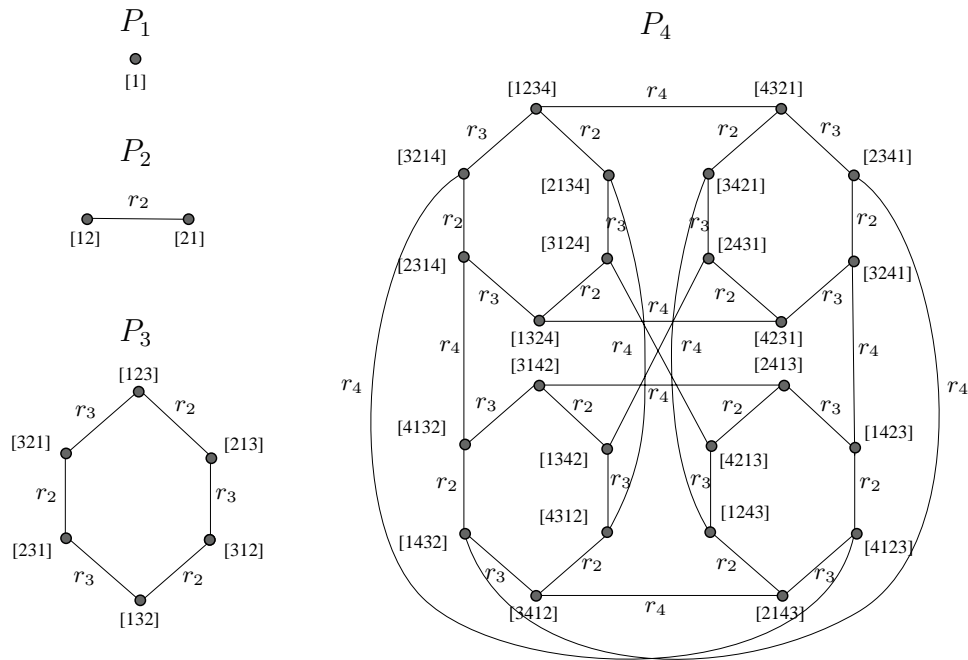


Рисунок 11. Иерархическое строение Раскаке графов  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$ .

**Теорема 2.6.1** *Раскаке граф  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , содержит гамильтонов цикл.*

*Доказательство.* Проведем индукцией по  $k$ , где под  $k$  будем понимать размерность графа  $P_k$ ,  $k \geq 3$ . При  $k = 3$  граф  $P_k$  представляет собой цикл длины 6. Очевидно, что он является гамильтоновым и может быть представлен следующим образом:  $[123] \xrightarrow{r_2} [213] \xrightarrow{r_3} [312] \xrightarrow{r_2} [132] \xrightarrow{r_3} [231] \xrightarrow{r_2} [321] \xrightarrow{r_3} [123]$ , при этом удаление последнего ребра в этом гамильтоновом цикле даст нам гамильтонов путь.

Предположим, что при  $k = n - 1$  утверждение теоремы выполнено. Докажем, что оно выполнено и при  $k = n$ . Построим гамильтонов цикл  $H_n$ , используя иерархическое строение графа. Начнем с вершины  $\pi_1 = I = [1 2 \dots (n - 1) n] \in P_{n-1}(n)$ . По предположению, в  $P_{n-1}(n)$  существует гамильтонов цикл  $H_{n-1}^n$ . Удалим из него ребро  $\{[1 2 \dots (n - 1) n], [(n - 1) \dots 2 1 n]\}$ , принадлежащее  $H_{n-1}^n$  по построению, и обозначим получившийся гамильтонов путь через  $L_{n-1}^n$ , где верхний индекс  $n$  обозначает номер копии. Вершина  $\pi_2 = [(n - 1) \dots 2 1 n]$  в графе  $P_{n-1}(n - 1)$  соединена внешним ребром с вершиной  $\pi_3 = [n 1 2 \dots (n - 2) (n - 1)]$ . Кроме этого, по предположению в нем существует гамильтонов цикл. Удалим из

него ребро  $\{[n\ 1\ 2\ \dots\ (n-2)\ (n-1)], [(n-2)\ \dots\ 1\ n\ (n-1)]\}$  и обозначим получившийся гамильтонов путь через  $L_{n-1}^{n-1}$ .

Далее, вершина  $\pi_4 = [(n-2)\ \dots\ 1\ n\ (n-1)]$  соединена внешним ребром с вершиной  $\pi_5 = [(n-1)\ n\ 1\ \dots\ (n-3)\ (n-2)]$  графа  $P_{n-1}(n-2)$ , в котором также имеется, по предположению, гамильтонов цикл. Используя рассуждения, приведенные выше, в этой копии, а также во всех остальных копиях  $P_{n-1}(j)$ ,  $1 \leq j \leq n-2$ , получим пути  $L_{n-1}^{n-2}, \dots, L_{n-1}^1$ , соединенные между собой внешними ребрами. Последний путь  $L_{n-1}^1$  заканчивается вершиной  $\pi_{2n} = [n\ (n-1)\ \dots\ 2\ 1]$ , имеющей внешнее ребро с вершиной  $\pi_1$  графа  $P_{n-1}(n)$ , с которой мы начинали построение (см. Рисунок 12). Таким образом, объединяя полученные пути  $L_{n-1}^n, L_{n-1}^{n-1}, \dots, L_{n-1}^1$  и внешние ребра между ними, получим гамильтонов цикл  $H_n$ , что завершает доказательство теоремы.  $\square$

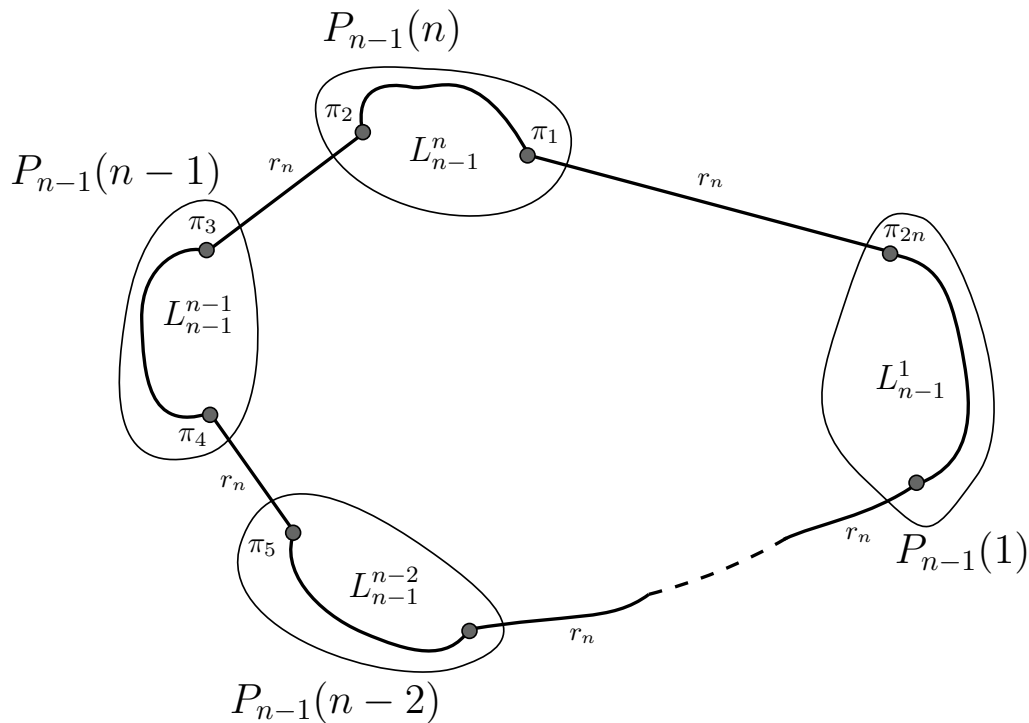


Рисунок 12. Иллюстрация к доказательству Теоремы 2.6.1

## 2.7 Другие циклы Рамсаке графа

Помимо гамильтонова цикла, в Рамсаке графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , имеются и другие циклы. В 1995 г. А. Каневский и С. Фенг [34] доказали, что в данном графе содержатся все циклы  $C_l$  длины  $l$ , где  $6 \leq l \leq n! - 2$  и  $l = n!$ . Наличие цикла длины  $l = n! - 1$  в графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , было доказано в 2006 г. группой тайваньских ученых [55]. Таким образом имеет место следующая Теорема.

**Теорема 2.7.1** [34] [55] *В Рамсаке графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , имеются циклы  $C_l$  длины  $l$ , где  $6 \leq l \leq n!$ .*

Однако в некоторых задачах на этом графе, в частности, при поиске его хроматического числа, интересен не только сам факт наличия в нем циклов, но и их точное описание. В 2010 г. Константиновой и Медведевым [64] дана алгебраическая характеристика циклов длины шесть и семь, представленных в виде последовательности префикс–реверсалов.

Для доказательства этих результатов нам понадобятся дополнительные понятия. Далее под вершиной графа  $P_n$  будем понимать перестановку, которая этой вершине соответствует, а циклы будем описывать, используя последовательность префикс–реверсалов.

*Формой цикла  $C_l$  длины  $l$  в графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , будем называть последовательность префикс–реверсалов  $C_l = r_{i_1} \dots r_{i_l}$ , где  $2 \leq i_j \leq n$ , и  $i_j \neq i_{j+1} ((j+1) \bmod l)$  для любого  $j \in \{1, \dots, l\}$ , таких, что  $\pi r_{i_1} \dots r_{i_l} = \pi$ , где  $\pi \in Sym_n$ . Цикл  $C_l$  длины  $l$  будем также называть  $l$ -циклом. Отметим следующие свойства данного представления циклов.*

**Свойство 1.** Если  $r_{i_1} \dots r_{i_l}$  является формой некоторого цикла, то  $r_{i_l} \dots r_{i_1}$  также является формой того же самого цикла, заданного в обратном направлении. Действительно, при умножении обеих частей равенства  $\pi r_{i_1} \dots r_{i_l} = \pi$  справа на  $r_{i_l} \dots r_{i_1}$  получим  $\pi = \pi r_{i_l} \dots r_{i_1}$ .

**Свойство 2.** В зависимости от выбора вершины  $l$ -цикл может быть представлен  $2l$  формами (не обязательно разными). В самом деле, при умножении обеих частей равенства  $\pi r_{i_1} \dots r_{i_l} = \pi$  справа на  $r_{i_1}$  получим  $(\pi r_{i_1}) r_{i_2} \dots r_{i_l} r_{i_1} = \pi r_{i_1}$ , где  $\pi r_{i_1}$  является перестановкой, а  $r_{i_2} \dots r_{i_l} r_{i_1}$  формой того же самого  $l$ -цикла. Применяя аналогичные рассуждения

далее, получим  $l$  форм одного и того же  $l$ -цикла, а с учетом предыдущего свойства их будет  $2l$ .

Свойство 3. Разные формы  $l$ -цикла описывают разные  $l$ -циклы для фиксированной вершины  $\pi$ . Действительно, поскольку для любой  $\pi$  инцидентные ей ребра задаются  $(n - 1)$  префикс-реверсалами, то если  $\pi r_{i_1} \dots r_{i_l} = \pi$ , тогда и  $\pi r_{i_j} \dots r_{i_l} r_{i_1} \dots r_{i_{j-1}} = \pi$ , где  $1 < j < n - 1$ .

Канонической формой цикла  $C_l$  длины  $l$  будем называть форму с лексикографически максимальной последовательностью индексов  $i_1 \dots i_l$ . Очевидно, что из канонической формы цикла могут быть получены все другие его формы.

Сегментом  $[i, j]$  перестановки  $\pi = [\pi_1 \dots \pi_i \dots \pi_j \dots \pi_n]$  будем называть все элементы, заключенные между  $\pi_i$  и  $\pi_j$  включительно. Любая перестановка может быть представлена в виде последовательности сегментов. Будем использовать символы  $\{i, j, k\}$  и  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  для обозначения одноэлементных и многоэлементных сегментов, соответственно. Например,  $\pi = [i \pi_2 \pi_3 \pi_4 j \pi_6 \pi_7 \pi_8 k]$  может быть записана в виде  $\pi = [i \alpha j \beta k]$ , где  $\alpha = [\pi_2 \pi_3 \pi_4]$ ,  $\beta = [\pi_6 \pi_7 \pi_8]$ . Под записью  $\bar{\alpha}$  будем понимать сегмент, получающийся инверсией элементов  $\alpha$ . Очевидно, что  $\overline{\bar{\alpha}} = \alpha$ . Через  $|\alpha|$  будем обозначать число элементов в сегменте  $\alpha$ .

Докажем простую вспомогательную Лемму. Под расстоянием  $d = d(\pi, \tau)$  между вершинами  $\pi$  и  $\tau$  в графе  $P_n$  понимается наименьшее число префикс-реверсалов, переводящих перестановку  $\pi$  в перестановку  $\tau$ , т.е.  $\pi r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_d} = \tau$ . Обозначим  $\bar{\pi} = \pi r_n$  и  $\bar{\tau} = \tau r_n$ .

**Лемма 2.7.1** Пусть  $\pi \neq \tau$  принадлежат одной и той же  $(n - 1)$ -копии графа  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , и пусть  $d(\pi, \tau) \leq 2$ , тогда  $\bar{\pi}$ ,  $\bar{\tau}$  принадлежат разным  $(n - 1)$ -копиям этого графа.

*Доказательство.* Пусть  $\pi, \tau \in P_{n-1}(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , то есть их последний элемент равен  $i$ . Тогда если  $d(\pi, \tau) = 1$  и если положить  $\pi = [j \alpha k \beta i]$ , то  $\tau = [k \bar{\alpha} j \beta i]$ , где  $j \neq k \neq i$ . Отсюда  $\bar{\pi} = [i \bar{\beta} k \bar{\alpha} j]$ ,  $\bar{\tau} = [i \bar{\beta} j \alpha k]$ , а поскольку их последние элементы различны, то следовательно, они принадлежат разным копиям  $P_{n-1}(j)$ ,  $P_{n-1}(k)$ , где  $1 \leq i \neq j \neq k \leq n$ . Если  $d(\pi, \tau) = 2$ , то в  $P_{n-1}(i)$  имеется смежная с  $\pi$  и  $\tau$  вершина  $\omega$ , последний элемент которой равен  $i$ . Перестановки  $\pi$  и  $\tau$  получаются из  $\omega$  умножением ее на различные (отличные от  $r_n$ ) префикс-реверсалы

справа. Таким образом, первые элементы  $\pi$  и  $\tau$  будут различны, что эквивалентно тому, что последние элементы перестановок  $\bar{\pi} = \pi r_n$  и  $\bar{\tau} = \tau r_n$  будут различны, т.е. они вновь будут принадлежать разным  $(n-1)$ -копиям графа  $P_n$ .  $\square$

### 2.7.1 Циклы длины шесть

Описание циклов длины шесть дается в следующей Теореме.

**Теорема 2.7.2** *В графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , через каждую его вершину проходит ровно один цикл длины шесть канонической формы  $C_6 = r_3 r_2 r_3 r_2 r_3 r_2$ .*

*Доказательство.* Если  $n = 3$ , то  $P_3 \cong C_6$  и 6-цикл формируется следующим образом:  $[123] \xrightarrow{r_2} [213] \xrightarrow{r_3} [312] \xrightarrow{r_2} [132] \xrightarrow{r_3} [231] \xrightarrow{r_2} [321] \xrightarrow{r_3} [123]$ , что соответствует канонической форме  $C_6 = r_3 r_2 r_3 r_2 r_3 r_2$  в условии Леммы.

Покажем, что 6-циклы другой формы в  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , не возникают. Очевидно, что 6-цикл не может возникнуть на вершинах двух разных  $(n-1)$ -копий. В самом деле, пусть  $\pi, \tau \in P_{n-1}(i)$ ,  $\pi \neq \tau$ , тогда из Леммы 2 следует, что если  $\bar{\pi}, \bar{\tau} \in P_{n-1}(j)$ ,  $j \neq i$ , где  $\bar{\pi} = \pi r_n$ ,  $\bar{\tau} = \tau r_n$ , то  $d(\pi, \tau) \neq 1$  и  $d(\pi, \tau) \neq 2$ , т.е.  $d(\pi, \tau) \geq 3$ . Предположим, что на вершинах  $\pi, \tau, \bar{\pi}, \bar{\tau}$  имеется 6-цикл. Тогда, если  $d(\pi, \tau) = 3$ , то вершины  $\bar{\pi}, \bar{\tau}$  должны быть смежными в  $P_{n-1}(j)$ , следовательно, по Лемме 2 вершины  $\pi = \bar{\pi} r_n, \tau = \bar{\tau} r_n$  должны принадлежать разным  $(n-1)$ -копиям, а это не так, поскольку  $\pi, \tau \in P_{n-1}(i)$ . Если же  $d(\pi, \tau) = 4$ , то должно выполняться  $\bar{\pi} = \bar{\tau}$ , а это невозможно, поскольку  $\pi \neq \tau$ . Таким образом, 6-цикл не может возникнуть на вершинах двух разных  $(n-1)$ -копий.

Теперь покажем, что 6-цикл не может возникнуть на вершинах трех разных  $(n-1)$ -копий. Пусть  $\pi, \tau \in P_{n-1}(i)$ ,  $\pi \neq \tau$ , такие, что  $d(\pi, \tau) \leq 2$ , тогда по Лемме 2 вершины  $\bar{\pi}, \bar{\tau}$  принадлежат разным  $(n-1)$ -копиям. Рассмотрим два случая. Пусть  $d(\pi, \tau) = 1$ , тогда вершины  $\pi, \tau, \bar{\pi}, \bar{\tau}$  будут принадлежать некоторому 6-циклу только в том случае, когда  $d(\bar{\pi}, \bar{\tau}) = 3$ . Покажем, что это не так. Пусть  $\pi = [j \alpha k \beta i]$ , где  $j \neq k \neq i$ , тогда  $\tau = [k \bar{\alpha} j \beta i]$ , а  $\bar{\pi} = [i \bar{\beta} k \bar{\alpha} j] \in P_{n-1}(j)$ ,  $\bar{\tau} = [i \bar{\beta} j \alpha k] \in P_{n-1}(k)$ . Кратчайший путь из  $\bar{\pi}$  в копию  $P_{n-1}(k)$  лежит через вершины  $\omega = [k \beta i \bar{\alpha} j]$

и  $\bar{\omega} = [j \alpha i \bar{\beta} k] \in P_{n-1}(k)$ , т.е.  $d(\bar{\pi}, \bar{\omega}) = 2$ . Очевидно, что не существует префикс-реверсала, переводящего  $\bar{\omega}$  в  $\bar{\tau}$ , т.е.  $d(\bar{\omega}, \bar{\tau}) \neq 1$ , а значит,  $d(\bar{\pi}, \bar{\tau}) \neq 3$ . Теперь пусть  $d(\pi, \tau) = 2$ . В этом случае, вершины  $\pi, \tau, \bar{\pi}, \bar{\tau}$  будут принадлежать некоторому 6-циклу тогда и только тогда, когда  $d(\bar{\pi}, \bar{\tau}) = 2$ . Но это невозможно, поскольку по Лемме 2 вершины  $\pi = \bar{\pi} r_n$  и  $\tau = \bar{\tau} r_n$  должны будут принадлежать разным  $(n-1)$ -копиям. Следовательно, при  $n \geq 4$  цикл длины шесть не может возникнуть на вершинах трех разных  $(n-1)$ -копий.

Также очевидно, что 6-цикл не может возникнуть на вершинах четырех и более разных  $(n-1)$ -копий, поскольку между копиями должно быть не менее четырех внешних ребер и внутри каждой из  $(n-1)$ -копий, по крайней мере, одно ребро, т.е. в этом случае циклом минимальной длины будет 8-цикл.

Таким образом, имеется только одна каноническая форма  $r_3 r_2 r_3 r_2 r_3 r_2$ , описывающая циклы длины шесть в графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ . Эти циклы являются независимыми при  $n \geq 4$ , поскольку префикс-реверсалы  $r_i$ ,  $4 \leq i \leq n$ , определяют внешние ребра по отношению к циклам длины шесть, а значит, через каждую вершину графа проходит ровно один цикл длины шесть канонической формы.  $\square$

Очевидным следствием Теоремы 2.7.2 является следующий факт.

**Следствие 2.7.1** *В графе  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , содержится  $\frac{n!}{6}$  независимых циклов длины шесть.*

## 2.7.2 Циклы длины семь

Теперь рассмотрим циклы длины семь в Рапсаке графе и дадим их полную характеристику.

**Теорема 2.7.3** *В графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , через каждую его вершину проходит ровно  $7(n-3)$  различных циклов длины семь следующей канонической формы:*

$$C_7 = r_k r_{k-1} r_k r_{k-1} r_{k-2} r_k r_2, \quad (2.2)$$

где  $4 \leq k \leq n$ .

Таблица 2.1: Циклы длины семь в графе  $P_4$ , проходящие через вершину [1234].

