Раздел 1.
ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ.

Тема 1. Существование и единственность решения краевой задачи. Матричные функции Грина.

Рассмотрим на отрезке *[a, b]* по *x* линейную краевую задачу для системы из *n* обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x), \quad x\in[a,b], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$Sy(a)+Ty(b)=\varphi. \tag{2}$$

Здесь *y* , *f* и *φ* - векторы размерности *n*, *A, S* и *T* – *(nxn)*-матрицы. Предполагается, что компоненты *A(x)* и *f(x)* непрерывны на отрезке *[a, b].*

Пусть Y(x) – фундаментальная матрица решений уравнения (Ф.М.Р.):

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y, \qquad x\in[a,b].$$

Тогда, используя формулу Коши, решение краевой задачи (1),(2), можно представить в виде:

$$y(x) = Y(x)C + \int_a^x Y(x)Y^{-1}(s)f(s)ds. \tag{3}$$

Здесь C – вектор, определяемый системой линейных алгебраических уравнений:

$$[SY(a)+TY(b)]C=\varphi-T\int_a^b Y(b)Y^{-1}(s)f(s)ds, \tag{4}$$

при условии, что матрица системы (4) не вырождена.

Из (3), (4) следует, что для однозначной разрешимости краевой задачи необходимо и достаточно отличие от нуля определителя матрицы системы линейных уравнений (4):

$$\Delta = \det[SY(a)+TY(b)] \neq 0, \tag{5}$$

так как при этом однозначно разрешима система линейных алгебраических уравнений*).

Очевидно, вместо условия (5) можно потребовать, чтобы однородная краевая задача

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y,\quad Sy(a)+Ty(b)=0, \tag{6}$$

т.е. краевая задача (1),(2), где *f(x)* ≡ *0*, *φ*= *0*, имела только тривиальное решение: *y(x)* ≡ *0.* Действительно, в этом случае *C = 0* является единственным решением системы (4).

Формула (3),(4), дающая решение краевой задачи при любой непрерывной вектор-функции *f(x)* и вектора φ, легко преобразуется к виду:

$$y(x)=G_0(x)\varphi+\int_a^x G_1(x,s)f(s)ds+\int_x^b G_2(x,s)f(s)ds, \tag{7}$$

где

$$Q=[SY(a)+TY(b)]^{-1}TY(b).$$

$$\begin{aligned} &G_0(x)=Y(x)[SY(a)+TY(b)]^{-1},\quad a\le x\le b,, \\ &G_1(x,s)=Y(x)[I-Q]Y^{-1}(s),\qquad s\le x\le b, \\ &G_2(x,s)=-Y(x)QY^{-1}(s),\qquad a\le x\le s. \end{aligned} \tag{8}$$

Из выражений (8) следуют условия, которым удовлетворяют матричные функции $G_1(x,s)$ и $G_2(x,s)$:

$$\frac{dG_1}{dx}=A(x)G_1,\ s<x\le b;\quad \frac{dG_2}{dx}=A(x)G_2,\quad a\le x<s; \tag{9,1}$$

$$G_1(s,s)-G_2(s,s)=I,\quad x=s; \tag{9,2}$$

$$SG_2(a,s)+TG_1(b,s)=0. \tag{9,3}$$

$$\frac{dG_0}{dx}=A(x)G_0,\quad SG_0(a)+TG_0(b)=I\ ,\quad a\le x\le b. \tag{9,4}$$

С другой стороны, условия (9,1)-(9,4) однозначно определяют $G_1(x,s)$, $G_2(x,s)$ и $G_0(x)$.

Введем в рассмотрение матричную функцию $G(x,s)$:

$$G(x,s)=\begin{cases} G_1(x,s),\ x>s, \\ G_2(x,s),\ x\le s. \end{cases}$$

При этом условия (9,1),(9,2),(9.3) принимают вид:

$$\frac{dG}{dx}=A(x)G\ ,\quad x\ne s; \tag{10,1}$$

$$G(s+0,s)-G(s-0,s)=I,\quad x=s; \tag{10,2}$$

$$SG(a,s)+TG(b,s)=0. \tag{10,3}$$

Определение. Матричная функция $G(x,s)$, определяемая условиями (10,1),(10,2),(10,3), и матричная функция $G_0(x)$, определяемая условиям (9,4), называются матричными функциями Грина однородной краевой задачи (6).

Итог рассмотрения существования и единственности решения краевой задачи сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Пусть однородная краевая задача (6) имеет только тривиальное решение. Тогда краевая задача (1),(2) имеет единственное решение, задаваемое формулой:

$$y(x)=G_0(x)\varphi+\int_a^b G(x,s)f(s)ds, \qquad (11)$$

где $G(x,s)$ и $G_0(x)$- матричные функции Грина, определяемые из условий (10,1),(10,2),(10,3) и (9,4). При этом *y(x)*– непрерывно дифференцируемая на *[a,b]* вектор-функция.

Приведем априорную оценку нормы *y(x).* Заметим, что из однозначной разрешимости краевой задачи (1),(2) вытекает ограниченность норм матричных функций Грина:

$$\sup\|G_0(x)\|\le K, \quad \sup\|G(x,s)\|\le K, \quad x,s\in[a,b].$$

Кроме того,

$$\sup\|f(x)\|\le F.$$

В результате оценка нормы решения краевой задачи, которая следует из (11), имеет вид:

$$\|y(x)\|\le K(\|\varphi\|+(b-a)F), \qquad (12)$$

Определение. Оценка (12) означает, что краевая задача (1),(2) сформулирована корректно.

Тема 2. Различные случаи задания краевых условий.

Рассмотрим частные случаи задания краевых условий в краевой задаче (1),(2):

$$x\in[a,b], \quad \frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x), \quad Sy(a)+Ty(b)=\varphi.$$

1. Пусть Т – нулевая матрица, т.е краевое условие (2) имеет вид:

$$Sy(a)=\varphi.$$

При этом условие однозначной разрешимости (5) требует, чтобы матрица *S* была невырожденной:

$$\det(S) \neq 0.$$

Следуя (3), (4), приходим к интегральному представлению решения краевой задачи:

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x)S^{-1}\varphi + \int_a^x Y(x)Y^{-1}(s)f(s)ds.$$

Из сопоставления с решением (11),

$$y(x) = G_0(x)\varphi + \int_a^b G(x,s)f(s)ds,$$

в котором использованы матричные функции Грина $G_0(x)$ и $G(x,s)$, получаем, что в данном случае $G_0(x)$ и $G(x,s)$ имеют вид:

$$G_0(x) = Y(x)Y^{-1}(a)S^{-1}, \quad a \le x \le b,$$

$$G(x,s) = \begin{cases} G_1(x,s) = Y(x)Y^{-1}(s), & x > s, \\ G_2(x,s) \equiv 0, & x \le s. \end{cases}$$

2. Рассмотрим краевую задачу с разделенными краевыми условия:

$$x \in [a,b], \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \quad Ly(a) = l, \quad Ry(b) = r.$$

Здесь L – *((n-k)xn)* – матрица ранга *n-k*, *R* – *(kxn)* – матрица ранга *k* , *l* и *r* - векторы размеров, соответствующих *L* и *R*. После подстановки в условие однозначной разрешимости (5) выражения матриц S и T,

$$S = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix},$$

получим:

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} LY(a) \\ RY(b) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Приведем условия, определяющие матричные функции Грина. Представим $G_0(x)$ как составную матрицу:

$$G_0(x) = [G_a(x)G_b(x)],$$

где $G_a(x)$ – *(nx(n-k))* – матрица, $G_b(x)$ – *(nxk)* – матрица. Матрицы $G_a(x)$ и $G_b(x)$ определяются из условий:

$$\frac{dG_a}{dx} = A(x)G_a, \quad LG_a(a) = I_{n-k}, \quad LG_b(a) = 0_k$$

$$\frac{dG_b}{dx} = A(x)G_b, \quad RG_a(b) = 0_{n-k}, \quad RG_b(a) = I_k,$$

Здесь индексы у единичных матриц указывают на их размеры. Размеры матриц O_k и O_{n-k} отсюда следуют.

Матричная функция *G(x,s)* в интегральном представлении решения (11) определяется из условий (10,1)-(10,3), где с учетом рассматриваемого частного случая условие (10,3) записывается в виде:

$$LG(a,s)=0, \quad RG(b,s)=0.$$

В итоге имеем следующее выражение вектор-функции y(x), дающей решение краевой задачи:

$$y(x)=G_a(x)l + G_b(x)r + \int_a^b G(x,s)f(s)ds,$$

2. Пусть в краевых условиях (2)

$$a=0, b=\omega>0, \quad S=I, \; T=-I, \; \varphi=0.$$

При этом краевые условия примут вид: *y(0) = y(ω).* Очевидно, если

$$\Delta = \det[I-Y(\omega)] \neq 0,$$

где Y(x) – Ф.М.Р., являющаяся матрицантом, Y(0) = I, то краевая задача будет однозначно разрешима. Из выражения для Δ следует, что Δ ≠ 0, если среди собственных чисел матрицы Y(ω) нет равных 1. Матрица Y(ω) называется матрицей монодромии, а ее собственные числа – мультипликаторами

Теорема. Пусть *A(x)* и *f(x)* – ω-периодические функции, *A(x) = A(x+ω) , f(x) = f(x+ω). Тогда, если* Δ ≠ 0, решение краевой задачи

$$x\in[0,\omega], \quad \frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x), \quad y(0)=y(\omega),$$

будет также ω-периодическим: *y(x) = y(x+ω).*

Доказательство. Пусть *y(x)* – решение краевой задачи. Заметим, что в силу ω-периодичности *A(x)* и *f(x)* определены при всех *x,* а не только на отрезке *[0, ω].* Поэтому на любом конечном отрезке по *x* существует единственное решение задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x), \quad y=y(0) \;\; при \;\; x=0,$$

совпадающее на *[0, ω]* с решением краевой задачи. Полагая аргумент равным *x+ω*, запишем тождество:

$$\frac{dy}{dx}(x+\omega)=A(x+\omega)y(x+\omega)+f(x+\omega),$$

или с учетом ω-периодичности

$$\frac{dy}{dx}(x+\omega)=A(x)y(x+\omega)+f(x).$$

Отсюда следует, что вектор-функция *V(x) = y(x+ω)* является решением задачи Коши:

$$\frac{dV}{dx}=A(x)V+f(x),\quad V=y(\omega)=y(0)\ \textit{при}\ x=0.$$

Поскольку *y(x)* и *V(x)* являются решениями одной и той же задачи Коши, то в силу единственности решения задачи Коши они совпадают, т.е. *y(x)* ≡ *V(x)* = *y(x+ω)*. Теорема доказана.

