

Фадеев С.И., Когай В.В.

Нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных  
дифференциальных уравнений  
на конечном отрезке.

Учебное пособие.

Механико-математический факультет НГУ,  
кафедра дифференциальных уравнений

Новосибирск  
2008

## АННОТАЦИЯ

Учебное пособие написано на основе лекций по спец. курсу «Нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном отрезке», который читался Фадеевым С.И. на механико-математическом факультете НГУ. Содержание пособия рассчитано на студентов 2-6 – курсов механико-математического, физического факультетов и факультета естественных наук, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области математического моделирования и численного анализа нелинейных проблем.

В пособие включено изложение оригинальных методов численного исследования зависимости решения нелинейных краевых задач от параметров модели: методы множественной стрельбы, сплайн-коллокации и метод продолжения решения по параметру, учитывающий возможность появления в процессе продолжения особых точек типа «поворот». Эти методы были разработаны авторами в связи с математическим моделированием каталитических процессов и биологии, проводимого совместно в рамках многолетнего сотрудничества с коллективами сотрудников Института катализа и Института цитологии и генетики СО РАН. Содержание спец.курса формировалось под влиянием известных публикаций С.К. Годунова по методам решения краевых задач. Возможность непосредственного с ним общения сыграла огромную роль в процессе разработки эффективных алгоритмов и их применения в различных приложениях.

Пособие состоит из Введения и четырех Разделов (глав). В конце пособия приводится список литературы.

Во Введении даются формулировки нелинейных краевых задач и отмечаются особенности поведения решения в зависимости от параметров, обусловленные нелинейными эффектами. На примерах известных из литературы моделей, связанных с описанием реальных процессов, дается физическая интерпретация множественности решений соответствующих нелинейных краевых задач, а также существование областей изменения параметров моделей, где

краевая задача не имеет решения. В связи с этим обсуждаются проблемы численного анализа решений нелинейной краевой задачи в зависимости от параметра.

Первый раздел содержит элементы теории линейных краевых задач, которая обычно излагается в лекциях по обыкновенным дифференциальным уравнениям для студентов 2-го курса на механико-математическом факультете. Основное внимание здесь уделяется таким понятиям как матричная функция Грина и связанное с этим понятию хорошей обусловленности краевой задачи, а также теореме о непрерывной зависимости решения от параметров.

Во втором разделе рассматривается метод ортогональных прогонок С.К. Годунова для решения линейных краевых задач, применяемый к не обязательно разделенным краевым условиям и который в этом случае известен как метод множественной стрельбы. Метод множественной стрельбы позволяет противодействовать явлению сплющиванию базисных решений, которое возникает при редукции краевой задачи к задаче Коши с последующим выполнением краевых условий.

Далее обсуждаются методы численного решения нелинейных краевых задач: метод Ньютона (метод квазилинеаризации) и метод множественной стрельбы. В связи с этим излагается теорема о сходимости итераций в методе Ньютона, понимание которой неразрывно связано с содержанием первого раздела. С методом множественной стрельбы связана серия задач Коши, на которой определяется как система нелинейных уравнений относительно сеточных значений искомой вектор-функции, так и матрица производных, необходимых для использования метода Ньютона применительно к решению этой системы. Завершает раздел доказательство теоремы о сходимости итераций по Ньютону при решении системы нелинейных уравнений.

В третьем разделе излагаются методы продолжения решения по параметру для численного исследования зависимости решения систем нелинейных уравнений от параметра. Результаты этого раздела в дальнейшем замыкают описание метода продолжения решения по

параметру применительно к нелинейным краевым задачам. Методы основаны на теореме о неявной функции. При выполнении условий теоремы система нелинейных уравнений определяет решение, график которого может содержать особые точки типа «поворот». Рассматривается два подхода: продолжение решения по т.н. «текущему» параметру, выбираемому регулярно с помощью параметризации, и продолжение решения, как задача построения интегральной кривой задачи Коши, в которой роль независимого аргумента играет параметр. При этом рассматривается случай, когда аргументом является длина дуги пространственной кривой, определяемой на решениях системы нелинейных уравнений.

Четвертый раздел посвящен описанию численных методов исследования нелинейных краевых задач в зависимости от параметра методом продолжения решения по параметру. В методе множественной стрельбы приводится вывод серии задач Коши, на которых определяется как система нелинейных уравнений, о которой говорилось во втором разделе, но и матрица производных, что позволяет численно изучать зависимость решения системы от параметра методами, изложенными в третьем разделе.

Во втором методе приближенное представление проблемы в виде системы нелинейных уравнений связано со сплайн-коллокацией с помощью эрмитового кубического сплайна класса  $C^1$ . В результате сеточные значения искомой вектор-функции, являющейся решением нелинейной краевой задачи, приближаются на неравномерной сетке с погрешностью 4-го порядка. Важную роль в методе продолжения по параметру играет адаптация сетки. В разделе излагается способ, основанный на методе выбора узлов сетки в задаче интерполяции эрмитовым кубическим сплайном при заданном ограничении на погрешность интерполяции. Это позволяет эффективно изучать зависимость решения краевой задачи от параметров в случае, когда в ходе продолжения по параметру возникают решения с большими градиентами, положение которых заранее не известно.

Завершает четвертый раздел изложение результатов численного исследования нелинейных краевых задач, взятых

из публикаций. Это модель пленочного электростатического реле с учетом жесткости пленки, модель каталитического реактора кипящего слоя и осциллятор Ван дер Поля.

Для выбранных примеров характерна множественность решений и возникновение больших градиентов решения в процессе продолжения по параметру. Вычисления проводились по программам, разработанными авторами пособия.

В Заключение отмечается значение пособия, содержание которого служит обоснованием организации численного эксперимента при исследовании нелинейных краевых задач.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ВВЕДЕНИЕ

Тема 1. Численное исследование решения нелинейной краевой задачи в зависимости от параметров модели. Множественность решений как типичное проявление нелинейности проблемы.....	8
Тема 2. Примеры нелинейных задач, иллюстрирующих природу множественности решений	
1. Простейшая модель электростатического реле.....	13
2. Модель пленочного электростатического реле.....	16
3. Модель теплового взрыва (плоский сосуд).....	20
4. Модель теплового взрыва (цилиндрический сосуд).....	22
5. Петля гистерезиса в модели теплового взрыва.....	23

### Раздел 1. ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ.

Тема 1. Существование и единственность решения краевой задачи. Матричные функции Грина.....	26
Тема 2. Различные случаи задания краевых условий.....	28
Тема 3. Краевые задачи для линейного дифференциального уравнения высокого порядка. Функции Грина.....	32
Тема 4. Примеры представления нелинейной краевой задачи в виде нелинейного интегрального уравнения с использованием функции Грина.....	35
Тема 5. Непрерывная зависимость решения краевой задачи от параметров.....	38