№	описание через вершины	описание через префикс-реверсалы
1	1234-4321-2341-1432-3412-4312-2134	$r_4 r_3 r_4 r_3 r_2 r_4 r_2$
2	1234-3214-4123-2143-1243-3421-4321	$r_3 r_4 r_3 r_2 r_4 r_2 r_4$
3	1234-4321-2341-3241-1423-4123-3214	$r_4 r_3 r_2 r_4 r_2 r_4 r_3$
4	1234-3214-2314-4132-1432-2341-4321	$r_3 r_2 r_4 r_2 r_4 r_3 r_4$
5	1234-2134-4312-3412-2143-4123-3214	$r_2 r_4 r_2 r_4 r_3 r_4 r_3$
6	1234-4321-3421-1243-4213-3124-2134	$r_4 r_2 r_4 r_3 r_4 r_3 r_2$
7	1234-2134-4312-1342-2431-3421-4321	$r_2 r_4 r_3 r_4 r_3 r_2 r_4$

*Доказательство.* Проведем индукцией по  $k$ , где под  $k$  будем понимать размерность графа  $P_k$ ,  $k \geq 4$ .

При  $k = 4$  по условию Теоремы в графе  $P_4$  через любую его вершину проходит ровно семь различных циклов длины семь. Поскольку по Лемме 1 граф является вершинно-транзитивным, то достаточно это показать для любой его вершины. В частности, в Таблице 2.1 представлены все циклы длины семь, проходящие через вершину [1234], которые легко получаются, если рассмотреть слоевую структуру графа  $P_4$  относительно этой вершины. По Теореме 2 в графе  $P_4$  отсутствуют 3-, 4-, 5-циклы, то есть в первом и втором слоях будут находиться, соответственно, три и шесть вершин, причем среди вершин одного и того же слоя не будет смежных. Первые смежные вершины, принадлежащие одному и тому же слою, появятся в третьем слое. Это и будут вершины, принадлежащие циклам длины семь. Всего таких пар вершин будет семь, по числу циклов длины семь, представленных в Таблице 2.1. Легко видеть, что канонической формой всех этих циклов является форма  $r_4 r_3 r_4 r_3 r_2 r_4 r_2$ , соответствующая (2.2) при  $k = 4$ .

Теперь предположим, что Теорема верна при  $k = n - 1$  и докажем утверждение для  $k = n$ , используя иерархическое строение графа  $P_n$ .

В силу индукционного предположения через любую вершину любой  $(n - 1)$ -копии проходит  $7((n - 1) - 3) = 7(n - 4)$  различных циклов длины семь, содержащих только вершины той копии, которой данная вершина принадлежит. Помимо циклов длины семь, лежащих внутри одной и той



же  $(n-1)$ -копии, в  $P_n$  могут возникнуть циклы длины семь, проходящие через вершины разных  $(n-1)$ -копий.

Возможны следующие три случая.

Случай 1. Предположим, что цикл  $C_7^*$  длины семь появляется на вершинах двух  $(n-1)$ -копий, то есть либо две вершины  $C_7^*$  лежат в  $P_{n-1}(i)$ , а пять в  $P_{n-1}(j)$ , где  $1 \leq i \neq j \leq n$ ; либо три вершины  $C_7^*$  лежат в  $P_{n-1}(i)$ , а четыре в  $P_{n-1}(j)$ . В обоих случаях для вершин  $\pi, \tau \in P_{n-1}(i)$ ,  $\pi \neq \tau$ , цикла  $C_7^*$  выполняется  $d(\pi, \tau) \leq 2$ . Тогда по Лемме 2.7.1 вершины  $\bar{\pi}, \bar{\tau}$  должны лежать в разных  $(n-1)$ -копиях, что противоречит нашему предположению. Следовательно, 7-цикл не может возникнуть на вершинах двух  $(n-1)$ -копий.

Случай 2. Предположим, что цикл  $C_7^*$  длины семь возникает на вершинах трех  $(n-1)$ -копий так, что две вершины  $\pi^{i_1}, \pi^{i_2}$  лежат в копии  $P_{n-1}(i)$ , две другие  $\pi^{j_1}, \pi^{j_2}$  лежат в копии  $P_{n-1}(j)$ , остальные три вершины  $\pi^{n_1}, \pi^{n_2}, \pi^{n_3}$  лежат в копии  $P_{n-1}(n)$ , где  $1 \leq i \neq j \leq n$ ,  $i < j$  (см. Рисунок 13).

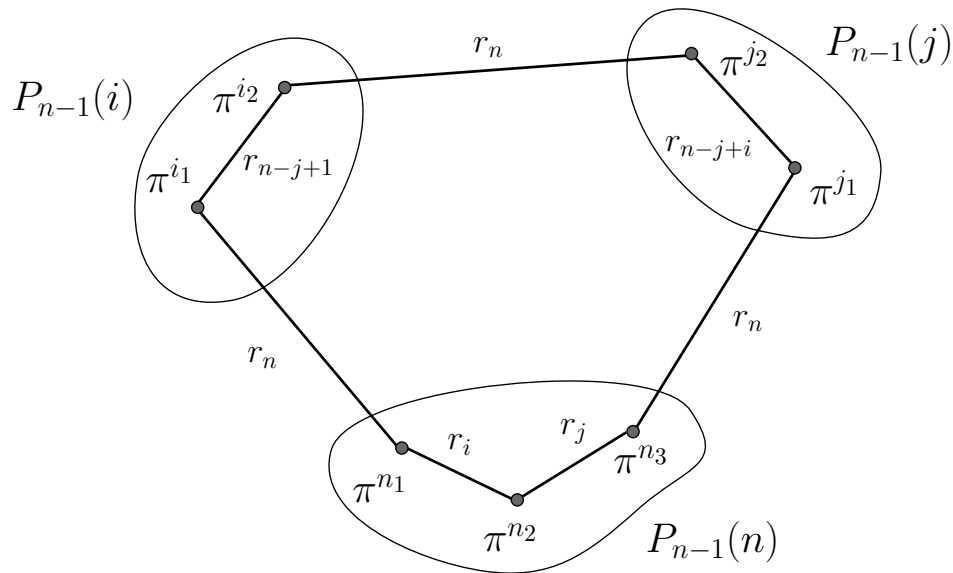


Рисунок 13. Иллюстрация к доказательству Теоремы 2.7.3

Опишем цикл  $C_7^*$ . Поскольку граф является вершинно-транзитивным, то не нарушая общности, положим  $\pi^{n_2} = I_n = [\alpha i \beta j \gamma n]$ , где  $\alpha = [1 \dots i - 1]$ ,  $\beta = [i + 1 \dots j - 1]$ ,  $\gamma = [j + 1 \dots n - 1]$  и  $|\alpha| = i - 1$ ,  $|\beta| = j - i - 1$ ,  $|\gamma| = n - j - 1$ . По Лемме 2.7.1 вершины  $\pi^{n_1}$  и  $\pi^{n_3}$  должны быть смежными с вершинами из разных  $(n-1)$ -копий, в нашем обозначении это  $P_{n-1}(i)$  и  $P_{n-1}(j)$ , следовательно, они должны иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\pi^{n_1} &= \pi^{n_2} r_i = [i \bar{\alpha} \beta j \gamma n], \quad \text{где } \pi_j^{n_1} = j, \\ \pi^{n_3} &= \pi^{n_2} r_j = [j \bar{\beta} i \bar{\alpha} \gamma n], \quad \text{где } \pi_{j-i+1}^{n_3} = i.\end{aligned}$$

Тогда смежные им вершины в копиях  $P_{n-1}(i)$  и  $P_{n-1}(j)$  примут вид:

$$\begin{aligned}\pi^{i_1} &= \pi^{n_1} r_n = [n \bar{\gamma} j \bar{\beta} \alpha i], \quad \text{где } \pi_{n-j+1}^{i_1} = j, \\ \pi^{j_1} &= \pi^{n_3} r_n = [n \bar{\gamma} \alpha i \beta j], \quad \text{где } \pi_{n-j+i}^{j_1} = i.\end{aligned}$$

Вершина  $\pi^{i_2}$  должна быть смежной с вершиной  $\pi^{i_1}$  и с одной из вершин, скажем  $\pi^{j_2}$ , копии  $P_{n-1}(j)$ , следовательно,

$$\pi^{i_2} = \pi^{i_1} r_{n-j+1} = [j \gamma n \bar{\beta} \alpha i], \quad \text{где } \pi_1^{i_2} = j.$$

С другой стороны, вершина  $\pi^{j_2}$  должна быть смежной с вершиной  $\pi^{j_1}$ , а поскольку она также является смежной с  $\pi^{i_2}$ , то перестановка  $\pi^{j_2}$  примет вид:

$$\pi^{j_2} = \pi^{j_1} r_{n-j+i} = [i \bar{\alpha} \gamma n \beta j], \quad \text{где } \pi_1^{j_2} = i.$$

По нашему предположению, вершины  $\pi^{i_2}$  и  $\pi^{j_2}$  инцидентны одному и тому же внешнему ребру, т.е. перестановка  $\pi^* = \pi^{i_2} r_n = [i \bar{\alpha} \beta n \bar{\gamma} j]$  должна совпадать с перестановкой  $\pi^{j_2}$ . Это возможно только в случае, когда сегменты  $\beta$  и  $\gamma$  будут пустыми, т.е.  $|\beta| = j - i - 1 = 0$  и  $|\gamma| = n - j - 1 = 0$ . Откуда следует, что  $j = n - 1$  и  $i = j - 1 = n - 2$ , а цикл длины семь получается следующим образом:  $\pi^{i_1} \xrightarrow{r_2} \pi^{i_2} \xrightarrow{r_3} \pi^{j_2} \xrightarrow{r_{n-1}} \pi^{j_1} \xrightarrow{r_3} \pi^{n_3} \xrightarrow{r_{n-1}} \pi^{n_2} \xrightarrow{r_{n-2}} \pi^{n_1} \xrightarrow{r_3} \pi^{i_1}$ , каноническая форма которого  $C_7 = r_n r_{n-1} r_n r_{n-1} r_{n-2} r_n r_2$  совпадает с (2.2) при  $k = n$ .

Случай 3. Предположим, что цикл длины семь возникает на вершинах четырех или более  $(n-1)$ -копий. Из иерархического строения графа следует, что любая его вершина инцидентна единственному внешнему ребру.

Следовательно, любой цикл в графе должен проходить как минимум через две вершины одной и той же  $(n - 1)$ -копии, и существование цикла длины семь в данном предположении невозможно.

Таким образом, найдена единственная каноническая форма

$$r_n r_{n-1} r_n r_{n-1} r_{n-2} r_n r_2,$$

описывающая семь циклов длины семь, проходящих через вершины трех различных  $(n - 1)$ -копий графа  $P_n$ . Очевидно, что эти семь циклов проходят через любую вершину графа  $P_n$ . Напомним, что в силу индукционного предположения, через любую вершину любой  $(n - 1)$ -копии, проходит  $7(n - 4)$  различных циклов длины семь. Следовательно, в графе  $P_n$  через любую его вершину проходит  $7(n - 4) + 7 = 7(n - 3)$  различных циклов длины семь канонической формы (2.2), что завершает доказательство теоремы.  $\square$

**Следствие 2.7.2** *В графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , имеется  $n!(n - 3)$  различных циклов длины семь.*

*Доказательство.* Следует немедленно из Теоремы 2.7.3, если заметить, что в графе  $n!$  вершин, а через каждую вершину проходит  $7(n - 3)$  различных циклов длины семь, т.е. всего в графе  $n!7(n - 3)$  циклов длины семь. Однако, каждый цикл был посчитан ровно семь раз (по количеству вершин в цикле), следовательно, в графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , имеется  $n!(n - 3)$  различных циклов длины семь.  $\square$

**Следствие 2.7.3** *В графе  $P_n$ ,  $n \geq 4$ , имеется  $\frac{n!}{8} \leq N_7 \leq \frac{n!}{7}$  независимых циклов длины семь.*

*Доказательство.* Легко показать, что при  $n = 4$  в графе  $P_4$  существует всего три независимых цикла длины семь. Например, следующие три 7-цикла являются в  $P_4$  независимыми:

$$C_7^1 = [1234] - [2134] - [4312] - [1342] - [2431] - [3421] - [4321],$$

$$C_7^2 = [3241] - [2341] - [1432] - [3412] - [2143] - [4123] - [1423],$$

$$C_7^3 = [4213] - [2413] - [3142] - [4132] - [2314] - [1324] - [3124].$$

Тогда из иерархического строения графа следует, что в  $P_n$ ,  $n \geq 5$ , имеется  $\frac{n!}{24}$  копий  $P_4$ , в каждой из которых имеется ровно три независимых цикла, следовательно, в целом, в  $P_n$  их имеется по крайней мере  $\frac{n!}{8}$ , что дает нам нижнюю оценку. Верхняя оценка получается в предположении, что каждая вершина принадлежит единственному циклу длины семь.  $\square$

## Глава 3

### Определение диаметра графа Кэли

Графы Кэли имеют много привлекательных свойств, среди которых, в том числе, их малый диаметр. Это является одной из причин широкого применения графов Кэли в представлении компьютерных сетей.

Под диаметром графа Кэли  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$  обычно понимается максимум среди всех кратчайших длин выражения любого элемента  $g$  группы  $G$  через произведение генераторов из  $S$ . Определение диаметра произвольного графа Кэли с произвольным порождающим множеством является  $NP$ -трудной задачей, поскольку известно, что задача поиска минимального слова, в целом, является  $NP$ -трудной. Этот результат был получен Эвеном и Голдрехом [22] в 1981 г.

Определение диаметра графа Кэли с заданными группой и порождающим множеством тоже является непростой задачей.

В частности, эта задача возникает при решении головоломки  $3 \times 3 \times 3$  Кубик Рубика. У кубика всего шесть граней, при вращении которых возникает точно  $N = 43.252.003.274.489.856.000$  позиций. Если рассмотреть эти позиции, как группу перестановок головоломки, а порождающее множество этой группы определить 18 типами вращений граней, то мы получим 18-регулярный граф Кэли на  $N$  вершинах. Решением головоломки является поиск пути в данном графе от вершины, соответствующей исходной позиции кубика, к вершине, соответствующей “собранный” позиции, т.е. к единичному элементу группы. Число ходов в наилучшем решении при наихудшей исходной позиции будет соответствовать диаметру данного графа Кэли.

Решением этой задачи занимались, начиная с 1981 г., когда были най-

дены первые оценки на диаметр. Однако, только в 2010 г. было анонсировано [31], что диаметр данного графа равен 20.

В общем случае, достаточно сложно получить даже нижние и верхние оценки на диаметр графа Кэли. Кроме этого, существует большая разница между графами Кэли абелевых и неабелевых групп.

### 3.1 Диаметр графов Кэли на абелевых и неабелевых группах

В 1988 г. Бабаи и Сереш [6] выдвинули гипотезу о том, что диаметр графов Кэли на неабелевых конечных простых группах всегда будет маленьким.

**Гипотеза 3.1.1** [6] *Найдется такое число  $C$ , что для любой неабелевой конечной простой группы  $G$  диаметр любого графа Кэли на этой группе будет  $\leq (\log_2 |G|)^C$ .*

В 1989 г. Бабаи, Кантор и Любоцкий [5] получили оценку диаметра графов Кэли на неабелевых группах.

**Теорема 3.1.1** [5] *Всякая неабелева конечная простая группа  $G$  имеет порождающее множество  $S$  мощности  $|S| \leq 7$ , такое, что граф Кэли на этой группе с данным порождающим множеством имеет диаметр  $O(\log_2 |G|)$ .*

При доказательстве Теоремы 3.1.1 существенно используется классификация конечных простых групп, а именно тот факт, что имеется только конечное число спорадических групп, которые не оказывают существенного влияния на результат. Кроме этого, в доказательстве используются некоторые свойства групп Ли. Изучение всех этих фактов лежит за рамками настоящего курса, поэтому мы опускаем доказательство данной теоремы.

Заметим, что данная теорема не выполняется для циклических групп простого порядка. Также отметим, что Bubble-sort граф  $BS_n$  (см. определение этого графа в Разделе 1.1.1) на симметрической группе  $Sym_n$  с

порождающим множеством транспозиций вида  $t = \{t_{i,i+1} \in \text{Sym}_n, 1 \leq i < n\}$ , имеет диаметр  $\Theta(n^2)$ .

В [5] также было отмечено, что диаметр любого графа Кэли на абелевой группе  $G$  с  $n$  элементами и порождающим множеством  $S$  имеет диаметр  $> \frac{1}{2}(n^{|S|} - 1)$ . Таким образом, Теорема 3.1.1 не выполняется для абелевых групп.

В 1993 г. Анексштейн и Баумслаг [2] получили нижнюю оценку на диаметр графа Кэли на абелевой группе. Напомним, что в абелевой группе умножение справа и слева эквивалентны, т.е., для любых  $g, h \in G$  выполняется равенство  $gh = hg$ , и все подгруппы абелевой группы являются нормальными.

В дальнейшем, диаметр графа Кэли  $\text{Cay}(G, S)$  на группе  $G$  с порождающим множеством  $S$  будем обозначать как  $\text{diam}(\text{Cay}(G, S))$ .

**Теорема 3.1.2** [2] *Пусть  $G$  является абелевой группой  $G$  с порождающим множеством  $S$ ,  $|S| = r$ . Тогда имеет место следующая нижняя оценка на диаметр графа Кэли  $\text{Cay}(G, S)$ :*

$$\text{diam}(\text{Cay}(G, S)) \geq \frac{1}{e} |G|^{1/r} = \Omega(|G|^{1/r}).$$

*Доказательство.* Пусть в группе  $G$  имеется  $n$  элементов, которые могут быть записаны как произведение  $\leq d$  элементов из порождающего множества  $S$ . Поскольку  $G$  является абелевой группой, то  $n$  не превышает числа способов, которыми  $d$  объектов могут быть выбраны из множества  $r + 1$  объектов (порождающее множество  $S$  и единичный элемент) с повторениями. Следовательно, число  $n$  ограничивается следующим образом:

$$n \leq \binom{r+d}{d} = \frac{(r+d)!}{r!d!} \leq \frac{(r+d)^r}{r!} \leq \frac{(rd)^r}{r!} \leq (ed)^r.$$

Решение данного неравенства для  $d$  дает нижнюю границу диаметра.  $\square$

Более точная оценка получается в предположении, что  $r \leq |G|^{1/r} \leq d$ . В этом случае имеем:

$$n \leq \binom{r+d}{d} = \frac{(r+d)!}{r!d!} \leq \frac{(r+d)^r}{r!} \leq \frac{(2d)^r}{r!} \leq \left(\frac{2ed}{r}\right)^r.$$

**Утверждение 3.1.1** Пусть  $G$  является абелевой группой  $G$  с порождающим множеством  $S$ ,  $|S| = r$ , причем  $r \leq |G|^{1/r} \leq d$ . Тогда имеет место следующая оценка на диаметр графа Кэли  $\text{Cay}(G, S)$ :

$$\text{diam}(\text{Cay}(G, S)) \geq \frac{r}{2e} |G|^{1/r} = \Omega(r|G|^{1/r}).$$

Заметим, что эта оценка является точной, поскольку она достигается на графе Кэли, определенном для группы  $G_{n,r} = Z_{r^{1/r}} \times \dots \times Z_{r^{1/r}} = Z_{r^{1/r}}^r$ , где  $n, r$  некоторые положительные целые числа, со стандартным порождающим множеством  $S$ . Тогда,  $\text{diam}(\text{Cay}(G_{n,r}, S)) = O(rn^{1/r})$ .

### 3.2 Диаметр графов Кэли на симметрической и знакопеременной группах

Если Гипотеза 3.1.1, обсуждаемая в предыдущем разделе, окажется верной, то можно ожидать найти большое число графов Кэли на неабелевых группах, имеющих маленький диаметр. Однако, на сегодняшний день проблема является открытой даже для *знакопеременных групп*  $A_n$ , состоящих из всех четных перестановок. Первый шаг в решении Гипотезы 3.1.1 был сделан Бабаи и Серешом [6], когда в 1988 г. они доказали следующую теорему для симметрических и знакопеременных групп.

**Теорема 3.2.1** [6] Если  $G$  является либо симметрической  $Sym_n$ , либо знакопеременной  $A_n$  группой, то диаметр всякого графа Кэли на этой группе  $\leq \exp((n \ln n)^{(1/2)}(1 + o(1)))$ .

В доказательстве этой теоремы использовались асимптотические результаты Ландау [42], полученные им в 1909 г. на максимальный порядок перестановок ограниченной степени, где под степенью  $\text{deg}(\pi)$  перестановки  $\pi$  понимается число точек, перемещенных данной перестановкой.

В 1992 г. эти же авторы выдвинули следующую гипотезу [7].

**Гипотеза 3.2.1** [7] Диаметр знакопеременной группы  $A_n$  всегда  $< n^C$ , где  $C$  некоторая постоянная.

Заметное продвижение в этом направлении было сделано Венъян Хиао [59], который в 2006 г. получил следующий результат для графов Кэли на симметрической группе.



Введем дополнительные определения и обозначения. Две подгруппы  $H_1$  и  $H_2$  группы  $G$  называются *сопряженными*, если найдется элемент  $g \in G$  такой, что  $g H_1 g^{-1} = H_2$ . Заметим, что должно выполняться точное равенство. Подгруппа группы  $G$ , порожденная  $S$ , обозначается как  $\langle S \rangle$ . Если  $H$  является некоторой подгруппой группы  $G$ , то через  $H^G$  будем обозначать подгруппу  $G$ , порожденную всеми сопряженными подгруппами для  $H$ .