Решение краевой задачи можно представить в виде:

$$y(x)=\int_0^{\omega}G(x,s)f(s)ds.$$

Здесь *G(x,s)* – матричная функция Грина, удовлетворяющая условиям (10,1)-(10,3), где из (10,3) следует условие:

$$G(0,s)=G(\omega,s).$$

Использование выражений (8) с учетом рассматриваемого случая приводит к следующим выражениям матричной функции Грина:

$$G(x,s)=\begin{cases}G_1(x,s)\ ,s<x\le\omega,\\ G_2(x,s)\ ,0\le x<s,\end{cases}$$

где

$$G_1(x,s)=Y(x)\{I+[I-Y(\omega)]^{-1}Y(\omega)\}Y^{-1}(s),$$
$$G_2(x,s)=-Y(x)[I-Y(\omega)]^{-1}Y(\omega)\}Y^{-1}(s).$$

Замечание. Очевидно, во всех частных случаях задания краевых условий остается в силе утверждение об однозначной разрешимости краевой задачи, если соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение.

Тема 3. Краевые задачи для линейного дифференциального уравнения высокого порядка.

Рассмотрим на отрезке *[a, b]* по *x* линейную краевую задачу для дифференциального уравнения высокого порядка

$$a \le x \le b,$$

$$P_n(x,\frac{d}{dx})u \equiv \frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x)\frac{du^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + p_n(x)u = F(x), \quad (13)$$

с краевыми условиями

$$S\begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \\ \ldots \\ u^{(n-2)}(a) \\ u^{(n-1)}(a) \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \\ \ldots \\ u^{(n-2)}(b) \\ u^{(n-1)}(b) \end{bmatrix} = \varphi\,. \quad (14)$$

Здесь $p_1(x)$, $p_2(x),\ldots,p_n(x)$ и $F(x)$ - непрерывные на *[a, b]* функции, *S* и *T* – *(nxn)*-матрицы, φ - вектор размерности *n.*

Краевая задача (13),(14) по существу является частным случаем краевой задачи (1),(2). Действительно, пусть *u(x)* – решение (13),(14). Тогда *u(x)* принадлежит классу (n+1) раз непрерывно дифференцируемых функций. Воспользуемся обозначениями:

$$y(x)=\begin{bmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \ldots \\ u^{(n-2)}(x) \\ u^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},\ \tilde{A}(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & -p_{n-2}(x) & \ldots & p_1(x) \end{bmatrix},\ \tilde{f}(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ F(x) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Если при этом краевая задача

$$x \in [a,b],\ \ \frac{dy}{dx} = \tilde{A}(x)y + \tilde{f}(x),\ \ Sy(a) + Ty(b) = \varphi, \quad (16)$$

однозначно разрешима, то первая компонента вектор-функции *y(x)* будет давать единственное решение краевой задачи (13),(14). И наоборот. Если *u(x)* – решение (13),(14), то вектор-функция *y(x)* будет решением краевой задачи (16).

Заметим, что в этом случае решение (16) имеет интегральное представление

$$y(x)=\widetilde{G}_0(x)\varphi+\int_a^b\widetilde{G}(x,s)\widetilde{f}(s)ds, \qquad (17)$$

где $G_0(x),\, G(x,s)$ - матричные функции Грина:

$$\widetilde{G}_0(x)=\begin{bmatrix} z_1(x) & z_2(x) & \dots & z_n(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) & \dots & z_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(x) & z_2^{(n-1)}(x) & \dots & z_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},\ \widetilde{G}(x,s)=\begin{bmatrix} v_1(x,s) & v_2(x,s) & \dots & v_n(x,s) \\ v_1'(x,s) & v_2'(x,s) & \dots & v_n'(x,s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^{(n-1)}(x,s) & v_2^{(n-1)}(x,s) & \dots & v_n^{(n-1)}(x,s) \end{bmatrix}.$$

Вид столбцов матричных функций является следствием того, что силу условий (9,4), (10,1) они являются решениями однородной системы уравнений с матрицей $\widetilde{A}(x)$. По этой же причине функции $z_j(x),\ v_j(x,s)$ являются решениями однородного уравнения

$$P_n(x,\frac{d}{dx})\,u=0.$$

Отмеченное соответствие краевых задач (13),(14) и (16) позволяет перейти от интегрального представления решения (17) к интегральному представлению решения краевой задачи (13),(14) в виде:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i z_i(x)+\int_a^b g(x,s)F(s)ds \qquad (18)$$

Здесь *u(x)* – первая компонента *y(x)*, φ_i − компоненты вектора φ, *g(x,s)* – обозначение функции $v_n(x,s)$. Для вывода (18) достаточно учесть в (17), принимая во внимание (15), что первой компонентой вектор-функции $\widetilde{G}(x,s)\widetilde{f}(s)$ будет $v_n(x,s)F(s)$, и выписать выражение первой компоненты *y(x).*).

Условия, определяющие функцию *g(x,s)* следуют из (10,1)-(10,3), если последние записать для *n-го* столбца матричной функции $G(x,s)=\widetilde{G}(x,s)$. Имеем:

$$P_n(x,\frac{d}{dx})\,g=0,\quad x\neq s, \qquad (19)$$

$$\begin{bmatrix} g(s+0,s) \\ g'(s+0,s) \\ \dots \\ g^{(n-2)}(s+0,s) \\ g^{(n-1)}(s+0,s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g(s-0,s) \\ g'(s-0,s) \\ \dots \\ g^{(n-2)}(s-0,s) \\ g^{(n-1)}(s-0,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad S\begin{bmatrix} g(a,s) \\ g'(a,s) \\ \dots \\ g^{(n-2)}(a,s) \\ g^{(n-1)}(a,s) \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} g(b,s) \\ g'(b,s) \\ \dots \\ g^{(n-2)}(b,s) \\ g^{(n-1)}(b,s) \end{bmatrix} = 0.$$

Аналогично, для определения функций $z_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$, достаточно рассмотреть условия (9,4) относительно последнего столбца матричной функции $G_0(x)=\tilde{G}_0(x)$. В результате получим:

$$P_n(x,\frac{d}{dx})z_j = 0,\ \ j=1,2,\dots,n,$$

$$S\begin{bmatrix} z_j(a) \\ z_j'(a) \\ \dots \\ z_j^{(n-2)}(a) \\ z_j^{(n-1)}(a) \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} z_j(b) \\ z_j'(b) \\ \dots \\ z_j^{(n-2)}(b) \\ z_j^{(n-1)}(b) \end{bmatrix} = e_j, \tag{20}$$

где e_j – j-ый столбец единичной матрицы.

<u>Определение.</u> Функции $g(x,s)$, удовлетворяющие условиям *(19)*, и $z_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$, удовлетворяющие условиям (20), называются функциями Грина однородной краевой задачи:

$$x\in[a,b],\quad P_n(x,\frac{d}{dx})u = 0,$$

$$S\begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \\ \dots \\ u^{(n-2)}(a) \\ u^{(n-1)}(a) \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \\ \dots \\ u^{(n-2)}(b) \\ u^{(n-1)}(b) \end{bmatrix} = 0. \tag{21}$$

Как следует из условий (19), функция $g(x,s)$ имеет различные представления при $x > s$ и $x < s$:

$$g(x,s) = \begin{cases} g_1(x,s),\ x>s, \\ g_2(x,s),\ x\le s. \end{cases}$$

Функции $g_1(x,s)$ и $g_2(x,s)$ также называются функциями Грина однородной краевой задачи (21).

Для определения функций Грина $g_1(x,s)$ и $g_2(x,s)$ имеем:

$$P_n(x,\frac{d}{dx})\,g_1=0,\ \ s<x\le b;$$

$$P_n(x,\frac{d}{dx})g_2=0\,,\ \ a\le x<s; \qquad (22)$$

$$\begin{bmatrix} g_1(s,s) \\ g_1'(s,s) \\ \dots \\ g_1^{(n-2)}(s,s) \\ g_1^{(n-1)}(s,s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_2(s,s) \\ g_2'(s,s) \\ \dots \\ g_2^{(n-2)}(s,s) \\ g_2^{(n-1)}(s,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad S\begin{bmatrix} g_2(a,s) \\ g_2'(a,s) \\ \dots \\ g_2^{(n-2)}(a,s) \\ g_2^{(n-1)}(a,s) \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} g_1(b,s) \\ g_1'(b,s) \\ \dots \\ g_1^{(n-2)}(b,s) \\ g_1^{(n-1)}(b,s) \end{bmatrix} = 0.$$

Заметим, что, согласно (22), функции Грина имеют вид общего решения однородного дифференциального уравнения. Поэтому при известной фундаментальной системе решений задача определения функций Грина сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно *2n* коэффициентов общих решений, представляющих $g_1(x,s)$ и $g_2(x,s)$ в (22), и *n* коэффициентов общего решения, представляющего $z_i(x)$ в (20).

Итак, функции Грина позволяют записать решение линейной краевой задачи (13),(14) в интегральной форме (18).

Замечание. Рассмотрение частных случаев задания краевых условий (14) по аналогии с Темой 2 предоставляется читателю.

Тема 4. Примеры представления нелинейной краевой задачи в виде нелинейного интегрального уравнения с использованием функции Грина.

Как пример применения функций Грина рассмотрим нелинейную краевую задачу вида:

$$x\in[a,b],\quad P_n(x,\frac{d}{dx})u=F(x,u),\quad Sy(a)+Ty(b)=\varphi, \qquad (23)$$

где *F(x,u)* – достаточно гладкая функция по совокупности аргументов в области ее определения. Предполагается, что однородная краевая задача

$$x\in[a,b],\quad P_n(x,\frac{d}{dx})u=0,\quad Sy(a)+Ty(b)=0, \qquad (24)$$

где y(a) и y(b) – обозначение вектор-столбцов,

$$y^T(x)=[u(x),u^{/}(x),....,u^{(n-1)}],\quad x=a\ и\ \ x=b,$$

имеет только тривиальное решение. Следовательно, условия (19), (20) определяют функции Грина *g(x,s))* и $z_j(x)$, *j = 1,2,…,n,* с использованием которых краевая задача (23) может быть сформулирована как нелинейное интегральное уравнение:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i z_i(x)+\int_a^b g(x,s)F(s,u(s))ds. \qquad (25)$$

При этом решение интегрального уравнения (25) является решением краевой задачи (23), и наоборот. Проблема разрешимости (23), как и (25), подлежит обсуждению.