### Раздел 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

Тема 1. О численном решении линейных краевых задач.....	45
Тема 2. О численном решении нелинейных краевых задач	
Метод Ньютона (метод квазилинеаризации).....	50
Тема 3. Метод множественной стрельбы.....	56
Тема 4. Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений.....	59

**Раздел 3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ.**

Тема 1. Метод продолжения по параметру, основанный на параметризации.....	62
Тема 2. Продолжение по параметру, как задача Коши.....	71
Тема 3. Метод Кубичека.....	73

**Раздел 4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ.**

Тема 1. Продолжение решения по параметру в методе множественной стрельбы.....	76
Тема 2. Дискретная модель нелинейной краевой задачи, основанная на сплайн-коллокации.....	81
Тема 3. Адаптация сетки.....	85
Тема 4. Дискретные модели нелинейных интегральных уравнений.....	90
Тема 5. Численные примеры	
1. Модель пленочного электростатического реле.....	94
2. Модель каталитического реактора .....	96
3. Осциллятор Ван дер Поля.....	100
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>102</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>102</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### **Тема 1. Численное исследование решения нелинейной краевой задачи в зависимости от параметров модели . Множественность решений как типичное проявление нелинейности проблемы**

В приложениях многие математические модели формулируются в виде нелинейной краевой задачи, содержащей скалярный параметр  $q$ , для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x \in [a, b], \quad q \in [c, d],$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n, q) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n, q) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n, q). \end{aligned} \tag{1}$$

Требуется, чтобы решение (1) удовлетворяло краевым условиям:

$$\begin{aligned} g_1(y_1(a), y_2(a), \dots, y_n(a), y_1(b), y_2(b), \dots, y_n(b), q) &= 0 \\ g_2(y_1(a), y_2(a), \dots, y_n(a), y_1(b), y_2(b), \dots, y_n(b), q) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ g_n(y_1(a), y_2(a), \dots, y_n(a), y_1(b), y_2(b), \dots, y_n(b), q) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $f_i$  и  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , - достаточно гладкие функции по совокупности аргументов в некоторой области их определения. Функции  $g_1, g_2, \dots, g_n$  представляют  $n$  независимых краевых условий. Полагая  $f_i$  и  $g_i$  компонентами вектор-функций  $f$  и  $g$ , представим краевую задачу в векторном виде:

$$x \in [a, b], \quad q \in [c, d],$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, q), \quad g(y(a), y(b), q) = 0. \tag{3}$$

Отметим, что параметр  $q$  выбирается среди других параметров модели. В дальнейшем будет рассмотрен метод



численного исследования зависимости решения краевой задачи от параметра  $q$ , называемый **методом продолжения решения по параметру**.

К частному случаю (1),(2) относится нелинейная краевая задача для дифференциального уравнения высокого порядка:

$$x \in [a, b], \quad q \in [c, d],$$

$$\frac{d^n u}{dx^n} = F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}, q\right),$$

с краевыми условиями:

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

$$g_i\left(u(a), \frac{du}{dx}(a), \dots, \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(a), u(b), \frac{du}{dx}(b), \dots, \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}(b), q\right) = 0.$$

Здесь,  $F$  - достаточно гладкая функция по совокупности аргументов в некоторой области их определения.

Действительно, если ввести обозначения

$$y_1 = u, \quad y_2 = \frac{du}{dx}, \dots, \quad y_n = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}},$$

то краевая задача запишется в виде:

$$x \in [a, b], \quad q \in [c, d],$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_3,$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, q).$$

При этом формулировка краевых условий повторяет (2).

Отметим, что к краевой задаче (3) сводится проблема численного исследования предельных циклов автономной системы:

$$t \geq 0, \quad \frac{dy}{dt} = f(y, q) \tag{4}$$

формулируется в виде краевой задачи. Пусть известно, что при некотором значении параметра  $q=q_0$  решение  $y=y(t, q_0)$  системы (4) выходит на предельный цикл с периодом  $T$ . Тогда

для достаточно больших  $t$  вектор-функция  $y = y(t, q_0)$  будет близка к решению краевой задачи с краевыми условиями периодичности:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, q_0), \quad y(0) = y(T). \quad (5)$$

Так как период  $T$  заранее не известен, то к условиям периодичности добавляется условие трансверсальности, которое задает начало отсчета периодического решения на отрезке длиной  $T$  по  $t$ . Например, условие трансверсальности может быть задано в виде:

$$\frac{dy_k}{dt}(0) = f_k(y(0), q_0) = 0, \quad (6)$$

где  $y_k$  –  $k$ -я компонента вектора  $y$ .

Замена  $t = Tx$  позволяет записать краевую задачу определяющую предельный цикл, в «стандартном» виде:

$$t \in [0, 1], \quad \frac{dy}{dt} = Tf(y, q), \quad \frac{dT}{dx} = 0, \quad (7)$$

$$y(0) = y(1), \quad f_k(y(0), q) = 0.$$

Отсюда методом продолжения решения по параметру находятся  $y = y(x, q)$  и  $T = T(q)$ .

Если правая часть системы дифференциальных уравнений (3) является  $T$ -периодической функцией:

$$f(x, y, q) = f(x + T, y, q).$$

то формулировка краевой задачи, определяющей  $T$ -периодическое решение (предполагается, что решение существует), имеет вид:

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y, q), \quad y(0) = y(T).$$

Пусть  $y = y(x, q)$  – однопараметрическое семейство решений (3), зависящее от параметра  $q$ . При непрерывном изменении параметра  $q$  в пространстве  $(x, y, q)$  образуется поверхность  $S$ , сплошь состоящая из графиков решений краевой задачи. При этом предполагается, что  $S$  – гладкая поверхность с непрерывно меняющейся касательной плоскостью, что не исключает возможности существования у поверхности складок. Существование складок означает, что в некоторой области изменения параметра  $q$  краевая задача (3)

