КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

(Электронная учебно-методическая разработка)

С. А. Саженков

Новосибирск 2018

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Кафедра теоретической механики

Сергей Александрович Саженков

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Электронная учебно-методическая разработка

Новосибирск 2018

Саженков С. А. Курс лекций по функциональному анализу: Электронная учебно-методическая разработка/ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2018. 728 с.

Разработка представляет собой электронную презентацию годового курса лекций дисциплины «Функциональный анализ», которая входит в базовую часть математического и естественно-научного цикла образовательной программы подготовки дипломированного бакалавра по направлениям подготовки «01.03.01 – Математика», «01.03.02 – Прикладная математика и информатика», «01.03.03 – Механика и математическое моделирование», «02.03.01 – Математика и компьютерные науки».

Цель разработки заключается в изложении материала курса лекций в доступной и наглядной форме для успешного освоения дисциплины — получения студентами наиболее полных знаний о ключевых положениях функционального анализа. Разработка может быть использована как дополнение к курсу лекций и как отдельное пособие для самостоятельного изучения дисциплины.

Разработка подготовлена в рамках реализации Программы развития НГУ как национального исследовательского университета.

Рецензент: Профессор кафедры прикладной математики ММФ НГУ, д.ф.-м.н. А. Е. Мамонтов.

Предисловие автора

В настоящей разработке представлен курс лекций по функциональному анализу, прочитанный мной в 2007/08 и 2009/10 уч. гг. на третьем курсе ММФ НГУ и в 2014/15–17/18 уч. гг. на направлении «математика» Китайско-Российского института (КРИ) — совместного института НГУ и Хэйлунцзянского университета (Харбин, Китай). За основу взяты презентации лекций последнего прочтения: курсы «Функциональный анализ I» (КРИ, весна 2018 г.) и «Функциональный анализ II» (КРИ, осень 2017 г.). Разбиение материала на лекции достаточно точно соответствует реальному хронометражу прочтения на занятиях, хотя, конечно, год от года разбиение по конкретным лекциям несколько варьировалось.

После презентаций лекций 1–18 размещено приложение, содержащее доказательства теоремы Хаусдорфа о пополнении метрических пространств, критерия замкнутости гиперплоскости и теоремы об изоморфизме для гильбертовой суммы гильбертовых пространств. Эти теоремы сформулированы без доказательства в лекциях 4, 13 и 17, соответственно. Доказательства были мной прочитаны студентам НГУ в 2007/08 и 2009/10 гг., но затем исключены из курса, поскольку их изложение требует больших затрат времени, и вместе с этим их отсутствие на стройность и полноту курса не влияет.

Отметим две отличительные черты стиля оформления слайдов.

Во-первых, слайды оформлены с использованием темы `Bergen` стиля `Beamer` издательской системы LaTeX. Тема `Bergen` оставляет широкое поле с левой стороны слайда, что является очень удобным для слушателей курса, так как позволяет делать пометки на распечатках слайдов непосредственно во время лекции. Я обычно раздаю файлы презентации студентам задолго до лекции.

Во-вторых, широко используются различные цвета шрифтов. Синим шрифтом печатаются заголовки параграфов, а *синим шрифтом курсивом* печатаются новые вводимые математические понятия. Красным шрифтом с целью напоминания печатается материал (формулировки утверждений, определения и т.п.) или ранее уже рассмотренный в курсе, или рассмотренный в предыдущих курсах алгебры, математического анализа и т.д. Некоторые наиболее важные выводы выделяются пурпурным цветом.

Завершая предисловие, замечу, что изложенный в настоящей разработке курс лекций является оригинальным. Он разработан лично мной и не является копией или доработкой какого-либо другого курса функционального анализа. Большую помощь в составлении программы курса и подборе первоисточников оказали мой многолетний научный руководитель и консультант чл.-корр. РАН профессор П. И. Плотников, доцент кафедры прикладной математики ММФ НГУ Н. А. Люлько и мой отец, заведующий кафедрой математического анализа ФМиИТ АлтГУ доцент А. Н. Саженков. Я весьма им благодарен за эту помощь и поддержку.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ 3

Слайды 59–79

- 1.6. Открытые множества, окрестности
- 1.7. Внутренность множества, замкнутость множества, точки прикосновения
- 1.8. Плотные подмножества, сепарабельные пространства
- 1.9. Последовательности в метрических пространствах. Пределы последовательностей

ЛЕКЦИЯ 4

Слайды 80–100

- 1.10. Полные метрические пространства
- 1.11. Теорема Хаусдорфа о пополнении
- 1.12. Критерий полноты метрического пространства
- 1.13. Теорема Бэра о категориях

ЛЕКЦИЯ 9

Слайды 182–204

Глава 2. Нормированные пространства

- 2.1. Нормированные пространства и банаховы пространства
- 2.2. Ряды в нормированном пространстве

ЛЕКЦИЯ 10

Слайды 205–226

- 2.3. Абсолютно сходящиеся ряды

ЛЕКЦИЯ 11

Слайды 227–247

- 2.4. Подпространства и конечные произведения нормированных пространств
- 2.5. Критерий непрерывности полилинейного отображения

ЛЕКЦИЯ 12 Слайды 248–269

- 2.6. Эквивалентные нормы
- 2.7. Пространства непрерывных полилинейных отображений
- 2.8. Замкнутые гиперплоскости и непрерывные линейные формы [начало]

ЛЕКЦИЯ 13 Слайды 270–289

- [2.8.] Замкнутые гиперплоскости и непрерывные линейные формы [окончание]
- 2.9. Конечномерные нормированные пространства

ЛЕКЦИЯ 14 Слайды 290–306

- 2.10. Сепарабельные нормированные пространства

Глава 3. Гильбертовы пространства

- 3.1. Эрмитовы формы
- 3.2. Положительные эрмитовы формы [начало]

ЛЕКЦИЯ 18

Слайды 357–380

- 3.6. Ортонормальные системы. Неравенство Парсеваля. Равенства Бесселя
- 3.7. Ортонормализация

Приложение к части I

Слайды 381–406

Доказательства трёх теорем

- А.1. Теорема 1.2: теорема Хаусдорфа о пополнении
- А.2. Теорема 2.6: критерий замкнутости гиперплоскости
- А.3. Теорема 3.3: теорема об изоморфизме для гильбертовой суммы гильбертовых пространств

ЧАСТЬ II ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II (Лекции 19-34)

ЛЕКЦИЯ 22 — Слайды 463–488

- [4.4.] Теоремы Банаха о замкнутом графике и открытом отображении [окончание]
- 4.5. Теорема Неймана
- 4.6. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха–Штейнгауза

ЛЕКЦИЯ 23 — Слайды 489–501

Глава 5. Теоремы Хана — Банаха

- 5.1. Аналитическая форма теоремы Хана — Банаха [начало]

ЛЕКЦИЯ 24 — Слайды 502–522

- [5.1.] Аналитическая форма теоремы Хана — Банаха [окончание]
- 5.2. Теорема Хана–Банаха: комплексный случай

ЛЕКЦИЯ 28

Слайды 577–594

Глава 6. Слабая и слабая* сходимости в нормированных пространствах

ЛЕКЦИЯ 31 Слайды 630–646

- 7.3. Спектр операторов в гильбертовом пространстве

ЛЕКЦИЯ 32 Слайды 647–661

- 7.4. Пример: спектры операторов левого и правого сдвига в l_2

Глава 8. Компактные операторы

- 8.1. Основные свойства компактных (вполне непрерывных) операторов [начало]

ЛЕКЦИЯ 33 Слайды 662–673

- [8.1.] Основные свойства компактных (вполне непрерывных) операторов [окончание]

ЛЕКЦИЯ 34 Слайды 674–692

- 8.2. Множество значений и ядро оператора $\mathbb{I} - A$

ЛЕКЦИЯ 35 — Слайды 693–707

Глава 9. Теоремы Фредгольма

- 9.1. Первая теорема Фредгольма

ЛЕКЦИЯ 36 — Слайды 708–726

- 9.2. Вторая теорема Фредгольма
- 9.3. Третья теорема Фредгольма
- 9.4. Альтернатива Фредгольма

Рекомендуемая литература — Слайды 727–728

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №1

ГЛАВА 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Метрика

1.2. Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского

1.3. Примеры метрических пространств

ГЛАВА 1
МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе излагаются основные факты теории метрических пространств.

Результаты этой главы являются основой для всего дальнейшего изложения в курсе.

1.1. Метрика

Опр. 1.1. Пусть E — некоторое множество. *Расстояние (метрика)* в E — это отображение $d\colon E \times E \mapsto \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ — пространство действительных чисел) со свойствами:

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in E$;

2) $d(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$;

3) $d(y,x) = d(x,y) \quad \forall\, x,y \in E$;

4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in E$ (неравенство треугольника).

Следствие 1.1. Из пункта 4 следует (по индукции), что

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \ldots + d(x_{n-1},x_n),$$

где $n > 2$, $\quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$.

Следствие 1.2. Если d — расстояние в E, то

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

Д-во. Действительно, из пунктов 3 и 4 определения 1.1 следует, что

$$d(x,z) \leq d(y,z) + d(x,y),$$
$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \overset{\text{п.3}}{=} d(x,y) + d(x,z).$$

Значит,

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z),$$
$$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y).$$

$\square$

Опр. 1.2. Пара (E, d) называется *метрическим пространством*.