Отметим, что нелинейные краевые задачи, рассмотренные во Введении, принадлежат типу (23) и, следовательно, имеют представления в виде нелинейного интегрального уравнения (25). Остановимся на этих примерах.

1. В модели пленочного электростатического реле однородная краевая задача имеет вид:

$$x\in(0,1],\quad P_2(\frac{d}{dx})u=\frac{d^2u}{dx^2}=0,\quad \frac{du}{dx}(0)=u(1)=0. \qquad (26)$$

Используя условия, определяющие функцию Грина, получим:

$$g(x,s)=\begin{cases} s-1, & x<s,\\ x-1, & x\ge s.\end{cases}$$

В результате нелинейная краевая задача

$$x\in[0,1],\quad P_2(x,\frac{d}{dx})u=\frac{d^2u}{dx^2}=-qF(u),\quad \frac{du}{dx}(0)=u(1)=0,$$

где *q* – параметр,

$$F(u)=\frac{1}{(1-u)^2},$$

преобразуется к нелинейному интегральному уравнению:

$$u(x)=-q\int_a^b g(x,s)F(u(s))ds. \qquad (27)$$

2. В модели теплового взрыва в плоском сосуде однородная краевая задача совпадает с (26). Рассмотрим более общую формулировку, в которой учитываются различные симметрии сосуда и различный характер теплообмена на стенке сосуда:

$$x \in (0,1], \quad P_2(x, \frac{d}{dx})u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{p_0}{x}\frac{du}{dx} = -qF(u),$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(1) = -p_1 u(1).$$

Здесь p_0 – параметр, задающий вид симметрии: $p_0 = 0$ – плоская , $p_0 = 1$ – цилиндрическая, $p_0 = 2$–сферическая; $p_1>0$ - параметр, характеризующий теплообмен на стенке;

$$F(u) = \exp(u).$$

Краевое условие $u(1) = 0$ соответствует $q = \infty$. Интегральное уравнение имеет вид (28), где

$$p_0 = 0, \quad g(x,s) = -\begin{cases} 1 - s + 1/p_1, & x < s, \\ 1 - x + 1/p_1, & x \ge s. \end{cases}$$

$$p_0 = 1, \quad g(x,s) = -\begin{cases} s(-\ln(s) + 1/p_1, & x < s, \\ s(-\ln(x) + 1/p_1, & x \ge s. \end{cases}$$

$$p_0 = 2, \quad g(x,s) = -\begin{cases} x^2(1/s - 1 + 1/p_1), & x < s, \\ x^2(1/x - 1 + 1/p_1), & x \ge s. \end{cases}$$

3. Учёт жесткости подвижного электрода в модели пленочного электростатического реле приводит к краевой задаче:

$$x \in [0,1], \quad P_4(\frac{d}{dx})u = \frac{d^4u}{dx^4} - \frac{1}{\alpha}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{q}{\alpha}F(u), \; F(u) = \frac{1}{(1-u)^2},$$

$$\frac{du}{dx}(0) = \frac{d^3u}{dx^3}(0) = 0, \quad u(1) = \frac{du}{dx}(1) = 0.$$

Здесь параметр $\alpha > 0$ пропорционален коэффициенту жесткости. Краевые условия выражают условие симметрии при $x = 0$ и условие жесткого закрепления конца подвижного электрода при $x = 1$.

Краевую задачу представляет нелинейное интегральное уравнение, полученное с использованием функции Грина $g(x,s)$:

$$u(x)=\frac{q}{\alpha}\int_a^b g(x,s)F(u(s))ds,$$

$$g(x,s)=\begin{cases} g_1(x,s), \ x>s, \\ g_2(x,s)=g_1(s,x), \ x\le s, \end{cases}$$

где

$$g_1(x,s) = 1-x-\frac{\alpha}{sh(\frac{1}{\alpha})}[ch(\frac{1}{\alpha})-ch(\frac{x}{\alpha})+(ch(\frac{1-x}{\alpha})-1)ch(\frac{s}{\alpha})].$$

В дальнейшем мы остановимся на численных методах решения нелинейных интегральных уравнений типа (25).

Тема 5. Непрерывная зависимость решения краевой задачи от параметров.

Наряду с краевой задачей (1),(2), которую в дальнейшем будем называть «невозмущенной краевой задачей»,

$$x\in[a,b], \quad \frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x), \quad Sy(a)+Ty(b)=\varphi, \qquad (28)$$

рассмотрим «возмущенную краевую задачу»:

$$x\in[a,b], \quad \frac{d\tilde{y}}{dx}=\tilde{A}(x)\tilde{y}+\tilde{f}(x), \quad \tilde{S}\tilde{y}(a)+\tilde{T}\tilde{y}(b)=\tilde{\varphi}, \qquad (29)$$

в которой $\tilde{A}(x), \tilde{f}(x), \tilde{S}, \tilde{T}$ и $\tilde{\varphi}$ близки к $A(x), f(x), S, T$ и φ соответственно. А именно,

$$\sup\left\|\tilde{A}(x)-A(x)\right\|\le\varepsilon, \ \sup\left\|\tilde{f}(x)-f(x)\right\|\le\varepsilon, \ \left\|\tilde{\varphi}-\varphi\right\|\le\varepsilon, \qquad (30)$$

$$\left\|\tilde{S}-S\right\|\le\varepsilon/2, \quad \left\|\tilde{T}-T\right\|\le\varepsilon/2,$$

где ε - достаточно малое число. Предполагается, что матричные функции $A(x), \tilde{A}(x)$ и вектор-функции $f(x), \tilde{f}(x)$ непрерывны на отрезке *[a, b].*

<u>Теорема1.</u> Пусть «невозмущенная краевая задача», однозначно разрешима для любых $f(x)\in C_{[a,b]}$ и φ.Тогда существует $\varepsilon_*>0$ такое, что для всех $\varepsilon<\varepsilon_*$ «возмущенная краевая задача», близкая к «невозмущенной краевой задаче», в смысле выполнения неравенств

$$\sup\left\|\tilde{A}(x)-A(x)\right\|\le\varepsilon, \quad \left\|\tilde{S}-S\right\|\le\varepsilon/2, \quad \left\|\tilde{T}-T\right\|\le\varepsilon/2, \qquad (31)$$

будет также однозначно разрешима для любых $\tilde{f}(x) \in C_{[a,b]}$ и $\tilde{\varphi}$.

Доказательство. Пусть *y(x)* – решение невозмущенной краевой задачи (28) с априорной оценкой

$$\|y(x)\| \le K(\|\varphi\| + (b-a)F). \qquad (32)$$

Рассмотрим последовательность вектор-функций $y^{[k]}(x)$, $k = 1,2,\ldots,$ каждая из которых является решением краевой задачи (28), где *f(x)* и *φ* задаются специальным образом, и, следовательно, краевые задачи будут как и (28), однозначно разрешимы и определять непрерывно дифференцируемые вектор-функции $y^{[k]}(x)$. В итоге будет установлена равномерная сходимость бесконечного ряда

$$y(x) + y^{[1]}(x) + y^{[2]}(x) + \ldots + y^{[m]}(x) + \ldots\ldots. \qquad (33)$$

к решению возмущенной краевой задачи при выполнении неравенств (30) и ограничения на ε:

$$\varepsilon < \varepsilon_* = \frac{1}{(1+b-a)K}. \qquad (34)$$

Краевая задача для определения $y^{[1]}(x)$ имеет вид:

$$x \in [a,b],$$

$$\frac{dy^{[1]}}{dx} = A(x)y^{[1]} + f^{[1]}(x), \quad Sy^{[1]}(a) + Ty^{[1]}(b) = \varphi^{[1]}, \qquad (35{,}1)$$

где

$$f^{[1]}(x) = [\tilde{A}(x) - A(x)]y(x) + \tilde{f}(x) - f(x),$$
$$\varphi^{[1]} = (S - \tilde{S})y(a) + (T - \tilde{T})y(b) + \tilde{\varphi} - \varphi.$$

Получим априорную оценку решения краевой задачи (35.1). Согласно определению

$$\|y^{[1]}(x)\| \le K(\|\varphi^{[1]}\| + (b-a)\sup\|f^{[1]}(s)\|), \quad s \in [a,b].$$

С учетом (30) имеем:

$$\|\varphi^{[1]}\| \le \|\tilde{S} - S\|\|y(a)\| + \|\tilde{T} - T\|\|y(b)\| + \|\tilde{\varphi} - \varphi\| \le \frac{\varepsilon}{2}\|y(a)\| + \frac{\varepsilon}{2}\|y(b)\| + \varepsilon \le \varepsilon[\sup\|y(x)\| + 1].$$

Или, используя априорную оценку (32),

$$\|\varphi^{[1]}\| \le \varepsilon F_*, \qquad F_* = 1 + K(\|\varphi\| + (b-a)F).$$

Точно также оценивается норма вектор-функции $f^{[1]}(x)$:

$$\|f^{[1]}(x)\| \le \|\tilde{A}(x) - A(x)\|\|y(x)\| + \|\tilde{f}(x) - f(x)\| \le \varepsilon[\sup\|y(s)\| + 1] \le \varepsilon F_*$$

Следовательно, априорную оценку решения (35,1) можно записать в виде:

$$\left\| y^{[1]}(x) \right\| \le K\,(\varepsilon\, F_* + (b-a)\,\varepsilon\, F_*) = \varepsilon\, K\,(1+ b-a)\, F_*.$$

Краевая задача для определения $y^{[2]}(x)$ имеет вид:

$$x \in [a,b],$$

$$\frac{dy^{[2]}}{dx} = A(x)y^{[2]} + f^{[2]}(x), \quad Sy^{[2]}(a) + Ty^{[2]}(b) = \varphi^{[2]}, \qquad (35,2)$$

где

$$f^{[2]}(x) = [\tilde{A}(x) - A(x)]y^{[1]}(x),$$

$$\varphi^{[1]} = (S - \tilde{S})y^{[1]}(a) + (T - \tilde{T})y^{[1]}(b).$$

Поскольку

$$\left\|\varphi^{[2]}\right\| \le \left\|\tilde{S} - S\right\| \left\|y^{[1]}(a)\right\| + \left\|\tilde{T} - T\right\| \left\|y^{[1]}(b)\right\| \le \frac{\varepsilon}{2}\left\|y^{[1]}(a)\right\| + \frac{\varepsilon}{2}\left\|y^{[1]}(b)\right\| \le \varepsilon[\sup\left\|y^{[1]}(x)\right\|,$$

$$\left\| f^{[2]}(x)\right\| \le \left\|\tilde{A}(x) - A(x)\right\| \left\|y^{[1]}(x)\right\| \le \varepsilon \sup\left\|y^{[1]}(s)\right\| ,$$

то

$$\left\|\varphi^{[2]}\right\| \le \varepsilon^2\, K(1+b-a)F_*, \quad \left\| f^{[2]}(x)\right\| \le \varepsilon^2\, K(1+b-a)F_*.$$

Отсюда следует априорная оценка решения краевой задачи (35.2):

$$\left\| y^{[2]}(x) \right\| \le\; = [\varepsilon\, K\,(1+ b-a)]^2\, F_*.$$

И так далее.