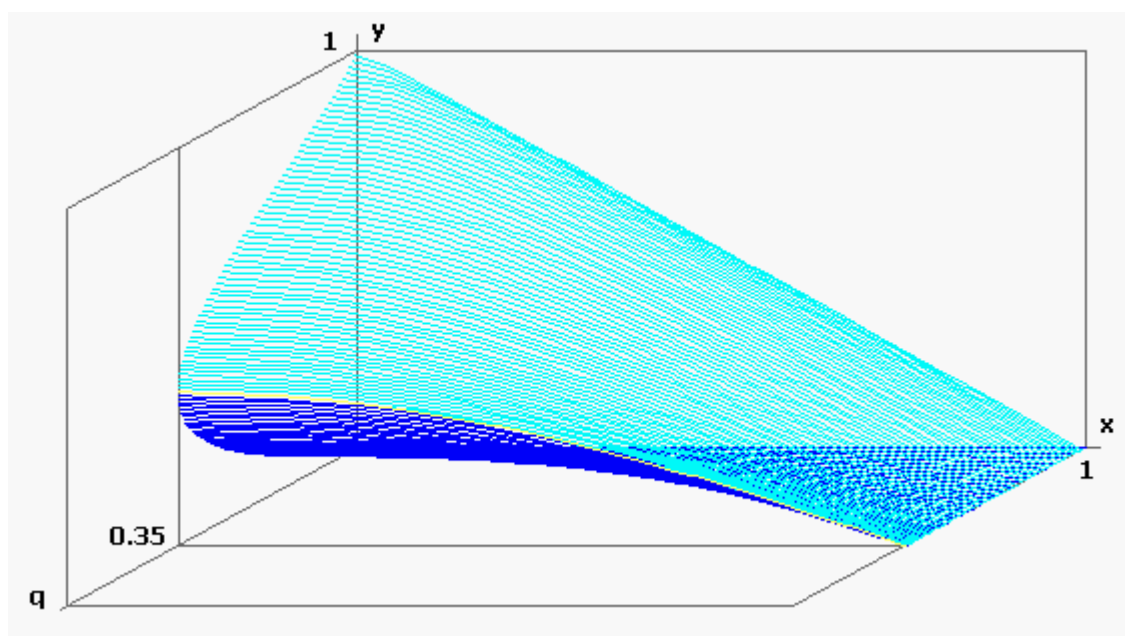
будет иметь несколько решений. В случае гладкости поверхность  $S$  может быть численно построена методом продолжения решения по параметру.

В качестве примера на рис.1 приведена гладкая поверхность  $S$  в пространстве  $(x,y,q)$ , состоящая из графиков решений краевой задачи:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y < 1,$$

$$\frac{dy}{dx} = u, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{q}{(1-y)^2}, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (8)$$

При  $0 < q < .35$  краевая задача имеет два решения. При  $q > .35$  краевая задача не имеет решений.



*РИС.1. График гладкой поверхности  $S$  в пространстве  $(x,y,q)$ . Поверхность  $S$  состоит из графиков решений краевой задачи (8).*

При исследовании краевой задачи (3) могут возникать вычислительные проблемы, обусловленные нелинейностью постановки, отражающей реальные физические процессы. Как правило, при этом отсутствует достаточно полная информация об изучаемом объекте. Поэтому численное исследование (3) носит характер вычислительного эксперимента, при организации которого предполагается, что решение обладает определенными свойствами.

В случае формулировки краевой задачи в общем виде (3) справедливо следующее утверждение. Пусть при некотором значении параметра  $q = q_0$  краевая задача имеет решение  $y = y(x, q_0)$ . Тогда по непрерывности краевая задача будет иметь решение и в некоторой окрестности  $q_0$ . Отметим, что размеры окрестности заранее неизвестны и определяются в ходе численного эксперимента. С другой стороны, неудачное задание границ изменения параметра  $q$  может исказить представление о числе решений.

Для выявления свойств модели, после того как численно найдено решение  $y = y(x, q)$ , строится диаграмма, представляющая график зависимости некоторой характеристики модели, задаваемой на решении, от параметра  $q$ . При этом, как уже отмечалось, нелинейность может проявляться в том, что диаграмма в некоторой области изменения  $q$  будет графиком неоднозначной функции, указывая на множественность решений (3) при одном и том же значении  $q$ . Та же диаграмма может указать на области изменения  $q$ , в которых решение краевой задачи не существует.

В численных методах исследования нелинейных краевых задач можно выделить два подхода. В первом из них используются приближенное дискретное представление краевой задачи, связанное с методом сплайн-коллокации. При этом проблема формулируется, как численное исследование соответствующей системы нелинейных уравнений относительно сеточных значений искомых функций в зависимости от параметра. Второй подход связан с методом множественной стрельбы, в котором «пристреливаемые» сеточные значения формально являются решением системы нелинейных уравнений, определяемой на решениях серии задач Коши. И в том, и в другом случаях используются итерации типа Ньютона. Поэтому эффективность вычисленного эксперимента непосредственно зависит от эффективности численного решения линеаризованных задач на итерациях.

## **Тема 2. Примеры нелинейных задач с точным решением, иллюстрирующих природу множественности решений.**

### *1. Простейшая модель электростатического реле.*

Простейшая модель электростатического реле (см. рис.2) описывает процесс притяжения подвижного электрода в виде плоской недеформируемой пластинки, закрепленной на пружине, к неподвижному электроду под воздействием электростатического притяжения, создаваемого разностью потенциалов между электродами. Предполагается, что зазор между электродами много меньше их боковых размеров. Уравнение движения, в котором пренебрегается силой инерции, имеет вид:

$$\mu \frac{dY}{dt} = F_1 - F_2, \quad Y = 0 \text{ при } t=0. \quad (9)$$

$$F_1 = \frac{\varepsilon U^2}{2(d - Y)^2}, \quad F_2 = GY.$$

Здесь

$Y$  - положение подвижного электрода

$F_1$  - сила электростатического притяжения

$F_2$  - упругая сила пружины

$\varepsilon$  - электрическая постоянная

$U$  - разность потенциалов между электродами

$G$  - коэффициент упругости пружины.

$\mu$  - коэффициент сопротивления

$d$  - расстояние между электродами при  $U = 0$

$Y$  - положение подвижного электрода

В рамках модели требуется определить минимальную разность потенциалов  $U$ , при которой подвижный электрод достигнет контактного выступа, задаваемого значением  $Y_c$ , а также разность потенциалов, при которой происходит размыкание контактов.

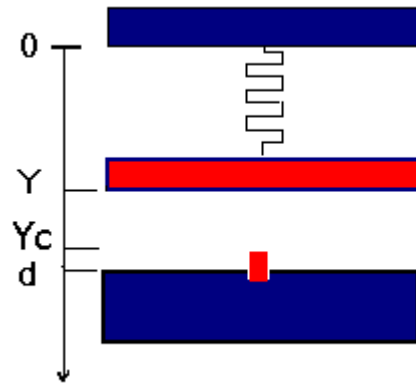


РИС.2. Модель электростатического реле.