1.2. Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского

Прежде, чем перейти к примерам метрических пространств, сформулируем и докажем три очень важных неравенства.

Предлож. 1.1. **(Неравенство Юнга.)** Пусть

$$A, B \geq 0, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда имеет место *неравенство Юнга*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \tag{1.1}$$

Неравенство обращается в равенство, если $A^p = B^q$.

Д-во.

- Можно считать, что $A, B > 0$.
- Положим $m = 1/p$ (тогда $0 < m < 1$) и рассмотрим функцию
$$\varphi(t) = t^m - mt \quad (t > 0).$$
- Вычислим первую и вторую производные:
$$\varphi'(t) = m(t^{m-1} - 1), \quad \varphi''(t) = (m-1)mt^{m-2}.$$
- Так как $\varphi''(t) < 0$ при $t > 0$ и $\varphi'(1) = 0$, то $\varphi(t)$ принимает наибольшее значение при $t = 1$.

- Следовательно, $\varphi(t) \leq \varphi(1) \quad (t > 0)$.
- Отсюда следует $t^m - 1 \leq m(t - 1)$.
- Положим в этом неравенстве $t = A^p/B^q$.

$$AB^{-q/p} - 1 \leq (1/p)(A^p B^{-q} - 1).$$

- Здесь умножим обе части на B^q и, учитывая, что $q - q/p = 1$, получаем (1.1).

Предложение 1.1 доказано. $\square$

Предлож. 1.2. **(Неравенство Гёльдера.)** Пусть

$$a_k, b_k \geq 0,\ k = 1, \dots, n,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда имеет место *неравенство Гёльдера*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{1/q}. \tag{1.2}$$

Неравенство Гёльдера обращается в равенство тогда и только тогда, когда существует $\lambda \geq 0$, такое, что

$$a_k^p = \lambda b_k^q \quad \text{для всех } k = 1, \dots, n.$$

Д-во. Положим

$$\tilde{A} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p}, \tag{1.3}$$

$$\tilde{B} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{1/q}. \tag{1.4}$$

Заметим, что если $\tilde{A} = 0$ и (или) $\tilde{B} = 0$, то неравенство Гёльдера выполняется очевидно.
Далее предположим, что $\tilde{A}, \tilde{B} > 0$.
В неравенство Юнга подставим

$$A_k = a_k / \tilde{A} \tag{1.5}$$

на место A и

$$B_k = b_k / \tilde{B} \tag{1.6}$$

на место B $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Просуммируем по всем k от 1 до n. Получим

$$\sum_{k=1}^{n} A_k B_k \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p}{p\tilde{A}^p} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}{q\tilde{B}^q} \equiv \frac{\tilde{A}^p}{p\tilde{A}^p} + \frac{\tilde{B}^q}{q\tilde{B}^q} = 1.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству Гёльдера в силу равенств (1.3)–(1.6).
Итак, неравенство Гёльдера доказано.
Остаётся заметить, что для того, чтобы выполнялось равенство в (1.2), необходимо и достаточно равенство в каждом слагаемом, а именно,

$$a_k^p = \frac{\tilde{A}^p}{\tilde{B}^q} b_k^q, \text{ то есть } \lambda = \frac{\tilde{A}^p}{\tilde{B}^q}.$$

Предложение 1.2 доказано. □

Предлож. 1.3. **(Неравенство Минковского.)** Пусть

$$a_k, b_k \geq 0, \quad p > 1.$$

Тогда справедливо *неравенство Минковского*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p}. \tag{1.7}$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда существует постоянная $\lambda \in \mathbb{R}$, такая, что

$$a_k = \lambda b_k \quad \forall\, k = 1, \ldots, n.$$

Д-во. Запишем

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p =$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k(a_k+b_k)^{p-1} \le \ldots$$

воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\ldots \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{1/q}. \qquad (1.8)$$

Здесь, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Разделим обе части в неравенстве (1.8) на

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/q}.$$

Таким образом сразу получаем неравенство Минковского.
Равенство при

$$a_k=\lambda b_k \quad \forall\, k=1,\ldots,n$$

очевидно.
Предложение 1.3 доказано. $\square$

1.3. Примеры метрических пространств

Пример 1.1. Множество точек (метрического пространства): $\mathbb{R}$ — пространство действительных чисел,
расстояние (метрика): $d(x, y) = |x - y|$.

Пример 1.2. Множество точек (метрического пространства): $\mathbb{R}^n$ — пространство n-мерных векторов с действительными компонентами. Далее в этом примере имеем:

$$x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Расстояния (метрики) можно ввести различные:

■

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

- $$d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2},$$

- $$d_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{1/p},$$

- $$d_\infty(x,y)=\max_{k\in[1,n]}|x_k-y_k|.$$

Замеч. 1.1. Свойства метрики для d_1, d_2, d_∞ проверяются элементарно — непосредственно по определению. Для того, чтобы проверить, что d_p — метрика, необходимо дополнительно применить неравенство Минковского. Более точно, докажем следующее предложение.

Предлож. 1.4. Отображение $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$, определенное в примере 1.2, является метрикой.

Д-во. Напомним,

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in (1, \infty).$$

Пункты 1-3 определения 1.1 очевидно выполняются. Пункт 4 в определении 1.1 справедлив вследствие *неравенства Минковского*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p}. \tag{1.7}$$

Здесь, $a_k, b_k \geq 0$, $p > 1$.

В неравенстве Минковского берём

$$a_k = |x_k - y_k|, \quad b_k = |y_k - z_k|.$$

Также пользуемся простейшим неравенством

$$|x_k - z_k| = |x_k - y_k + y_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k|.$$

Таким образом, завершаем доказательство предложения 1.4. $\square$

Пример 1.3. Пусть E — произвольное множество. Положим для любых $x, y \in E$:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Замеч. 1.2. Просто проверяется, что (E, d) — метрическое пространство. Оно называется *дискретным* метрическим пространством.

Пример 1.4. Функциональное пространство $C[a, b]$ — пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

$$d(x,y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

— *чебышевская* метрика.

Пример 1.5. $L^p(a,b)$ — пространство измеримых функций на интервале (a,b), суммируемых по Лебегу со степенью $p \geq 1$.

$$d(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

— метрика в $L^p(a,b)$.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №2

1.4. Изометрия

1.5. Шары, сферы, диаметр

Вспомним из первой лекции:

Опр. 1.1. Пусть E — некоторое множество. *Расстояние (метрика)* в E — это отображение $d\colon E \times E \mapsto \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ — пространство действительных чисел) со свойствами:

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in E$;

2) $d(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$;

3) $d(y,x) = d(x,y) \quad \forall\, x, y \in E$;

4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in E$ (неравенство треугольника).

1.4. Изометрия

Сначала напомним следующее.

Опр. 1.3. Пусть X, Y — два множества. Отображение $f\colon X \mapsto Y$ называется *сюръективным (сюръекцией)*, если для любого элемента $y \in Y$ найдется $x \in X$, так, что $f(x) = y$. (Можно записать: $f(X) = Y$.)

Опр. 1.4. Пусть X, Y — два множества. Отображение $f\colon X \mapsto Y$ называется *инъективным (инъекция)*, если из равенства $f(x') = f(x)$ следует $x' = x$.

Опр. 1.5. Отображение называется *биективным (биекцией)*, если оно является сюръективным и инъективным одновременно.

Введём очень важное понятие в теории метрических пространств:

Опр. 1.6. Пусть E, $E^\star$ — два метрических пространства, d, $d^\star$ — расстояния в E и $E^\star$, соответственно. Биективное отображение f пространства E на $E^\star$ называется *изометрией*, если

$$d^\star(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall\, x, y \in E. \tag{1.9}$$

Замеч. 1.3. Обратное отображение $f^{-1}\colon E^\star \mapsto E$ — тоже изометрия.

Опр. 1.7. Два метрических пространства E и $E^\star$ *изометричны*, если существует изометрия E на $E^\star$.

Замеч. 1.4. Если мы в $E^\star$ определяем расстояние с помощью (1.9), то говорим, что $d^\star$ — *перенесённое* расстояние с E на $E^\star$ посредством отображения f.

Пример 1.6. Функция f с областью определения $\mathbb{R}$, заданная формулой
$$f(x) = \frac{x}{1+|x|},$$
является *биективным* отображением $\mathbb{R}$ на интервале $(-1, 1)$.
Обратное отображение g определяется формулой
$$g(x) = \frac{x}{1-|x|} \text{ при } |x| < 1.$$
Рассмотрим J — замкнутый отрезок $[-1, 1]$. Пусть
$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Продолжим f до *биективного* отображения множества $\bar{\mathbb{R}}$ на J, полагая

$$f(+\infty) = 1, \quad f(-\infty) = -1.$$

Снова, буквой g обозначаем обратное отображение. Так как J — метрическое пространство с расстоянием $|x - y|$, мы можем превратить $\bar{\mathbb{R}}$ в метрическое пространство, полагая

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Опр. 1.8. С этим расстоянием, метрическое пространство $\bar{\mathbb{R}}$ называется *расширенной действительной прямой*.