Пусть известно, что для решения краевой задачи

$$x \in [a,b],$$

$$\frac{dy^{[m-1]}}{dx} = A(x)y^{[m-1]} + f^{[m-1]}(x), \quad Sy^{[m-1]}(a) + Ty^{[m-1]}(b) = \varphi^{[m-1]}, \qquad (35,3)$$

где

$$f^{[m-1]}(x) = [\tilde{A}(x) - A(x)]y^{[m-2]}(x),$$

$$\varphi^{[m-1]} = (S - \tilde{S})y^{[m-2]}(a) + (T - \tilde{T})y^{[m-2]}(b),$$

справедлива оценка: *m = 3,4,…,*

$$\left\| y^{[m-1]}(x) \right\| \le\; = [\varepsilon\, K\,(1+ b-a)]^{m-1}\, F_*.$$

Получим априорную оценку нормы решения краевой задачи, определяющей $y^{[m]}(x)$:

$$x \in [a,b],$$

$$\frac{dy^{[m]}}{dx} = A(x)y^{[m]} + f^{[m]}(x), \quad Sy^{[m]}(a) + Ty^{[m]}(b) = \varphi^{[m]}, \qquad (35,4)$$

где

$$f^{[m]}(x) = [\tilde{A}(x) - A(x)]y^{[m-1]}(x),$$

$$\varphi^{[m]} = (S - \tilde{S})y^{[m-1]}(a) + (T - \tilde{T})y^{[m-1]}(b).$$

В силу предположения имеем:

$$\left\|\varphi^{[m]}\right\| \le \left\|\tilde{S} - S\right\|\left\|y^{[m-1]}(a)\right\| + \left\|\tilde{T} - T\right\|\left\|y^{[m-1]}(b)\right\| \le \varepsilon[\sup\left\|y^{[m-1]}(x)\right\|,$$

$$\left\|f^{[m]}(x)\right\| \le \left\|\tilde{A}(x) - A(x)\right\|\left\|y^{[m-1]}(x)\right\| \le \varepsilon \sup\left\|y^{[m-1]}(s)\right\| .$$

Следовательно,

$$\left\|\varphi^{[m]}\right\| \le \varepsilon^m [K(1+b-a)]^{m-1} F_*,$$

$$\left\|f^{[m]}(x)\right\| \le \varepsilon^m [K(1+b-a)]^{m-1} F_*. \qquad (36)$$

Отсюда следует априорная оценка решения краевой задачи (35.4) в виде:

$$\left\|y^{[m]}(x)\right\| \le \; = [\varepsilon K(1 + b - a)]^m F_*. \qquad (37)$$

Тем самым доказано, что для *m*-го члена бесконечного ряда (33), *m = 1,2,…,* имеет место оценка (37).

Потребуем теперь, чтобы в (37) выполнялось условие:

$$\varepsilon K(1 + b - a) < 1, \qquad (38)$$

которое можно представить в виде (34). Очевидно, в этом случае ряд (33) будет равномерно сходиться на отрезке *[a, b]* к непрерывной вектор-функции *v(x)*:

$$v(x) = y(x) + y^{[1]}(x) + y^{[2]}(x) + .. + y^{[m]}(x) + ... \qquad (39)$$

Используя (37), легко оценить норму производной решения краевой задачи относительно $y^{[m]}(x)$. Действительно, из дифференциального уравнения краевой задачи следует, что

$$\left\|\frac{dy^{[m]}}{dx}(x)\right\| \le M\left\|y^{[m]}(x)\right\| + \left\|f^{[m]}(x)\right\|, \quad M = \sup\left\|A(x)\right\|.$$

С учетом (36),(37) получим:

$$\left\|\frac{dy^{[m]}}{dx}(x)\right\| \le [\varepsilon K(1+b-a)]^m F_*[M + \frac{1}{K(1+b-a)}].$$

Отсюда следует, что при выполнении неравенства (38) ряд

$$\frac{dy}{dx}(x) + \frac{dy^{[1]}}{dx}(x) + \frac{dy^{[2]}}{dx}(x) + \ldots + \frac{dy^{[m]}}{dx}(x) + \ldots\ldots.$$

будет равномерно сходиться на *[a, b]* к непрерывной вектор-функции *w(x).* Последнее означает, что ряд (39) можно почленно дифференцировать, а его сумма будет непрерывно дифференцируемой вектор-функцией.

Непосредственной подстановкой вектор-функции *v(x)* в (29) убедимся, что *v(x)*, представленная суммой ряда (39), является решением возмущенной краевой задачи. С учетом формулировок краевых задач, определяющих y(x) и $y^{[j]}(x)$, имеем:

$$\frac{dv}{dx}(x) = \frac{dy}{dx}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{dy^{[j]}}{dx}(x) =$$

$$= A(x)y(x) + f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} [A(x)y^{[j]}(x) + f^{[j]}(x)] =$$

$$= f(x) + A(x)[y(x) + \sum_{j=1}^{\infty} y^{[j]}(x)] + f^{[1]}(x) + \sum_{j=2}^{\infty} f^{[j]}(x) =$$

$$= f(x) + A(x)v(x) + [\tilde{A}(x) - A(x)]y(x) + \tilde{f}(x) - f(x) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} [\tilde{A}(x) - A(x)]y^{[j-1]}(x) =$$

$$= A(x)v(x) + \tilde{f}(x) + [\tilde{A}(x) - A(x)][(y(x) + \sum_{j=1}^{\infty} y^{[j]}(x)] =$$

$$= A(x)v(x) + \tilde{f}(x) + [\tilde{A}(x) - A(x)]v(x) = \tilde{A}(x)v(x) + \tilde{f}(x) \ .$$

Таким образом, вектор-функция *v(x)* – решение системы дифференциальных уравнений возмущенной краевой задачи.

Составим, далее, выражение:

$$Sv(a) + Tv(b) = Sy(a) + Ty(b) + \sum_{j=1}^{\infty} [Sy^{[j]}(a) + Ty^{[j]}(b)] = \varphi + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{[j]} =$$

$$= \varphi + \varphi^{[1]} + \sum_{j=2}^{\infty} \varphi^{[j]} = \varphi + (S - \tilde{S})y(a) + (T - \tilde{T})y(b) + \tilde{\varphi} - \varphi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} [(S - \tilde{S})y^{[j]}(a) + (T - \tilde{T})y^{[j]}(b)] = \tilde{\varphi} + (S - \tilde{S})v(a) + (T - \tilde{T})v(b) =$$

$$= \tilde{\varphi} + Sv(a) + Tv(b) - \tilde{S}v(a) - \tilde{T}v(b) \ .$$

Таким образом, *v(x)* удовлетворяет краевому условию возмущенной краевой задачи:

$$\tilde{S}v(a)+\tilde{T}v(b)=\tilde{\varphi}.$$

Итак, вектор-функция *v(x)* действительно является решением возмущенной краевой задачи.

Докажем, что найденное решение единственно. С этой целью представим возмущенную краевую задачу в виде:

$$x\in[a,b],\quad \frac{d\tilde{y}}{dx}=A(x)\tilde{y}+g(x),\quad S\tilde{y}(a)+T\tilde{y}(b)=\phi, \qquad (40)$$

где

$$g(x)=[\tilde{A}(x)-A(x)]\tilde{y}(x)+\tilde{f}(x),$$

$$\phi=\tilde{\varphi}+(S-\tilde{S})\tilde{y}(a)+(T-\tilde{T})\tilde{y}(b).$$

Обратимся к априорной оценке нормы решения краевой задачи (40). Введем обозначения:

$$\alpha=\sup\|\tilde{y}(x)\|,\qquad \tilde{F}=\sup\|\tilde{f}(x)\|.$$

При этом выполняются неравенства

$$\sup\|g(x)\|\le\varepsilon\alpha+\tilde{F},\qquad \|\phi\|\le\varepsilon\alpha+\|\tilde{\varphi}\|,$$

с учетом которых априорная оценка принимает вид:

$$\|\tilde{y}(x)\|\le\alpha\le K[\varepsilon\alpha+\|\tilde{\varphi}\|+(b-a)(\varepsilon\alpha+\tilde{F})]=$$

$$=\varepsilon\alpha K(1+b-a)+K(\|\tilde{\varphi}\|+(b-a)\tilde{F}),$$

или

$$\alpha[1-\varepsilon K(1+b-a)]\le K(\|\tilde{\varphi}\|+(b-a)\tilde{F}).$$

Отсюда следует, что

$$\|\tilde{y}(x)\|\le\alpha\le\frac{K(\|\varphi\|+(b-a)\tilde{F})}{1-\varepsilon K(1+b-a)},\quad \varepsilon<\varepsilon_*=\frac{1}{K(1+b-a)}. \qquad (41)$$

Заметим, что если в (41) $\|\varphi\|=\tilde{F}=0$, то $\|\tilde{y}(x)\|\le 0$ т.е. однородная возмущенная краевая задача имеет только тривиальное решение $\tilde{y}(x)\equiv 0$. Тем самым единственность решения установлена. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда решение краевой задачи

$$x \in [a,b], \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \quad Sy(a) + Ty(b) = \varphi,$$

непрерывно зависит от $A(x), f(x), S, T$ и φ.(Имеется в виду непрерывная зависимость решения от параметров, определяющих A(x), f(x), S, T и φ).