При всей простоте описания модель электростатического реле позволяет наглядно продемонстрировать, каким образом в свойствах решения модели проявляется такой нелинейный эффект, как гистерезис, на котором основано функционирование реле. Введем в рассмотрение безразмерные величины:

$$Y = dy, \quad t = T\tau, \quad T = \frac{\mu}{G}, \quad q = \frac{\varepsilon U^2}{2d^3 G} \quad (10)$$

При этом уравнение движения (4) преобразуется к виду:

$$\frac{dy}{d\tau} = f(y, q), \quad y=0 \text{ при } \tau=0, \quad (11)$$

где

$$f(y, q) = \frac{q}{(1-y)^2} - y, \quad 0 \leq y < 1.$$

Стационарные решения дифференциального уравнения (11) определяется из условия  $f(y, q) = 0$ , которое записывается в виде:

$$q = y \left( \frac{1}{1-y} \right)^2. \quad (12)$$

Как легко убедиться, максимальное значение  $q$  на отрезке  $[0, 1]$  по  $y$  достигается при  $y = 1/3$  и равно  $q_{MAX} = 4/27$ . Поэтому имеет место следующее описание множественности стационарных решений в зависимости от параметра  $q$ :

$0 < q < 4/27$  – два стационарных решения.

$q = 4/27$  – одно стационарное решение.

$q > 4/27$  – стационарные решения не существуют.

Рассмотрим устойчивость найденных стационарных решений. Для этого, согласно теореме Ляпунова об

устойчивости по первому приближению, определим знак производной  $f_y(y, q)$ , которая с учетом (11) имеет вид:

$$f_y(y, q) = \frac{2q}{(1-y)^3} - 1 = \frac{3y-1}{1-y}.$$

Следовательно,  $f_y(y, q) < 0$ , для всех  $y < 1/3$ , что означает асимптотическую устойчивость стационарных решений (11), для которых  $q$  растет с ростом  $y$ . Если  $y > 1/3$ , то  $f_y(y, q) > 0$ , и, таким образом, имеет место неустойчивость стационарных решений, для которых  $q$  убывает с ростом  $y$ . Легко убедиться, что стационарное решение при  $q = q_{MAX}$  является неустойчивым.

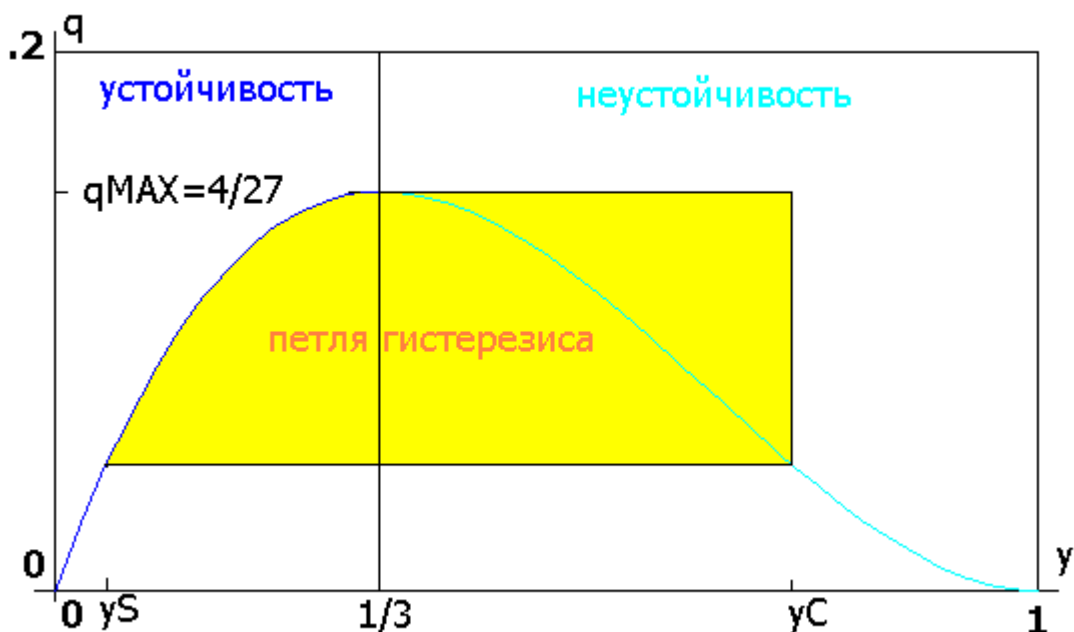


РИС.3 . Диаграмма стационарных решений краевой задачи Коши (11), определяющая параметры петли гистерезиса.

Теперь мы можем описать эволюцию подвижного электрода, описываемую задачей Коши (11) при увеличении разности потенциалов. С ростом параметра  $q$  от 0 до  $q_{MAX}$  подвижный электрод будет стремиться к устойчивому стационарному положению, приближающемуся к неподвижному электроду. С дальнейшим ростом  $q$  подвижный электрод за конечное время достигает контактного выступа, которому соответствует  $y_C = Y_C/d$ . (Предполагается, что  $y_C > 1/3$ ). Тем самым происходит

срабатывание реле. По этой причине разность потенциалов, соответствующая  $q_{MAX}$  по формулам (10), называется напряжением срабатывания реле.

После срабатывания реле начнем уменьшать разность потенциалов. До тех пор, пока значение  $q$  не достигнет значения  $q_{MIN}$ , вычисляемого по формуле (12), где  $y = y_C$ , подвижный электрод будет оставаться на контактном выступе, поскольку при этом сила электростатического притяжения  $F_1$  будет больше упругой силы пружины  $F_2$ . В момент выравнивания сил  $F_1$  и  $F_2$  произойдет размыкание контактов, при котором подвижный электрод займет устойчивое положение равновесие, соответствующее  $y = y_S < 1/3$ . С дальнейшим уменьшением разности потенциалов подвижный электрод будет стремиться к устойчивому стационарному состоянию, приближающемуся к невозмущенному положению  $y = 0$ . Разность потенциалов, соответствующая  $q_{MIN}$  по формулам (10), называется напряжением размыкания реле.

Графическое изображение эволюции подвижного электрода носит название **петли гистерезиса**. Задание контактного выступа определяет значение  $q_{MIN}$ , которое вместе с  $q_{MAX}$  являются параметрами гистерезиса. С энергетической точки зрения принципиально важно, что после срабатывания контакты реле не размыкаются при последующем сбрасывании разности потенциалов до значений, близких, но превышающих напряжение отпущения.

Отметим, что в рассматриваемой модели неустойчивые стационарные решения имеют четкий физический смысл, определяя напряжение отпущения реле. Отсутствие стационарных решений при  $q > q_{MAX}$  объясняется тем, что при достаточно большой разности потенциалов упругая сила пружины уже не может уравновесить силу электростатического притяжения.