Замеч. 1.5. Имеем следующее:

$$d(x,+\infty)=\frac{1}{1+|x|},\quad x\geq 0,$$

$$d(-\infty,x)=\frac{1}{1+|x|},\quad x\leq 0,$$

$$d(-\infty,+\infty)=2.$$

1.5. Шары, сферы, диаметр

Опр. 1.9. Пусть (E, d) — метрическое пространство. Пусть $a \in E$ и $r > 0$ — действительное число. *Открытым шаром* (соответственно, *замкнутым шаром*, *сферой*) с центром a и радиусом r называются множества

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\},$$

$$\overline{B(a, r)} = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\},$$

$$S(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}.$$

Пример 1.7. Метрическое пространство — $\mathbb{R}$.
В этом пространстве шар — это интервал

$$B(a,r) = (a-r, a+r).$$

Сфера — это множество, состоящее из двух точек:

$$S(a,r) = \{a-r\} \cup \{a+r\}.$$

Пример 1.8. Метрическое пространство: $\bar{\mathbb{R}}$. Имеем

$$B(+\infty, r) = \left(\frac{1-r}{r}, +\infty\right).$$

Примечание. В примере 1.8 вспомним:

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)|, \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Пример 1.9. Метрическое пространство: $C[0, 2\pi]$,

$$\text{точка:} \quad a(t) = \sin t,$$
$$\text{расстояние:} \quad d(x, y) = \max_{t \in [0,2\pi]} |x(t) - y(t)|.$$

Вопрос: Каким должен быть график функции $x(t)$, чтобы

(a) $x \in B(a, 1)$,

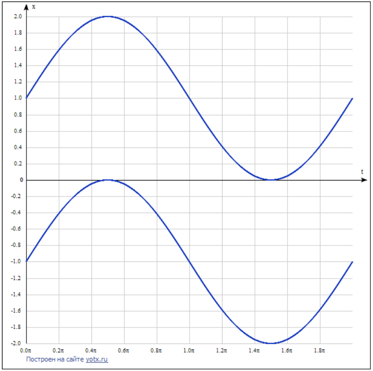
(b) $x \in S(a, 1)$?

Ответы:

Обозначим

$$Strip := \{(x,t) \,|\, 0 \le t \le 2\pi,\ \sin t - 1 < x < \sin t + 1\}$$

— криволинейная полоса.



(a) График $x(t)$ должен лежать *строго внутри* криволинейной полосы *Strip*.

(b) График $x(t)$ не должен выходить за полосу и должен иметь хотя бы одну общую точку с графиком

$$\sin t + 1 \quad \text{или} \sin t - 1.$$

Пример 1.10.

- В *дискретном пространстве* E (см., пример 1.3 в лекции 1) шар (открытый или замкнутый) с центром в точке a и радиусом $r < 1$ — это точка a, то есть

$$B(a, r) = \overline{B(a, r)} = a.$$

- Сфера $S(a, r) = \emptyset$ — пустое множество при $r < 1$.
- В свою очередь, если $r \geq 1$, то $B(a, r) = \overline{B(a, r)} = E$.
- Если $r > 1$, то $S(a, r) = \emptyset$.
- Если $r = 1$, то $S(a, r) = E \setminus \{a\}$.

Опр. 1.10. Пусть A, B — два непустых подмножества в E. *Расстояние между множествами* A и B определим следующим образом:

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

Примечание. Если $A = \{x\}$ — одна точка, то согласно определению 1.10 постулируем

$$d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Простейшие свойства расстояний между множествами

Предлож. 1.5. Если $A \cap B \neq \emptyset$, то $d(A, B) = 0$; если $d(A, B) = a$, то не обязательно существуют $x \in A$ и $y \in B$, такие, что $a = d(x, y)$. **(Очевидно.)**

Предлож. 1.6. Если $x \neq B(a, r)$, то

$$d(x, B(a, r)) \geq d(a, x) - r.$$

Док-во. По предположению имеем $d(a, x) \geq r$. Для любого $y \in B(a, r)$ по неравенству треугольника имеем

$$d(x, y) \geq d(a, x) - d(a, y) \geq d(a, x) - r.$$

Предложение 1.6 доказано. □

Предлож. 1.7. Если A — непустое множество в E, $x, y \in E$, то

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

Док-во. Для любого $z \in A$ имеем

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} d(x,A) &= \inf_{z \in A} d(x,z) \leq \inf_{z \in A} [d(x,y) + d(y,z)] \\ &= d(x,y) + \inf_{z \in A} d(y,z) = d(x,y) + d(y,A). \end{aligned}$$

Точно также получаем

$$d(y,A) \leq d(x,y) + d(x,A).$$

Итого,

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

и

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y).$$

Этим самым, предложение доказано. $\square$

Опред. 1.11. *Диаметр* произвольного непустого множества $A \subset E$ определяется по формуле

$$\delta(A) = diam\,(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Свойства диаметра.

- $\delta(A) \geq 0$. Возможно, что $\delta(A) = +\infty$.
- $\delta(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = \{x\}$ — одноточечное множество.
- Из $A \subset B$ следует, что $\delta(A) \leq \delta(B)$.
- Для любого шара $\overline{B(a,r)}$ имеем $\delta(\overline{B(a,r)}) \leq 2r$.

Опр. 1.12. *Ограниченным множеством* в E называется непустое множество, диаметр которого конечен.

Замеч. 1.6. Дискретное пространство и $\bar{\mathbb{R}}$ — ограниченные пространства.

Предлож. 1.8. Объединение двух ограниченных множеств A и B ограничено.

Док-во. Пусть $x, y \in A \cup B$. Если $x, y \in A$ или $x, y \in B$, то всё ясно. Если $x \in A$, $y \in B$, то возьмём $a \in A$, $b \in B$.
По неравенству треугольника

$$d(x, y) \leq d(a, x) + d(a, b) + d(b, y)$$

$$\Rightarrow$$

$$\delta(A \cup B) \leq d(a, b) + \delta(A) + \delta(B).$$

Из

$$\delta(A \cup B) \leq d(a, b) + \delta(A) + \delta(B)$$

в силу произвольности $a \in A$, $b \in B$ получаем

$$\delta(A \cup B) \leq d(A, B) + \delta(A) + \delta(B).$$

$\square$

Следствие 1.3. Если A ограничено и $x_0 \in E$, то

$$A \subset B(x_0, d(x_0, A) + \delta(A)).$$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №3

1.6. Открытые множества, окрестности

1.7. Внутренность множества, замкнутость множества, точки прикосновения

1.8. Плотные подмножества, сепарабельные пространства

1.9. Последовательности в метрических пространствах. Пределы последовательностей

1.6. Открытые множества, окрестности

Опр. 1.13. *Открытым множеством* в метрическом пространстве E с расстоянием d называется подмножество $A \subset E$, обладающее следующим свойством:

$$\forall\, x \in A \quad \exists\, r > 0, \text{ так, что } B(x; r) \subset A.$$

Свойство. Пустое множество $\emptyset$ открыто; всё пространство E открыто.

Предлож. 1.9. Любой открытый шар является открытым множеством.

Док-во. Имеем,

$$x \in B(a, r) \quad \Rightarrow \quad d(a, x) < r.$$

Далее, пусть y — любая точка, такая, что

$$d(x, y) < r - d(a, x).$$

Тогда по неравенству треугольника

$$d(a,y) \le d(a,x) + d(x,y) < r,$$

или, записав в эквивалентном виде,

$$d(x,y) < r - d(a,x), \quad d(a,y) < r,$$

получаем

$$B(x, r - d(a,x)) \subset B(a,r).$$

Доказательство завершено. □

Предлож. 1.10. Объединение любого семейства $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ открытых множеств открыто.

Док-во. Если $x \in A_\mu$ с некоторым $\mu \in L$, то существует $r > 0$, такое, что $B(x,r) \subset A_\mu \subset A = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Доказательство завершено. □

Пример 1.10. На $\mathbb{R}$ интервал $(a,+\infty)$ открыт, так как

$$(a,+\infty)=\bigcup_{\{x>a\}}(a,x).$$

Предлож. 1.11. Пересечение конечного числа n открытых множеств открыто.

Док-во. При $n=2$ для $x\in A_1\cap A_2$ существуют $r_1>0$ и $r_2>0$, такие, что

$$B(x,r_1)\subset A_1,\quad B(x,r_2)\subset A_2.$$

Значит, $B(x,r)\subset A_1\cap A_2$, где $r=\min\{r_1,r_2\}$. Итак, предложение 1.11 доказано в случае $n=2$. Теперь можем провести доказательство в случае $n>2$ по индукции. $\square$

Замеч. 1.7.

(1) Пересечение бесконечного семейства открытых множеств, вообще говоря, *не будет* открытым. Например, в $\mathbb{R}$ множество

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\} \text{ — не открытое.}$$

(2) В дискретном пространстве любое множество E открыто: одноточечное множество $\{a\}\equiv B\left(a;\frac{1}{2}\right)$, а по предложению 1.9 любой открытый шар открыт. Теперь по предложению 1.10 получаем, что

$$\bigcup_{a\in E} B\left(a,\frac{1}{2}\right) \text{ — открытое множество.}$$

Опр. 1.14. Пусть $A \subset E$ — непустое мн-во.

- *Открытой окрестностью* множества A называется любое открытое множество, содержащее A.
- *Окрестностью* множества A называется любое множество, содержащее открытую окрестность A.