**Теорема 3.2.2** [59] Пусть  $G$  является некоторой подгруппой симметрической группы  $Sym_n$ , причем  $G = \langle S \rangle$ , где  $1 \notin S = S^{-1}$ . Если найдется элемент  $\pi \in S$ , степень которого  $deg(\pi) \leq k$ , где  $k$  есть некоторая постоянная, такой, что  $\langle \pi \rangle^G = G$ , то тогда

$$diam(Cay(G, S)) < n^{2k+1}.$$

Для доказательства этой Теоремы нам понадобятся дополнительные утверждения и понятия.

Пусть  $G$  некоторая конечная группа, для которой  $G = \langle S \rangle$  и  $1 \notin S = S^{-1}$ , и пусть  $L$  некоторая подгруппа  $G$ , причем  $|G : L| = n$ , где  $|G : L|$  есть индекс подгруппы  $L$  в группе  $G$ , определяемый как число смежных классов в каждом (правом или левом) из разложений группы  $G$  по этой подгруппе  $L$ . Для двух подгрупп  $H_1$  и  $H_2$  группы  $G$ , их объединение определяется как  $H_1 H_2 = \{h_1 h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ .

**Утверждение 3.2.1**  $G = L(1 \cup S)S^{n-2}$

*Доказательство.* Очевидно, что при  $n = 1$  утверждение верно.

Пусть  $n \geq 2$ . Тогда мы имеем:

$$L \subseteq L(1 \cup S) \subseteq \dots \subseteq L(1 \cup S)S^m \subseteq \dots,$$

где  $m$  есть некоторое неотрицательное число, а  $S^0 = 1$ .

Поскольку группа  $G$  является конечной, следовательно, имеется некоторое неотрицательное число  $l$  такое, что  $L(1 \cup S)S^l = L(1 \cup S)S^{l+1}$ , и поэтому  $L(1 \cup S)S^l = L(1 \cup S)S^{l+t}$ , где  $t$  может быть любым неотрицательным числом. А поскольку группа  $G$  порождается  $S$ , следовательно, выполняется следующее равенство:

$$G = L(1 \cup S)S^l. \tag{3.1}$$

Теперь покажем, что всегда найдется такое  $l \leq n - 2$ , что равенство (3.1) будет выполняться. В самом деле, если  $L \subset L(1 \cup S) \subset \dots \subset L(1 \cup S)S^{n-2}$ , то  $L(1 \cup S)$  содержит, по крайней мере, два смежных класса по подгруппе  $L$  в  $G$ ,  $\dots$ ,  $L(1 \cup S)S^{n-2}$  содержит, по крайней мере,  $n$  смежных классов по подгруппе  $L$  в  $G$ . Таким образом, имеем  $G = L(1 \cup S)S^{n-2}$ . Следовательно, всегда найдется такое неотрицательное  $l \leq n - 2$ , что равенство (3.1) выполняется, что и требовалось доказать.  $\square$

**Следствие 3.2.1** Пусть  $H = \langle S^2 \rangle$  и  $h = |G|$ . Тогда:

- (1) если  $S \not\subseteq H$ , то  $G = H \cup Hs$ , где  $H = S^{h-2}$  и  $s \in S$ ;
- (2) если  $S \subseteq H$ , то  $G = H = S^{h-2}$ .

*Доказательство.* (1) Предположим, что  $S$  не содержится в  $H$ . Тогда,  $G = H \cup Hs$ , где  $s$  является некоторым элементов из  $S$  и, следовательно,  $h = |G| = 2|H|$  является четным числом. Таким образом,  $S^{h-2} \subseteq H$ . Из Утверждения 3.2.1 следует, что при  $L = 1$  мы имеем  $G = (1 \cup S)S^{h-2}$ . Очевидно, что  $S \cap H = \emptyset$ , следовательно,  $H = S^{h-2}$ .

(2) Пусть  $S \subseteq H$ . Из Утверждения 3.2.1 следует, что при  $L = 1$  мы имеем  $G = (1 \cup S)S^{h-2}$ . Следовательно, найдется такое неотрицательное число  $m$ , что  $G = S^m$ . Пусть  $m$  будет наименьшим положительным числом, для которого  $G = S^m$  выполняется. Покажем, что  $m \leq h - 1$ . На самом деле, мы можем доказать, что

$$1 < |S| < |S^2| < \dots < |S^m|. \quad (3.2)$$

Если  $|S^i| = |S^{i+1}|$ , где  $i \leq m - 1$ , тогда  $|S^i s_1| = |S^i s_2| = |S^{i+1}|$  для любых  $s_1, s_2 \in S$ . Следовательно,  $S^i s_1 = S^i s_2 = S^{i+1}$  и  $S^i = S^i s_2 s_1^{-1}$  для любых  $s_1, s_2 \in S$ . Таким образом, имеем  $S^i = S^{i+2}$  и поэтому  $G = S^i$ , где  $i \leq m - 1$ . Имеем противоречие, следовательно,  $|S^m| \geq m + 1$  по (3.2), а из определения  $m$  имеем  $m \leq h - 1$ . Откуда  $G = H = S^{h-2}$ , что завершает доказательство.  $\square$

Под *порядком элемента*  $g \in G$  понимается минимальное натуральное число  $m$  такое, что  $g^m = e$ , а *поточечным стабилизатором* называют подгруппу элементов  $G_\Delta = \{g \in G \mid gx = x, \forall x \in \Delta\}$ , где  $\Delta \subset G$ .

Теперь докажем Теорему 3.2.2.

*Доказательство.* Не ограничивая общности, будем считать, что множество точек, перемещенных данной перестановкой  $\pi$ , определяется как  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Обозначим порядок элемента  $\pi$  как  $|\pi|$ . Тогда  $|\pi| \leq k!$ . Пусть  $L$  будет поточечным стабилизатором на множестве  $\{1, 2, \dots, k\}$  в группе  $G$ . Тогда  $\pi$  и  $L$  коммутируют. Из Утверждения 3.2.1 следует, что  $G = L(1 \cup S)S^{m-2}$ , где  $m = n(n-1)\dots(n-k+1)$ . Очевидно, что  $S \cap H = 0$ , следовательно,  $H = S^{h-2}$ . Далее используется известный факт [30] о том, что  $G$  является произведением всех различных сопряженных подгрупп  $\langle \pi \rangle$ . Но поскольку,  $\langle \pi \rangle$  и  $L$  коммутируют, а  $G = L(1 \cup S)S^{m-2}$ , то мы имеем:

$$G = \langle \pi \rangle^{t_1} \langle \pi \rangle^{t_2} \dots \langle \pi \rangle^{t_m},$$

где  $t_i \in (1 \cup S)S^{m-2}$  являются представителями смежных классов  $L$  в  $G$ , где  $1 \leq i \leq m$ .

Так как  $|\pi| \leq k!$ , то  $\langle \pi \rangle \subseteq S^{k!}$ . Таким образом, мы имеем:

$$G = (S^{k!})^m ((1 \cup S)S^{m-2})^{2m} = (1 \cup S)S^{3n^{2k}-1} = (1 \cup S)S^{n^{2k+1}-1}.$$

Следовательно,  $diam(Cay(G, S)) \leq n^{2k+1}$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Теперь рассмотрим известную комбинаторную задачу, связанную с определением диаметра Рамсаке графа.

### 3.3 Рамсаке problem

Как было отмечено в начале этой главы, определение диаметра графа Кэли с заданными группой и порождающим множеством также является непростой задачей. В частности, эта задача является по-прежнему открытой для Рамсаке графа  $P_n$ , который получил свое название благодаря *Ramsey problem*, поставленной Я. Гудманом [21] в 1975 г., где он задавался вопросом:

*каково минимальное количество флипов, позволяющих упорядочить стопку блинчиков разного размера в соответствии с их размером от минимального наверху до максимального*

внизу, где под флипом понимается операция переворачивания стопки блинчиков от верхнего до некоторого фиксированного?

Если перенумеровать все блинчики в стопке от 1 до  $n$  в соответствии с их размером, то получим некоторую перестановку, на которой префикс-реверсал выполняет ту же операцию, что и флип на стопке блинчиков. Тогда задача сводится к определению минимального расстояния между произвольной перестановкой  $\pi$  и единичной перестановкой  $I_n = [1\ 2\ \dots\ n]$  в графе  $P_n$ , то есть к определению диаметра данного графа. Эту задачу также называют *сортировка префикс-реверсалами* [24].

Данная задача представляет интерес в прикладных областях знаний. В частности, в информатике Рапсаке граф используется для представления  $n$ -мерных компьютерных сетей, которые носят название Рапсаке networks. Если Рапсаке network рассматривать как граф, в котором вершины соответствуют процессорам, то диаметр такой сети можно интерпретировать как наихудшая сетевая задержка при передаче информации в системе [28].

Недавние исследования, связанные с расшифровкой генома, показали также, что эта задача имеет отношение и к молекулярной биологии. Прежде всего, заметим, что если перенумеровать все гены от 1 до  $n$  в геноме, то любой геном можно представить в виде перестановки. В частности, в 1986 г. Палмер и Хердон [49], обнаружили, что  $X$ -хромосомы человека и мыши содержат одно и тоже количество одинаковых генов. Однако, в  $X$ -хромосоме человека они упорядочены как  $[4, 6, 1, 7, 2, 3, 5, 8]$ , а в  $X$ -хромосоме мыши как  $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ . Было показано, что одним из способов мутации является следующий: при переходе от одного вида к другому набор генов остается одним и тем же, но меняется порядок записи генов аналогично тому, как это происходит при применении префикс-реверсала к перестановке [46].

В настоящий момент задача определения диаметра Рапсаке графа не решена, известны лишь верхние и нижние оценки, а также точные значения диаметра вплоть до  $n = 17$ .

Простую верхнюю оценку можно получить, используя следующий алгоритм сортировки перестановки  $\pi$  префикс-реверсалами.

**Алгоритм 1****(простая сортировка префикс–реверсалами)**

**Шаг 0.** Входные данные: некоторая перестановка  $\pi$ , наибольший элемент которой находится на  $i$  позиции,  $2 \leq i \leq n - 1$ .

**Шаг 1.** Применить к  $\pi$  префикс–реверсал, перемещающий наибольший элемент на первое место.

**Шаг 2.** Применить к перестановке, полученной на Шаге 1, префикс–реверсал, переворачивающий всю перестановку.

**Шаг 3.** Применить к неотсортированной части перестановки префикс–реверсал, перемещающий наибольший элемент на первое место.

**Шаг 4.** Применить к перестановке, полученной на Шаге 3, префикс–реверсал, переворачивающий неотсортированную часть перестановки.

Повторять шаги 3–4, пока все элементы исходной перестановки  $\pi$  не будут отсортированы.

Очевидно, что **Алгоритм 1** дает следующую верхнюю оценку на диаметр Рамсаке графа:

$$\text{diam}(P_n) \leq 2(n - 1).$$

Простая нижняя оценка получается из следующих соображений.

Под смежностью в перестановке понимается любая пара двух последовательных соседних чисел. Очевидно, что в единичной перестановке таких смежностей будет  $n$ , предполагая что числа 1 и  $n$  также имеют смежность. Для любого  $n \geq 4$  всегда найдется, по крайней мере, одна перестановка, не содержащая ни одной смежности. Например, для  $n = 4$  такой перестановкой будет [3142]. Заметим, что применение любого префикс–реверсал может привести к появлению не более, чем одной новой смежности в перестановке. Таким образом, если начинать с перестановки, не имеющей ни одной смежности, то с учетом того, что каждый префикс–реверсал будет давать не более одной новой смежности, нам понадобится не менее  $n$  префикс–реверсалов, чтобы получить  $n$  смежностей в единичной перестановке  $I_n$ .

Таким образом, получаем следующую простую нижнюю оценку на диаметр Рамсаке графа:

$$n \leq \text{diam}(P_n).$$

### 3.3.1 Верхняя оценка Гейтса и Пападимитроу на диаметр Рамсаке графа

Первые улучшенные оценки на диаметр Рамсаке графа были получены Гейтсом и Пападимитроу [24] в 1979 г. Нижняя оценка получается на основе пошагового алгоритма, в котором на каждом шаге исходная перестановка преобразуется в новую перестановку, имеющую большее число смежностей. Алгоритм работает пока результирующая перестановка не получит  $n$  смежностей, то есть пока мы не получим единичную перестановку  $I_n$ . При этом, на каждом шаге определяется какую последовательность префикс-реверсалов (не более 4) нужно применить для увеличения смежностей в перестановке с учетом 9 различных случаев ее представления.

Введем дополнительные определения и обозначения.

Пусть  $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$  есть перестановка и при умножении на нее справа префикс-реверсалом  $r_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , получаем перестановку следующего вида:  $[\pi_i, \dots, \pi_1, \pi_{i+1}, \dots, \pi_n] = [\pi_1, \dots, \pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_n] r_i$ . Если в перестановке  $\pi$  выполняется  $|\pi_i - \pi_{i+1}| = 1$ , то пару  $(i, i + 1)$  называют *смежностью*, при этом считается, что пара  $(1, n)$  также всегда дает смежность. *Блоком* в перестановке  $\pi$  называют все последовательные элементы, для которых выполняется условие смежности. Если элемент  $\pi_i$  не в блоке, т.е.  $(i - 1, i)$  и  $(i, i + 1)$  не являются смежностями, то он является *свободным*. Например, в перестановке [654132] имеется два блока, [654] и [32], и один свободный элемент 1, а в перестановке [321654] имеется 5 смежностей, один блок (поскольку пара  $(1, 6)$  имеет смежность) и ни одного свободного элемента.

Заметим, что единичная перестановка  $I_n = [1, 2, 3, \dots, n]$  имеет один блок и  $n$  смежностей.

При описании Алгоритма 2, предложенного Гейтсом и Пападимитроу, под символом  $o$  будем понимать либо 1, либо  $-1$ .

## Алгоритм 2 (Гейтс, Пападимитроу)

### (эффективная сортировка префикс-реверсалами)

**Шаг 0.** Входные данные: некоторая перестановка  $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n] \neq I_n$ . Если исходная перестановка имеет  $n - 1$  смежностей, то переходим на **Шаг 2**, в противном случае переходим на **Шаг 1**.

**Шаг 1.** Пусть  $\pi_1 = t$ . Тогда возможны случаи.

**Случай 1.** Если  $t$  и  $\pi_i = t + o$  являются свободными элементами, то получаем новую перестановку  $\pi^*$  следующим образом:

$$[t, \dots, \pi_{i-1}, t + o, \pi_{i+1}, \dots, \pi_n] r_{i-1} = [\pi_{i-1}, \dots, t, t + o, \pi_{i+1}, \dots, \pi_n] = \pi^*,$$

т.е.  $\pi^* = \pi r_{i-1}$ .

**Случай 2.** Если  $t$  является свободным, а элемент  $\pi_i = t + o$  является первым элементом некоторого блока, то получаем новую перестановку  $\pi^*$ , как в Случае 1:  $\pi^* = \pi r_{i-1}$ .

**Случай 3.** Если  $t$  является свободным, а  $\pi_i = t + o$  и  $\pi_j = t - o$  являются последними элементами некоторых блоков, то получаем новую перестановку  $\pi^*$  последовательно:

$$\begin{aligned} [t, \dots, \pi_{i-1}, t + o, \dots, \pi_{j-1}, t - o, \dots, \pi_n] &\xrightarrow{r_i} [t + o, \dots, t, \dots, t - o, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_{i-1}} \\ [\dots, t + o, t, \dots, t - o, \dots, \pi_n] &\xrightarrow{r_j} [t - o, \pi_{j-1}, \dots, t, t + o, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_{j-i}} \\ &\rightarrow [\dots, t - o, t, t + o, \dots, \pi_n] = \pi^*, \end{aligned}$$

т.е. перестановка  $\pi^*$  получается из перестановки  $\pi$  с использованием четырех префикс-реверсалов следующего вида:  $\pi^* = \pi r_i r_{i-1} r_j r_{j-i}$ .

**Случай 4.** Если  $t$  находится в блоке, а элемент  $\pi_i = t + o$  является свободным, то получаем новую перестановку  $\pi^*$ , как в Случае 1, т.е.  $\pi^* = \pi r_{i-1}$ .

**Случай 5.** Если  $t$  находится в блоке, а элемент  $\pi_i = t + o$  является первым элементом некоторого блока, то получаем новую перестановку  $\pi^*$ , как в Случае 1:  $\pi^* = \pi r_{i-1}$ .

**Случай 6.** Если  $t$  находится в блоке, последним элементом которого является  $\pi_s = t + k \cdot o$ ,  $k > 0$ ,  $\pi_j = t - o$  является последним элементом другого блока, а  $\pi_i = t + (k + 1) \cdot o$  является свободным, то, в зависимости от позиций двух блоков и элемента  $t + (k + 1) \cdot o$ , новая перестановка  $\pi^*$  получается последовательно либо способом (a):

$$\begin{aligned} & [t, \dots, \pi_{s-1}, t+k \cdot o, \pi_{s+1}, \dots, \pi_{i-1}, t+(k+1) \cdot o, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, t-o, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_i} \\ & [t+(k+1) \cdot o, \pi_{i-1}, \dots, \pi_{s+1}, t+k \cdot o, \pi_{s-1}, \dots, t, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, t-o, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_{i-s}} \\ & [\dots, \pi_{i-1}, t+(k+1) \cdot o, t+k \cdot o, \pi_{s-1}, \dots, t, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, t-o, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_j} \\ & \quad [t-o, \dots, \pi_{i+1}, t, \dots, t+k \cdot o, t+(k+1) \cdot o, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_{j-i}} \\ & \quad [\dots, t-o, t, \dots, t+k \cdot o, t+(k+1) \cdot o, \dots, \pi_n] = \pi^*, \end{aligned}$$

либо способом (b):

$$\begin{aligned} & [t, \dots, \pi_{s-1}, t+k \cdot o, \pi_{s+1}, \dots, \pi_{j-1}, t-o, \pi_{j+1}, \dots, \pi_{i-1}, t+(k+1) \cdot o, \pi_{i+1} \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_i} \\ & [t+(k+1) \cdot o, \pi_{i-1}, \dots, \pi_{j+1}, t-o, \pi_{j-1}, \dots, \pi_{s+1}, t+k \cdot o, \pi_{s-1}, \dots, t, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_{i-s}} \\ & [\dots, \pi_{j-1}, t-o, \pi_{j+1}, \dots, \pi_{i-1}, t+(k+1) \cdot o, t+k \cdot o, \dots, t, \pi_{i+1}, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_i} \\ & \quad [t, \dots, t+k \cdot o, t+(k+1) \cdot o, \dots, \pi_{j+1}, t-o, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_{i-j+s}} \\ & \quad [\dots, t+(k+1) \cdot o, t+k \cdot o, \dots, t, t-o, \dots, \pi_n] = \pi^*. \end{aligned}$$

Таким образом, в Случае 6 (a) перестановка  $\pi^*$  получается из перестановки  $\pi$  с использованием четырех префикс-реверсалов следующего вида:  $\pi^* = \pi r_i r_{i-s} r_j r_{j-i}$ . В Случае 6 (b) перестановка  $\pi^*$  получается из перестановки  $\pi$  с использованием также четырех префикс-реверсалов, но они имеют такой вид:  $\pi^* = \pi r_i r_{i-s} r_i r_{i-j+s}$ .

**Случай 7.** Если  $t$  находится в блоке, последним элементом которого является  $\pi_i = t + k \cdot o$ ,  $k > 0$ , а  $\pi_j = t + (k + 1) \cdot o$  находится в некотором блоке, то, в зависимости от расположения  $\pi_j$  - в начале блока (a) или в конце блока (b), новая перестановка  $\pi^*$  получается последовательно следующим образом:

$$\begin{aligned} (a) : & [t, \dots, \pi_{i-1}, t+k \cdot o, \pi_{i+1}, \dots, t+(k+1) \cdot o, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_i} \\ & [t+k \cdot o, \pi_{i-1}, \dots, t, \pi_{i+1}, \dots, t+(k+1) \cdot o, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_{j-1}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & [\dots, t, \dots, t + k \cdot o, t + (k + 1) \cdot o, \dots, \pi_n] = \pi^*. \\
 (b) : & [t, \dots, \pi_{i-1}, t + k \cdot o, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, t + (k + 1) \cdot o, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_j} \\
 & [t + (k + 1) \cdot o, \pi_{j-1}, \dots, \pi_{i+1}, t + k \cdot o, \dots, t, \dots, \pi_n] \xrightarrow{r_{j-i}} \\
 & [\dots, t + (k + 1) \cdot o, t + k \cdot o, \dots, t, \dots, \pi_n] = \pi^*.
 \end{aligned}$$

Таким образом, в Случае 7 (a) перестановка  $\pi^*$  получается из перестановки  $\pi$  с использованием двух префикс-реверсалов следующего вида:  $\pi^* = \pi r_i r_{j-1}$ . В Случае 7 (b) перестановка  $\pi^*$  получается из перестановки  $\pi$  с использованием также двух префикс-реверсалов, но они имеют такой вид:  $\pi^* = \pi r_j r_{j-i}$ .

Если полученная перестановка  $\pi^*$  имеет  $n - 1$  смежностей, то  $\pi := \pi^*$  и переходим на **Шаг 2**, в противном случае  $\pi := \pi^*$  и повторяем **Шаг 1**.