Доказательство. Рассмотрим разность решений невозмущенной и возмущенной краевых задач:

$$u(x) = y(x) - \tilde{y}(x).$$

Можно считать, что *u(x)* является решением краевой задачи:

$$x \in [a,b], \quad \frac{du}{dx} = A(x)u + \tilde{g}(x), \quad Su(a) + Tu(b) = \tilde{\phi}, \qquad (42)$$

где

$$\tilde{g}(x) = [A(x) - \tilde{A}(x)]\tilde{y}(x) + f(x) - \tilde{f}(x),$$
$$\tilde{\phi} = \varphi - \tilde{\varphi} + (\tilde{S} - S)\tilde{y}(a) + (\tilde{T} - T)\tilde{y}(b).$$

При этом априорная оценка решения (42), принимая во внимание оценки

$$\sup\|\tilde{g}(x)\| \le \varepsilon\alpha + \varepsilon, \qquad \|\tilde{\phi}\| \le \varepsilon\alpha + \varepsilon,$$

имеет вид:

$$\|u(x)\| \le K[\|\tilde{\phi}\| + (b-a)\sup\|\tilde{g}(s)\|] \le \varepsilon(1+\alpha)K(1+b-a).$$

С учетом неравенства (41) имеем:

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \le K(1+b-a)\xi, \quad \xi = \varepsilon[1 + \frac{K(\|\varphi\| + (b-a)\tilde{F})}{1 - \varepsilon K(1+b-a)}]. \qquad (43)$$

Полученная оценка означает, что решение *y(x)* невозмущенной краевой задачи непрерывно зависит от $A(x), f(x), S, T$ и φ. Теорема 2 доказана.

Отметим, что в оценку нормы разности решений (43) входит длина отрезка *[a, b]*, на котором ищется решение, и константа *K*, оценивающая нормы матричных функций Грина.

Непрерывная зависимость решения от параметров означает следующее. Если известно, что краевая задача однозначно разрешима при некоторой совокупности параметров σ, то тогда существует некоторая окрестность σ, в которой краевая задача будет также однозначно разрешима.

Пусть, например, λ - параметр, от которого зависят матрицы $A(x), S$ и T однородной краевой задачи:

$$x \in [a,b], \quad \frac{dy}{dx} = A(x,\lambda)y, \quad S(\lambda)y(a) + T(\lambda)y(b) = 0.$$

Если значение λ таково, что однородная краевая задача имеет нетривиальное решение, то λ называется собственным числом. Однозначная разрешимость нарушается в случае, если один из параметров оказывается собственным числом краевой задачи.

Раздел 2.
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

Тема 1. О численном решении линейных краевых задач.

Рассмотрим численное решение линейных краевых задач методом, получившим название метода «стрельбы». Естественным выглядит стремление свести проблему к определению искомой вектор-функции *y(x)* на одном из концов отрезка *[a, b],* на котором формулируется краевая задача:

$$x \in [a,b], \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \quad Sy(a) + Ty(b) = \varphi. \qquad (1)$$

Вектор-функция *y=y(x,p)*, являющаяся решением задачи Коши

$$x \in [a,b], \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \quad y = p \quad при \quad x = a, \qquad (2)$$

будет представлять решение краевой задачи (1), если выполнено условие «пристрелки» вектора начальных данных *p* в задаче Коши (2):

$$Sp + Ty(b,p) = \varphi. \qquad (3)$$

Решение краевой задачи (1) методом «стрельбы» состоит из трех этапов.

Первый этап заключается в решении задач Коши, определяющих вектор-функцию *v(x)* и фундаментальную матрицу решений *Y(x)*(матрицант*):*

$$\frac{dv}{dx} = A(x)v + f(x), \quad v(a) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y, \quad Y(a) = I. \tag{5}$$

На втором этапе определяется вектор начальных данных *p. С* использованием результатов интегрирования (4),(5) решение задачи Коши (2) можно записать в виде:

$$y(x, p) = Y(x)p + v(x).$$

где *p* – произвольный вектор. В частности,

$$y(b, p) = Y(b)p + v(p).$$

Подстановка этого выражения в (3) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно вектора *p*

$$[S + TY(b)]p = \varphi - Tv(p), \tag{6}$$

матрица которой не вырождена в силу предположения об однозначной разрешимости краевой задачи (1).

На третьем этапе находится решение краевой задачи как решение задачи Коши (2), где *p* – теперь известный из (6) вектор начальных данных.

Однако, при использовании метода «стрельбы» могут возникнуть проблемы вычислительного характера. В качестве примера рассмотрим краевую задачу:

$$x \in [0,1], \quad \frac{dy}{dx} = Ay + f(x), \quad Sy(0) + Ty(1) = \varphi, \tag{7}$$

с (3Х3)-матрицами A, S и T,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & r^2 & 0 \end{bmatrix}, \; S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где *r* – параметр.

Легко убедиться, что при любом конечном значении параметра *r* краевая задача (7) однозначно разрешима, т.е.

$$\Delta = \det[S + TY(1)] \neq 0,$$

где *Y(1)* – значение при *x* = 1 матричной экспоненты матрицы *A* (матрицанта постоянной матрицы). В данном случае матричная экспонента имеет вид:

$$Y(x) = \exp(xA) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{r}sh(rx) & \frac{1}{r^2}(ch(rx)-1) \\ 0 & ch(rx) & \frac{1}{r}sh(rx) \\ 0 & rsh(rx) & ch(rx) \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Поскольку

$$S+TY(1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{r}sh(r) & \frac{1}{r^2}(ch(a)-1) \\ 0 & ch(r) & \frac{1}{r}sh(a) \\ 0 & rsh(r) & ch(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{r}sh(r) & \frac{1}{r^2}(ch(r)-1) \\ 0 & ch(r) & \frac{1}{r}sh(r) \end{bmatrix},$$

то

$$\Delta = \frac{ch(r)-1}{r^2} \neq 0,$$

при любых конечных значениях параметра *r.*

С другой стороны, как легко заметить, что для достаточно больших значений параметра *r > 0* таких, что

$$ch(r) >> 1, \quad \exp(r) >> \exp(-r),$$

матрица $S+TY(1)$ становится практически вырожденной. Это может служить источником существенных вычислительных погрешностей при решении системы линейных алгебраических уравнений (6) и, следовательно, решении краевой задачи.

В основе отмеченной вычислительной проблемы лежит так называемое «сплющивание» базисных решений однородной системы уравнений

$$x \in [a,b], \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y,$$

представленных столбцами фундаментальной матрицы решений, например, столбцами матриканта. Если на отрезке *[a,b]* однородная система имеет быстро растущие решения, то матрицант, столбцы которого при *x = a* образуют единичную матрицу (т.е. матрицу с ортонормированными столбцами), будет иметь при *x = b* почти параллельные столбцы. Так в рассмотренном примере (8) матричная экспонента матрицы *A* при *x = 1* имеет почти параллельные второй и третий столбцы для достаточно большого значения параметра *r.*

Рассмотрим метод «множественной стрельбы» численного решения краевой задачи (1):

$$x \in [a,b], \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \quad Sy(a) + Ty(b) = \varphi.$$

В методе множественной стрельбы предусмотрено противодействие сплющиванию базисных решений, идея которого принадлежит С.К.Годунову.

Механизм противодействия основывается на том, что сплющивание базисных решений будет тем меньше, чем меньше отрезок, на котором интегрируется задача Коши (3). С этой целью вводится сетка по *x,*

$$a = x_1 < x_2 < \ldots x_m < x_{m+1} = b, \quad h_i = x_{i+1} - x_i,$$

после чего проблема сводится к «пристрелке» сеточных значений $p^{[k]} = y(x_k)$, $k = 1,2,\ldots,m+1$, вектор-функции *y(x),* дающей решение краевой задачи. Разбиение отрезка *[a,b]* подчинено условию

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \sup \| A(x) \| h_i \approx 1.$$

Вычисление сеточных значений $p^{[k]}$ связано с реализацией так называемых прямого и обратного ходов прогонки. Результатом прямого хода прогонки является формирование системы линейных алгебраических уравнений относительно сеточных значений. Обратный ход прогонки состоит в решении этой системы.

Прямой ход прогонки заключается в решении задач Коши, определяющих вектор-функции $v^{[j]}(x)$ и фундаментальные матрицы решений $Y^{[j]}(x)$ на каждом из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$:

$$x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 1,2,\ldots,m,$$

$$\frac{dv^{[j]}}{dx} = A(x)v^{[j]} + f(x), \quad v^{[j]}(x_j) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{dY^{[j]}}{dx} = A(x)Y^{[j]}, \quad Y(x_j) = I. \tag{10}$$

При этом решение задачи Коши

$$x \in [x_j, x_{j+1}], \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \quad y = p^{[j]} \quad при \quad x = x_j \tag{11}$$

имеет вид:

$$y(x,p^{[j]})=Y^{[j]}(x)p^{[j]}+v^{[j]}(x).$$

Так как решение краевой задачи непрерывно в узлах сетки, то

$$y(x_{j+1},p^{[j]})=p^{[j+1]}=Y^{[j]}(x_{j+1})p^{[j]}+v^{[j]}(x_{j+1}),\quad j=1,2,\ldots,m. \qquad (12)$$

Рассматривая уравнения (12) совместно с краевым условием, приходим к системе линейных алгебраических уравнений, определяющей сеточные значения:

$$\begin{bmatrix} S & & & \ldots & & T \\ Y^{[1]}(x_2) & -I & & \ldots & & \\ & Y^{[2]}(x_3) & -I & \ldots & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \ldots & Y^{[m]}(x_{m+1}) & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p^{[1]} \\ p^{[2]} \\ p^{[3]} \\ \ldots \\ p^{[m+1]} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varphi \\ -v^{[1]}(x_2) \\ -v^{[2]}(x_3) \\ \ldots \\ -v^{[m]}(x_{m+1}) \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Обратный ход прогонки заключается в решении системы (12). При известных сеточных значениях решение краевой задачи *y(x)* может быть найдено как решения задач Коши (11).

Еще раз обратим внимание, что на каждом из отрезков $[x_j,x_{j+1}]$ при решении задачи Коши для однородной системы уравнений (10) всякий раз в качестве начальных условий берется единичная матрица (она же ортогональная) и нулевой вектор для неоднродной системы (9). Именно в такой форме выражается в данном случае процедура ортогонализации, предложенная С.К.Годуновым применительно к краевой задаче

$$x\in[a,b],\quad \frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x),\quad Ly(a)=l,\quad Ry(b)=r.$$

Здесь L – *((n-k)xn)* – матрица ранга *n-k*, *R* – *(kxn)* – матрица ранга *k* , *l* и *r* - векторы размеров, соответствующих *L* и *R*. При формулировке краевых условий в виде (1) имеем:

$$S=\begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix},\quad \varphi=\begin{bmatrix} l \\ r \end{bmatrix}.$$

Наконец, заметим, что размерность системы линейных алгебраических уравнений (13) зависит от нормы матрицы A(x): чем больше норма матрица A(x) на отрезке $[x_j,x_{j+1}]$, тем меньше длина отрезка и тем больше число разбиений отрезка *[a,b].* Эффективность решения системы (13) существенно повысится, если в алгоритме учесть блочную структуру матрицы системы.