Замеч. 1.8. В случае, когда $A = \{x\}$, говорим об окрестностях точки x (а не множества $\{x\}$).

Предлож. 1.12. Для любого непустого множества $A \subset E$ и любого $r > 0$ множество

$$V_r(A) = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$$

является открытой окрестностью A.

Док-во. Если $d(x, A) < r$ и точка $y \in E$ такая, что

$$d(x, y) < r - d(x, A),$$

то из предложения 1.7 следует, что

$$d(y, A) \leq d(x, A) + d(x, y) < d(x, A) + r - d(x, A) = r.$$

Значит, $V_r(A)$ открыто и содержит A. $\square$

Предлож. 1.7: $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Следствие 1.4. В случае, когда $A = \{a\}$, имеем $V_r(A) \equiv B(a; r)$.

1.7. Внутренность множества, замкнутость множества, точки прикосновения

Опр. 1.15. Точка $x \in A$ называется *внутренней точкой* множества A, если A является окрестностью точки x.

Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* множества A. (Часто в литературе внутренность множества A обозначается через $\overset{\circ}{A}$.)

Пример 1.11. Приведем элементарный пример:

внутренность $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) на вещественной оси $\mathbb{R}$ — это (a, b).

Предлож. 1.13. Для любого множества A внутренность $\overset{\circ}{A}$ есть наибольшее открытое множество, содержащееся в A.

Док-во — упражнение для семинарских занятий.

Опр. 1.16. *Замкнутое множество* в метрическом пространстве E является дополнением открытого множества.

Опр. 1.17. *Точка прикосновения* множества A — это точка $x \in E$, каждая окрестность которой имеет непустое пересечение с A.

Предлож. 1.14. Замкнутый шар — это замкнутое множество; сфера — это замкнутое множество.

Д-во. Вспомним предлож. 1.6: если $x \notin B(a,r)$, то $d(x, B(a,r)) \geq d(a,x) - r$.

В силу этого предложения, если $x \notin \overline{B(a,r)}$, то

$$d(x, \overline{B(a,r)}) \geq d(a,x) - r > 0.$$

Поэтому,

$$B(x, d(a,x) - r) \subset E \setminus \overline{B(a,r)}.$$

В силу произвольности x и того, что объединение любого семейства открытых множеств открыто, заключаем, что

$$E \setminus \overline{B(a,r)} \text{ — открыто.}$$

Соответственно,

$$E \setminus (E \setminus \overline{B(a;r)}) \equiv \overline{B(a;r)} \text{ — замкнуто.}$$

Наконец, дополнение сферы $S(a;r)$ — это объединение открытого множества $B(a;r)$ и открытого множества $E \setminus \overline{B(a;r)}$. Значит

$$S(a;r) \text{ — замкнуто.}$$

$\square$

Предлож. 1.15. Справедливы следующие утверждения.

(i) Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

(ii) Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

(iii) В дискретном пространстве любое множество является замкнутым.

Д-во. Доказательство пп. (i), (ii) следует из предложения 1.10 и из предложения 1.11.

Напомним:

Предлож. 1.10. Объединение любого семейства $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ открытых множеств открыто.

Предлож. 1.11. Пересечение конечного числа n открытых множеств открыто.

Итак, достаточно перейти к дополнениям открытых множеств из предложений 1.10 и 1.11, и утверждения (i) и (ii) доказаны.

Замечание 1.7(2) гласит: в дискретном пространстве любое множество открыто.

Отсюда следует утверждение (iii) предложения 1.15. $\square$

Опр. 1.18. Множество всех точек прикосновения множества A называется *замыканием* A и обозначается символом $\bar{A}$.

Предлож. 1.16. Определение 1.18 корректно в том смысле, что $\bar{A}$ является замкнутым множеством.

Д-во. Действительно, $E \setminus \bar{A}$ не содержит внутренних точек множества A и в силу определения 1.17 не содержит ни одной точки прикосновения множества A (а внутренние точки множества A являются точками прикосновения), а все остальные точки из E множество $E \setminus \bar{A}$ содержит.
Получили: $E \setminus \bar{A}$ — открытое множество.
Значит $\bar{A} = E \setminus (E \setminus \bar{A})$ — замкнутое множество. □

Предлож. 1.17. (Свойства точек прикосновения и замкнутых множеств.)

(а) Для любого множества A замыкание $\bar{A}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A; в частности,

$$A = \bar{A} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ — замкнуто;}$$

(б) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

(в) $x \in A$ — точка прикосновения $\quad \Leftrightarrow \quad d(x, A) = 0$.

Д-во сразу следует из определений. □

Опр. 1.19. Точка x называется *внешней точкой* множества A, если она является внутренней точкой множества $E \setminus A$.
Внутренность множества $E \setminus A$ называется множеством *внешних точек* множества A.

Предлож. 1.18. Замыкание множества A — это дополнение множества внешних точек множества A.

Д-во: упражнение на семинарском занятии.

1.8. Плотные подмножества, сепарабельные пространства

Опр. 1.20. Множество A в метрическом пространстве E называется *плотным относительно множества* B, если любая точка $x \in B$ есть точка прикосновения множества A. Иными словами, если имеет место вложение $B \subset \bar{A}$.

Замеч. 1.9. Определение 1.20 равносильно следующему: любая окрестность любой точки $x \in B$ содержит точки множества A.

Опр. 1.21. Метрическое пространство E называется *сепарабельным*, если в E существует не более чем счётное плотное множество.

Пример 1.11. Действительная прямая $\mathbb{R}$ сепарабельна.

1.9. Последовательности в метрических пространствах. Пределы последовательностей

Опр. 1.22. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ — последовательность, то есть, бесконечный набор элементов в E, возможно, совпадающих друг с другом.
Говорим, что x_n *сходится к* x, если

$$d(x_n, x) \underset{n\nearrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Обозначение. Сходимость обозначается стандартно:

$$x_n \underset{n\nearrow\infty}{\longrightarrow} x \text{ в } (E, d).$$

Также, говорим, что x — это *предел* последовательности $\{x_n\}$.

Пример 1.12. В пространстве $C[a,b]$ с чебышевской метрикой имеем

$$x_n \xrightarrow[n\nearrow\infty]{} x \quad \Leftrightarrow \quad x_n(t) \underset{n\nearrow\infty}{\rightrightarrows} x(t) \text{ на } [a,b].$$

Пример 1.13. В дискретном пространстве имеем

$$x_n \xrightarrow[n\nearrow\infty]{} x$$

тогда и только тогда, когда

$$x_n = x \text{ — фиксированная последовательность,}$$
$$\text{начиная с некоторого номера } n.$$

Частичная связь между понятием сходимости последовательностей и понятиями открытости и замкнутости множеств:

Теорема 1.1. Пусть (E, d) — метрическое пространство. Тогда

(а) V — окрестность x тогда и только тогда, когда

$$\forall\, x_n \to x \quad \exists\, n_0 :\ x_n \in V \quad \forall\, n \geq n_0;$$

(б)

$$x \in \bar{A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \{x_n\} \subset A \text{ и } x_n \to x;$$

(в) A замкнуто тогда и только тогда, когда для всякой последовательности $\begin{cases} \{x_n\} \subset A, \\ x_n \to x \end{cases}$ имеем $x \in A$.

Док-во следует из определений предела последовательности, открытого множества и замкнутого множества. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №4

Опр. 1.23. *Фундаментальной* последовательностью (эквивалентно: *последовательностью Коши*) в метрическом пространстве E называем последовательность $\{x_n\}$, обладающую свойством

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \quad p, q \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Предлож. 1.19. Любая сходящаяся последовательность — это последовательность Коши.

Д-во. Обоснование предложения 1.19 основывается на неравенстве треугольника. □

Опр. 1.24. Пространство (E, d) — называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Пример 1.14. $C[a, b]$ является полным с чебышевской метрикой $d(x, y) = \sup\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$.

Д-во. Рассмотрим

$$d(x_n, x_m) = \sup_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| \geq |x_n(t) - x_m(t)|.$$

Т.к. при любом $t \in [a, b]$ последовательность $\{x_n\} \in \mathbb{R}$ фундаментальная, то по теореме Вейерштрасса имеем, что

$$x_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} x(t) \quad \forall\, t \in [a, b].$$

(То есть имеется *поточечная сходимость*.)

Вспомним теорему из классического анализа: если последовательность непрерывных функций сходится на замкнутом интервале, то она сходится равномерно.

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$, такое, что для любых $n, m \geq N$ для всех $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|x_n(t) - x_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Перейдем к пределу (поточечно) при $m \to \infty$:

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow$$

$$\sup_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x(t)| = d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Если $x(t)$ не является непрерывной, то найдется $N \in \mathbb{N}$, такое, что все функции $x_n(t)$ не являются непрерывными при $n > N$. Этого быть не может. Значит предельная функция $x(t)$ непрерывна. $\square$

Пример 1.15. $P[0,1]$ — пространство полиномов с чебышевской метрикой не полно.
Простой пример:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x,$$

а e^x — не полином.

Предлож. 1.20. Если (E, d) — полное пространство, $F \subset E$ — замкнутое подмножество, то (F, d) — полное пространство.