**Шаг 2.** Перестановка, имеющая  $n - 1$  смежностей, состоит из одного блока. Возможны следующие случаи.

**Случай 8.** Пусть  $\pi = [i - 1, \dots, 1, n, \dots, i]$ , где  $\pi_i = n$ , то результирующая перестановка  $I_n$  получается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 [i - 1, \dots, 1, n, \dots, i] & \xrightarrow{r_n} [i, \dots, n, 1, \dots, i - 1] \xrightarrow{r_{n-i+1}} [n, \dots, i, 1, \dots, i - 1] \xrightarrow{r_n} \\
 [i - 1, \dots, 1, i, \dots, n] & \xrightarrow{r_{i-1}} [1, \dots, i - 1, i, \dots, n] = I_n,
 \end{aligned}$$

т.е. единичная перестановка получается из перестановки  $\pi$  с использованием четырех префикс-реверсалов так, что  $I_n = \pi r_n r_{n-i+1} r_n r_{i-1}$ .

**Случай 9.** Пусть  $\pi = [i, \dots, n, 1, \dots, i - 1]$ , где  $\pi_i = 1$ , то результирующая перестановка  $I_n$  получается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 [i, \dots, n, 1, \dots, i - 1] & \xrightarrow{r_{i-1}} [n, \dots, i, 1, \dots, i - 1] \xrightarrow{r_n} [i - 1, \dots, 1, i, \dots, n] \xrightarrow{r_{n-i+1}} \\
 [1, \dots, i - 1, i, \dots, n] & = I_n,
 \end{aligned}$$

т.е. единичная перестановка получается из перестановки  $\pi$  с использованием трех префикс-реверсалов так, что  $I_n = \pi r_{i-1} r_n r_{n-i+1}$ .

### Конец работы Алгоритма 2 (Гейтс, Пападимитроу)

На основе предложенного алгоритма была получена верхняя оценка на диаметр Рапсаке графа, которая автоматически следует из следующей теоремы.

**Теорема 3.3.1** [24] *Алгоритм 2 переводит любую перестановку в единичную не более, чем за  $(5n + 5)/3$  преобразований.*

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что если исходная перестановка имеет меньше, чем  $n - 1$  смежностей, то один из Случаев 1–7 всегда имеет место. Следовательно, алгоритм будет работать, пока не получится перестановка с  $n - 1$  смежностями. Для такой перестановки алгоритм продолжает работать в Случаях 8–9, преобразующих перестановку с  $n - 1$  смежностями и одним блоком в единичную перестановку, имеющую  $n$  смежностей и один блок. После этого алгоритм прекращает свою работу. При этом, в процессе работы алгоритма, по крайней мере, одна новая смежность появляется в перестановке и ни одна из существующих смежностей не исчезает. Остается показать, что для этого требуется не более, чем  $(5n + 5)/3$  преобразований.

Обозначим через  $x_i$ , где  $i = 1, \dots, 9$ , номер Случая в Алгоритме 2 и рассмотрим все преобразования, которые происходят в первых семи случаях, предполагая, что  $x_3 = x_6$ . Тогда общее число  $z$  преобразований, которые происходят в Случаях 1–7, запишем в виде:

$$z = x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + 2x_7,$$

где  $x_i$  умножается на число префикс–реверсалов, используемых для преобразования перестановки в соответствующем случае. При этом, Случай 3 дает нам следующие четыре подслучая, которые возникают в перестановке перед применением к ней последнего преобразования префикс–реверсалом. Верхняя часть стека перед применением последнего префикс–реверсала и элемент, соседний с элементом  $t - o$ , могут:

- 1) быть несмежными;
- 2) формировать новый блок;
- 3) объединять блок с одиночным элементом;
- 4) объединять два блока.

Тогда, в соответствии с этим будем различать четыре подслучая и писать  $x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$ .

Пусть  $a$  обозначает число смежностей в исходной перестановке  $\pi$ , тогда в соответствии с Таблицей 3.1, общее число  $n - 1$  смежностей в конце

Таблица 3.1: Число префикс–реверсалов, возникающих в Алгоритме 2, а также соответствующее увеличение числа смежностей и числа блоков.

Случай	1	2	31	32	33	34	4	5	7
число префикс–реверсалов	1	1	4	4	4	4	1	1	2
увеличение числа смежностей	1	1	2	3	3	3	1	1	1
изменение числа блоков	1	0	-1	0	-1	-2	0	-1	-1

работы Шага 1 Алгоритма 2 (с использованием Случаев 1–7) будет иметь вид:

$$n - 1 = a + x_1 + x_2 + 2x_{31} + 3x_{32} + 3x_{33} + 3x_{34} + x_4 + x_5 + x_7. \quad (3.3)$$

Пусть  $b$  обозначает число блоков в исходной перестановке  $\pi$ , тогда в соответствии с Таблицей 3.1 и с учетом того, что результирующая перестановка будет иметь только один блок, можно заключить, что:

$$b + x_1 - x_{31} - x_{33} - 2x_{34} - x_5 - x_7 = 1. \quad (3.4)$$

Заметим, что  $b \leq a$ , следовательно, из (3.3) имеем:

$$x_1 + x_2 + 2x_{31} + 3x_{32} + 3x_{33} + 3x_{34} + x_4 + x_5 + x_7 + b \leq n - 1. \quad (3.5)$$

Таким образом, при использовании Алгоритма 2, в самом худшем случае, потребуется максимизировать общее число преобразований

$$z = x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + 2x_7,$$

при условии выполнения (3.4) и (3.5).

Утверждается, что максимум будет достигаться для:

$$x_1 = (n + 1)/3,$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = x_{31} = (n - 2)/3,$$

$$x_4 = x_5 = x_7 = b = 0,$$

и при этих значениях мы получим  $z = (5n - 7)/3$ .

В самом деле, используя принцип двойственности в линейном программировании, нам достаточно минимизировать величину:

$$\omega = \xi_2 + (n - 1)\xi_3,$$

где величины  $\xi_2$  и  $\xi_3$  соответствуют изменению числа блоков и числа смежностей в перестановке, при условии соблюдения следующих неравенств (см. Таблицу 3.1):

$$\begin{aligned} \xi_2 + \xi_3 &\geq 1, \\ \xi_3 &\geq 1, \\ -\xi_2 + 2\xi_3 &\geq 4, \\ 3\xi_3 &\geq 4, \\ -\xi_2 + 3\xi_3 &\geq 4, \\ -2\xi_2 + 3\xi_3 &\geq 4, \\ \xi_3 &\geq 1, \\ -\xi_2 + \xi_3 &\geq 1, \\ -\xi_2 + \xi_3 &\geq 2, \\ \xi_2 + \xi_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы доказать наше утверждение, нужно найти пару  $(\xi_2, \xi_3)$ , удовлетворяющую вышеперечисленным неравенствам, а также равенству  $\omega = \xi_2 + (n - 1)\xi_3 = (5n - 7)/3$ . Такой парой оказываются значения  $\xi_2 = -2/3$ ,  $\xi_3 = 5/3$ .

Таким образом, Алгоритм 2 дает перестановку с  $n - 1$  смежностями не более, чем за  $(5n - 7)/3$  преобразований. Единичная перестановка получается из перестановки, имеющей  $n - 1$  смежностей, не более, чем за 4 преобразования, что следует из Случаев 8–9 Алгоритма 2. Таким образом, Алгоритм 2 переводит любую перестановку в единичную не более, чем за  $(5n + 5)/3$  преобразований.  $\square$

**Следствие 3.3.1** *Диаметр Рапсаке графа  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , ограничен сверху следующей величиной:*

$$\text{diam}(P_n) \leq (5n + 5)/3.$$

### 3.3.2 Нижняя оценка Гейтса и Пападимитроу на диаметр Рапсаке графа

Пусть  $\tau = [17536428]$ , а  $\tau_k = [1_k 7_k 5_k 3_k 6_k 4_k 2_k 8_k]$ , где  $m_k = m + 8(k - 1)$ , а  $k$  есть некоторое положительное целое число. Рассмотрим перестановку

$$\chi = \tau_1 \tau_2^r \tau_3 \tau_4^r \cdots \tau_{m-1} \tau_m^r, \quad (3.6)$$

где  $m$  является четным числом,  $n = |\chi| = 8m$ ,  $\tau = \tau_1$ , а  $\tau_k^r = \tau_i r_8 = 8_k 2_k 4_k 6_k 3_k 5_k 7_k 1_k$  для любого четного  $k \leq m$ .

Обозначим через  $f(\chi)$  число префикс-реверсалов, переводящих перестановку  $\chi$  в единичную перестановку. Тогда верна следующая теорема.

**Теорема 3.3.2** [24]  $17n/16 \leq f(\chi) \leq 19n/16$ .

*Доказательство.* Для того, чтобы показать верхнюю оценку, рассмотрим следующую последовательность преобразований:

$$\chi \rightarrow \tau_2 \tau_1^r \tau_3 \cdots \rightarrow \tau_2^r \tau_1^r \tau_3 \cdots \rightarrow \tau_1 \tau_2 \tau_3 \cdots \quad \text{и т.д.,}$$

при которых часть  $\tau_k$  перестановки  $\chi$ , имеющая четный нижний индекс, сначала переводится в начало перестановки, а потом возвращается на свое место, но уже без верхнего индекса  $r$ . На такое преобразование требуется три префикс-реверсала. Таким образом, за  $3n/16$  применения префикс-реверсалов мы получим перестановку  $\chi' = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \cdots \tau_{m-1} \tau_m$ .

Теперь для каждой копии  $\tau$  в  $\chi'$  будем повторять следующую последовательность из восьми преобразований префикс-реверсалами (для простоты изложения нижний индекс  $k$  опускается):

$$\begin{aligned} \chi' = x17536428y &\rightarrow 571x^r36428y \rightarrow 63x175428y \rightarrow 1x^r3675428y \rightarrow \\ &\rightarrow 45763x128y \rightarrow 67543x128y \rightarrow 76543x128y \rightarrow 21x^r345678y \rightarrow \\ &\rightarrow x12345678y. \end{aligned}$$

Поскольку  $n = 8m$ , то для таких преобразований нам понадобится  $n$  префикс-реверсалов, а в целом, понадобится  $19n/16$  префикс-реверсалов, чтобы перевести исходную перестановку  $\chi$  в единичную перестановку. Таким образом, мы получили верхнюю оценку  $f(\chi) \leq 19n/16$ .

Теперь докажем нижнюю оценку. Пусть

$$\chi \equiv \chi_0 \rightarrow \chi_1 \rightarrow \chi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \chi_{f(\chi)} \equiv I_n \quad (3.7)$$

является оптимальной последовательностью преобразований для перестановки  $\chi$ . Каждую из перестановок  $\chi_i$  для любого  $i = 1, \dots, f(\chi)$ , будем называть *ходом*. Будем называть ход  $k$ -стабильным, если в нем содержится фрагмент  $1_k 7_k \sigma 2_k 8_k$  (или обратный к нему), где  $\sigma$  является

перестановкой на элементах  $\{3_k, 4_k, 5_k, 6_k\}$ . Будем называть  $\chi_i$  *событием*, если  $\chi_{i-1}$  является  $k$ -стабильным для некоторого  $k$ , а  $\chi_i, \chi_{i+1}, \dots, \chi_{f(\chi)}$  таковыми не являются.

**Факт 1.** В последовательности (3.7) имеется ровно  $t$  событий.

*Доказательство.* Заметим, что  $\chi_0$  является  $k$ -стабильным для всех  $k = 1, \dots, t$ , а  $\chi_{f(\chi)}$  не является  $k$ -стабильным ни для какого  $k$ . Более того, ни какая из перестановок не может за одно преобразование прекратить быть как  $k_1$ -стабильной, так и  $k_2$ -стабильной для некоторых  $k_1 \neq k_2$ .  $\square$

Будем называть  $\chi_i$  *потерей*, если в  $\chi_i$  содержится не более смежностей, чем в  $\chi_{i-1}$ . (Здесь под смежностью в  $\sigma$  понимается такая пара  $(i, i+1)$ , что либо  $i < n$  и  $|\sigma_i - \sigma_{i+1}| = 1$ , либо  $i = n$  и  $\sigma_i = n$ ). Пусть  $w$  есть общее число потерь среди  $\{\chi_i : i = 1, \dots, f(\chi)\}$ .

**Факт 2.**  $n + w \leq f(\chi)$ .

*Доказательство.* Чтобы доказать этот факт достаточно заметить, что у перестановки  $\chi$  нет смежностей, а единичная перестановка  $I_n$  имеет  $n$  смежностей, и любой ход, который не является потерей, создает точно одну смежность.  $\square$

Из Факта 1 мы можем заключить, что поскольку в оптимальной последовательности (3.7) имеется ровно  $t$  событий, то она может быть представлена в следующем виде:

$$\chi_{i_1} \xrightarrow{*} \chi_{i_2} \xrightarrow{*} \chi_{i_3} \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} \chi_{i_m}, \quad (3.8)$$

где под операцией  $\xrightarrow{*}$  понимается транзитивное замыкание  $\rightarrow$ , т.е. все промежуточные преобразования опускаются, а учитываются только преобразования от события к событию.

**Факт 3.** Для всех  $j, 1 \leq j \leq t-1$ , найдется потеря  $\chi_l$ , где  $i_j \leq l \leq i_{j+1}$ .

*Доказательство.* Предположим, что это не так. Другими словами, предположим, что имеется такое событие  $i_j$  (кроме последнего), что все ходы  $\chi_l$ , где  $i_j \leq l \leq i_{j+1}$ , создают новую смежность, не разрушая при

это уже существующие смежности. Предположим, что  $k$  есть некоторый индекс, для которого  $\chi_{i_j-1}$  является  $k$ -стабильной перестановкой в последовательности 3.8. Тогда, не ограничивая общности, положим  $\chi_{i_j-1} = [x 1_k 7_k \sigma 2_k 8_k y]$ , где  $x$  и  $y$  некоторые последовательности целых чисел, а  $\sigma$  является перестановкой на элементах  $\{3_k, 4_k, 5_k, 6_k\}$ . Мы можем рассматривать такую перестановку, поскольку наша базовая перестановка  $\tau = [17536428]$  является симметричной, т.е.  $i + j = 9$  тогда и только тогда, когда  $\tau_i + \tau_j = 9$ . Для простоты изложения, мы опускаем далее индекс  $k$  и предполагаем, что  $\sigma = [5364]$  (в других случаях доказывается аналогично). Следовательно, последняя  $k$ -стабильная перестановка в последовательности 3.8 имеет вид:

$$\chi_{i_j-1} = [x 17536428y].$$

Возможны два случая.

*Случай 1.* Пусть  $x$  является пустой подпоследовательностью. Поскольку  $\chi_{i_j}$  не является ни потерей, ни  $k$ -стабильной, мы должны получить перестановку с новой смежностью:

$$\chi_{i_j} = [46357128y].$$

Теперь в соответствии с нашим предположением, мы не должны получить потерю до следующего события. Однако это невозможно, поскольку первый ход после  $\chi_{i_j}$ , в котором используется префикс-реверсал на более чем четырех элементах, будет являться потерей.

*Случай 2.* Пусть  $x$  не является пустой подпоследовательностью. Рассмотрим  $\chi_{i_j-1} = [x17546428y]$ . Поскольку  $\chi_{i_j}$  не является ни потерей, ни  $k$ -стабильной, то это возможно только в случае, когда  $x = 9z$  и  $\chi_{i_j} = [2463571z^r98y]$ . И вновь, в соответствии с нашим предположением, мы не должны получить потерю до следующего события. Это означает, что единственно возможные преобразования в перестановке возможны только на целых  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Следовательно,

$$\chi_{i_j} = [2463571z^r98y] \xrightarrow{*} [7654321z^r98y].$$

Однако, следующий ход будет являться потерей. □

Теперь доказательство нашей Теоремы следует из Фактов 1, 2 и 3:

$$f(\chi) \geq n + w \geq n + \frac{m}{2} = 17n/16.$$

□

**Следствие 3.3.2** *Диаметр Рамсаке графа  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , для  $n$  кратных 16, ограничен снизу следующей величиной:*

$$17n/16 \leq \text{diam}(P_n).$$

### 3.3.3 Улучшенные оценки Хейдари и Садбороу на диаметр Рамсаке графа

В своей работе [24] Гейтс и Пападимитроу отмечали, что нижнюю оценку можно легко улучшить, в частности, если рассмотреть некоторую базовую перестановку длины 7. Кроме этого, они выдвинули гипотезу, что для их “трудной” перестановки  $\chi$  (см. (3.6)) требуется в точности  $19n/16$  преобразований, т.е.  $f(\chi) = 19n/16$ .

Хейдари и Садбороу в своей работе [28] улучшили нижнюю оценку и показали, что гипотеза Гейтса и Пападимитроу о том, что  $f(\chi) = 19n/16$  где  $\chi$  определяется (3.6) неверна, а именно, им удалось найти иную последовательность префикс-реверсалов, которая дает для перестановки  $\chi$  следующую верхнюю оценку:

$$f(\chi) \leq 9n/8 + 2.$$

Улучшенная нижняя оценка получается путем рассмотрения базовой перестановки  $\zeta = [1753642]$ , для которой определяется перестановка  $\zeta_k = [1_k 7_k 5_k 3_k 6_k 4_k 2_k]$ , где  $m_k = m + 7(k - 1)$ , а  $k$  есть некоторое положительное целое число. Рассмотрим перестановку

$$\varphi_n = \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_m, \tag{3.9}$$

где  $m$  является четным числом,  $n = |\chi| = 7m$ ,  $\zeta = \zeta_1$ .

Обозначим через  $f(\varphi_n)$  число префикс-реверсалов, переводящих перестановку  $\varphi_n$  в единичную перестановку. Тогда верна следующая теорема.



**Теорема 3.3.3** [28]  $15n/14 \leq f(\chi)$  для всех  $n \equiv 0 \pmod{14}$ .

*Доказательство.* Доказательство данной теоремы базируется на доказательстве Теоремы 3.3.2. Пусть

$$\varphi \equiv \varphi_0 \rightarrow \varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_{f(\varphi_n)} \equiv I_n \quad (3.10)$$

является оптимальной последовательностью преобразований для перестановки  $\varphi_n$ . Каждую из перестановок  $\varphi_i$  для любого  $i = 1, \dots, f(\varphi_n)$ , будем называть *ходом*. Ход называется *k-стабильным*, если в нем содержится подпоследовательность  $[1_k 7_k \sigma 2_k 8_k] = [1_k 7_k \sigma 2_k 1_{k+1}]$  (или обратная к ней), где  $\sigma$  является перестановкой на элементах  $\{3_k, 4_k, 5_k, 6_k\}$ . (Поллагая, что  $8_k = 1_{k+1}$  находится в соответствующем месте наверху стека). Будем называть  $\varphi_i$  *событием*, если  $\varphi_{i-1}$  является *k-стабильным* для некоторого  $k$ , а  $\varphi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_{f(\varphi_n)}$  таковыми не являются.

**Факт 1.** В последовательности (3.10) имеется ровно  $m$  событий.

Доказательство этого факта следует из того, что  $\varphi_0$  является *k-стабильным* для всех  $k = 1, \dots, m$ , а  $\varphi_{f(\varphi_n)}$  не является *k-стабильным* ни для какого  $k$ . И кроме того, ни какая из перестановок не может за одно преобразование прекратить быть одновременно как *k<sub>1</sub>-стабильной*, так и *k<sub>2</sub>-стабильной* для некоторых  $k_1 \neq k_2$ .

Будем называть  $\varphi_i$  *потерей*, если в  $\varphi_i$  содержится не более смежностей, чем в  $\varphi_{i-1}$ . (Здесь под смежностью в  $\tau = t_1 t_2 \dots t_n$  понимается такая пара  $(i, i+1)$ , что либо  $i < n$  и  $|t_i - t_{i+1}| = 1$ , либо  $i = n$  и  $t_n = n$ ). Пусть  $w$  есть общее число потерь среди  $\{\varphi_i : i = 1, \dots, f(\varphi_n)\}$ .

**Факт 2.**  $n + w \leq f(\chi)$ .

Чтобы доказать этот факт, достаточно заметить, что у перестановки  $\varphi_n$  нет смежностей, а единичная перестановка  $I_n$  имеет  $n$  смежностей, и любой ход, который не является потерей, создает точно одну смежность.

Из Факта 1 заключаем, что в оптимальной последовательности (3.10) имеется  $m$  событий и она может быть представлена в виде:

$$\varphi_{i_1} \xrightarrow{*} \varphi_{i_2} \xrightarrow{*} \varphi_{i_3} \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} \varphi_{i_m}, \quad (3.11)$$

где операция  $\rightarrow^*$  является транзитивным замыканием  $\rightarrow$  (т.е. все промежуточные преобразования опускаются, а учитываются только преобразования от события к событию).

**Факт 3.** Для всех  $j, 1 \leq j \leq t-1$ , найдется потеря  $\varphi_l$ , где  $i_j \leq l \leq i_{j+1}$ .

*Доказательство.* Предположим, что это не так. Другими словами, предположим, что имеется такое событие  $i_j$  (кроме последнего), что все ходы  $\varphi_l$ , где  $i_j \leq l \leq i_{j+1}$ , создают новую смежность, не разрушая при это уже существующие смежности. Предположим, что  $k$  есть некоторый индекс, для которого  $\varphi_{i_{j-1}}$  является  $k$ -стабильной перестановкой в последовательности (3.11). Тогда, не ограничивая общности, положим

$$\varphi_{i_{j-1}} = [x 1_k 7_k \sigma 2_k 8_k y] = [x 1_k 7_k \sigma 2_k 1_{k+1} y],$$

где  $x$  и  $y$  некоторые последовательности целых чисел, а  $\sigma$  является перестановкой на элементах  $\{3_k, 4_k, 5_k, 6_k\}$ . Мы можем рассматривать такую перестановку, поскольку перестановка  $\zeta = [17536428]$  является симметричной, т.е.  $i+j = 9$  тогда и только тогда, когда  $\zeta_i + \zeta_j = 9$ . Для простоты изложения, мы опускаем далее индекс  $k$  и предполагаем, что  $\sigma = [5364]$  (в других случаях доказывается аналогично). Таким образом, последняя  $k$ -стабильная перестановка в последовательности (3.11) имеет вид:

$$\varphi_{i_{j-1}} = [x 17536428y].$$

Возможны два случая.