## 2. Модель пленочного электростатического реле.

Рассмотрим в одномерной по линейной координате постановке модель пленочного электростатического реле, в которой подвижным электродом является натянутая металлизированная пленка с закрепленными на расстоянии



$2L$  концами (см. рис.4). Подвижный электрод симметрично прогибается в сторону неподвижного электрода под действием электростатических сил, обусловленных разностью потенциалов между электродами. При отсутствии нагрузки на подвижный электрод расстояние между подвижным и неподвижным электродами равно  $h$ . При этом  $h \ll L$ .

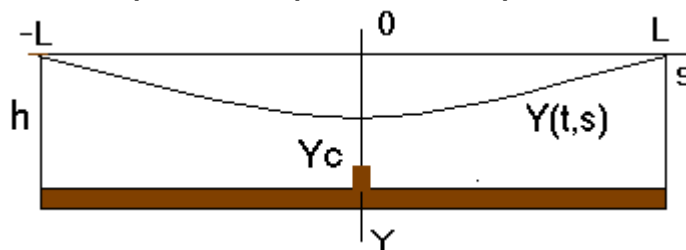


РИС.4. Модель пленочного электростатического реле. Здесь  $Y_c$  – положение выступающего контакта.

Форма прогиба гибкого электрода  $Y(s,t)$  описывается начально-краевой задачей для параболического уравнения вида:

$$t > 0, s \in [0, L], \quad \mu \frac{\partial Y}{\partial t} = N \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} + \frac{\varepsilon U^2}{2(h-Y)^2}, \quad (13)$$

$$Y(0, s) = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial s}(t, 0) = \frac{\partial Y}{\partial s}(t, L) = 0$$

Здесь

$N$  – сила натяжения на единицу ширины пленки,

$U$  – разность потенциалов между электродами,

$\varepsilon$  – электрическая постоянная,

$\mu$  – коэффициент сопротивления среды.

В краевых условиях учтена симметрия прогиба относительно начала координат.

Введем в рассмотрение безразмерные величины:

$$t = T\tau, \quad s = Lx, \quad Y = hy, \quad T = \frac{\mu L^2}{N}, \quad q = \frac{\varepsilon U^2 L^2}{2h^3 N}. \quad (14)$$

При этом краевая задача (13) преобразуется к виду:

$$\tau > 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q}{(1-y)^2}, \quad y(0, x) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(\tau, 0) = \frac{\partial y}{\partial x}(\tau, 1) = 0.$$

Стационарная форма прогиба пленки  $y(x)$  определяется из решения краевой задачи:

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{q}{(1-y)^2} = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = y \llcorner \equiv 0. \quad (15)$$

Приведем точное решение (15), которое имеет вид :

$$x = x(y, y_0), \quad q = q(y_0), \quad y_0 = y(0), \quad 0 \leq y_0 < 1, \quad 0 \leq y \leq y_0,$$

где

$$x(y, y_0) = \frac{1}{r(y_0)} \left[ \sqrt{(1-y_0)(y_0-y)} + (1-y_0) \ln \left( \frac{\sqrt{1-y} + \sqrt{y_0-y}}{\sqrt{1-y_0}} \right) \right],$$

$$q(y_0) = \frac{1}{2} (1-y_0) r(y_0)^2, \quad r(y_0) = \sqrt{y_0} + (1-y_0) \ln \left( \frac{1 + \sqrt{y_0}}{\sqrt{1-y_0}} \right).$$