Д-во. Пусть $\{x_n\} \subset F$ — фундаментальная последовательность. Значит $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в E по определению 1.24. По определению 1.16 (замкнутого множества) и по определению 1.22 (предела последовательности) получаем, что $x \in F$, так как F замкнуто. $\square$

1.11. Теорема Хаусдорфа о пополнении

Опр. 1.25. Пусть E — метрическое пространство. Полное метрическое пространство $E^\star$ называется *пополнением* пространства E, если

(а) E является подпространством пространства $E^\star$,

(б) E всюду плотно в $E^\star$, то есть $\bar{E} = E^\star$.

Опр. 1.26. Множество X называется *всюду плотным* в метрическом пространстве (E, d), если $\bar{X} = E$.

Напомним:

Опр. 1.20. Множество X называется *плотным* в множестве Y, если $Y \subset \bar{X}$, то есть если для любой точки $x \in Y$ найдётся $\{x_n\} \subset X$ такая, что $x_n \to x$.

Опр. 1.27. Напомним, что изометрия определена ранее в определении 1.6. Пусть f — изометрия. Точка $x \in E$ называется *неподвижной*, если $f(x) = x$.

Теорема 1.2. **(Теорема Хаусдорфа о пополнении.)** Каждое метрическое пространство E имеет пополнение. Это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижные точки из E.

Д-во теоремы о пополнении очень длинное и абстрактное. Мы его проводить не будем. Приведём только три простых примера.

Пример 1.16. Рассмотрим пространство E, состоящее из всех рациональных чисел (то есть $E = \mathbb{Q}$), снабженное метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Заметим, что это пространство не является полным. Его пополнением является пространство $\mathbb{R}$ с метрикой d.

Пример 1.17. Рассмотрим открытый отрезок $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, снабжённый метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Такое метрическое пространство не является полным. Его пополнением является *замкнутый* отрезок $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ с метрикой d.

Пример 1.18. Рассмотрим множество тригонометрических полиномов

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad a_k = \text{const}_k,$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

снабжённое чебышевской метрикой в $C[a, b]$. Такое метрическое пространство не является полным. Его пополнением является пространство $C[a, b]$ непрерывных функций. Действительно, из курса математического анализа известно, что любая непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ может быть представлена в виде *ряда Фурье* — предела последовательности тригонометрических полиномов.

1.12. Критерий полноты метрического пространства

Докажем теорему, обобщающую теорему о вложенных отрезках из курса математического анализа.

Теорема 1.3. **(Теорема о вложенных шарах.)** Для того, чтобы метрическое пространство E было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.

Д-во. Сначала докажем прямое утверждение: *утверждение необходимости*.

Пусть $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots$ — последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров:

$$\overline{B}_{n+1} \overset{def}{=} \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n), \quad r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Имеем: последовательность $\{x_n\}$ центров шаров фундаментальна, так как

$$d(x_n, x_m) < r_n \text{ при } m > n$$

и

$$r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Т.к. E — полное пространство, то предел $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует.

Имеем:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n.$$

Действительно:

- шар $\bar{B}_n$ содержит *все* точки последовательности $\{x_k\}$, за исключением, может быть, точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.
- Таким образом, x — это точка прикосновения для *каждого* шара $\bar{B}_n$.
- Но так как $\bar{B}_n$ — замкнутое множество, то $x \in \bar{B}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Необходимость доказана.

Теперь докажем обратное утверждение: *утверждение достаточности*.

Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет предел.

В силу *фундаментальности* мы можем выбрать такую точку x_{n_1} последовательности, что

$$d(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2} \quad \forall\, n \geq n_1.$$

1. Примем точку x_{n_1} за центр замкнутого шара радиуса $r_1 = 1$. Обозначим этот шар через $\bar{B}_1$.

2. Выберем затем x_{n_2} из последовательности $\{x_n\}$ так, чтобы

$$n_2 > n_1 \quad \text{и} \quad d(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{4} \quad \forall\, n \geq n_2.$$

Примем точку x_{n_2} за центр замкнутого шара радиуса $r_2 = \dfrac{1}{2}$. Обозначим этот шар через $\bar{B}_2$.

3. Продолжая построение, получаем последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, такую, что

$$d(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} \quad \forall\, n \geq n_k,$$

и получаем последовательность замкнутых шаров $\bar{B}_k = \bar{B}\Big(x_{n_k}, \dfrac{1}{2^k}\Big)$.

4.

- Очевидно, по построению имеем, что

$$\bar{B}_{k+1} \subset \bar{B}_k \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots .$$

- По *предположению*, эта последовательность шаров имеет общую точку. Обозначим ее через x.
- Ясно, что эта точка служит пределом подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$.
- По неравенству треугольника, если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся к x подпоследовательность, то она сама сходится к тому же пределу:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \text{ такое, что } \forall n_k, n > N \text{ имеем}$$

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Теорема о вложенных шарах доказана. $\square$

Замеч. 1.10. Стремление радиусов шаров к нулю *существенно*. На семинарских занятиях решается следующая задача.

Задача. В множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел введём метрику

$$d(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{n+m} & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Построить в $(\mathbb{N}, d)$ последовательность непустых замкнутых шаров со следующими свойствами:

- шары вложены друг в друга:

$$B(a_1, r_1) \supset B(a_2, r_2) \supset B(a_3, r_3) \supset \ldots;$$

- радиусы шаров не стремятся к нулю: $r_k \underset{k\to\infty}{\not\to} 0$;
- не существует точки, принадлежащей всем шарам одновременно: $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B(a_k, r_k) = \emptyset$.

Ответ:

$$\bar{B}\left(n, 1 + \frac{1}{2n}\right).$$

1.13. Теорема Бэра о категориях

Опр. 1.28. Если множество можно представить в виде конечной или счётной суммы множеств, нигде не плотных в E, то оно называется *множеством первой категории*. Все остальные множества называются *множествами второй категории*.

Пример 1.19. Рассмотрим пространство $E = (\mathbb{R}, d)$ с метрикой $d(x, y) = |x - y|$. В этом пространстве любое множество рациональных чисел — это множество первой категории, всё множество действительных чисел — это множество второй категории.

Теорема 1.4. **(Теорема Бэра о категориях.)** Полное метрическое пространство E не может быть представлено в виде объединения счётного числа нигде не плотных множеств.

Д-во. Доказательство проводится *методом от противного*.

- Предположим, что

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \tag{1.10}$$

где каждое из множеств M_n нигде не плотно. Пусть $\bar{B}_0$ — некоторый замкнутый шар радиуса 1.

- Поскольку M_1 нигде не плотно, то M_1 не плотно в B_0. Значит существует $\bar{B}_1$ — замкнутый шар радиуса $r_1 < 1/2$, такой, что

$$\bar{B}_1 \subset \bar{B}_0 \text{ и при этом } \bar{B}_1 \cap M_1 = \emptyset.$$

- Далее, M_2 нигде не плотно. Значит M_2 не плотно в $\bar{B}_1$.
- Значит существует $\bar{B}_2$ — замкнутый шар радиуса $r_2 < 1/3$, такой, что

$$\bar{B}_2 \subset \bar{B}_1 \text{ и при этом } \bar{B}_2 \cap M_2 = \emptyset.$$

- Продолжаем этот процесс: получаем

$$\bar{B}_1 \supset \bar{B}_2 \supset \ldots \supset \bar{B}_n \supset \ldots, \quad r_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

- В силу теоремы 1.3 (о вложенных шарах) пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$ содержит некоторую точку $x \in E$.

- По построению, x не принадлежит *ни одному* из множеств M_n. Следовательно,

$$E \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

- Получили противоречие с предположением (1.10).

Теорема Бэра доказана. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №5

1.14. Компактные метрические пространства

1.15. Непрерывные отображения метрических пространств

1.14. Компактные метрические пространства

Опр. 1.29. Метрическое пространство E называется *компактным*, если оно удовлетворяет следующей аксиоме.

Аксиома. *(Аксиома Бореля – Лебега.)* Из любого открытого покрытия пространства E можно выделить конечное подпокрытие.

Пояснение. Сформулируем и поясним аксиому Бореля – Лебега в наиболее подробном виде.

- Пусть $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство открытых множеств U_λ. Это семейство может быть конечным, счетным или несчетным.
- Пусть $E \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} U_\lambda$. Тогда $\bigcup\limits_{\lambda \in L} U_\lambda$ называется *открытым покрытием* пространства E.
- Аксиома Бореля – Лебега состоит в том, что существует конечное множество $H \subset L$, такое, что $E \subset \bigcup\limits_{\lambda \in H} U_\lambda$.
- Множество $\bigcup\limits_{\lambda \in H} U_\lambda$ называется *конечным подпокрытием*.

Опр. 1.30. Метрическое пространство E называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $F \subset E$, что $d(x, F) < \varepsilon$ для любого $x \in E$.

Пояснение. Напомним определение 1.10. Расстояние от точки до множества определяется так:

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y).$$

Расстояние между двумя множествами определяется так:

$$d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B).$$

Теорема 1.5. **(Критерий компактности в метрическом пространстве.)** Для метрического пространства E следующие три условия эквивалентны:

(a) E — компактно;

(b) любая бесконечная последовательность в E имеет по крайней мере одну предельную точку;

(c) E является полным и вполне ограниченным.

Доказательство

(a) $\Rightarrow$ (b) Доказываем: E — **компактно** $\Rightarrow$ **любая бесконечная последовательность в** E **имеет по крайней мере одну предельную точку**.