*Случай 1.* Пусть  $x$  является пустой подпоследовательностью. Поскольку  $\chi_{i_j}$  не является ни потерей, ни  $k$ -стабильной, мы должны получить перестановку с новой смежностью:

$$\varphi_{i_j} = [46357128y].$$

Теперь в соответствии с нашим предположением, мы не должны получить потерю до следующего события. Однако это невозможно, поскольку первый же ход после  $\chi_{i_j}$ , в котором используется префикс-реверсал на более чем четырех элементах, будет являться потерей. Заметим, что элемент  $8_k = 1_{k+1}$  остается неизменным при применении любого префикс-

реверсала на первых четырех элементах, а значит, все такие преобразования никак не влияют на то, содержит (или не содержит) перестановка  $\varphi_{i_j-1}$  подпоследовательность  $[1_{k+1}7_{k+1}\sigma 2_{k+1}8_{k+1}]$  (или обратную к ней) для любой  $\sigma$ . Кроме этого, поскольку  $1_k = 8_{k-1}$  является первым элементом в  $\varphi_{i_j-1}$  и, следовательно, не может являться соседним с элементом  $2_{k-1}$ , то событие  $\varphi_{i_j-1}$  не содержит подпоследовательность  $[8_{k-1}2_{k-1}\sigma 7_{k-1}1_{k-1}]$  (или обратную к ней) для любой  $\sigma$ . Так как любой префикс-реверсал на первых четырех элементах не будет создавать такую подпоследовательность и не будет ее ломать, следовательно, не найдется такого события, созданного указанными префикс-реверсалами, которое было бы  $(k-1)$ -стабильным или  $(k+1)$ -стабильным.

*Случай 2.* Пусть  $x$  является непустой подпоследовательностью. Рассмотрим  $\varphi_{i_j-1} = [x17546428y]$ . Поскольку  $\varphi_{i_j}$  не является ни потерей, ни  $k$ -стабильной, то это возможно только в случае, когда  $x = 9z$  и  $\varphi_{i_j} = [2463571z^r98y]$ . И вновь, в соответствии с нашим предположением, мы не должны получить потерю до следующего события. Это означает, что единственно возможные преобразования в перестановке возможны только на целых  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Следовательно,

$$\varphi_{i_j} = [2463571z^r98y] \xrightarrow{*} [7654321z^r98y].$$

Однако, следующий ход будет являться потерей. Предположим, что  $\varphi_{i_j}$  содержит подпоследовательность  $[1_{k+1}7_{k+1}\sigma 2_{k+1}8_{k+1}]$  для некоторой  $\sigma$ . Напомним, что  $8_{k-1} = 1_k$ , поэтому любой ход, в котором применяется префикс-реверсал на элементах  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , включая событие  $\varphi_{i_j} = [2463571z^r98y]$ , не меняют статус  $(k-1)$ -стабильности. Аналогично, для  $(k+1)$ -стабильности, поскольку элемент  $8_k = 1_{k+1}$  остается неизменным.  $\square$

Теперь доказательство Теоремы 3.3.3 следует из Фактов 1, 2 и 3:

$$f(\varphi_n) \geq n + w \geq n + \frac{m}{2} = 15n/14.$$

$\square$

Теорема 3.3.3 автоматически дает нам улучшенную нижнюю оценку на диаметр Рамсаке графа.

**Следствие 3.3.3** Диаметр Рамсаке графа  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , для  $n$  кратных 14, ограничен снизу следующей величиной:

$$15n/14 \leq \text{diam}(P_n).$$

### 3.3.4 Точные значения диаметра Рамсаке графа

В своей работе 1997 г. Хейдари и Садбороу [28] привели также точные значения диаметра Рамсаке графа  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , вычисленные для  $n \leq 13$ . Диаметр графа для  $n = 14, 15$  стал известен в 2005 г., благодаря вычислениям Й. Коуноике, К. Канеко и Й. Шинано [39]. В своем алгоритме они использовали подход, предложенный Хейдари и Садбороу в [28]. Параллельные вычисления позволили этим же авторам [3] в 2006 г. получить точные значения диаметра графа для  $n = 16, 17$ .

Таблица точных значений диаметра  $\text{diam}(P_n)$  Рамсаке графа  $P_n$  для  $2 \leq n \leq 17$  выглядит следующим образом:

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\text{diam}(P_n)$	1	3	4	5	7	8	9	10	11	13	14	15	16	17	18	19

## 3.4 Burnt Pancake problem

Следующее обобщение для Рамсаке problem было сделано Гейтсом и Пападимитроу [24]. Они предложили рассмотреть Burnt Pancake problem в предположении, что всякий блинчик имеет одну “подгоревшую” (burnt) сторону и, более того, что в стопке обязательно найдется хотя бы один блинчик, лежащий подгоревшей стороной кверху.

Тогда Burnt Pancake problem формулируется следующим образом:

*каково минимальное количество флипов, позволяющих упорядочить стопку подгоревших с одной стороны блинчиков разного размера в соответствии с их размером от минимального наверху до максимального внизу так, чтобы все блинчики были перевернуты кверху своей неподгоревшей стороной?*

Здесь под флипом, как и ранее в Pancake problem, понимается операция переворачивания стопки блинчиков от верхнего до некоторого фиксированного. Таким образом, если перенумеровать все блинчики в стопке от 1 до  $n$  в соответствии с их размером, а также добавить к этим числам знаки “+” и “-”, отмечая тем самым неподгоревшую и подгоревшую стороны, соответственно, то получим некоторую помеченную перестановку, на которой знакопеременный префикс-реверсал выполняет ту же операцию, что и флип на стопке блинчиков. Тогда задача сводится к определению минимального расстояния между произвольной помеченной перестановкой  $\pi^\sigma$  и единичной перестановкой  $I_n = [1\ 2\ \dots\ n]$  в Burnt pancake графе  $BP_n$ , то есть к определению диаметра данного графа. Граф  $BP_n$  был введен ранее в разделе 1.3.7. Для простоты изложения будем иногда опускать “+” в представлении помеченной перестановки.

Эта задача имеет непосредственное отношение к молекулярной биологии, поскольку помеченные перестановки, как и обычные перестановки, также используются для представления геномов, а знакопеременные префикс-реверсалы соответствуют некоторым мутациям, которые могут происходить в геноме. В частности, известно [27], что набор генов в капусте можно представить в виде помеченной перестановки  $[1, -5, 4, -3, 2]$ , в то время, как в репе эти же самые гены упорядочены как в единичной перестановке  $[1, 2, 3, 4, 5]$ .

Как и в случае Pancake графа, задача определения диаметра Burnt Pancake графа не решена, известны лишь верхние и нижние оценки, а также точные значения диаметра вплоть до  $n = 18$ .

Простую верхнюю оценку можно получить, используя следующий алгоритм сортировки перестановки  $\pi^\sigma$  знакопеременными префикс-реверсалами. Напомним, что Burnt Pancake граф порождается двумя типами знакопеременных префикс-реверсалов, а именно, знакопеременными префикс-реверсалами  $r_{1i}^\sigma$ , меняющими порядок элементов перестановки  $\pi^\sigma$  в интервале  $[1, \dots, i]$  и знак у каждого элемента из этого интервала, а также знакопеременным префикс-реверсалом  $r_{11}^\sigma$ , меняющим знак первого элемента  $\pi_1^\sigma$ . Будем называть  $r_{1i}^\sigma$  знакопеременными префикс-реверсалами первого типа, а  $r_{11}^\sigma$  - знакопеременным префикс-реверсалом второго типа.

### Алгоритм 3

(простая сортировка знакопеременными префикс–реверсалами)

**Шаг 0.** Входные данные: помеченная перестановка  $\pi^\sigma$ .

**Шаг 1.** Применить к  $\pi^\sigma$  знакопеременный префикс–реверсал первого типа, перемещающий наибольший элемент на первое место.

**Шаг 2.** Применить к первому элементу полученной перестановки знакопеременный префикс–реверсал второго типа, если требуется поменять знак первого элемента.

**Шаг 3.** Применить к перестановке, полученной на Шаге 2, знакопеременный префикс–реверсал первого типа, переворачивающий всю перестановку.

**Шаг 4.** Применить к неотсортированной части перестановки знакопеременный префикс–реверсал первого типа, перемещающий наибольший элемент на первое место.

**Шаг 5.** Применить к первому элементу полученной перестановки знакопеременный префикс–реверсал второго типа, если требуется поменять знак первого элемента.

**Шаг 6.** Применить к перестановке, полученной на Шаге 5, знакопеременный префикс–реверсал первого типа, переворачивающий неотсортированную часть перестановки.

Повторять шаги 4–6 для неотсортированной части перестановки до тех пор, пока все элементы исходной перестановки не будут отсортированы.

Очевидно, что **Алгоритм 3** дает следующую верхнюю оценку на диаметр *Burnt Pancake* графа:

$$\text{diam}(BP_n) \leq 3n.$$

Гейтс и Пападимитроу [24] дали следующие оценки на диаметр *Burnt Pancake* графа:

$$3n/2 - 1 \leq \text{diam}(BP_n) \leq 2n + 3.$$

### 3.4.1 Улучшенные оценки на диаметр Burnt Pancake графа

Первая улучшенная верхняя оценка на диаметр Burnt Pancake графа была получена Коэном и Блюмом [16] в 1995 г. Они показали, что

$$\text{diam}(BP_n) \leq 2n.$$

Следующие рассуждения использовались ими для получения этого результата. Два последовательных элемента  $p$  и  $p + 1$  в перестановке называются *связанными*, если они располагаются либо как  $(p, p + 1)$ , либо как  $(-(p + 1), -p)$ . (Заметим, что если в перестановке имеются фрагменты  $(p + 1, p)$  или  $(-p, -(p + 1))$ , то элементы  $p$  и  $p + 1$  связанными не являются). Очевидно, что если  $p$  и  $p + 1$  являются связанными, то их не следует разъединять в процессе сортировки и если в перестановке имеется  $n$  связностей (с учетом связности первого и последнего элементов), то очевидно, что она отсортирована.

С этой точки зрения, алгоритм сортировки помеченной перестановки знакопеременными префикс-реверсалами дает  $2n$  операций в худшем случае, который возникает, в частности, на отрицательной единичной перестановке  $-I_n = [-1, -2, \dots, -n]$ .

Алгоритм сортировки  $-I_n$  описывается следующим образом.

#### Алгоритм 4

(сортировка  $-I_n$  знакопеременными префикс-реверсалами)

**Шаг 1.** Применить к перестановке  $r_{1,n}^\sigma$ .

**Шаг 2.** Применить к перестановке  $r_{1,n-1}^\sigma$ .

**Шаг 3.** Повторять Шаги 1 и 2 ровно  $n$  раз.

Очевидно, что **Алгоритм 4** сортирует перестановку  $-I_n$  ровно за  $2n$  шагов. Например, сортировка перестановки  $-I_4$  этим алгоритмом выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} [-1 - 2 - 3 - 4] &\xrightarrow{r_4} [+4 + 3 + 2 + 1] \xrightarrow{r_3} [-2 - 3 - 4 + 1] \xrightarrow{r_4} [-1 + 4 + 3 + 2] \xrightarrow{r_3} \\ [-3 - 4 + 1 + 2] &\xrightarrow{r_4} [-2 - 1 + 4 + 3] \xrightarrow{r_3} [-4 + 1 + 2 + 3] \xrightarrow{r_4} [-3 - 2 - 1 + 4] \xrightarrow{r_3} \\ &\xrightarrow{r_3} [+1 + 2 + 3 + 4] \end{aligned}$$

Кроме этого, легко показать, что для любой другой перестановки, отличной от  $-I_n$ , связность любых двух элементов можно обеспечить за два знакопеременных префикс-реверсала. При этом предполагается, что хотя бы один из элементов в перестановке имеет отрицательный знак.

Тогда, если один из элементов имеет отрицательный знак, а другой положительный, то возможны следующие ситуации:

$$[\dots p \dots - (p + 1) \dots] \rightarrow [p + 1 \dots - p \dots] \rightarrow [\dots - (p + 1), -p \dots],$$

$$[\dots - (p + 1) \dots p \dots] \rightarrow [-p \dots p + 1 \dots] \rightarrow [\dots p, p + 1 \dots].$$

Если оба элемента имеют отрицательные знаки, то здесь достаточно рассмотреть только такой случай:

$$[\dots - (p + 1) \dots - p \dots] \rightarrow [p + 1 \dots - p \dots] \rightarrow [\dots - (p + 1), -p \dots].$$

Если же элемент  $-(p + 1)$  расположен в помеченной перестановке правее элемента  $-p$ , то имеем ситуацию, возникающую в отрицательной единичной перестановке, сортировка которой осуществляется Алгоритмом 4.

Таким образом, поскольку одна связность возникает в произвольной помеченной перестановке, отличной от  $-I_n$ , с использованием не более, чем двух знакопеременных префикс-реверсалов, а всего нужно получить  $n$  связностей, следовательно, любая помеченная перестановка может быть отсортирована не более, чем  $2n$  знакопеременными префикс-реверсалами. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.4.1** [16]  $\text{diam}(BP_n) \leq 2n$ .

В этой же работе [16] Коэну и Блюму удалось найти более структурированный алгоритм отрицательной единичной перестановки  $-I_n$ , который позволил немного улучшить оценку Теоремы 3.4.1. Кроме этого, в предположении, что  $-I_n$  является наихудшей перестановкой для сортировки знакопеременными префикс-реверсалами, они немного улучшили оценку Гейтса и Пападимитроу. в результате чего получили следующие оценки:

$$3n/2 \leq \text{diam}(BP_n) \leq 2n - 2.$$



В 1997 г. Хейдари и Садбороу в своей работе [28] также в предположении, что  $-I_n$  является наихудшей перестановкой для сортировки знакопеременными префикс-реверсалами, улучшили верхнюю оценку и показали, что  $diam(BP_n) \leq 3(n+1)/2$  для всех  $n \equiv 3 \pmod{4}$  и  $n \geq 23$ .

Таким образом, следующие оценки на диаметр Burnt Pancake графа имеют место:

$$\frac{3n}{2} \leq diam(BP_n) \leq \frac{3(n+1)}{2}.$$

### 3.4.2 Точные значения диаметра Burnt Pancake графа

Точные значения диаметра Burnt Pancake графа  $BP_n$ , вычисленные для  $1 \leq n \leq 18$  были впервые приведены Хейдари и Садбороу [28].

Пусть  $D \equiv diam(BP_n)$ , тогда таблица этих значений выглядит следующим образом:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$D$	1	4	6	8	10	12	14	15	17	18	19	21	22	23	24	26	28	29

## Глава 4

### Сортировка реверсалами

Как было отмечено ранее в Разделах 3.3 и 3.4 всякий геном представим в виде перестановки или помеченной перестановки, элементы которых соответствуют некоторым генам. В 1986 г. Палмером и Хердоном [49], а позднее Ханнехали и Певзнером в 1999 г. было показано, что префикс-реверсалы на перестановках и знакопеременные префикс-реверсалы на помеченных перестановках соответствуют некоторым мутациям, которые могут происходить в геноме.

Кроме этого, в 1992 и 1994 гг. Саньковым и Кесесиоглу было показано, что одним из способов мутации является следующий: при переходе от одного вида к другому набор генов останется одним и тем же, но изменится порядок записи генов аналогично тому, как это происходит при применении реверсала к перестановке или знакопеременного реверсала к помеченной перестановке [53, 36]. Напомним, что под реверсалом  $r_{ij}$  понимается перестановка, меняющая порядок элементов внутри интервала  $[i, j]$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , перестановки  $\pi$  при умножении на нее справа, т.е.

$$[\dots \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1} \pi_j \dots] \cdot r_{ij} = [\dots \pi_j \pi_{j-1} \dots \pi_{i+1} \pi_i, \dots].$$

А под знакопеременным реверсалом  $r_{ij}^\sigma$  понимается перестановка, меняющая порядок элементов внутри интервала  $[i, j]$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ , перестановки  $\pi^\sigma$  вместе с изменением знака этих элементов при умножении на нее справа, т.е.

$$[\dots, \pi_i, \bar{\pi}_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, \pi_j, \dots] \cdot r_{ij}^\sigma = [\dots, \bar{\pi}_j, \bar{\pi}_{j-1}, \dots, \pi_{i+1}, \bar{\pi}_i, \dots].$$

Анализ геномов, мутации которых на языке перестановок представимы в виде реверсалов и знакопеременных реверсалов, приводят к комби-

наторной задаче, которая в литературе называется *сортировка реверсалами*. Под эволюционным расстоянием в данном случае понимается число мутаций, соответствующих операции реверсала или знакопеременного реверсала. Такое расстояние между перестановками называют обычно *реверсальным расстоянием*.

Математический анализ этой задачи был начат в 1992 г. Саньковым, а затем продолжен другими авторами. В рамках данной задачи имеется две алгоритмические подзадачи.

**I.** Первая состоит в том, чтобы найти реверсальное расстояние  $d(\tau_1, \tau_2)$  между двумя перестановками  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Заметим, что реверсальное расстояние между  $\tau_1$  и  $\tau_2$  совпадает с реверсальным расстоянием между  $\pi = \tau_2^{-1}\tau_1$  и единичной перестановкой  $I_n$ .

Почти в одно и то же время Саньков и Кесесиоглу [37] в 1995 г., а также Банфа и Певзнер [10] в 1996 г., показали, что

$$\max_{\pi \in Sym_n} d(\pi, I) = n - 1.$$

Очевидно, что реверсальное расстояние между перестановками соответствует расстоянию в реверсальном графе  $R_n$ , который определяется на симметрической группе  $Sym_n$  и порождается реверсалами из множества  $R = \{r_{i,j} \in Sym_n, 1 \leq i < j \leq n\}$  (см. Раздел 1.3.6). Таким образом, диаметр данного графа имеет вид:

$$diam(R_n) = n - 1.$$

Данное значение диаметра достигается на перестановках Голлана  $\gamma_n$ , а также обратным к ним, где  $\gamma_n$  определяются следующим образом:

$$\gamma_n = \begin{cases} 3\ 1\ 5\ 2\ 7\ 4 \dots n-3\ n-5\ n-1\ n-4\ n\ n-2, & \text{если } n \text{ четное,} \\ 3\ 1\ 5\ 2\ 7\ 4 \dots n-6\ n-2\ n-5\ n\ n-3\ n-1, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

В случае помеченных перестановок, требуется найти реверсальное расстояние  $\rho(\tau_1^\sigma, \tau_2^\sigma)$  между помеченными перестановками  $\tau_1^\sigma$  и  $\tau_2^\sigma$ , или между  $\pi^\sigma = (\tau_2^\sigma)^{-1}\tau_1^\sigma$  и единичной положительной перестановкой  $I_n$ . Кнудом в Упражнении 5.1.4–43 [40] было показано, что для сортировки помеченной перестановки знакопеременными префикс-реверсалами требуется не более, чем  $n + 1$  операций для любого  $n > 3$ , т.е.

$$\max_{\pi^\sigma \in B_n} \rho(\pi^\sigma, I) = n + 1.$$

Поскольку реверсальное расстояние между помеченными перестановками соответствует расстоянию в реверсальном графе  $BR_n$ , который определяется на гипероктаэдральной группе  $B_n$  и порождается знакопеременными реверсалами из множества  $R^\sigma = \{r_{ij}^\sigma \in B_n, 1 \leq i < j \leq n\}$  (см. Раздел 1.3.7). Таким образом, диаметр данного графа имеет вид:

$$\text{diam}(BR_n) = n + 1.$$

Данное значение диаметра достигается на следующих перестановка:

$$\pi^\sigma = \begin{cases} +n, +(n-1), \dots, +1, & \text{если } n \text{ четное,} \\ +2, +1, +3, +n, +(n-1), \dots, +4, & \text{если } n > 3 \text{ нечетное.} \end{cases}$$

В 2001 г. было показано, что для помеченных перестановок реверсальное расстояние вычисляется за линейное время [9].

**II.** Второй алгоритмической подзадачей рассматриваемой задачи является восстановление последовательности реверсалов, реализующей реверсальное расстояние между двумя перестановками. Оказалось, что такая последовательность не является единственной для одной и той же пары перестановок [12].

В 1994 г. Саньков и Кесесиоглу [36] доказали, что эта проблема является  $NP$ -трудной для непомеченных перестановок, в то время как для помеченных перестановок эта задача имеет полиномиальное решение, что было показано Ханнехали и Певзнером [27] в 1999 г. Наилучший приближенный алгоритм для сортировки непомеченных перестановок реверсалами был предложен Кристи [18]. Одним из наиболее эффективных алгоритмов сортировки помеченных перестановок знакопеременными реверсалами считается алгоритм Каплана и Вербинина [35], который был ими предложен в 2003 г.

Более полную информацию в рамках данной задачи можно найти в книгах Певзнера [50], а также Санькова и Эль-Мабрука [54].