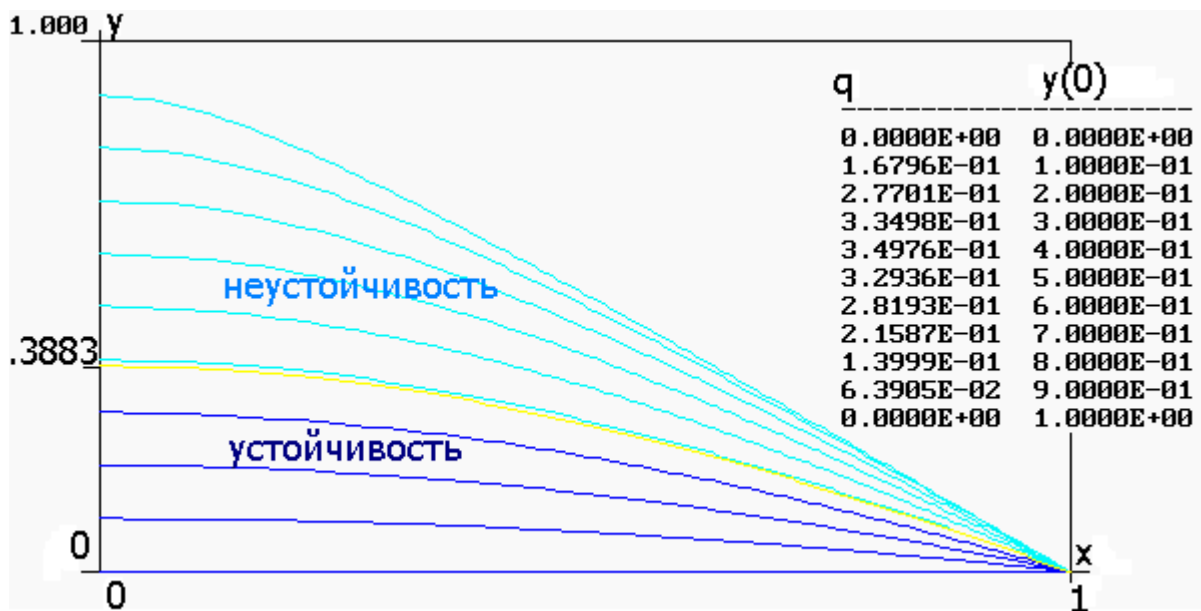


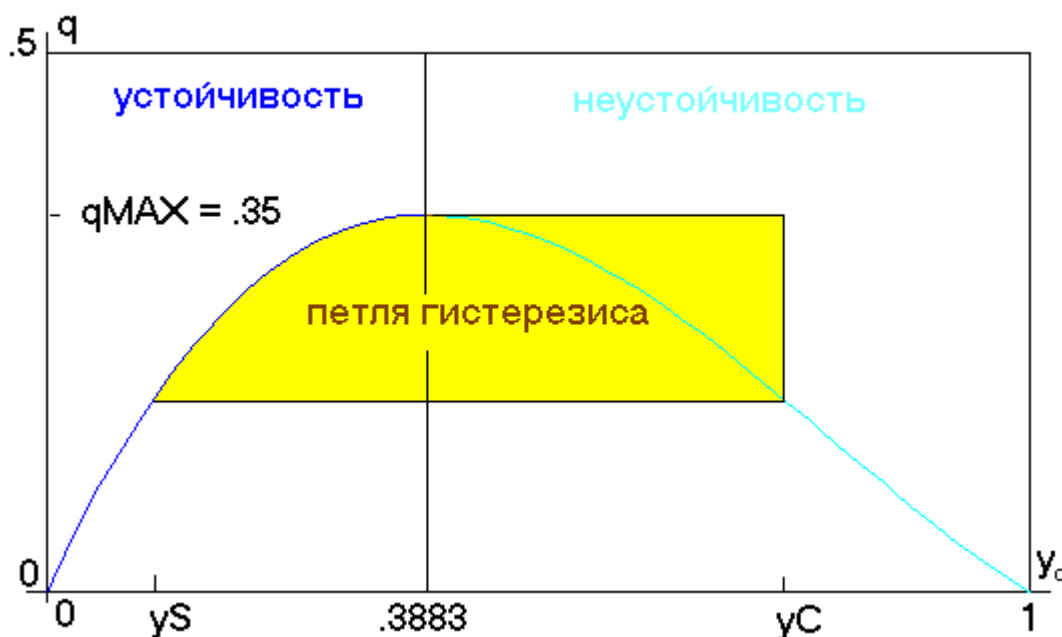
РИС.5 Решения краевой задачи (15) при различных значениях параметра  $q$ .

Достаточно полное представление о поведении функции  $y(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  даёт значение  $y(0)$  (см. рис.5). Поскольку  $y(x)$  – решение краевой задачи (10), то из условий

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x) + \frac{q}{(1-y(x))^2} \equiv 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = y \llcorner \equiv 0,$$

следует, что  $y(x)$  – выпуклая функция с максимальным значением, равным  $y(0)$ , которая монотонно убывает с ростом  $x$  до 0 при  $x = 1$ . Поэтому в качестве диаграммы

стационарных решений естественно использовать график зависимости  $y(0)$  от параметра  $q$ .



*РИС.6. Диаграмма стационарных решений, определяемых краевой задачей (15) в виде зависимости значения  $y(0)$  от параметра  $q$ . Описание петли гистерезиса пленочного электростатического реле.*

Как следует из диаграммы стационарных решений, модель пленочного электростатического реле обладает теми же свойствами, что и простейшая модель, поскольку обе модели правильно отражают одно и то же свойство электростатического притяжения подвижного электрода: в уравнениях, определяющих стационарное положение подвижного электрода, начиная с некоторой разности потенциалов, упругие силы, удерживающие подвижный электрод, не могут уравновесить электростатические. Следовательно, существует область значений параметра  $q$ , в которой стационарные решения не существуют.

В данном случае устойчивость стационарных решений начально-краевой задачи исследовалась численно методом прямых. Если в начально-краевой задаче в качестве начального условия взять стационарное решение, в котором  $y(0) = y_C = Y_C / h$ , т.е. неустойчивое стационарное решение, то в дальнейшем решение начально-краевой задачи будет стремиться к устойчивому стационарному решению, в котором

$y(0) = y_S$ . На диаграмме стационарных решений это соответствует замыканию петли гистерезиса.

### 3. Модель теплового взрыва (плоский сосуд)

Пусть в плоском сосуде с расстоянием  $R$  от плоскости симметрии происходит реакция с выделением тепла по закону Арениуса. На стенках сосуда поддерживается температура внешней среды. В безразмерных величинах процесс описывается начально-краевой задачей относительно «безразмерной» температуры:

$$t > 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + qe^y \quad y(0, x) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(t, 0) = y(t, 1) = 0,$$

где  $q$  – параметр, пропорциональный  $R^2$ .

Стационарное распределение  $y(x)$  определяется из решения краевой задачи:

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + qe^y = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = y(1) = 0. \quad (16)$$

Точное решение (11) имеет вид:

$$y(x) = \ln\left(\frac{ch(b)}{ch(bx)}\right), \quad q = \frac{2b^2}{ch^2(b)},$$

или

$$y(x) = y_0 - 2bx - 2 \ln\left(\frac{1 + e^{-2bx}}{2}\right), \quad q = 2b^2 e^{-y_0}, \quad (17)$$

$$b = \frac{y_0}{2} + \ln(1 + \sqrt{1 - e^{-y_0}}), \quad y_0 = y(0).$$

Из представленных в виде графиков результатов на рис. 7-8 следует, что, как и в моделях электростатического реле, стационарные распределения температуры в плоском сосуде, описываемые краевой задачей (16), возможны не при всех значениях параметра  $q$ . В данном случае стационарные решения не существуют при  $q > .88$ . Это свойство рассматриваемой краевой задачи является отражением физического процесса, при котором тепло, выделяющееся в сосуде, не успевает отводиться через стенки сосуда. Таким

образом, существует критический размер сосуда  $R$ , соответствующий  $q = .88$ , выше которого процесс не стабилизируется (происходит «тепловой взрыв»).

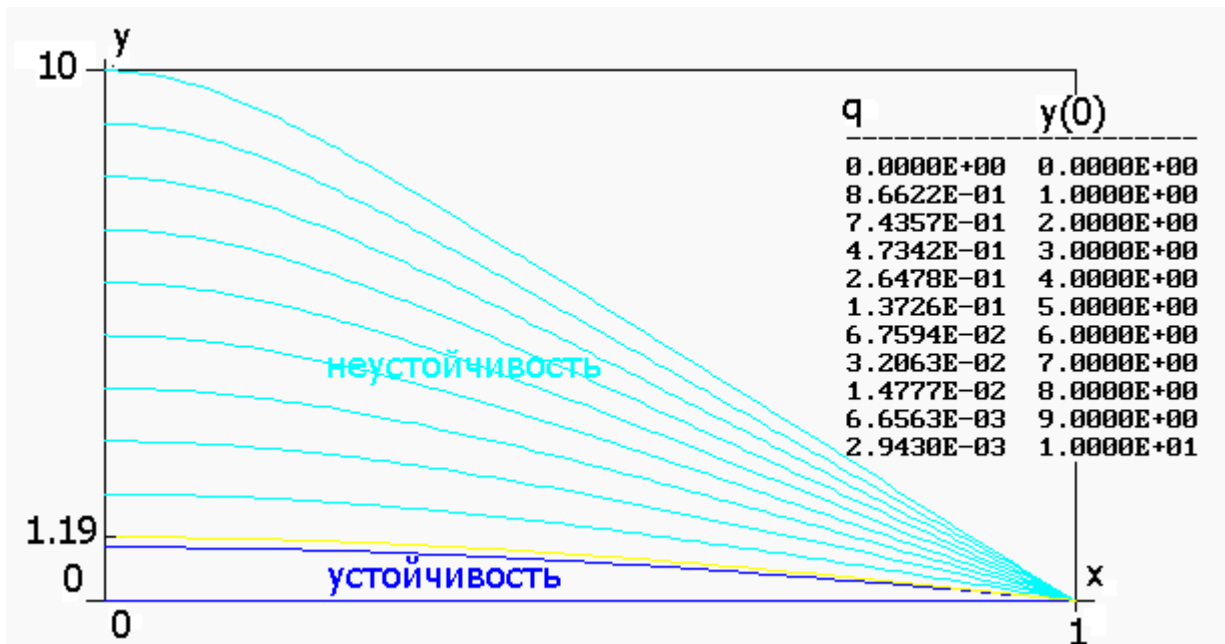


РИС.7 Решения краевой задачи (16) при различных значениях параметра  $q$ .