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в компактном пространстве E. Пусть F_n — *замыкание множества*

$$\{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}, \ldots\}.$$

Заметим,

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \ldots . \tag{1.11}$$

Цель: докажем, что существует точка, принадлежащая всем F_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство проведем *методом от противного*.

Предположение: Не существует точки, принадлежащей всем F_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Тогда семейство открытых множеств $U_n = E \setminus F_n$ составляет покрытие пространства E.

По пункту **(a)** имеем, что существует конечное семейство:

$$\{U_{n_1}, \dots, U_{n_k}\} \text{ — конечное подпокрытие пр-ва } E.$$

Имеем:

$$E = \bigcup_{n=n_1}^{n_k} U_n = \bigcup_{n=n_1}^{n_k} (E \setminus F_n) = E \setminus \bigcap_{n=n_1}^{n_k} F_n \quad \Rightarrow$$

$$\bigcap_{n=n_1}^{n_k} F_n = \emptyset. \tag{1.12}$$

Формула (1.11) не имеет смысла — она очевидно неверна. Действительно, если $m > \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, то согласно (1.12) имеем

$$F_m \subset \bigcap_{n=n_1}^{n_k} F_n = \emptyset.$$

Но $F_m \neq \emptyset$, потому что F_m — это замыкание *непустого* множества.

Значит *предположение* не справедливо.

Таким образом, пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ содержит по крайней мере одну точку a. Отсюда следует:

$$a \text{ — \textit{точка прикосновения} множества } \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n. \quad (1.13)$$

Для завершения доказательства утверждения

$$\textbf{(a)} \Rightarrow \textbf{(b)}$$

используем следующее утверждение.

Предлож. 1.21. Точка $a \in E$ — предельная точка последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности V точки a и для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $n \geq m$ такое, что $x_n \in V$.

Д-во. Утверждение следует непосредственно из определений предела последовательности и окрестности точки. $\square$

Из предложения 1.21 и утверждения (1.13) следует, что a — это предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Доказываем: **любая бесконечная последовательность в E имеет по крайней мере одну предельную точку $\Rightarrow$ E является полным и вполне ограниченным**.

- Рассмотрим *произвольную* бесконечную последовательность $\{x_n\} \subset E$.
- В силу утверждения **(b)** она имеет предельную точку $a \in E$.
- Значит можно выбрать сходящуюся подпоследовательность к точке a.
- Следствие: если возьмём *фундаментальную* последовательность, то она будет *целиком* сходиться к точке a.

Итак, доказали, что E — **полное пространство.**

Доказательство вполне ограниченности проведём *методом от противного*:

Предположение. Допустим, что E не вполне ограничено, то есть существует $\alpha > 0$, такое, что E не имеет конечного покрытия шарами радиуса α.

- Определим *бесконечную* последовательность $\{x_n\}$ по следующему *алгоритму*.
- Рассмотрим произвольное конечное множество шаров радиуса α. По *предположению*, найдётся точка $x_1 \in E$, которая не лежит в одном из этих шаров.
- Рассмотрим произвольное конечное множество шаров радиуса α такое, что центр одного из этих шаров — это точка x_1. По *предположению*, найдется точка $x_2 \in E$, которая не лежит в одном из этих шаров. Значит $d(x_1, x_2) \geq \alpha$.

- Продолжим процесс. Получим последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$. При этом, при *любом конечном* $n \in \mathbb{N}$ имеем свойство:

$$\text{если } i, j \leq n, \text{ то } d(x_i, x_j) \geq \alpha. \qquad (*)$$

- Если есть предельная точка $a \in E$, то найдется подпоследовательность $x_{n_k} \to a$. Эта подпоследовательность фундаментальна. Значит найдутся две точки x_{n_k} и x_{n_h}, где $n_k, n_h < \infty$, так что $d(x_{n_k}, x_{n_h}) < \alpha/2$. Это противоречит $(*)$.
- Таким образом построили *бесконечную* последовательность $\{x_n\}$, у которой нет ни одной предельной точки. Это противоречит утверждению *(b)*.

Вывод: Значит *предположение* неверно, то есть **пространство E — вполне ограниченное**.

(c) ⇒ (a) Доказываем: **E является полным и вполне ограниченным ⇒ E компактно**.

Доказательство проведем *методом от противного*:

Предположение. Пусть $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ — покрытие пространства E бесконечным количеством открытых множеств U_λ. Пусть никакое конечное подсемейство из $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ не покрывает пространство E.

По индукции построим последовательность шаров (B_n) следующим образом.

- Предположим, что B_{n-1} имеет радиус $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ и что не существует конечного подсемейства семейства $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$, покрывающего семейство B_{n-1}.
- Рассмотрим конечное покрытие $(V_k)_{1\le k\le m}$ пространства E шарами радиуса $\dfrac{1}{2^n}$. Такое покрытие имеет место, так как E — вполне ограниченное в силу **(c)**.

- Очевидно, найдутся шары V_k такие, что, $V_k \cap B_{n-1} \neq \emptyset$.
- Из этих шаров найдется *по меньшей мере* один такой шар, который не покрывается никаким конечным подсемейством семейства (U_λ). Обозначим этот шар через B_n.
- Пояснение: действительно, в противном случае имеем следующее. Если шары V_k образуют покрытие шара B_{n-1}, то найдётся конечное подсемейство семейства (U_λ), покрывающее B_{n-1}.
- Пусть x_n — центр шара B_n. Так как B_{n-1} и B_n имеют общую точку (скажем, x), то из неравенства треугольника следует, что

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_{n-1}, x) + d(x, x_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

- Поэтому, если $n \leq p < q$, то мы имеем

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \ldots + d(x_{q-1}, x_q)$$

$$< \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

- Это построение доказывает, что

$\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в E.

- Таким образом, она в силу полноты сходится к некоторой точке $a \in E$.

- Пусть λ_0 — индекс, при котором $a \in U_{\lambda_0}$. Существует $\alpha > 0$, т.ч. $B(a, \alpha) \subset U_{\lambda_0}$.
- Из определения точки $a \in E$ следует, что найдется такой номер n, что

$$d(a, x_n) < \frac{\alpha}{2} \text{ и } \frac{1}{2^n} < \frac{\alpha}{2}.$$

- В силу неравенства треугольника выводим, что

$$B_n \subset B(a, \alpha) \subset U_{\lambda_0}. \tag{1.14}$$

Соотношения (1.14) противоречат *предположению*: предполагалось, что никакое конечное подсемейство семейства (U_λ) не может быть покрытием шара B_n. Теорема 1.5 доказана. $\square$

Предлож. 1.22. Любое вполне ограниченное пространство является сепарабельным.

Напоминание: Определение сепарабельного пространства (определение 1.21): *метрическое пространство E называется сепарабельным, если в E существует не более чем счётное плотное множество.*

Д-во.

- Если E вполне ограничено, то по определению имеем: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $A_n \subset E$ — конечное множество такое, что для любых $x \in E$ имеем $d(x, A_n) < 1/n$.
- Берем $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
- A является конечным или счетным множеством.

- По построению, для любого $x \in E$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$d(x, A) \leq d(x, A_n) < 1/n.$$

- Следовательно, имеем $d(x, A) = 0$, откуда следует $E = \bar{A}$. То есть, A плотно в E.

$\square$

1.15. Непрерывные отображения метрических пространств

Опр. 1.31. Пусть X, Y — два метрических пространства. Пусть $f\colon X \mapsto Y$. Отображение f называется *непрерывным отображением* в точке $x_0 \in X$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x \in X,\ \text{такой что } d(x, x_0) < \delta$$
$$\Rightarrow \quad d_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Уточним: d — расстояние в X, d_1 — расстояние в Y.

Опр. 1.32. Если f — непрерывная функция для всех $x \in X$, то говорим, что f *непрерывна на* X.

Замеч. 1.11. Расстояние $d(x, y)$ как отображение $d\colon X \times X \mapsto \mathbb{R}$ непрерывно.
Здесь метрика в $X \times X$ определяется как

$$d_1((x, y), (p, q)) = \max\{d(x, p), d(y, q)\}.$$

Действительно, имеем:

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x_0, x) + d(y_0, y)$$

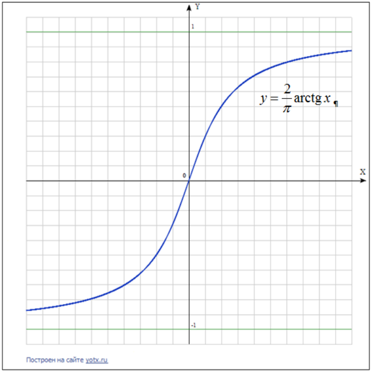
$$\leq 2 \max\{d(x_0, x), d(y_0, y)\}.$$

Опр. 1.33. Если отображение f *взаимно однозначно* и *взаимно непрерывно*, то отображение f называется *гомеоморфизмом*.

Пояснение. Взаимно однозначное отображение f называется взаимно непрерывным, если отображения f и f^{-1} непрерывны.

Пример 1.20. Числовая прямая $(-\infty, \infty)$ и отрезок $(-1, 1)$ — *гомеоморфные* метрические пространства. *Гомеоморфизмом* является отображение

$$y = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x, \quad (x \in (-\infty, \infty),\ y \in (-1, 1)).$$



Опр. 1.34. Пусть X, Y — два метрических пространства. Отображение $f\colon X \mapsto Y$ называется *равномерно непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad d_X(x, y) < \delta \quad \forall x, y \in X \quad \Rightarrow$$

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Замеч. 1.12. Равномерно непрерывное отображение является непрерывным.