Тема 2. О численном решений нелинейных краевых задач. Метод Ньютона (метод квазилинеаризации)

Рассмотрим нелинейную краевую Iдля системы из *n* дифференциальных уравнений:

$$x\in[a,b],\quad \frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad g(y(a),y(b))=0, \tag{14}$$

где *y, f* и *g* – векторы с компонентами y_k, f_k и g_k, $k = 1,2,\dots,n$, соответственно. Вектор-функции *f(x,y)* и *g(y(a),y(b))* предполагаются достаточно гладкими по совокупности их аргументов. При этом краевая задача (14) имеет по предположению решение *y = y(x),* дифференцируемое как по *x*, так и по параметрам, входящим в определение вектор-функций *f(x,y)* и *g(y(a),y(b)).*

Будем называть нелинейную краевую задачу (14) хорошо обусловленной (хорошо поставленной), если хорошо обусловлена соответствующая (14) линейная краевая задача:

$$x\in[a,b],\quad \frac{du}{dx}=A(x)u+F(x),\quad Su(a)+Tu(b)=\varphi, \tag{15}$$

где A, S и T – матрицы Якоби,

$$A(x)=f_y(x,y(x)),\quad S=g_\alpha(\alpha,\beta),\quad T=g_\beta(\alpha,\beta),$$

y(x) – решение краевой задачи (14); $F(x)\in C_{[a,b]}$ и φ - произвольные правые части. Для удобства здесь использованы обозначения: $\alpha=y(a),\ \ \beta=y(b).$

Как известно, хорошая обусловленность краевой задачи (15) характеризуется ограниченностью норм матричных функций Грина *G(x,s)* и $G_0(x)$:

$$\sup\|G_0(x)\|\le K,\quad \sup\|G(x,s)\|\le K,\quad x,s\in[a,b].$$

в интегральном представлении решения краевой задачи (15):

$$u(x)=G_0(x)\varphi+\int_a^b G(x,s)F(s)ds.$$

При этом для нормы решения краевой задачи справедлива оценка:

$$\max\|u(x)\|\le K(\|\varphi\|+(b-a)\max\|F(s)\|),\quad x,s\in[a,b], \tag{16}$$

что и является определением хорошей обусловленности краевой задачи.

Опираясь на теорему о разрешимости «возмущенной» краевой задачи, отметим, что при выполнении (16) хорошо обусловленной будет не только краевая задача (15), но и «возмущенная» краевая задача:

$$x \in [a,b], \quad \frac{d\tilde{u}}{dx} = \tilde{A}(x)\tilde{u} + \tilde{F}(x), \quad \tilde{S}\tilde{u}(a) + \tilde{T}\tilde{u}(b) = \tilde{\varphi},$$

где матрицы $\tilde{A}(x), \tilde{S}, \tilde{T}$ близки к $A(x), S, T$ соответственно, т.е. достаточно малы нормы возмущений указанных матриц. Если при этом малы нормы возмущений правых частей *F(x)* и φ, то «возмущенная» краевая задача будет иметь решение, близкое к решению (15).

Рассмотрим метод Ньютона (метод квазилинеаризации) численного решения краевой задачи (14). В связи с этим введем понятие Ώ-окрестности решения *y* = *y(x)* краевой задачи (14).

Будем полагать, что в Ώ-окрестности выполняются следующие условия.

1). Краевая задача

$$x \in [a,b], \quad \frac{d\tilde{u}}{dx} = \tilde{A}(x)\tilde{u} + \tilde{F}(x), \quad \tilde{S}\tilde{u}(a) + \tilde{T}\tilde{u}(b) = \tilde{\varphi}, \qquad (17)$$

$$\tilde{A}(x) = f_y(x, \tilde{y}(x)), \quad \tilde{S} = g_\alpha(\tilde{y}(a), \tilde{y}(b)), \quad \tilde{T} = g_\beta(\tilde{y}(a), \tilde{y}(b)),$$

где $\tilde{y}(x)$ - любая непрерывная вектор-функция, будет хорошо обусловлена, если $\tilde{y}(x)$ принадлежит Ώ-окрестности.

Отсюда следует ограниченность норм матричных функций Грина краевой задачи (17). В дальнейшем будем полагать, что нормы матричных функций Грина ограничены одной и той же константой *K.* Таким образом, для нормы решения (17) имеет место оценка:

$$\max\|\tilde{u}(x)\| \le K(\|\tilde{\varphi}\| + (b-a)\max\|\tilde{F}(s)\|), \ \ x, s \in [a,b].$$

2). Для дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функции *W(x,y)* и векторов $v \in \Omega, w \in \Omega$, к которым по условию относятся вектор-функции *f(x,y)* и *g(y(a),y(b))* краевой задачи (14), можно указать постоянную *Q* такую, что

$$\max\|W(x,u) - W(x,v) - W_y(x,v)(u-v)\| \le Q\|u-v\|^2. \qquad (18)$$

Методом Ньютоном (или методом квазилинеаризации) называется итерационный процесс решения краевой задачи

(14), в котором на каждой итерации приближение $y^{[k+1]}(x)$, $k=0,1,\ldots,$ находится как решение линейной краевой задачи:

$$x\in[a,b],\quad \frac{dy^{[k+1]}}{dx} = A^{[k]}(x)y^{[k+1]} + F^{[k]}(x), \qquad (19)$$

$$S^{[k]}y^{[k+1]}(a) + T^{[k]}y^{[k+1]}(b) = \varphi^{[k]},$$

с известным начальным приближением $y^{[0]}(x)$, принадлежащим Ω-окрестности решения $y(x)$ краевой задачи (14). В (19) использованы обозначения:

$$A^{[k]}(x) = f_y(x, y^{[k]}(x)),$$

$$S^{[k]} = g_\alpha(y^{[k]}(a), y^{[k]}(b)),\quad T^{[k]} = g_\beta(y^{[k]}(a), y^{[k]}(b)), \quad (20)$$

$$F^{[k]}(x) = f(x, y^{[k]}(x)) - A^{[k]}(x)y^{[k]}(x),$$

$$\varphi^{[k]} = S^{[k]}y^{[k]}(a) + T^{[k]}y^{[k]}(b) - g\left(y^{[k]}(a), y^{[k]}(b)\right),$$

(Напомним, что $\alpha = y(a),\ \beta = y(b)$ - обозначения векторных аргументов вектор-функции $g(y(a),y(b))$.)

<u>Теорема (о сходимости метода Ньютона).</u> При выполнении условий 1),2) и $y^{[0]}(x)$ є Ω последовательность вектор-функций

$$y^{[0]}(x), y^{[1]}(x), \ldots, y^{[m]}(x), \ldots \qquad (21)$$

определяемых как решения краевых задач (19), равномерно сходится с квадратичной скоростью сходимости к векто-функции $y(x)$, являющейся решением краевой задачи (14).

<u>Доказательство.</u> Вначале покажем, что если $y^{[m]}(x)$ є Ω, то и $y^{[m+1]}(x)$ є Ω. С этой целью составим разность:

$$w(x) = y(x) - y^{[m+1]}(x).$$

При этом имеют место тождества:

$$\frac{dw}{dx}(x) = \frac{dy}{dx}(x) - \frac{dy^{[m+1]}}{dx}(x) \equiv f(x, y(x)) - A^{[m]}(x)y^{[m+1]}(x) - F^{[m]}(x) \equiv$$

$$\equiv f(x, y(x)) - A^{[m]}(x)\,y^{[m+1]}(x) + A^{[m]}(x)y^{[m]}(x) - f(x, y^{[m]}(x)) +$$

$$+ A^{[m]}(x)[y(x) - y^{[m+1]}(x)] - A^{[m]}(x)[y(x) - y^{[m+1]}(x)] \equiv$$

$$\equiv A^{[m]}(x)\,w(x) + f(x, y(x)) - f(x, y^{[m]}(x)) - A^{[m]}(x)(y(x) - y^{[m]}(x)) \equiv$$

$$\equiv A^{[m]}(x)\,w(x) + \widetilde{F}(x),$$

$$\varphi^{[m]} - S^{[m]}y^{[m+1]}(a) - T^{[m]}y^{[m+1]}(b) \equiv \varphi^{[m]} + S^{[m]}w(a) +$$
$$+T^{[m]}w(b) - S^{[m]}y(a) - T^{[m]}y(b) \equiv -g(y^{[m]}(a), y^{[m]}(b)) +$$
$$+S^{[m]}y^{[m]}(a) + T^{[m]}y^{[m]}(b) + S^{[m]}w(a) + T^{[m]}w(b) -$$
$$-S^{[m]}y(a) - T^{[m]}y(b) \equiv g(y(a), y(b)) - g(y^{[m]}(a), y^{[m]}(b)) -$$
$$-S^{[m]}[y(a) - y^{[m]}(a)] - T^{[m]}[y(b) - y^{[m]}(b)] +$$
$$+S^{[m]}w(a) + T^{[m]}w(b) \equiv S^{[m]}w(a) + T^{[m]}w(b) - \tilde{\varphi},$$

где

$$\tilde{F}(x) = f(x, y(x)) - f(x, y^{[m]}(x)) - A^{[m]}(x)(y(x) - y^{[m]}(x)), \quad (22)$$
$$\tilde{\varphi} = -g(y(a), y(b)) + g(y^{[m]}(a), y^{[m]}(b)) +$$
$$+S^{[m]}[y(a) - y^{[m]}(a)] + T^{[m]}[y(b) - y^{[m]}(b)].$$

С учетом (22) можно считать, что вектор-функция *w(x)* является решением краевой задачи:

$$x \in [a,b], \quad \frac{dw}{dx} = A^{[m]}(x)w + \tilde{F}(x), \; S^{[m]}w(a) + T^{[m]}w(b) = \tilde{\varphi}, \quad (23)$$