## Глава 5

# Эффективное восстановление вершин в графе

Задача эффективного восстановления вершин в графе была поставлена В.И. Левенштейном в теории кодирования и первоначально формулировалась как задача эффективного распознавания объектов (например, последовательности символов) по его образцам, искаженным ошибками заданного типа, таких как замещение, транспозиция, удаление и вставка символов [66]. Объекты (последовательности) рассматриваются как вершины  $V$  графа  $\Gamma = (V, E)$ , где  $\{v, u\} \in E$  тогда и только тогда, когда имеются одиночные ошибки, переводящие вершину  $v$  в вершину  $u$ , а также вершину  $u$  в вершину  $v$ . Тогда задача эффективного восстановления вершин в графе формулируется следующим образом.

*Метрическим шаром* радиуса  $r$ , где  $1 \leq r \leq \text{diam}(\Gamma)$ , с центром в вершине  $v \in V(\Gamma)$  называют множество

$$B_r(v) = \{u \in V(\Gamma) : d(v, u) \leq r\}.$$

Рассмотрим такие метрические шары  $B_r(v)$  и  $B_r(u)$ , пересечение которых непусто. Обозначим через  $N(\Gamma, r)$  максимальное значение  $|B_r(v) \cap B_r(u)|$  для всех пар вершин  $v$  и  $u$  графа  $\Gamma$ , т.е.

$$N(\Gamma, r) = \max_{v, u \in V, v \neq u} |B_r(v) \cap B_r(u)|. \quad (5.1)$$

Тогда любая вершина  $v$  однозначно определяется  $N(\Gamma, r) + 1$  числом вершин из метрического шара  $B_r(v)$ . Такое восстановление вершины по ее локальному окружению называют также эффективным восстановлением.

Заметим, что поскольку в любом простом связном графе  $\Gamma = (V, E)$  неравенство  $|B_r(v) \cap B_r(u)| > 0$ ,  $v \neq u$ , выполняется только в случае, когда  $1 \leq d(v, u) \leq 2r$ , то имеет место следующее соотношение:

$$N(\Gamma, r) = \max_{1 \leq s \leq 2r} N_s(\Gamma, r),$$

где

$$N_s(\Gamma, r) = \max_{v, u \in V; d(v, u) = s} |B_r(v) \cap B_r(u)|.$$

Кроме этого,  $N_1(\Gamma, 1) = \lambda + 2$  и  $N_2(\Gamma, 1) = \mu$ , следовательно,

$$N(\Gamma, 1) = \max(\lambda + 2, \mu), \quad (5.2)$$

где под  $\lambda$  и  $\mu$  понимаются, по аналогии с дистанционно-регулярными графами, число общих соседей у любых двух смежных и любых двух несмежных вершин в графе, соответственно.

Из этих формул, в частности, незамедлительно следуют результаты для решеточного графа  $L_2(q)$  и треугольного графа  $T(n)$ , которые были определены ранее в Разделах 1.3.3 и 1.3.4, соответственно. В самом деле, поскольку  $\lambda = n - 2$  и  $\mu = 4$  для  $T(n)$ ,  $n \geq 4$ , то  $N(T(n), 1) = n$ . Аналогично, для  $L_2(q)$  имеем  $N(L_2(q), 1) = q$ , поскольку  $\lambda = q - 2$  и  $\mu = 2$  в этом случае.

Несмотря на то, что данная задача основана на метрических шарах в графе, она имеет принципиальное отличие от традиционных задач упаковки [17]. Кроме этого, она существенно отличается от традиционных задач хранения и передачи закодированных сообщений, поскольку речь идет о восстановлении произвольного объекта из заданного множества. Задачи распознавания неизвестного объекта по его образцам встречаются в различных областях естествознания, в частности, в вычислительной технике, химии, генетике.

Первые результаты в решении этой задачи были опубликованы Левенштейном [66] в 1997 для дистанционно-транзитивных графов, традиционно используемых в теории кодирования. Это графы Хэмминга и Джонсона, которые ранее были определены в Разделах 1.3.3 и 1.3.4, соответственно.

## 5.1 Граф Хэмминга $L_n(q)$

Граф Хэмминга  $L_n(q)$  является графом Кэли. Напомним, что он определяется на Хэмминговом пространстве  $F_q^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $q \geq 2$ , с метрикой Хэмминга, т.е. в графе имеется ребро  $\{x, y\}$  тогда и только тогда, когда  $d(x, y) = 1$ .

**Теорема 5.1.1** [66], [44] Для любых  $n \geq 2$ ,  $q \geq 2$  и  $r \geq 1$ ,

$$N(L_n(q), r) = q \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n-1}{i} (q-1)^i. \quad (5.3)$$

Любой вектор  $x = (x_1, \dots, x_n) \in F_q^n$  может быть восстановлен из  $M = N(L_n(q), r) + 1$  любых различных векторов  $y_1, \dots, y_M$ , лежащих в метрическом шаре  $B_r(x)$ . При этом, если все эти  $M$  векторов записаны, как столбцы матрицы размерности  $n \times M$ , то применение мажоритарного алгоритма к строкам этой матрицы даст нам искомый вектор  $x$ . Координаты  $x_i$  искомого вектора  $x$  равны тому значению из  $q$  элементов, которые в  $i$ -м ряду появляются чаще.

Например, для  $n = 5$ ,  $q = 2$ ,  $r = 2$  имеем  $N(L_5(2), 2) = 10$  и следующая матрица размерности  $5 \times 11$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

позволит нам однозначно восстановить искомый вектор  $x \in L_5(2)$  как  $x = (00001)$ .

В частности, из (5.3) также следует, что для решеточного графа  $L_2(q)$  имеем

$$N(L_2(q), 1) = q,$$

что было ранее получено по формуле (5.2), и

$$N(L_2(q), 2) = q^2.$$

## 5.2 Графа Джонсона $J(n, m)$

Граф Джонсона  $J(n, m)$  не является графом Кэли. По определению вершинами  $J(n, m)$  являются  $m$ -подмножества данного  $n$ -множества  $X$ , и вершины  $x, y$  смежны тогда и только тогда, когда они пересекаются на  $(m - 1)$ -множествах.

**Теорема 5.2.1** [66], [44] Для любых  $n \geq 2$ ,  $m \geq 1$  и  $r \geq 1$ ,

$$N(J(n, m), r) = n \sum_{i=0}^{r-1} \binom{m-1}{i} \binom{n-m-1}{i} \frac{1}{i+1}. \quad (5.4)$$

Любой вектор  $x = (x_1, \dots, x_n) \in J(n, m)$  может быть восстановлен из  $M = N(J(n, m)) + 1$  любых различных векторов  $y_1, \dots, y_M$ , лежащих в метрическом шаре  $B_r(x)$ . При этом, если все выбранные  $M$  векторов записаны, как столбцы матрицы размерности  $n \times M$ , то применение порогового алгоритма к строкам этой матрицы даст нам искомый вектор  $x$ . В частности, если  $q = 2$ , то координата  $x_i$  искомого вектора  $x$  равна 1, если число единиц в  $i$ -ой строке превышает порог  $\tau = N(J(n, m), r) m/n$ , и равна 0 в противном случае. В случае, когда  $q \geq 3$ , пороговый алгоритм имеет более обобщенный вид [44].

Например, для  $n = 5$ ,  $m = 2$ ,  $r = 1$ , имеем  $N(J(5, 2), 1) = 5$ ,  $\tau = 2$ , и следующая матрица размерности  $5 \times 6$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

дает искомый вектор  $x \in J(5, 2)$  в виде  $x = (10010)$ .

Из (5.4), в частности, следует, что для треугольного графа  $T(n)$  выполняются следующие простые соотношения

$$N(T(n), 1) = n,$$

что было ранее получено по формуле (5.2), и

$$N(T(n), 2) = \frac{n(n-1)}{2}.$$



### 5.3 Реверсальный граф $R_n$

В этом разделе рассматривается задача восстановления перестановки  $\pi$  по ее образцам, искаженным реверсальными ошибками, т.е. по перестановкам, находящимся от  $\pi$  на реверсальном расстоянии не более некоторого заданного  $r$ . Фактически, речь идет о восстановлении вершин в реверсальном графе  $R_n$ , определенном на симметрической группе с порождающим множеством реверсалов  $R = \{r_{ij} \in Sym_n, 1 \leq i < j \leq n\}$ , где под реверсалом  $r_{ij}$  понимается перестановка, меняющая порядок элементов внутри интервала  $[i, j]$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , перестановки  $\pi$  при умножении на нее справа, т.е.

$$[\dots \pi_i \pi_{i+1} \dots \pi_{j-1} \pi_j \dots] \cdot r_{ij} = [\dots \pi_j \pi_{j-1} \dots \pi_{i+1} \pi_i, \dots].$$

Реверсальное расстояние  $d(\pi, \tau)$  между двумя перестановками  $\pi$  и  $\tau$  определяется, как наименьшее число  $d$  реверсалов, переводящих  $\pi$  в  $\tau$ , т.е.  $\pi r_{i_1 j_1} \dots r_{i_d j_d} = \tau$ .

Задача определения реверсального расстояния между перестановками, называемая сортировка реверсалами, рассматривается в Главе 4.

Решение задачи эффективного восстановления вершин в графе  $R_n$  состоит в том, чтобы найти значение величины (5.1) для  $\Gamma = R_n$ . Реверсальный граф  $R_n$  является регулярным, но не дистанционно-регулярным и, следовательно, не дистанционно-транзитивным (см. 1.3.6), что делает решение рассматриваемой задачи для любого  $n$  на этом графе достаточно сложным. На сегодняшний день известны значения  $N(R_n, 1)$  и  $N(R_n, 2)$ , которые были получены благодаря исследованию структурных свойств данного графа с учетом свойств перестановок и реверсалов [38].

#### 5.3.1 Перестановки и реверсалы

Рассмотрим свойства перестановок и реверсалов.

Пусть  $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$ , тогда  $\pi^{-1}$  является обратной к  $\pi$  и  $\pi \pi^{-1} = \pi^{-1} \pi = I$ , где  $I$  является единичной перестановкой. Далее будем рассматривать перестановку  $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n+1}]$ , в которой  $\pi_0 = 0$  и  $\pi_{n+1} = n + 1$ . Введем дополнительные определения.

Будем говорить, что перестановка  $\pi$  имеет *точку разрыва* между позициями  $i - 1$  и  $i$  для  $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ , если  $|\alpha_i(\pi)| \geq 2$ , где

$$\alpha_i = \alpha_i(\pi) = \pi_i - \pi_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n + 1. \quad (5.5)$$

Число точек разрыва в перестановке  $\pi$  обозначим как  $b(\pi)$ . Заметим, что  $b(\pi) = 0$  только в случае, когда  $\pi = I$ , и  $b(\pi) \geq 2$  во всех остальных случаях.

Пусть перестановка  $\pi$  имеет  $b = b(\pi) \geq 2$  точек разрыва между позициями  $i_h - 1$  и  $i_h$ ,  $h = 1, \dots, b$ , тогда интервал  $[0, n + 1]$  разбивается на  $b + 1$  интервалов монотонности  $[i_h, i_{h+1} - 1]$  последовательных чисел в убывающем или возрастающем порядке, где  $h = 0, 1, \dots, b$ , а  $i_0 = 0$  и  $i_{b+1} = n + 2$ . Заметим, что некоторые интервалы могут состоять только из одного числа. При этом, если длина первого и последнего интервалов не менее двух, то они состоят только из чисел в возрастающем порядке.

Определим вектор  $\beta(\pi) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{b-1})$ , как последовательность пограничных состояний точек разрыва так, что

$$\beta_h = \begin{cases} + & \text{if } \pi_{i_{h+1}} > \pi_{i_{h+1}-1}, \\ - & \text{if } \pi_{i_{h+1}} < \pi_{i_{h+1}-1}, \end{cases} \quad h = 0, \dots, b - 1.$$

Заметим, что  $0 \leq \pi_{i_1-1} < \pi_{i_1}$  и  $\pi_{i_b-1} < \pi_{i_b} \leq n + 1$ , и следовательно,  $\beta_0 = \beta_{b-1} = +$ .

Определим также вектор  $\gamma(\pi) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{b-1})$ , как последовательность пограничных состояний интервалов монотонности так, что

$$\gamma_h = \begin{cases} 0 & \text{if } i_{h+1} - 1 = i_h, \\ + & \text{if } i_{h+1} - 1 > i_h \text{ и } \pi_{i_{h+1}-1} > \pi_{i_h}, \\ - & \text{if } i_{h+1} - 1 > i_h \text{ и } \pi_{i_{h+1}-1} < \pi_{i_h}, \end{cases} \quad h = 1, \dots, b - 1.$$

Векторы  $\beta(\pi)$  и  $\gamma(\pi)$  однозначно задаются перестановкой  $\pi$ , и две перестановки будут различными, если они различаются, по крайней мере, в одном из этих векторов. Например, для перестановки  $\pi = [0165472389]$  имеется разбиение интервала  $[0, 9]$  на интервалы  $[0, 1]$ ,  $[2, 4]$ ,  $[5]$ ,  $[6, 7]$ ,  $[8, 9]$ ,  $b(P) = 4$ , т.о.,  $\beta(\pi) = (+, +, -, +)$ , а  $\gamma(\pi) = (-, 0, +)$ .

Теперь мы установим, как меняется число точек разрыва в перестановке  $\pi$  после применения к ней реверсала  $r_{ij}$ . Прежде чем сформулировать следующую Лемму, определим дополнительную функцию  $\delta(x, y)$  от

двух переменных  $x$  и  $y$  так, что  $\delta(x, y) = 1$ , если  $|x - y| \geq 2$  и  $\delta(x, y) = 0$ , если  $|x - y| \leq 1$ .

**Лемма 5.3.1** [38] Пусть  $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \pi_{n+1}]$  и  $r_{ij}$  является реверсалом на интервале  $[i, j]$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Тогда

$$b(\pi r_{ij}) - b(\pi) = \delta(\pi_{i-1}, \pi_j) + \delta(\pi_i, \pi_{j+1}) - \delta(\pi_{i-1}, \pi_i) - \delta(\pi_j, \pi_{j+1}).$$

*Доказательство.* Реверсал  $r_{ij}$  может изменить число точек разрыва только между позициями  $i - 1$  и  $i$ , а также между позициями  $j$  и  $j + 1$ .  $\square$

**Лемма 5.3.2** [38] Пусть  $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \pi_{n+1}]$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , и  $|\alpha_i| = |\alpha_{j+1}| = 1$ . Тогда  $b(\pi r_{ij}) = b(\pi) + 1$ , если и только если  $\alpha_i = -\alpha_{j+1}$  и либо  $\pi_j = \pi_i - 2\alpha_i$ , либо  $\pi_j = \pi_i + 2\alpha_i$ ; в противном случае  $b(\pi r_{i,j}) = b(\pi) + 2$ .

*Доказательство.* Из (5.5) заключаем, что условие  $|\alpha_i| = |\alpha_{j+1}| = 1$  равносильно условию  $\delta(\pi_{i-1}, \pi_i) = \delta(\pi_j, \pi_{j+1}) = 0$  и мы имеем:

$$\pi_i = \pi_{i-1} + \alpha_i \quad \text{и} \quad \pi_{j+1} = \pi_j + \alpha_{j+1} \quad (5.6)$$

Заметим, что  $\pi_i - \alpha_i, \pi_i, \pi_i + \alpha_i$  и  $\pi_j - \alpha_{j+1}, \pi_j, \pi_j + \alpha_{j+1}$  являются последовательными числами в возрастающем или в убывающем порядке. Поскольку  $\pi_{i-1}, \pi_i, \pi_j, \pi_{j+1}$  являются различными, то имеем:

- 1) либо  $\delta(\pi_i, \pi_{j+1}) = 1$  или  $\pi_{j+1} = \pi_i + \alpha_i$ , поскольку  $\pi_{i-1} = \pi_i - \alpha_i$ ;
- 2) либо  $\delta(\pi_{i-1}, \pi_j) = 1$  или  $\pi_{i-1} = \pi_j - \alpha_{j+1}$ , поскольку  $\pi_{j+1} = \pi_j + \alpha_{j+1}$ .

Следовательно, если  $b(\pi r_{ij}) = b(\pi) + 1$  или  $b(\pi r_{ij}) = b(\pi)$ , то тогда по Лемме 5.3.1 имеем  $\pi_{i-1} = \pi_j - \alpha_{j+1}$  или  $\pi_{j+1} = \pi_i + \alpha_i$ . В каждом из этих случаев выполняется  $\alpha_i = -\alpha_{j+1}$ ; в противном случае, из (5.6) мы заключаем, что  $\pi_j = \pi_i$ . Более того, для  $\alpha_i = -\alpha_{j+1}$  в случае, когда  $\pi_{i-1} = \pi_j - \alpha_{j+1}$ , из (5.6) мы получаем :

$$\pi_i = \pi_{i-1} + \alpha_i = \pi_j + 2\alpha_i = \pi_{j+1} + 3\alpha_i \quad (5.7)$$

и, следовательно,  $\delta(\pi_{i-1}, \pi_j) = 0$ ,  $\delta(\pi_i, \pi_{j+1}) = 1$ ; а в случае, когда  $\pi_{j+1} = \pi_i + \alpha_i$ , из (5.6) мы получаем:

$$\pi_j = \pi_{j+1} + \alpha_i = \pi_i + 2\alpha_i = \pi_{i-1} + 3\alpha_i \quad (5.8)$$

и, следовательно,  $\delta(\pi_{i-1}, \pi_j) = 1$ ,  $\delta(\pi_i, \pi_{j+1}) = 0$ . Откуда следует, что  $\alpha_i = -\alpha_{j+1}$  и либо  $\pi_j = \pi_i - 2\alpha_i$ , либо  $\pi_j = \pi_i + 2\alpha_i$ , если  $b(\pi r_{ij}) = b(\pi) + 1$ . Кроме этого, случай  $b(\pi r_{ij}) = b(\pi)$  невозможен в условиях данной Леммы. С другой стороны, условия  $\alpha_i = -\alpha_{j+1}$  и  $\pi_j = \pi_i - 2\alpha_i$  или  $\pi_j = \pi_i + 2\alpha_i$  являются достаточными для того, чтобы выполнялось  $b(\pi r_{ij}) = b(\pi) + 1$ , поскольку в этих случаях имеют место (5.7) и (5.8), соответственно, и мы получаем  $b(\pi r_{ij}) = b(\pi) + 1$  в каждом из этих случаев.  $\square$

Заметим, что Лемма 5.3.2 дает условия, при которых применение реверсала к перестановке приводит к уменьшению числа точек разрыва. Это условие является существенным и используется в эффективном алгоритме сортировки реверсалами для поиска реверсала, который уменьшает на два число точек разрыва у перестановки, имеющей убывающий интервал. В частности, в [37] было доказано, что такой реверсал всегда найдется, если каждый реверсал, который удаляет некоторую точку разрыва перестановки  $\pi$ , приводит к перестановке без убывающих интервалов.

### 5.3.2 Структурные свойства реверсального графа $R_n$

Целью данного раздела является исследование структурных свойств реверсального графа  $R_n$ , а именно, его метрических сфер  $S_1 = S_1(I)$  и  $S_2 = S_2(I)$ , а также связи между ними. Заметим, что не нарушая общности, достаточно рассматривать метрические сферы для единичной перестановки, поскольку граф  $R_n$  является вершинно-транзитивным. Знание этих свойств обеспечит нам необходимые условия для нахождения величины (5.1) при  $r = 1, 2$ , т.е.  $N(R_n, 1)$  и  $N(R_n, 2)$ .

Очевидно, что  $S_1 = R$  и по Лемме 5.3.1 любой реверсал имеет две точки разрыва. Метрическую сферу  $S_2$  можно рассматривать, как метрическую сферу  $S_1(r_{ij})$  для любого  $r_{ij} \in S_1$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Следующие две технические Леммы дают нам полное описание перестановок  $\pi \in S_2$  с тремя и четырьмя точками разрыва. В дальнейшем, для простоты изложения будем записывать координату вектора  $\gamma(\pi)$  в виде  $+\vee 0$  и  $-\vee 0$ , если эта координата принимает значения  $+$  или  $0$ , и  $-$  или  $0$ , соответственно.

**Лемма 5.3.3** [38] Пусть  $\pi = r_{kl} r_{ij} \in S_2$ , причем  $b(\pi) = 3$  и  $r_{kl} \neq r_{ij}$  для фиксированных  $k$  и  $l$ , где  $1 \leq k < l \leq n$ , и любых  $i$  и  $j$ , где  $1 \leq i < j \leq n$ . Тогда  $\pi$  принадлежит одному из следующих непересекающихся множеств  $U_h(k, l)$ ,  $h = 1, \dots, 8$ , определяемых следующим образом:

1. Если  $\pi \in U_1(k, l)$ , то  $i = k - 1 \geq 1$ ,  $j = l - 1$  и  $\gamma(\pi) = (+ \vee 0, +)$ ;
2. Если  $\pi \in U_2(k, l)$ , то  $i = k + 1$ ,  $j = l + 1 \leq n$  и  $\gamma(\pi) = (+, + \vee 0)$ ;
3. Если  $\pi \in U_3(k, l)$ , то  $i = k$ ,  $k + 1 \leq j \leq l - 1$  и  $\gamma(\pi) = (+, - \vee 0)$ ;
4. Если  $\pi \in U_4(k, l)$ , то  $i = k$ ,  $l + 1 \leq j \leq n$  и  $\gamma(\pi) = (- \vee 0, +)$ ;
5. Если  $\pi \in U_5(k, l)$ , то  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $j = l$  и  $\gamma(\pi) = (+, - \vee 0)$ ;
6. Если  $\pi \in U_6(k, l)$ , то  $k + 1 \leq i \leq l - 1$ ,  $j = l$  и  $\gamma(\pi) = (- \vee 0, +)$ ;
7. Если  $\pi \in U_7(k, l)$ , то  $i = l + 1$ ,  $l + 2 \leq j \leq n$  и  $\gamma(\pi) = (-, -)$ ;
8. Если  $\pi \in U_8(k, l)$ , то  $1 \leq i \leq k - 2$ ,  $j = k - 1$  и  $\gamma(\pi) = (-, -)$ .