Предлож. 1.23. Любое непрерывное отображение f компактного метрического пространства E в метрическое пространство $E^\star$ равномерно непрерывно.

Д-во. Доказательство проведем *методом от противного*.

Предположение. Пусть существуют $\alpha > 0$ и $\{x_n\}, \{y_n\} \subset E$ такие, что

$$d_E(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad d_{E^\star}(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha.$$

- В силу *критерия компактности* (теорема 1.5, пункт **(b)**) существует последовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} a$, где $a \in E$.
- Т.к. $d_E(x_{n_k}, y_{n_k}) < \dfrac{1}{n_k}$, то $y_{n_k} \underset{n_k\to\infty}{\to} a$ по неравенству треугольника.

- Так как отображение f непрерывно на E, то оно непрерывно в точке $a \in E$.
- Отсюда следует:

$$\exists\, \delta > 0 : \quad d_E(a, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_{E^\star}(f(a), f(x)) < \frac{\alpha}{2}.$$

- Возьмём $k \in \mathbb{N}$ такое, что $d_E(a, x_{n_k}) < \delta$, $d_E(a, y_{n_k}) < \delta$. Тогда $d_{E^\star}(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) < \alpha$ (по неравенству треугольника).
- Получили противоречие с *предположением*.

Предложение 1.23 доказано. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №6

1.16. Компактные и относительно компактные множества

1.16. Компактные и относительно компактные множества

Опр. 1.34. *Компактным* множеством в метрическом пространстве E называется множество A, для которого подпространство $A \subset E$ компактно.

Опр. 1.35. *Вполне ограниченным* множеством в метрическом пространстве E называется множество A, для которого подпространство $A \subset E$ вполне ограничено.

Опр. 1.36. *Относительно компактным* множеством в метрическом пространстве E называется множество $A \subset E$, замыкание которого компактно.

Предлож. 1.24. **(Основные свойства относительно компактных множеств.)**

(а) Любое подмножество относительно компактного множества относительно компактно.

(б) Относительно компактное множество вполне ограничено.

(в) В полном метрическом пространстве вполне ограниченное множество относительно компактно.

(г) Для того, чтобы множество A в метрическом пространстве E было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы каждая последовательность точек множества A имела предельную точку в E.

(д) Объединение двух относительно компактных множеств относительно компактно.

(е) Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства E в метрическое пространство $E^{\star}$, тогда образ каждого компактного множества $A \subset E$ при отображении f компактен и поэтому замкнут в $E^{\star}$.

Доказательство предложения 1.24

(a) Любое подмножество относительно компактного множества относительно компактно.

Д-во (a). Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 1.1. В компактном пространстве E всякое замкнутое множество компактно.

Д-во леммы 1.1. Такое множество, очевидно, вполне ограничено.
Также, компактное пространство — полное.
Замкнутое множество полного пространства — полное подпространство.
ИТОГ: рассматриваемое множество — это вполне ограниченное и полное метрическое пространство. По критерию компактности оно компактно. $\square$

Теперь утверждение (а) следует сразу из этой леммы и из определения 1.36 (относительно компактного множества). $\square$

(б) Относительно компактное множество вполне ограничено. Утверждение (б) сразу следует из утверждения (а). $\square$

(в) В полном метрическом пространстве вполне ограниченное множество относительно компактно.

Д-во (в). Пусть E — полное метрическое пространство, множество $A \subset E$ вполне ограничено.
По определению вполне ограниченности: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\{C_k\}$ — конечное покрытие множества A, такое, что $\mathrm{diam}\ C_k \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
По определению диаметра: каждое C_k содержится в замкнутом в E шаре D_k, так, что радиус D_k равен $\varepsilon/2$.

Таким образом, $\bar{A} \subset \bigcup_k D_k$, причём $\bigcup_k D_k$ замкнуто, шаров имеем конечное число.
ИТОГ: $\bar{A}$ имеет конечное покрытие открытыми шарами радиуса ε, то есть $\bar{A}$ вполне ограничено.
Наконец, $\bar{A}$ — замкнутое подмножество полного метрического пространства, то есть, $\bar{A}$ полное.
По критерию компактности, $\bar{A}$ компактно, значит A относительно компактно. $\square$

(г) Для того, чтобы множество A в метрическом пространстве E было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы каждая последовательность точек множества A имела предельную точку в E.

Пункт (г) очевиден.

(д) Объединение двух относительно компактных множеств относительно компактно.

Д-во (д). Очевидно, достаточно доказать для двух компактных множеств: Предположим, что $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие для $A \cup B$.
Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 1.2. Пусть F — подпространство некоторого метрического пространства E. Для того, чтобы множество $T \subset F$ было открыто в F, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое открытое множество $G \subset E$, что $T = G \cap F$.
(Оставим эту лемму без доказательства. Её доказательство сразу следует из определений.)

- Далее, на основании этой леммы заключаем, что множество U_λ можно записать в виде $(A \cup B) \cap V_\lambda$, где V_λ открыто в E.
- *По предположению* существует такое конечное подмножество H множества L, что подсемейство $(A \cap V_\lambda)_{\lambda \in H}$ покрывает множество A.
- Аналогично предыдущему, *по предположению* существует такое конечное подмножество K множества L, что подсемейство $(B \cap V_\lambda)_{\lambda \in K}$ покрывает множество B.
- Отсюда ясно, что семейство $((A \cup B) \cap V_\lambda)_{\lambda \in H \cup K}$ покрывает $A \cup B$.

Утверждение пункта (д) доказано. $\square$

(e) Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства E в метрическое пространство $E^\star$, тогда образ каждого компактного множества $A \subset E$ при отображении f компактен и поэтому замкнут в $E^\star$.

Д-во (e). Доказательство элементарно. $\square$

Предложение 1.24 доказано. $\square$

Опр. 1.38. Метрическое пространство E называется *локально компактным*, если у каждой точки $x \in E$ существует компактная окрестность.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №7

1.17. Произведение двух метрических пространств

1.17. Произведение двух метрических пространств

Пусть E_1 и E_2 — два метрических пространства, d_1 и d_2 — расстояния в E_1 и E_2, соответственно.

Для любой пары точек
$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in E \equiv E_1 \times E_2$ положим

$$d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}. \tag{1.15}$$

Предлож. 1.25. Функция $d(x, y)$, заданная формулой (1.15), удовлетворяет всем аксиомам метрики.

Д-во. Предложение проверяется непосредственно. То есть, имеем:

$$d(x, y) \geq 0;\ d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y;\ d(y, x) = d(x, y),$$

и выполняется неравенство треугольника. $\square$

Замеч. 1.13.

- Отображ. $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$ — это изометрия.
- Отображ. d' и d'', определенные формулами

$$d'(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2), \tag{1.16}$$

$$d''(x,y) = \sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2 + (d_2(x_2,y_2))^2}, \tag{1.17}$$

также являются расстояниями в $E = E_1 \times E_2$. Аксиомы метрики проверяются непосредственно.

Опр. 1.39. Метрическое пространство

$$E = \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,$$
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}\,\}$$

называется *произведением метрических пространств* E_1 и E_2.

Опр. 1.40. Пусть E — запас точек. Этот запас точек снабдим расстояниями d', d''. Таким образом, имеем два метрических пространства $E' = (E, d')$, $E'' = (E, d'')$. Если d' и d'' таковы, что тождественное отображение $I\colon E' \mapsto E''$ и обратное к нему отображение являются равномерно непрерывными, **то** d' и d'' называются *равномерно эквивалентными*.

Предлож. 1.26. Пусть E' и E'' являются метрическими пространствами с одним и тем же запасом точек и с равномерно эквивалентными метриками d' и d''.

Тогда, если последовательность является фундаментальной в (E', d'), то она является фундаментальной в (E'', d'').

Верно и обратное утверждение: если последовательность является фундаментальной в (E'', d''), то она является фундаментальной в (E', d').

Д-во сразу следует из определений. $\square$

Замеч. 1.14. В связи с вышесказанным имеем в случае $E_1 \times E_2$ неравенство

$$d(x,y) \le d''(x,y) \le d'(x,y) \le 2d(x,y),$$

где d, d', d'' — определённые выше метрики. Таким образом, все три метрики d, d', d'' равномерно эквивалентны. Проверка равномерной эквивалентности очевидна.

Терминология.

1. Если не оговорено специально, то считаем, что в $E_1 \times E_2$ рассматривается расстояние d (а не d' и d'').
2. Открытые (соответственно, замкнутые) шары для расстояний d, d', d'' будем обозначать через B, B', B'' (соотв., $\bar{B}$, $\bar{B}'$, $\bar{B}''$).

Предлож. 1.27. Для любой точки $a = (a_1, a_2) \in E$ и для любого $r > 0$ имеем
$$B(a; r) = B_1(a_1; r) \times B_2(a_2; r)$$
и
$$\bar{B}(a; r) = \bar{B}_1(a_1; r) \times \bar{B}_2(a_2; r).$$

Д-во сразу следует из определения радиуса. $\square$

Предлож. 1.28. Если $A_1 \subset E_1$ — открытое множество и $A_2 \subset E_2$ — открытое множество, то множество $A_1 \times A_2 \subset E_1 \times E_2$ — открытое множество.