При этом из интегрального представления решения краевой задачи (23),

$$w(x) = G_0^{[m]}(x)\varphi + \int_a^b G^{[m]}(x,s)\tilde{F}(s)ds.$$

в котором нормы матричных функций Грина $G_0^{[m]}(x)$ и $G^{[m]}(x,s)$ ограничены константой *K,* следует оценка:

$$\max\|w(x)\| \le K(\|\tilde{\varphi}\| + (b-a)\max\|\tilde{F}(s)\|), \; x, s \in [a,b]. \quad (24)$$

Воспользуемся неравенством (18), справедливым для дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Так как согласно (20)

$$A^{[m]}(x) = f_y(x, y^{[m]}(x)),$$
$$S^{[m]} = g_\alpha(y^{[m]}(a), y^{[m]}(b)), \quad T^{[m]} = g_\beta(y^{[m]}(a), y^{[m]}(b)),$$

то для *f(x,y) и g(y(a),y(b))* найдутся такие постоянные *M* и *L*, что

$$\max\|\tilde{F}(x)\| = \max\| f(x.y(x)) - f(x, y^{[m]}(x)) -$$
$$-A^{[m]}(x)(y(x) - y^{[m]}(x))\| \le M\max\|y(x) - y^{[m]}(x)\|^2,$$

$$\max\|\tilde{\varphi}\| = \max\|-g(y(a),y(b)) + g(y^{[m]}(a),y^{[m]}(b)) +$$
$$+S^{[m]}[y(a)-y^{[m]}(a)]+T^{[m]}[y(b)-\ y^{[m]}(b)]\| \le$$
$$\le L\max\|y(x)-y^{[m]}(x)\|^2 .$$

В результате оценка (24) принимает вид:

$$\max\|y(x)-y^{[m+1]}(x)\| \le R\max\|y(x)-y^{[m]}(x)\|^2, \qquad (25)$$

где

$$R = K[M + (b-a)L]$$

При выполнении условия

$$R\max\|y(x)-y^{[m]}(x)\| < 1,$$

имеет место неравенство

$$\max\|y(x)-y^{[m+1]}(x)\| < \max\|y(x)-y^{[m]}(x)\|,$$

которое означает, что $y^{[m+1]}(x)\in\Omega$.

Докажем теперь равномерную сходимость последовательности (21) к *y(x)*. Пусть начальное приближение $y^{[0]}(x)$ решения краевой задачи (14) удовлетворяет условию:

$$R\max\|y(x)-y^{[0]}(x)\| < 1. \qquad (26)$$

Тогда для $y^{[1]}(x)$ согласно (25) имеем:

$$\max\|y(x)-y^{[1]}(x)\| \le R\max\|y(x)-y^{[0]}(x)\|^2 < \|y(x)-y^{[0]}(x)\|.$$

Таким образом, $y^{[1]}(x)\in\Omega$ при выполнения условия (26).

При *m = 2* получим:

$$\max\|y(x)-y^{[2]}(x)\| \le R\max\|y(x)-y^{[1]}(x)\|^2 < R\|y(x)-y^{[0]}(x)\|^2.$$

Следовательно,

$$\max\|y(x)-y^{[2]}(x)\| < \|y(x)-y^{[0]}(x)\|,$$

т.е. $y^{[2]}(x)\in\Omega$. И так далее.

Пусть известно, что

$$\|y(x)-y^{[k]}(x)\| < \|y(x)-y^{[0]}(x)\|, \quad k=1,2,\ldots,m.$$

Тогда из неравенств

$$\max\|y(x)-y^{[m+1]}(x)\| \le R\max\|y(x)-y^{[m]}(x)\|^2 <$$
$$< R\max\|y(x)-y^{[0]}(x)\|^2 < \|y(x)-y^{[0]}(x)\|,$$

следует, что $y^{[m+1]}(x)\in\Omega$.

Итак доказано, что при условии (26) на $y^{[0]}(x)$ все члены последовательности (21) принадлежат Ω-окрестности, а краевые задачи (19) будут хорошо обусловленными.

Используя (25), получим следующие неравенства:

$$\max\left\|y(x)-y^{[1]}(x)\right\| \le (R\max\left\|y(x)-y^{[0]}(x)\right\|)^2/R,$$

$$\max\left\|y(x)-y^{[2]}(x)\right\| \le R\max\left\|y(x)-y^{[1]}(x)\right\|^2 \le (R\max\left\|y(x)-y^{[0]}(x)\right\|)^4/R,$$

и т.д. Предположим, что

$$\max\left\|y(x)-y^{[m-1]}(x)\right\| \le (R\max\left\|y(x)-y^{[0]}(x)\right\|)^{2^{n-1}}/R, \quad m>2.$$

Тогда имеем:

$$\max\left\|y(x)-y^{[m]}(x)\right\| \le R\max\left\|y(x)-y^{[m-1]}(x)\right\|^2 \le$$

$$\le (R\max\left\|y(x)-y^{[0]}(x)\right\|)^{2^m}/R$$

Таким образом, при выборе $y^{[0]}(x)$, достаточно близкого к решению краевой задачи (14) (условие (26)),

$$\lim y^{[m]}(x) \to y(x) \ при\ m\to\infty.$$

Кроме того,

$$\max\left\|y(x)-y^{[m]}(x)\right\| \le \ (R\max\left\|y(x)-y^{[0]}(x)\right\|)^{2^m}/R,$$

что означает квадратичную сходимость итераций. Теорема доказана.

Замечание. В силу равномерной сходимости последовательности (21) к $y(x)$ и согласно (20) имеем: $k\to\infty$,

$$\lim A^{[k]}(x) = \lim\ f_y(x, y^{[k]}(x)) = f_y(x, y(x)),$$

$$\lim S^{[k]}(x) = \lim\ g_\alpha(y^{[k]}(a), y^{[k]}(b)) = g_\alpha(y(a), y(b)),$$

$$\lim T^{[k]}(x) = \lim\ g_\beta(y^{[k]}(a), y^{[k]}(b)) = g_\beta(y(a), y(b)),$$

Отсюда следует, что формально нелинейную краевую задачу (14) можно представить в виде линейной краевой задачи (15), где

$$F(x) = \lim F^{[k]}(x) = \lim[\ f(x, y^{[k]}(x)) - A^{[k]}(x)y^{[k]}(x)] =$$

$$= f(x, y(x)) - f_y(x)y(x))y(x),$$

$$\varphi = \lim \varphi^{[k]} = \lim[\ S^{[k]}y^{[k]}(a) + T^{[k]}y^{[k]}(b) - g(y^{[k]}(a), y^{[k]}(b))] =$$

$$= Sy(a) + Ty(b) - g(y(a), y(b)),$$

с матричными функциями Грина

$$G_0(x) = \lim G_0^{[k]}(x), \qquad G(x,s) = \lim G^{[k]}(x,s)..$$

При этом краевая задача (15) хорошо обусловлена, поскольку хорошо обусловлены линейные краевые задачи (19). Это полностью согласуется с введенным ранее определением хорошей обусловленности нелинейной краевой задачи (14).

Тема 3. Метод множественной стрельбы.

Рассмотрим метод «стрельбы» для численного решения краевой задачи (14). В методе стрельбы «пристреливается» вектор *p,* при котором вектор-функция *y = y(x,p),* являющаяся решением задачи Коши

$$x \in [a,b], \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y = p \quad при \quad x = p, \qquad (27)$$

совпадает с решением краевой задачи (14). Условие, определяющее *p*, задается краевым условием (14) и имеет вид системы нелинейных уравнений относительно вектора *p:*

$$\varPhi(p) = g(\alpha,\beta) = 0, \quad \alpha = p, \; \beta = y(b,p). \qquad (28)$$

Для решения системы (28) воспользуемся итерационным методом Ньютона. Как известно, его применение связано с вычислением на каждой итерации матрицы производных $\varPhi_p(p)$. (Изложение метода Ньютона будет приведено в дальнейшем) С этой целью задача Коши (27) интегрируется совместно с задачей Коши для вариаций, определяющих матрицу производных $Y(x,p) = y_p(x,p)$, решения (27) по векторному параметру *p.* Очевидно, *Y(x,p)* является матрицантом, который находится из решения задачи Коши для матричного уравнения:

$$x \in [a,b], \quad \frac{dY}{dx} = f_y(x, y(x,p))Y, \quad Y = I \quad при \quad x = a. \qquad (29)$$

В результате имеем:

$$\varPhi_p(p) = g_\varepsilon(p, y(b,p)) + g_\beta(p, y(b,p))Y(b,p). \qquad (30)$$

Как и в случае линейной краевой задачи численная реализация метода стрельбы может также сопровождаться сплющиванием базисных решений в задаче Коши (29). Чтобы исключить связанные с этим вычислительные погрешности при решении нелинейной краевой задачи (14) используется метод множественной стрельбы, аналогичный случаю линейной краевой задачи.

После введения сетки по *x*,

$$a = x_1 < x_2 < \dots x_m < x_{m+1} = b, \quad h_i = x_{i+1} - x_i \,,$$

«пристрелке» подлежат сеточные значений $p^{[k]} = y(x_k)$, $k = 1,2,\dots,m+1$, вектор-функции $y(x)$, дающей решение краевой задачи (14). Разбиение отрезка $[a,b]$ подчиняется условию

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \sup \left\| f_y(x, y(x)) \right\| h_i \approx 1.$$

Реализация метода множественной стрельбы состоит в следующем. На каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ решается задача Коши: $k = 1,2,\dots,m$,

$$x \in [x_k, x_{k+1}], \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y = p^{[k]} \quad при \quad x = x_k. \qquad (31)$$

Пусть $y = y(x,p^{[k]})$ – ее решение. В силу непрерывности решения краевой задачи имеем:

$$y(x_{k+1}, p^{[k]}) - p^{[k+1]} = 0, \quad k = 1,2,\dots,m. \qquad (32)$$

К полученным равенствам добавляется краевое условие:

$$g(p^{[1]}, p^{[m+1]}) = 0\,. \qquad (33)$$

Таким образом, сеточные значения решения (14) удовлетворяют системе из (m+1) векторных нелинейных уравнений (32),(33), определенной на решениях задач Коши (31).