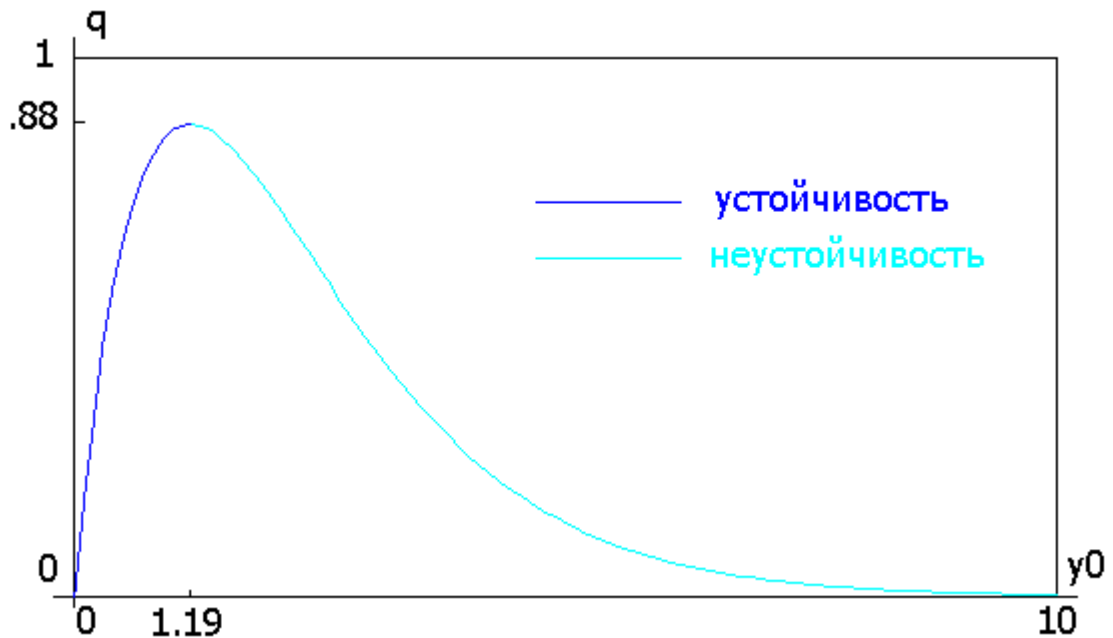


РИС.8. Диаграмма стационарных решений, определяемых краевой задачей (16) в виде зависимости значения  $y(0)$  от параметра  $q$ .

Если  $q < .88$ , то краевая задача (11), как следует из диаграммы стационарных решений, имеет два решения.

Численно можно показать, что решения, у которых  $y(0) < 1.19$ , асимптотически устойчивы, а при  $y(0) \geq 1.19$  – неустойчивы.

#### 4. Модель теплового взрыва (цилиндрический сосуд)

Рассмотрим тот же процесс в цилиндрическом сосуде с радиусом  $R$ . В безразмерных величинах процесс описывается начально-краевой задачей:

$$t > 0, \quad 0 < x \leq 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + qe^y, \quad y(0, x) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(t, 0) = y(t, 1) = 0,$$

Стационарное распределение  $y(x)$  определяется из решения краевой задачи:

$$0 < x \leq 1,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + qe^y = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = y(1) = 0. \quad (18)$$

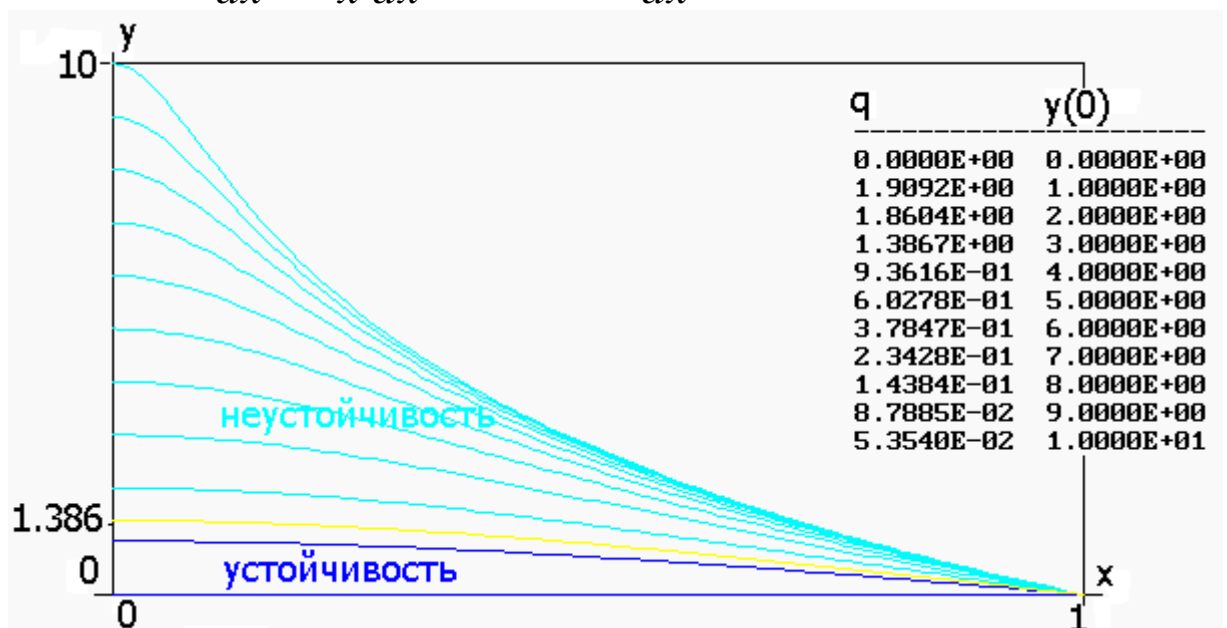


РИС.9 Решения краевой задачи (18) при различных значениях параметра  $q$ .