*Доказательство.* Сначала рассмотрим случай, когда выполнены условия Леммы 5.3.2. Тогда  $b(r_{kl} r_{ij}) = 3$ , если и только если  $\alpha_i = -\alpha_{j+1} = \pm 1$  и либо  $\pi_j = \pi_i + 2\alpha_i$ , либо  $\pi_j = \pi_i - 2\alpha_i$ . Поскольку  $\gamma(r_{k,l}) = (-)$ , то имеются две возможности:

- 1)  $\alpha_i = 1$ , где  $1 \leq i \leq k - 1$ , и  $\alpha_{j+1} = -1$ , где  $k \leq j \leq l - 1$ ;
- 2)  $\alpha_i = -1$ , где  $k + 1 \leq i \leq l$ , и  $\alpha_{j+1} = 1$ , где  $l + 1 \leq j \leq n$ .

В первом случае  $\pi_i = i$  и  $\pi_j = i + 2$ , а значит, получаем множество  $U_1(k, l)$ , поскольку из условий  $i \leq k - 1$  и  $\pi_j \geq k + 1$  следует, что  $i = k - 1$ ,  $\pi_j = k + 1$  и  $j = l - 1$ . Во втором случае  $\pi_j = j$  и  $\pi_i = j - 2$ , т.е. получаем множество  $U_2(k, l)$ , поскольку из условий  $j \geq l + 1$  и  $\pi_i \leq l - 1$  следует, что  $j = l + 1$ ,  $\pi_i = l - 1$  и  $i = k + 1$ .

Если условия Леммы 5.3.2 не выполнены, то имеем  $i = k$  или  $i = l + 1$ , когда  $|\pi_i - \pi_{i-1}| \geq 2$ , и имеем  $j = k - 1$  или  $j = l$ , когда  $|\pi_{j+1} - \pi_j| \geq 2$ . Поскольку  $i < j$  и  $k < l$  (если  $i = k$  и  $j = l$ , то  $\pi = r_{kl} r_{ij} = I$ ), то эти четыре случая несовместимы. Случай  $i = k$  приводит к множеству  $U_3(k, l)$ , когда  $k + 1 \leq j \leq l - 1$ , и приводит к множеству  $U_4(k, l)$ , когда  $l + 1 \leq j \leq n$ . Аналогично, случай  $j = l$  дает множество  $U_5(k, l)$ ,

когда  $1 \leq i \leq k - 1$ , и дает множество  $U_6(k, l)$ , когда  $k + 1 \leq i \leq l - 1$ . Случай  $i = l + 1$  возможен только, если  $l + 2 \leq j \leq n$ , и мы получаем множество  $U_7(k, l)$ . Аналогично, случай  $j = k - 1$  возможен только, если  $1 \leq i \leq k - 2$ , и мы получаем множество  $U_8(k, l)$ . Легко видеть, что перестановки из последних шести множеств имеют три точки разрыва. Множества  $U_h(k, l)$ ,  $h = 1, \dots, 8$ , являются непересекающимися, поскольку реверсалы  $r_{ij}$  являются различными во всех случаях. Они содержат перестановки  $\pi$ , имеющие вектор  $\beta(\pi) = (+, -, +)$  в первых шести случаях и вектор  $\beta(\pi) = (+, +, +)$  в последних двух случаях.  $\square$

**Следствие 5.3.1** *Реверсальный граф  $R_n$ ,  $n \geq 2$ , не содержит треугольников.*

*Доказательство.* Любая перестановка  $\pi = r_{kl} r_{ij}$ , где  $r_{kl} \neq r_{ij}$ , имеет 3 или 4 точки разрыва. Это следует из Леммы 5.3.2 и доказательства Леммы 5.3.3, где было показано, что если условия Леммы 5.3.2 не соблюдаются для  $r_{kl}$ , где  $r_{kl} \neq r_{ij}$ , то тогда  $\pi = r_{kl} r_{ij}$  имеет три точки разрыва. Это означает, что в графе  $R_n$  нет ребер между вершинами, принадлежащими метрической сфере  $S_1$ , поскольку всем вершинам из  $S_1$  соответствуют перестановки с двумя точками разрыва.  $\square$

**Лемма 5.3.4** [38] *Пусть  $\pi = r_{kl} r_{ij} \in S_2$ , причем  $b(\pi) = 4$  и  $r_{kl} \neq r_{ij}$  для фиксированных  $k$  и  $l$ , где  $1 \leq k < l \leq n$ , и любых  $i$  и  $j$ , где  $1 \leq i < j \leq n$ . Тогда  $\pi$  принадлежит одному из следующих непересекающихся множеств  $W_h(k, l)$ ,  $h = 1, \dots, 4$ , определяемых следующим образом:*

1. Если  $\pi \in W_1(k, l)$ , то  $k + 1 < l + 1 < i < j$  или  $i + 1 < j + 1 < k < l$ ;  $\beta(\pi) = (+, +, +, +)$ ,  $\gamma(\pi) = (-, + \vee 0, -)$ ;
2. Если  $\pi \in W_2(k, l)$ , то  $k < i < j < l$  или  $i < k < l < j$ ;  $\beta(\pi) = (+, -, -, +)$ ,  $\gamma(\pi) = (- \vee 0, +, - \vee 0)$ ;
3. Если  $\pi \in W_3(k, l)$ , то  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $k \leq j \leq l - 1$  и  $j \neq l - 1$ , когда  $i = k - 1$ ;  $\beta(\pi) = (+, -, +, +)$ ,  $\gamma(\pi) = (+ \vee 0, -, - \vee 0)$  или  $\gamma(\pi) = (+ \vee 0, 0, -)$ ;

4. Если  $\pi \in W_4(k, l)$ , то  $k + 1 \leq i \leq l$ ,  $l + 1 \leq j \leq n$  и  $j \neq l + 1$ , когда  $i = k + 1$ ;  $\beta(\pi) = (+, +, -, +)$ ,  $\gamma(\pi) = (- \vee 0, -, + \vee 0)$  or  $\gamma(\pi) = (-, 0, + \vee 0)$ .

*Доказательство.* Поскольку любая перестановка  $\pi = r_{kl} r_{ij}$ , где  $r_{kl} \neq r_{ij}$ , имеет три или четыре точки разрыва, то для доказательства этой Леммы нужно рассмотреть все случаи, возникающие для чисел  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , при условии, что числа  $k, l$ ,  $1 \leq k < l \leq n$ , являются фиксированными, а затем исключить случаи, возникающие в Лемме 5.3.3, когда  $\pi$  имеет три точки разрыва.  $\square$

Таким образом, Леммы 5.3.3 и 5.3.4 определяют все непересекающиеся множества перестановок  $\pi \in S_2$ .

Теперь рассмотрим связи, имеющиеся между  $S_1$  и  $S_2$ , а также найдем  $c_2(\pi)$  для  $\pi \in S_2$ , где  $c_2(\pi)$  есть число общих соседей для перестановок  $I$  и  $\pi$ . Чтобы сформулировать следующий результат зафиксируем перестановку  $\pi \in S_2$  и рассмотрим лексикографический порядок на перестановках  $r_{kl} \in S_1$ ,  $1 \leq k < l \leq n$ , предполагая, что  $r_{kl} < r_{k'l'}$ , если  $k \leq k'$  и  $l < l'$ . Любая пара ребер  $\{r_{kl}, \pi\}$  и  $\{r_{k'l'}, \pi\}$  в реверсальном графе  $R_n$  означает, что выполняется следующее равенство для  $\pi$ :

$$r_{kl} r_{ij} = r_{k'l'} r_{i'j'}, \quad (5.9)$$

где  $r_{ij} = r_{kl}\pi$  и  $r_{i'j'} = r_{k'l'}\pi$ . Мы говорим, что (5.9) является *представлением* перестановки  $\pi$ , если  $r_{kl} < r_{k'l'}$ . Представление является *минимальным* для  $\pi$ , если  $r_{kl}$  является минимальным в лексикографическом порядке на перестановках множества  $S_{2,1}(\pi) = \{x \in S_1 : d(x, \pi) = 1\}$ . Если  $\pi$  имеет только одно представление, то это представление будем считать минимальным и  $c_2(\pi) = 2$  в этом случае. В общем случае, если  $\pi$  имеет  $h$  минимальных представлений, где  $h = 0, 1, \dots$ , то тогда  $c_2(\pi) = h + 1$ . Определим перестановку

$$\pi_k = [0, 1, \dots, k - 1, k + 1, k + 2, k, k + 3, \dots, n + 1],$$

где  $1 \leq k \leq n - 2$ ,  $b(\pi_k) = 3$ ,  $\beta(\pi_k) = (+, -, +)$ , и  $\gamma(\pi_k) = (+, 0)$ . Обратной к ней является перестановка

$$\pi_k^{-1} = [0, 1, \dots, k - 1, k + 2, k, k + 1, k + 3, \dots, n + 1],$$

такая, что  $b(\pi_k^{-1}) = 3$ ,  $\beta(\pi_k^{-1}) = (+, -, +)$  и  $\gamma(\pi_k^{-1}) = (0, +)$ . Легко показать, что

$$\pi_k = r_{k,k+1} r_{k+1,k+2} = r_{k,k+2} r_{k,k+1} = r_{k+1,k+2} r_{k,k+2} \quad (5.10)$$

и учитывая  $(\pi_1 \pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1} \pi_1^{-1}$  имеем

$$\pi_k^{-1} = r_{k,k+1} r_{k,k+2} = r_{k,k+2} r_{k+1,k+2} = r_{k+1,k+2} r_{k,k+1}. \quad (5.11)$$

Мы также определим перестановку

$$\tau_k = [0, 1, \dots, k-1, k+2, k+3, k, k+1, k+4, \dots, n+1],$$

где  $1 \leq k \leq n-3$ ,  $b(\tau_k) = 3$ ,  $\beta(\tau_k) = (+, -, +)$ ,  $\gamma(\tau_k) = (+, +)$ ,  $\tau_k^{-1} = \tau_k$  причем

$$\tau_k = r_{k,k+2} r_{k+1,k+3} = r_{k+1,k+3} r_{k,k+2}.$$

**Лемма 5.3.5** [38] Пусть для данной перестановки  $\pi \in S_2$  число  $k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , является минимальным целым таким, что  $r_{k,s} \in S_{2,1}(\pi)$  для некоторого  $s$ ,  $k < s \leq n$ . Тогда

1.  $c_2(\pi) = 3$ , если  $\pi = \pi_k$  или  $\pi = \pi_k^{-1}$  для  $k \leq n-2$ ;
2.  $c_2(\pi) = 2$ , если  $\pi$  имеет одно из следующих представлений:

$$r_{kk+2} r_{k+1k+3} = r_{k+1k+3} r_{kk+2} = \tau_k, \quad k \leq n-3; \quad (5.12)$$

$$r_{kl} r_{kj} = r_{k+l-jl} r_{kl}, \quad k+1 \leq j \leq l-1, \quad l > k+2; \quad (5.13)$$

$$r_{kl} r_{kj} = r_{kj} r_{k+j-lj}, \quad l+1 \leq j \leq n, \quad j > k+2; \quad (5.14)$$

$$r_{kl} r_{ij} = r_{ij} r_{kl}, \quad k < l < i < j; \quad (5.15)$$

$$r_{kl} r_{ij} = r_{l-j+kl-i+k} r_{kl}, \quad k < i < j < l; \quad (5.16)$$

3.  $c_2(\pi) = 1$ , в остальных случаях.

*Доказательство.* Пусть  $c_2(\pi) > 1$  и пусть  $s$  будет некоторым целым, для которого  $r_{ks} \in S_{2,1}(\pi)$ . Тогда перестановка  $\pi$  имеет представление (5.9) с минимальным целым  $k$ . Для того, чтобы доказать Лемму, опишем все такие представления  $\pi$ , определим минимальное, а потом найдем  $c_2(\pi)$ . Если  $\pi$  имеет представление (5.9), то из Лемм 5.3.3 и 5.3.4 следует,



что  $\pi \in U_h(k, l) \cap U_m(k', l')$ , если  $b(\pi) = 3$ , и  $\pi \in W_h(k, l) \cap W_m(k', l')$ , если  $b(\pi) = 4$  для некоторых  $h$  и  $m$ .

Сначала рассмотрим представления перестановок с тремя точками разрыва. Имеем  $\gamma(\pi) = (- \vee 0, +)$  для  $\pi \in U_4, U_6$  и  $\gamma(\pi) = (+, - \vee 0)$  для  $\pi \in U_3, U_5$ . Следовательно, поскольку  $\gamma(\pi) = (+ \vee 0, +)$  для  $\pi \in U_1$  и  $\gamma(\pi) = (+, + \vee 0)$  для  $\pi \in U_2$ , то получаем, что

$$(U_2(k, l) \cup U_3(k, l) \cup U_5(k, l)) \cap (U_4(k', l') \cup U_6(k', l')) = \emptyset$$

и

$$(U_3(k, l) \cup U_5(k, l)) \cap (U_1(k', l') \cup U_4(k', l') \cup U_6(k', l')) = \emptyset.$$

Поскольку  $\gamma(\pi) = (-, -)$  для  $\pi \in U_7, U_8$ , следовательно,

$$(U_7(k, l) \cup U_8(k, l)) \cap (\cup_{m=1}^6 U_m(k', l')) = \emptyset.$$

Более того,

$$U_h(k, l) \cap U_h(k', l') = \emptyset$$

для любого  $h = 1, \dots, 8$ , поскольку  $k$  и  $l$  однозначно определяются любым элементом из  $U_h(k, l)$ . Все вышесказанное позволяет заключить, что если  $\pi$  имеет представление (5.9),  $b(\pi) = 3$  и  $\pi \in U_h(k, l) \cap U_m(k', l')$ , то  $(h, m)$  или  $(m, h)$  должны принадлежать множеству

$$A = \{(2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 6), (4, 1), (6, 1), (2, 1), (7, 8)\}.$$

Докажем, что если  $r_{kl} \in S_{2,1}(\pi)$ , то найдется единственный реверсал  $r_{k'l'}$  такой, что  $\pi \in U_h(k, l) \cap U_m(k', l')$ , где  $(h, m) \in A$ , а  $\pi$  имеет представление (5.9), для которого выполняется  $r_{kl} < r_{k'l'}$ . Легко показать, что для  $(m, h) \in A$  мы получаем выражение (5.9), но оно не является представлением  $\pi$ , поскольку в этих случаях условие  $r_{kl} < r_{k'l'}$  не выполняется.

**Случай 1:**  $(h, m) = (2, 3)$ . Если  $\pi \in U_2(k, l) \cap U_3(k', l')$ , то  $i = k + 1$ ,  $j = l + 1$ ,  $i' = k'$ ,  $k' = k$ ,  $l' = l + 1$ ,  $j' = l' + k' - l = l' - k' - k - 1 = k + 1 = l$ , и  $r_{k,k+1} r_{k+1,k+2} = r_{k,k+2} r_{k,k+1}$  является представлением перестановки  $\pi$ .

**Случай 2:**  $(h, m) = (2, 5)$ . Если  $\pi \in U_2(k, l) \cap U_5(k', l')$ , то  $i = k + 1$ ,  $j = l + 1$ ,  $i' = k = l - 1$ ,  $j' = l' = l + 1$ ,  $k' = l$ , и  $r_{k,k+1} r_{k+1,k+2} = r_{k+1,k+2} r_{k,k+2}$  является представлением перестановки  $\pi$ .

**Случай 3:**  $(h, m) = (3, 5)$ . Если  $\pi \in U_3(k, l) \cap U_5(k', l')$ , то  $i = k$ ,  $k + 1 \leq j \leq l - 1$ ,  $i' = k$ ,  $j' = l = l'$ ,  $k' = k + l - j$ , и мы получаем представление  $r_{k,l} r_{k,j} = r_{k+l-j,l} r_{k,l}$  для перестановки  $\pi$ , откуда следует (5.13) для  $l > k + 2$ . Если  $l = k + 2$ , то имеем  $j = k + 1$  и представлением  $\pi$  является  $r_{k,k+2} r_{k,k+1} = r_{k+1,k+2} r_{k,k+2}$ .

**Случай 4:**  $(h, m) = (4, 6)$ . Если  $\pi \in U_4(k, l) \cap U_6(k', l')$ , то  $i = k$ ,  $l + 1 \leq j \leq n$ ,  $j' = l' = j$ ,  $k' = k$ ,  $i' = k' + l' - l = k + j - l$ , и  $r_{k,l} r_{k,j} = r_{k,j} r_{k+j-l,j}$  является представлением перестановки  $\pi$ , что дает (5.14) для  $j > k + 2$ . Если  $j = k + 2$ , то представлением  $\pi$  является  $r_{k,k+1} r_{k,k+2} = r_{k,k+2} r_{k+1,k+2}$ .

**Случай 5:**  $(h, m) = (4, 1)$ . Если  $\pi \in U_4(k, l) \cap U_1(k', l')$ , то  $i = k$ ,  $i' = k' - 1$ ,  $j' = l' - 1$ ,  $k' = k + 1 = j - 1$ ,  $k' = l$ ,  $l' = j$ , и мы получаем представление  $r_{k,k+1} r_{k,k+2} = r_{k+1,k+2} r_{k,k+1}$  для перестановки  $\pi$ .

**Случай 6:**  $(h, m) = (6, 1)$ . Если  $\pi \in U_6(k, l) \cap U_1(k', l')$ , то  $j = l$ ,  $i' = k' - 1$ ,  $j' = l' - 1$ ,  $k' = k + 1 = l - 1$ ,  $l' = l$ ,  $i = k + 1$  и  $r_{k,k+2} r_{k+1,k+2} = r_{k+1,k+2} r_{k,k+1}$  является представлением перестановки  $\pi$ .

**Случай 7:**  $(h, m) = (2, 1)$ . Если  $\pi \in U_2(k, l) \cap U_1(k', l')$ , то  $i = k + 1$ ,  $j = l + 1$ ,  $i' = k' - 1$ ,  $j' = l' - 1$ ,  $k' = k + 1 = l - 1$ ,  $l' = l + 1$ , и мы получаем представление (5.12) для перестановки  $\pi = \tau_k$ .

**Случай 8:**  $(h, m) = (7, 8)$ . Если  $\pi \in U_7(k, l) \cap U_8(k', l')$ , то  $i = l + 1$ ,  $i' = k$ ,  $j' = k' - 1 = l$ ,  $l' = j$ ,  $l + 2 \leq j \leq n$ , и мы получаем представление  $r_{k,l} r_{l+1,j} = r_{l+1,j} r_{k,l}$  для перестановки  $\pi$ , что дает (5.15) для  $i = l + 1$ .

Таким образом, рассмотренные случаи дают нам представления всех перестановок с тремя точками разрыва. Случаи 1–3 дают представления перестановки  $\pi_k$ , а случаи 4–6 дают представления перестановки  $\pi_k^{-1}$ . Перестановки  $\pi_k$  и  $\pi_k^{-1}$  отличаются от других перестановок с тремя точками разрыва, представленными (5.12)–(5.15), поскольку их внутренние интервалы состоят из одного или двух чисел. Все остальные перестановки  $\pi$  также являются различными между собой, поскольку  $\gamma(\pi) = (+, +)$  для  $\pi = \tau_k$  (см. (5.12)) и  $\gamma(\pi) = (+, -)$ ,  $\gamma(\pi) = (-, +)$ ,  $\gamma(\pi) = (-, -)$  для (5.13)–(5.15), соответственно. Перестановки  $\pi_k$  и  $\pi_k^{-1}$  имеют два минимальных представления (Случаи 1, 2 и 4, 5, соответственно), и (5.12)–(5.15) являются единственными и, следовательно, минимальными представлениями различных перестановок. Таким образом, для перестановок

$\pi$  с тремя точками разрыва утверждение доказано.

Теперь рассмотрим представления всех перестановок  $\pi$  с четырьмя точками разрыва, используя Леммы 5.3.1 и 5.3.4. Если  $\pi \in W_1(k, l)$  или  $\pi \in W_2(k, l)$ , то имеются два реверсала, а именно,  $r_{i,j}$  и  $r_{k,l}$ , каждый из которых уменьшает на два число точек разрыва и переводит перестановку  $\pi$  в элемент, принадлежащий  $S_1$ . Это дает нам представления (5.15), (5.16) для таких перестановок  $\pi$ . Если  $\pi \in W_3(k, l)$  или  $\pi \in W_4(k, l)$ , то имеется только один реверсал, а именно,  $r_{ij}$ , который уменьшает на два число точек разрыва у перестановки  $\pi$ . Следовательно, для перестановки  $\pi \in S_2$  с четырьмя точками разрыва имеем  $c_2(\pi) = 2$ , если  $\pi$  имеет представления (5.15), (5.16), и  $c_1(\pi) = 1$ , в противном случае.  $\square$

Пусть  $K_{p,q}$  есть полный двудольный граф с  $p$  и  $q$  вершинами в каждой из долей,  $1 \leq p \leq q$ .