Введем в рассмотрение составные векторы размеров *(m+1)xn*:

$$P = \begin{bmatrix} p^{[1]} \\ p^{[2]} \\ p^{[3]} \\ \dots \\ p^{[m+1]} \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \psi^{[0]} = g(p^{[1]}, p^{[m+1]}) \\ \psi^{[1]} = y(x_2, p^{[1]}) - p^{[2]} \\ \psi^{[2]} = y(x_3, p^{[2]}) - p^{[3]} \\ \dots \\ \psi^{[m]} = y(x_{m+1}, p^{[m]}) - p^{[m+1]} \end{bmatrix}. \qquad (34)$$

При этом векторное представление системы нелинейных уравнений (32),(33) принимает вид:

$$\Psi(P) = 0. \qquad (35)$$

Имея в виду применение метода Ньютона для решения системы (35), приведем выражение матрицы производных $\Psi_p(p)$:

$$\Psi_p(p)=\begin{bmatrix} g_{p^{[1]}}(p^{[1]},p^{[m+1]}) & & & \dots & & g_{p^{[m+1]}}(p^{[1]},p^{[m+1]}) \\ y_{p^{[1]}}(x_2,p^{[1]}) & -I & & \dots & & \\ & y_{p^{[2]}}(x_3,p^{[2]}) & -I & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & y_{p^{[m]}}(x_{m+1},p^{[m]}) & -I \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $Y=Y(x,p^{[k]})$ решение задачи Коши:

$$x\in[x_k,x_{k+1}],\quad \frac{dY}{dx}=f_y(x,y(x,p^{[k]}))Y,\quad Y=I\quad при\quad x=x_k. \qquad (36)$$

т.е. $Y(x,p^{[k]})$ - матрицант. Из решения (36) имеем:

$$y_{p^{[k]}}(x_{k+1},p^{[k]})=Y(x_{k+1},p^{[k]}). \qquad (37)$$

Отметим, что матрицант $Y(x,p^{[k]})$ определяет матрицу производных решения задачи Коши (31) по вектору начальных данных $p^{[k]}$.

Обозначим через $P^j,\ j=0,1,2,\ldots,$ приближения к решению системы нелинейных уравнений (23) в методе Ньютона,

$$P^j=[(p^{(1]})^j,(p^{[2]})^j,\ldots,(p^{[m+1]})^j]^T.$$

По методу Ньютона после задания начального приближения P^0, достаточно близкого к решению (23), последующие приближения находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\Psi_P(P^{[j]})(P^{[j+1]}-P^{[j]})=-\Psi(P^{[j]}),\quad j=0,1,2,\ldots \qquad (38)$$

При этом с ростом j приближения стремятся к решению (36).

Вектор $\Psi(P^{[j]})$ и матрица $\Psi_P(P^{[j]})$ находятся в результате интегрирования серии задач Коши:

$$k=1,2,\ldots,m,$$

$$x\in[x_k,x_{k+1}],\quad \frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y=(p^{[k]})^j\quad при\quad x=x_k,$$

$$\frac{dY}{dx}=f_y(x,y(x,(p^{[k]}))^j)Y,\quad Y=I\quad при\quad x=x_k.$$

Отсюда, используя решения $y=y(x,(p^{[k]})^j)$ и $Y=Y(x,(p^{[k]})^j)$ при $x=x_{k+1}$, находятся компоненты вектора $\Psi(P^{[j]})$ и элементы матрицы $\Psi_P(P^{[j]})$ согласно формулам (34),(35), где $p^{[k]}$ присваиваются значения $(p^{[k]})^j$.

Тема 4. Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений.

В связи с решением систем нелинейных уравнений остановимся подробнее на методе Ньютона. При этом будут использоваться обозначения, не связаны с предыдущим изложением, что в дальнейшем не вызовет недоразумений.

Рассматривается система из n нелинейных уравнений вида

$$f(x) = 0, \qquad (39)$$

где $f(x)$ -вектор-функция векторного аргумента x с компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, достаточно гладкая в области Ω. Пусть существует решение (39) – вектор X, $f(X)=0$. В дальнейшем под Ω будет пониматься окрестность решения (1):

$$\Omega = \{x : \|x - X\|\} < R,$$

в которой $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

Предполагается, что для всех $x \in \Omega$ выполняются условия:

1) существует обратная матрица производных $[f_x(x)]^{-1}$ с оценкой константой *K* нормы обратной матрицы: $\|[f_x(x)]^{-1}\| \le K$;

2) для любых $u \in \Omega$ и $v \in \Omega$ выполняется неравенство с константой *L*:

$$\|f(u) - f(v) - f_x(v)(u - v)\| \le L\|u - v\|^2 .$$

Методом Ньютона называется итерационный процесс решения системы нелинейных уравнений (39), в котором на каждой итерации приближение решения x^k находится из системы линейных алгебраических уравнений

$$f(x^n) + f_x(x^n)(x^{n+1} - x^n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (40)$$

с известным начальным приближением $x^0 \in \Omega$.

<u>Теорема (о сходимости метода Ньютона).</u> При выполнении условий 1), 2) и $x^0 \in \Omega$ итерационный метод Ньютона (40) сходится к решению (1) с оценкой

$$\|X - x^n\| \le (KL\|X - x^0\|)^{2^n} / (KL). \qquad (41)$$

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть выполнены условия 1), 2), а X – решение (39). Если при этом приближение x^n принадлежит Ω-окрестности, то для приближения x^{n+1}, вычисляемого из системы (40), имеет место оценка:

$$\left\|X - x^{n+1}\right\| \le KL\left\|X - x^n\right\|^2. \quad n = 0,1,2.... \tag{42}$$

Доказательство. Действительно, при выполнении условий 1),2) вектор-функция $f(u)$, согласно формуле Тейлора, имеет представление:

$$f(u) = f(v) + f_x(v)(u - v) + r(u)$$

где

$$\|r(u)\| \le L\,\|u - v\|^2.$$

Полагая здесь *u = X, v = x*^{n}, *n = 0,1,2,…*,и учитывая, что *X* – решение (39), получим:

$$f(X) = f(x^n) + f_x(x^n)(X - x^n) + r(X) = 0,$$

или, с учетом выражения $f(x^n)$ из (27),

$$f_x(x^n)(X - x^{n+1}) + r(X) = 0.$$

Отсюда

$$X - x^{n+1} + [f_x(x^n)]^{-1} r(X) = 0.$$

В силу того, что *X* и x^n принадлежит Ω-окрестности, имеем:

$$\left\|[f_x(x^n)]^{-1}\right\| \le K, \quad \|r(X)\| \le L,$$

$$\left\|X - x^{n+1}\right\| \le \left\|[f_x(x^n)]^{-1}\right\| \|r(X)\| \le KL\left\|X - x^n\right\|^2, \quad n = 0,1,2....$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть начальное приближение x^0 принадлежит Ω-окрестности и удовлетворяет условию:

$$KL\left\|X - x^0\right\| < 1 \tag{43}$$

Покажем, что тогда все приближения x^n, *n=1,2,…*, определяемые по методу Ньютона, также принадлежат Ω-окрестности.

Действительно, при *n = 1*, как следует оценки (42) леммы и условия (43), имеем

$$\left\|X - x^1\right\| \le KL\left\|X - x^0\right\|^2 = KL\left\|X - x^0\right\| \left\|X - x^0\right\| < \left\|X - x^0\right\|$$

т.е. $x^0 \in \Omega$. Предположим по индукции, что $x^{n-1} \in \Omega$ и

$$\left\| X - x^{n-1} \right\| < \left\| X - x^0 \right\|.$$

При этом из неравенств

$$\left\| X - x^n \right\| \le KL \left\| X - x^{n-1} \right\|^2 < KL \left\| X - x^0 \right\|^2 < \left\| X - x^0 \right\|$$

следует, что $x^n \in \Omega$ при произвольном *n*.

Согласно (42) имеем следующие выражения оценок при *n* =1, 2:

$$\left\| X - x^1 \right\| \le KL \left\| X - x^0 \right\|^2$$

$$\left\| X - x^2 \right\| \le KL \left\| X - x^1 \right\|^2 < (KL \left\| X - x^0 \right\|)^4 / (KL)$$

Предположим по индукции, что

$$\left\| X - x^{n-1} \right\| < (KL \left\| X - x^0 \right\|)^{2^{n-1}} / (KL)$$

Тогда

$$\left\| X - x^n \right\| \le KL \left\| X - x^{n-1} \right\|^2 < (KL \left\| X - x^0 \right\|)^{2^n} / (KL)$$

Оценка (41) доказана. Принимая во внимание (43), убеждаемся, что $x^n \to X$ при $n \to \infty$ с квадратичной скоростью сходимости. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует сходимость итераций по Ньютону, если начальное приближение достаточно близко к решению системы нелинейных уравнений (39). Наряду с проблемой существования решения (39) это является предметом отдельного исследования, относящегося к конкретной формулировке системы.

Приведем два подхода, позволяющих в ряде случаев найти начальное приближение. Пусть $f(x)$ -правая часть автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большого интервала по времени стремится к стационарному решению, то его можно принять за начальное приближение решения системы (39).

Другая попытка связана с методом гомотопии, в котором система (39) заменяется на систему нелинейных уравнений со скалярным параметром λ:

$$F(x,\lambda)=0,\ F(x,1)=f(x),\ 0\le \lambda \le 1, \qquad (44)$$

Произвольная вектор-функция $F(x,\lambda)$ (оператор гомотопии), определяемая в (44), задается таким образом, чтобы при $\lambda=0$ было известно начальное приближение решения системы (44).

Например,

$$F(x,\lambda)=\lambda f(x)+(1-\lambda)x.$$

При этом возникает возможность попытаться продолжить решение (44) по параметру λ от 0 до значения $\lambda=1$. Тем самым находится решение (начальное приближение) системы (39).

Отметим, что выбор оператора гомотопии, очевидно, не всегда позволяет получить начальное приближение.

Раздел 3.
ЧИСЛЕННЫОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ.

Тема 1. Метод продолжения по параметру, основанный на параметризации.

Изучение зависимости решения рассматриваемой математической модели от параметров является важнейшей составляющей проводимого численного исследования. Графики функций, отображающие непрерывную зависимость решения от параметра, позволяют выявить свойства модели, что было продемонстрировано на примерах задач, приведенных во Введении. Для построения графиков используются табличные данные, найденные из решения задачи с применением итераций по методу Ньютона.

Предположим, что решение дифференцируемо по параметру. Тогда пошаговое построение таблицы будет более эффективным, если при этом использовать производные решения по параметру при задании начального приближения в итерационном процессе по Ньютону на очередном шаге по параметру. В сочетании с адаптацией шага по параметру, регулируемым ограничением на число итераций, процесс построения таблицы решения в зависимости от параметра получил название метода продолжения решения по параметру (или просто метода продолжения по параметру).

В этом разделе будет представлено изложение метода продолжения по параметру для исследования решения систем нелинейных уравнений общего вида в связи с изучением нелинейных краевых задач.