Точное решение (13) имеет вид:

$$y(x) = -2 \ln(a + (1-a)x^2), \quad q = 8a(1-a), \quad (19)$$

$$a = e^{-y_0/2}, \quad y_0 = y(0)$$

Графики функции  $y(x)$  при различных значениях параметра  $q$ , полученные по формулам (19), приведены на рис.9.

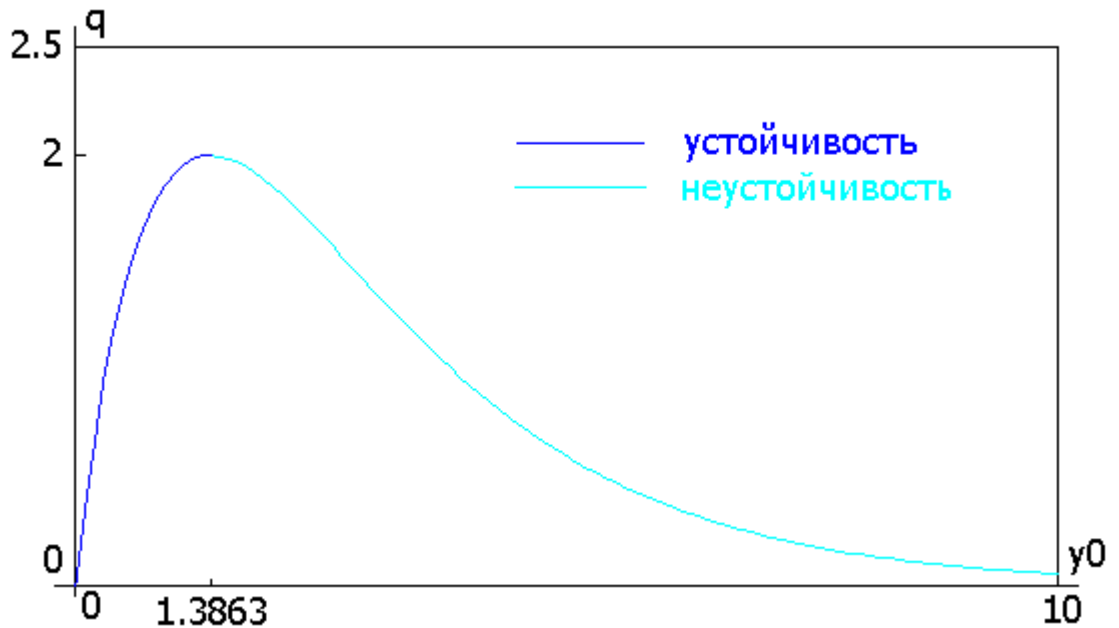


РИС.10. Диаграмма стационарных решений, определяемых краевой задачей (18) в виде зависимости значения  $y(0)$  от параметра  $q$ .

Если  $q < 2$ , то, как следует из диаграммы стационарных решений на рис.10, краевая задача (18), согласно формулам (19), имеет два решения. Численно можно показать, что решения, у которых  $y(0) < 1.3863$ , асимптотически устойчивы, а при  $y(0) \geq 1.3863$  – неустойчивы.

##### 5. Петля гистерезиса в модели теплового взрыва.

Рассмотрим более реалистичную модель теплового взрыва, в которой функция, описывающая выделение тепла, ограничена. В случае плоского сосуда соответствующая краевая задача для определения стационарных решений имеет вид:

$$0 \leq x \leq 1, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + qe^{\frac{y}{1+by}} = 0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = y \leq 0, \quad (20)$$

где  $b$  – положительный параметр. Можно показать, что краевая задача (20) имеет хотя бы одно решение при  $q \geq 0$ . Приведем результаты численного анализа (20).



**РИС.11.** Диаграмма стационарных решений, определяемых краевой задачей (15) в виде зависимости значения  $y(0)$  от параметра  $q$ . В отличие от (16) краевая задача (20) имеет решение при всех  $q > 0$ .

Если  $b$  достаточно мало, то существует область изменения параметра  $q$  с тремя решениями (20). Границы этой области определяются из диаграммы стационарных решений, представляющей зависимость  $y_0 = y_0(q)$ ,  $y_0 = y(0)$ . Пусть  $q = q_{MAX_1}$  и  $q = q_{MAX_2}$ ,  $q_{MAX_2} < q_{MAX_1}$  - значения  $q$ , при которых график кривой  $y_0(q)$  имеет вертикальную касательную (точки поворота). По определению  $q_{MAX_1}$  и  $q_{MAX_2}$  являются параметрами гистерезиса. В точках поворота происходит смена устойчивости. Таким образом, точки поворота делят кривую  $y_0 = y_0(q)$  на три дуги, точки которых, если двигаться по кривой с возрастанием  $y_0$  от 0, поочередно представляют асимптотически устойчивые, неустойчивые и вновь асимптотически устойчивые стационарные решения. Эти свойства стационарных решений и определяют петлю гистерезиса.

Приведем более подробное описание петли гистерезиса. Если при  $b = 0$  и  $q = q_{MAX} + 0$  решение краевой задачи (20) не существует, а нестационарный процесс характеризуется неограниченным ростом  $y$  при  $t = 0$ , то при  $b > 0$  и достаточно малом значении  $b$  имеет место скачок в стационарных



значениях  $y(0)$  при  $q = q_{MAX_1-0}$  и  $q = q_{MAX_1+0}$ . С дальнейшим ростом  $q$  стационарное значение  $y(0)$  неограниченно растет. Таким образом, при  $q > q_{MAX_1}$  «тепловой взрыв» в решениях заменяется на асимптотически устойчивое «высокотемпературное» решение.



РИС.12. Петля гистерезиса на диаграмме стационарных решений, определяемых краевой задачей (20)

Аналогичный скачок  $y(0)$  имеет место при  $q = q_{MAX_2}$ . Асимптотически устойчивое стационарное решение при  $q = q_{MAX_2+0}$  теряет устойчивость при  $q = q_{MAX_2-0}$  и выходит на другое асимптотически устойчивое «низкотемпературное» стационарное решение.

Например, при  $b=2$  значение  $q_{MAX_1}$  равно 1.162, а неустойчивое стационарное решение характеризуется значением  $y(0) = 2.354$ . После выхода на устойчивое стационарное решение значение  $y(0) = 47.50$ . При  $q = q_{MAX_2}$  значение  $y(0)$  на диаграмме скачкообразно меняется от значения 15.41 до .776.

В приложениях определение параметров гистерезиса играет важную роль. Так при моделировании стационарных каталитических процессов это позволяет определить в рамках модели области параметров с устойчивым протеканием стационарных каталитических режимов.