**Теорема 5.3.1** [38] *Реверсальный граф  $R_n$ ,  $n \geq 3$ ,*

- (i) *не содержит подграфов, изоморфных  $K_{2,4}$ ;*
- (ii) *каждая его вершина принадлежит  $(n-2)$  подграфам, изоморфным  $K_{3,3}$*
- (iii) *и  $\frac{1}{12}(n-3)(n-1)(n^2+2n+4)$ ,  $n \geq 4$ , подграфам, изоморфным  $K_{2,2}$ , которые не являются подграфами  $K_{3,3}$ .*

*Доказательство.* Предположим, что граф  $R_n$ ,  $n \geq 3$ , содержит  $K_{2,4}$ . Также предположим, без потери общности, что единичная перестановка  $I$  принадлежит меньшей части  $K_{2,4}$ . Следовательно, в  $S_1$  должны быть четыре различные вершины, смежные с  $I$ . Тогда другая вершина меньшей части принадлежит  $S_2$  и она также должна быть смежна с теми же самыми четырьмя вершинами из  $S_1$ . Однако, это противоречит Лемме 5.3.5.

Из Леммы 5.3.5 также следует, что имеется точно  $(n-2)$  подграфов  $K_{3,3}$ , имеющих  $I$  в качестве одной из вершин. Долями таких подграфов являются  $\{I, \pi_k, \pi_k^{-1}\}$  и  $\{r_{k,k+1}, r_{k,k+2}, r_{k+1,k+2}\}$  для любых  $k$ ,  $1 \leq k \leq$

$n - 2$ . Поскольку граф  $R_n$  является вершинно-транзитивным, то следовательно, каждая его вершина принадлежит  $(n - 2)$  подграфам  $K_{3,3}$ .

Чтобы доказать последнее утверждение Теоремы, необходимо рассмотреть общее число  $N_2$  перестановок  $\pi \in S_2$ , для которых  $c_2(\pi) = 2$ . Из Леммы 5.3.5 следует, что имеется точно  $(n - 3)$  перестановок с представлениями (5.12). Число представлений (5.13) есть:

$$\sum_{k=1}^{n-3} \sum_{l=k+3}^n (l - k - 1),$$

а число представлений (5.14) есть:

$$\sum_{k=1}^{n-3} \sum_{j=k+3}^n (j - k - 1).$$

Следовательно, общее число представлений (5.13) и (5.14) вычисляется, как

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^{n-3} \sum_{i=3}^{n-k} (i - 1) &= \sum_{k=1}^{n-3} (n^2 - n - 2 - k(2n - 1) + k^2) = \\ &= (n - 3) \left( (n - 2)(n + 1) - \frac{1}{2}(2n - 1)(n - 2) + \frac{1}{6}(n - 2)(2n - 5) \right) = \\ &= \frac{1}{3}(n - 3)(n - 2)(n + 2). \end{aligned}$$

Число представлений (5.15)–(5.16) равно  $2\binom{n}{4}$ .

Таким образом, складывая все эти величины мы получим требуемое число:

$$N_2 = \frac{1}{12}(n - 3)(n - 1)(n^2 + 2n + 4).$$

□

**Следствие 5.3.2** *Реверсальный граф  $R_n$ ,  $n \geq 3$ , не является дистанционно-регулярным, а следовательно, не является дистанционно-транзитивным.*

*Доказательство.* Это утверждение следует немедленно из Леммы 5.3.5, поскольку в дистанционно-регулярном графе числа  $b_i(u)$  и  $c_i(u)$  зависят только от выбора  $i$ , но не зависят от выбора вершины  $u$ . □

**Следствие 5.3.3**  $|S_2| = \frac{1}{6}(n^4 - 2n^3 - n^2 - 16n + 42)$ ,  $n \geq 3$ .

*Доказательство.* Поскольку имеется  $N_3 = 2(n - 2)$  перестановок, для которых  $c_2(\pi) = 3$ , и  $N_2 = \frac{1}{12}(n - 3)(n - 1)(n^2 + 2n + 4)$  перестановок, для которых  $c_2(\pi) = 2$ , а также поскольку по Следствию 5.3.1 граф не содержит треугольников, то

$$|S_2| = |S_1|(|S_1| - 1) - 2N_3 - N_2,$$

где  $|S_1| = \binom{n}{2}$ , что завершает доказательство.  $\square$

### 5.3.3 Восстановление перестановок в реверсальном графе $R_n$

Исчерпывающий анализ структурных свойств реверсального графа  $R_n$  позволяет получить следующие результаты в задаче эффективного восстановления вершин по их локальному окружению.

**Теорема 5.3.2** [38] Для реверсального графа  $R_n$ ,  $n \geq 3$ , имеем

$$N(R_n, 1) = 3.$$

*Доказательство.* По Следствию 5.3.1 граф  $R_n$  не содержит треугольников, т.е.  $\lambda(\Gamma) = 0$ . Кроме этого,  $\mu(\Gamma) = 3$ , поскольку  $\max_{\pi \in S_2} c_2(\pi) = 3$  по Лемме 5.3.5. Следовательно, из формулы (5.2) мы сразу получаем, что  $N(\Gamma, 1) = 3$ .  $\square$

**Следствие 5.3.4** Любая перестановка  $\pi$  восстанавливается по четырем различным перестановкам, принадлежащим метрическому шару  $B_1(\pi)$  в реверсальном графе  $R_n$ .

Введем дополнительные обозначения. Пусть  $t_i$  есть число множеств  $i$  различных перестановок в  $B_1(\pi)$ , из которых перестановка  $\pi$  восстанавливается. Пусть

$$N = |B_1(\pi)| = \binom{n}{2} + 1$$

обозначает число перестановок, находящихся на реверсальном расстоянии не более один от перестановки  $\pi$ . Тогда  $p_i = \frac{t_i}{\binom{n}{2}}$  есть вероятность

того, что перестановка  $\pi$  эффективно восстанавливается из  $i$  различных перестановок в  $B_1(\pi)$  при условии равномерной распределенности этих перестановок. Очевидно, что  $p_1 = 0$  и  $p_4 = 1$ , т.е., мы никогда не сможем восстановить в реверсальном графе  $R_n$  любую перестановку  $\pi$  по единственной перестановке из  $B_1(\pi)$ , но всегда можем восстановить произвольную перестановку  $\pi$  по четырем различным перестановкам из  $B_1(\pi)$  по Следствию 5.3.4.

**Теорема 5.3.3** [38]  $p_2 \sim \frac{1}{3}$  и  $p_3 \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* По определению,  $p_2 = \frac{t_2}{\binom{N}{2}}$ , где  $t_2$  есть число множеств, состоящих из двух различных перестановок из  $B_1(\pi)$ , по которым перестановка  $\pi$  восстанавливается. Поскольку реверсальный граф  $R_n$  является вершинно-транзитивным, то можно рассмотреть в качестве перестановки  $\pi$  единичную перестановку  $I$ . Имеется  $\binom{n}{2}$  различных пар  $(I, \tau)$ , где  $\tau \in S_1$ , которые не позволяют восстановить  $I$ . Более того, пара перестановок из  $S_1$ , смежных одной и той же перестановке  $\tau \in S_2$  также не позволят восстановить  $I$ . Если  $\tau = \pi_k$ ,  $1 \leq k \leq n-2$ , то по Теореме 5.3.1 в графе  $R_n$  имеется ровно  $N_2 = \frac{1}{12}(n-3)(n-1)(n^2+2n+4)$  таких пар перестановок из  $S_1$ , которые не принадлежат  $S_{2,1}(\tau)$ , и  $3(n-2)$  таких пар перестановок из  $S_1$ , которые не принадлежат  $S_{2,1}(\tau)$ . Следовательно,

$$\binom{N}{2} - t_2 = \binom{n}{2} + N_2 + 3(n-2) = \frac{1}{12}(n^4 - 2n^3 + 5n^2 + 20n - 60).$$

Поскольку

$$\binom{N}{2} = \frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 + 3n^2 + 2n),$$

то

$$p_2 = \frac{t_2}{\binom{N}{2}} \sim \frac{1}{3} \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Также по определению,  $p_3 = \frac{t_3}{\binom{N}{3}}$ , где  $t_3$  есть число множеств, состоящих из трех различных перестановок из  $B_1(\pi)$ , по которым перестановка  $\pi$  восстанавливается. Покажем, что имеется точно  $(n-2)$  множеств таких перестановок  $\{x_1, x_2, x_3\} \in B_1(I)$ , что  $\{x_1, x_2, x_3\} \in B_1(\tau)$  для некоторого  $\tau \neq I$ . Поскольку по Следствию 5.3.1 реверсальный граф  $R_n$  не содержит треугольников, следовательно,  $\{x_1, x_2, x_3\} \in S_1(I)$  и  $\tau \in S_2(I)$ . По

Лемме 5.3.5 это имеет место только тогда, когда  $\tau = \pi_k$  или  $\tau = \pi_k^{-1}$  для некоторого  $1 \leq k \leq n - 2$ . Следовательно,  $\binom{N}{3} - t_3 = n - 2$ . Поскольку

$$\binom{N}{3} \sim \frac{n^6}{48} \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

мы получаем  $1 - p_3 \sim \frac{48}{n^5}$  и, следовательно,  $p_3 \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Для восстановления в реверсальном графе  $R_n$  перестановки  $\pi$  по перестановкам из метрического шара  $B_2(\pi)$  требуется существенно большее число таких перестановок.

**Теорема 5.3.4** [38] *Для реверсального графа  $R_n$ ,  $n \geq 3$ , имеем*

$$N(R_n, 2) \geq \frac{3}{2}(n - 2)(n + 1).$$

*Доказательство.* Из (3.1) следует, что

$$N(R_n, 2) = \max_{\pi, \tau \in V(R_n), \pi \neq \tau} |B_2(\pi) \cap B_2(\tau)|.$$

Пусть  $\tau = I$  и  $\pi \in S_2$  такие, что  $c_2(\pi) = 3$  и  $\pi$  имеет минимальное представление (5.9). Тогда из Леммы 5.3.5 следует, что  $\pi = \pi_k$  или  $\pi = \pi_k^{-1}$  для  $k = 1, \dots, n - 2$ . Теперь покажем, что для  $r_{k_i, l_i} \in S_1, i = 1, 2, 3$ , выполняется

$$|\cup_{i=1}^3 B_1(r_{k_i, l_i})| \leq \frac{3}{2}(n - 2)(n + 1).$$

В самом деле, метрические шары  $B_1(r_{k_i, l_i}), i = 1, 2, 3$ , принадлежат  $B_2(\pi) \cap B_2(I)$  и имеют три общие вершины  $I, \pi_k, \pi_k^{-1}$ , поскольку  $R_n$  не содержит ни треугольников, ни подграфов, изоморфных  $K_{2,4}$  по Следствию 5.3.1 и Теореме 5.3.1. Каждый из метрических шаров имеет размер  $\binom{n}{2} + 1$ . Требуемое утверждение следует из  $3 \left( \binom{n}{2} + 1 \right) - 6 = \frac{3}{2}(n - 2)(n + 1)$ .  $\square$

Равенство в Теореме 5.3.4 достигается для перестановок  $\pi_k$  и  $\pi_k^{-1}$ , для которых реверсалы являются транспозициями. Например, для  $\pi = \pi_2 = [1342]$  или  $\pi = \pi_2^{-1} = [1423]$ , и для  $r_{24} = [1432], r_{23} = [1324], r_{34} = [1243]$  показывается, что  $|B_2(\pi) \cap B_2(I)| = |B_1(r_{2,4}) \cup B_1(r_{2,3}) \cup B_1(r_{3,4})| = 15$ .

# Литература

- [1] B. Alspach, C.Q. Zhang, Hamilton cycles in cubic Cayley graphs on dihedral groups, *Ars. Combin.* **28** (1989) 101–108.
- [2] F. Annexstein, M. Baumslag, On the diameter and bisection size of Cayley graphs, *Math. System Theory* **26** (1993) 271–291.
- [3] S. Asai, Y. Kounoike, Y. Shinano and K. Kaneko, Computing the diameter of 17-pancake graph using a PC cluster, *LNSC* **4128** (2006) 1114–1124.
- [4] L. Babai, Long cycles in vertex-transitive graphs. *J. Graph Theory* **3** (1979) 301–304.
- [5] L. Babai, W.M. Kantor, A. Lubotzky, Small diameter Cayley graphs for finite simple groups, *European J. Combin.* **10** (1989) 507–522.
- [6] L. Babai, A. Seress, On the diameter of Cayley graphs of the symmetric group, *Journal of Combinatorial Theory Series A*, **49** (1) (1988) 175–179.
- [7] L. Babai, A. Seress, On the diameter of permutation groups, *European J. Combin.* **13** (1992) 231–243.
- [8] L. Babai, *Automorphism groups, isomorphism, reconstruction*, Handbook of combinatorics (vol. 2), MIT Press, Cambridge, MA, 1996, 1447–1540.
- [9] D. Bader, B.M.E. Moret, M. Yan, A linear-time algorithm for computing inversion distance between signed permutations with an experimental study, *J. Comp. Biol.* **8** (5) (2001) 483–492.



- [10] V. Banfa, P. Pevzner, Genome rearrangements and sorting by reversals, *SIAM Journal on Computing* **25** (2) (1996) 272–289.
- [11] L.W. Beineke, R.J. Wilson, P.J. Cameron (Eds.), *Topics in algebraic graph theory*, Series: Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol.102, 2004.
- [12] A. Bergeron, A very elementary presentation of the Hannenhalli–Pevzner theory, In: *Proc. CPM 2001*, (2001) 106–117.
- [13] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1993.
- [14] A. Björner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Springer Verlag, Heidelberg, New York, 2005.
- [15] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [16] D.S. Cohen, M. Blum, On the problem of sorting burnt pancakes, *Discrete Applied Mathematics*, **61** (1995) 105–120.
- [17] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Springer–Verlag, New York, Berlin, 1988.
- [18] D.A. Christie, A  $3/2$ -approximation algorithm for sorting reversals, In: *Proc. SODA 1998*, ACM Press, (1998) 244–252.
- [19] S.J. Curran, J.A. Gallian, Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs – a survey, *Discrete Mathematics*, **156** (1996) 1–18.
- [20] P. Disconis, S. Holmes, *Grey codes for randomization procedures*, Technical Report No. 10, Dept. Statistics, Stanford University, 1994.
- [21] H. Dweighter. E 2569 in: Elementary problems and solutions, *Amer. Math. Monthly*. **82** (1975) 1010.
- [22] S. Even, O. Goldreich, The minimum-length generator sequence problem is *NP*-hard, *J. Algorithms*, **2** (1981) 311–313.

- [23] M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, SF, 1979.
- [24] W.H. Gates, C.H. Papadimitriou, Bounds for sorting by prefix-reversal, *Discrete Mathematics*, 27 (1979) 47–57.
- [25] C.D. Godsil, More odd graph theory, *Discrete Mathematics* **32** (1980) 205–207.
- [26] R.J. Gould, Updating the hamiltonian problem - a survey, *J. Graph Theory*, 15 (2) (1991) 121–157.
- [27] S. Hannenhalli, P.A. Pevzner, Transforming cabbage into turnip (polynomial algorithm for sorting signed permutations by reversals), *J. ACM* **46** (1) (1999) 1–27.
- [28] M.H. Heydari, I.H. Sudborough, On the diameter of the pancake network, *Journal of Algorithms* **25** (1997) 67–94.
- [29] L. Heydemann, *Cayley graphs as interconnection networks*, in: Graph symmetry: algebraic methods and applications, (G.Hahn, G. Sabidussi, eds.), Kluwer, Amsterdam, 1997.
- [30] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin, 1967.
- [31] [http : //www.cube20.org/](http://www.cube20.org/)
- [32] J.S. Jwo, S. Lakshmivarahan, S.K. Dhall, Embedding of cycles and grids in star graphs, *J. Circuits Syst. Comput.*, 1 (1991) 43–74.
- [33] J.S. Jwo, *Analysis of interconnection networks based on Cayley graphs related to permutation groups*, Ph.D. Dissertation, School of Electrical Engineering and Computer Science, University of Oklahoma, Norman, OK, 1991.
- [34] A. Kanevsky, C. Feng. On the embedding of cycles in pancake graphs, *Parallel computing* **21** (1995) 923–936.
- [35] H. Kaplan, E. Verbin, Efficient data structures and a new randomized approach for sorting signed permutations by reversals, *LNCS* **2676** 372–383.

- [36] J. Kececioglu, D. Sankoff, Efficient bounds for oriented chromosome inversion distance, *LNCS* **807** (1994) 307–325.
- [37] J. Kececioglu, D. Sankoff, Exact and approximation algorithms for sorting by reversals, with application to genome rearrangement *Algorithmica* **13** (1995) 180–210.
- [38] E. Konstantinova, Reconstruction of permutations distorted by reversal errors, *Discrete Appl. Math.*, **155** (18) (2007) 2426–2434.
- [39] Y. Kounoike, K. Kaneko, and Y. Shinano, Computing the diameter of 14- and 15-pancake graphs. In: *Proceedings of the International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks*. (2005) 490–495.
- [40] D.E. Knuth, *Sorting and searching*, Vol. 3 of The Art of Computer Programming, Addison–Wesley, Reading, Massachusetts, second edition, 1998. p.72 and p.615.
- [41] S. Lakshminarayanan, J.S. Jwo, S.K. Dhall, Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: a survey, *Parallel Comput.*, 19 (4) (1993) 361–407.
- [42] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd. I, Teubner, Leipzig, 1909.
- [43] F.T. Leighton, *Introduction to parallel algorithms and architectures: arrays, trees, hypercubes*, Morgan Kaufmann Publishers, California, 1992.
- [44] V.I. Levenshtein, Efficient reconstruction of sequences, *IEEE Trans. Inform. Theory* **47** (1) (2001) 2–22.
- [45] L. Lovász, Problem 11 in: *Combinatorial structures and their applications*, (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alberta, 1969), Gordon and Breach, New York, 1970, pp.243–246.
- [46] J. Malkevitch, Pancakes, Graphs, and the Genome of Plants, *The UMAP Journal* **23** (2002) 373–382.

- [47] D. Marušič, Hamiltonian circuits in Cayley graphs, *Discrete Mathematics* **46** (1983) 49–54.
- [48] I. Pak, R. Radoicic, Hamiltonian paths in Cayley graphs, *Discrete Mathematics* **309** (2009) 5501–5508.
- [49] J.D. Palmer, L.A. Herbon, Tricircular mitochondrial genomes of brassica and Raphanus: reversal of repeat configurations by inversion, Sequence alignment in molecular biology, *Nucleid Acids Research* **14** (1986) 9755–9764.
- [50] P.A. Pevzner, *Computational molecular biology: an algorithmic approach*, The MIT Press, Cambridge, MA, 2000.
- [51] R.A. Rankin, A campanological problem in group theory II, *Proc. Camb. Phyl. Soc.* **62** (1966) 11–18.
- [52] E. Rapaport–Strasser, Cayley color groups and Hamilton lines, *Scripta Math.* **24** (1959) 51–58.
- [53] D. Sankoff, Edit distance for genome comparison based on nonlocal operations, *LNCS* **644** (1992) 121–135.
- [54] D. Sankoff, N. El–Mabrouk, *Genome rearrangement*, In: T. Jiang, T. Smith, Y. Xu, M.Q. Zhang (Eds.), Current topics in computational molecular biology, MIT Press, 2002.
- [55] J.J. Sheu, J.J.M. Tan, K.T. Chu, Cycle embedding in pancake interconnection networks, *Proc. 23rd Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory*, Taiwan (2006) p.85–92.
- [56] S.S. Shrikhande, The uniqueness of the L2 association scheme, *Annals of Mathematical Statistics* **30** (1959) 781–798.
- [57] M. Tchuente, Generation of permutations by graphycal exchanges, *Ars Combin.* **14** (1982) 115–122.
- [58] A. Young, A quantitative substitutional analysis, *Proc. London Math. Soc.* **31** (1930) 273–388.

- [59] Wenjun Xiao, Some results on diameters of Cayley graphs, *Discr. Appl. Math.* **154** (2006) 1640–1644
- [60] D. Witte, Cayley digraphs of prime–power order are Hamiltonian, *J. Combin. Theory Ser. B* **40** (1986) 107–112.
- [61] S. Zaks, A new algorithm for generation of permutations, *BIT* **24** (1984) 196–204.
- [62] И. Гроссман, В. Магнус. Группы и их графы. – М.: Мир, 1971.–246 с.
- [63] В.Л. Компельмахер, В.А. Лисковец. Последовательное порождение перестановок с помощью базиса транспозиций, *Кибернетика* **3** (1975) 17–21.
- [64] Е.В. Константинова, А.Н. Медведев, Циклы длины семь в Рамсаке графе, *Дискретный Анализ и Исследование Операций* **17** (2010) 46–55.
- [65] Д. Кнут. Искусство программирования, том 4, выпуск 2. Генерация всех кортежей и перестановок. – М.: Вильямс, 2008.–160 с.
- [66] В.И. Левенштейн, восстановление объектов по минимальному числу искаженных образцов, *Доклады Академии Наук*, 354 (5) (1997) 593–596.
- [67] Ф. Харари. Теория графов. – М.: Мир, 1973.–299 с.