Д-во. Если $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, то существуют $r_1, r_2 > 0$, такие, что

$$B_1(a_1; r_1) \subset A_1 \quad \text{и} \quad B_2(a_2; r_2) \subset A_2.$$

Возьмём $r = \min\{r_1, r_2\}$.

Тогда в силу предложения 1.27 имеем

$$B(a; r) \subset A_1 \times A_2.$$

$\square$

Предлож. 1.29. Для любой пары множеств $A_1 \subset E_1$ и $A_2 \subset E_2$ имеем

$$\overline{A_1 \times A_2} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2.$$

В частности, для того, чтобы $A_1 \times A_2$ было замкнуто в E, необходимо и достаточно, чтобы A_1 было замкнуто в E_1 и A_2 было замкнуто в E_2.

Д-во. Если $a = (a_1, a_2) \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$, то по предположению для $\forall\, \varepsilon > 0$ существуют $x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2$, такие, что

$$d_1(a_1, x_1) < \varepsilon, \quad d_2(a_2, x_2) < \varepsilon.$$

Это верно, так как a_1, a_2 — это точки прикосновения множеств A_1 и A_2, соответственно.
Поэтому для точки $x = (x_1, x_2)$ имеем

$$d(a, x) \equiv d((a_1, a_2), (x_1, x_2)) < \varepsilon$$

по определению 1.37.

Таким образом, доказали:
если $a \in \overline{A_1 \times A_2}$, *то* $a \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$.

Теперь докажем: *если* $a \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$, *то* $a \in \overline{A_1 \times A_2}$.

Доказательство проведем *методом от противного*.

Предположение. **Пусть $(a_1, a_2) \in \overline{A_1 \times A_2}$, но $(a_1, a_2) \notin \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$.**

Тогда $a_1 \notin \bar{A}_1$ или $a_2 \notin \bar{A}_2$. Для определённости считаем, что $a_1 \notin \bar{A}_1$.

Тогда имеем, что

- $(E_1 \setminus \bar{A}_1) \times E_2$ открыто в E,
- $(E_1 \setminus \bar{A}_1) \times E_2$ *по предположению* содержит точку $a = (a_1, a_2)$,
- *по предположению* также имеем

$$((E_1 \setminus \bar{A}_1) \times E_2) \cap (A_1 \times A_2) = \emptyset.$$

Таким образом $a \notin \overline{A_1 \times A_2}$.

Это противоречит *предположению*. Предложение 1.29 доказано. □

Предлож. 1.30. Пусть $z \mapsto f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ — отображение метрического пространства F в метрическое пространство $E = E_1 \times E_2$.

Для того, чтобы f было непрерывно в точке $z_0 \in F$, необходимо и достаточно, чтобы f_1 и f_2 были непрерывны в точке z_0.

Д-во. Пусть $x_0 = (f_1(z_0), f_2(z_0))$. Тогда в силу предложения 1.29 имеем:

$$f^{-1}(B(x_0; r)) = f_1^{-1}(B_1(f_1(z_0); r)) \cap f_2^{-1}(B_2(f_2(z_0); r)).$$

Здесь, f^{-1}, f_1^{-1} и f_2^{-1} — обратные отображения открытых шаров $B(x_0; r)$, $B_1(f_1(z_0); r)$ и $B_2(f_2(z_0); r)$, соответственно.

Теперь заметим, что

$$f_1^{-1}(B_1(f_1(z_0); r)) \text{ и } f_2^{-1}(B_2(f_2(z_0); r))$$

— это окрестности точки z_0.

Значит, $f_1^{-1}(B_1(f_1(z_0); r)) \cap f_2^{-1}(B_2(f_2(z_0); r))$ — это тоже окрестность точки z_0.

Отсюда по определению непрерывности (определение 1.31) получаем:

- если f непрерывно, то f_1 и f_2 непрерывны,
- если f_1 и f_2 непрерывны, то f непрерывно.

Предложение 1.30 доказано. $\square$

Предлож. 1.31.

(a) Пусть $f = (f_1, f_2)$ — отображение подпространства A метрического пространства F $(z \in F)$ в $E = E_1 \times E_2$ и пусть $a \in \bar{A}$. Для того, чтобы отображение f имело в точке a предел по множеству A, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба предела

$$b_1 = \lim_{z \to a, z \in A} f_1(z), \quad b_2 = \lim_{z \to a, z \in A} f_2(z).$$

В этом случае говорим, что *предел отображения f в точке a равен $b = (b_1, b_2)$*.

(b) Пусть $z \mapsto f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ — отображение метрического пространства F в $E = E_1 \times E_2$. Для того, чтобы f было равномерно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы и f_1, и f_2 были равномерно непрерывны.

(c) Если E — метрическое пространство и d — расстояние в E, то отображение d произведения $E \times E$ в $\mathbb{R}$ равномерно непрерывно.

Д-во. Доказательство основано непосредственно на определениях предела (определение 1.22) и определении равномерной непрерывности отображения (определение 1.34). $\square$

Примечание. В пункте (c) используем уже известное нам неравенство четырёхугольника

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

Проекции в метрических пространствах

Опр. 1.39. Отображения $z = (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_1 z = x$ метрического пространства $E_1 \times E_2$ в E_1 и $z = (x, y) \mapsto \mathrm{pr}_2 z = y$ метрического пространства $E_1 \times E_2$ в E_2 называются *первой* и *второй проекциями* в $E_1 \times E_2$.

Предлож. 1.32. Проекции pr_1 и pr_2 равномерно непрерывны в $E = E_1 \times E_2$.

Д-во. Примéним пункт (b) предложения 1.31 к тождественному преобразованию $(x, y) \mapsto (x, y)$. Так как тождественное преобразование равномерно непрерывно, то pr_1 и pr_2 равномерно непрерывны. Предложение 1.32 доказано. $\square$

Предлож. 1.33. Для любого $a_2 \in E_2$ отображение $x_1 \mapsto (x_1, a_2)$ есть изометрия пространства E_1 на замкнутое подпространство $E_1 \times \{a_2\}$.
Аналогично, для любого $a_1 \in E_1$ отображение $x_2 \mapsto (a_1, x_2)$ есть изометрия пространства E_2 на замкнутое подпространство $\{a_1\} \times E_2$.

Д-во. Доказательство основано на определении метрики d в $E_1 \times E_2$ (формула (1.15) и предложение 1.25), определении изометрии (определение 1.6) и предложении 1.27. $\square$

Предлож. 1.34.

- Для любого множества A, открытого в $E_1 \times E_2$, и для любой точки $a_1 \in E_1$ множество $A(a_1) := \mathrm{pr}_2(A \cap (\{a_1\} \times E_2))$ открыто в E_2.
- Для любого множества A, замкнутого в $E_1 \times E_2$, и для любой точки $a_1 \in E_1$ множество $A(a_1) := \mathrm{pr}_2(A \cap (\{a_1\} \times E_2))$ замкнуто в E_2.

Д-во. Доказательство проведём только для открытого множества A. Для замкнутого множества A будет совершенно аналогично.

Мн-во $A \cap (\{a_1\} \times E_2)$ открыто в $E' := \{a_1\} \times E_2$.
Рассмотрим $x_2 \in \mathrm{pr}_2(A \cap (\{a_1\} \times E_2))$ и отображение $f\colon x_2 \mapsto (a_1, x_2)$.
Это отображение является *изометрией*.
Отображение

$$f\ :\ \mathrm{pr}_2(A \cap (\{a_1\} \times E_2)) \mapsto (\{a_1\} \times E_2) \cap A$$

— открытое.
Отсюда следует, что $\mathrm{pr}_2(A \cap (\{a_1\} \times E_2))$ — открытое множество.

Пояснение. Так как f — изометрия, то значит f переводит открытое множество в открытое множество, и f^{-1} переводит открытое множество в открытое.
Аналогичное свойство справедливо для замкнутых множеств.
Доказательство предложения 1.34 завершено. □

Предлож. 1.35. Для любого множества A, открытого в $E_1 \times E_2$, множество $\mathrm{pr}_1 A$ открыто в E_1 (соотв., множество $\mathrm{pr}_2 A$ открыто в E_2).

Д-во. Заметим, что

$$\mathrm{pr}_2 A = \bigcup_{x_1 \in E_1} A(x_1).$$

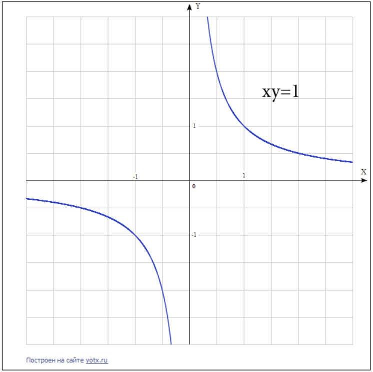
Множество $A(x_1)$ является открытым по предложению 1.34. Далее, уже знаем, что *любое объединение открытых множеств является открытым.* $\square$

Однако, если A замкнуто в $E_1 \times E_2$, то множество $\mathrm{pr}_1 A$ может быть не замкнуто в E_1.

Пример 1.21. Гипербола $H = \{xy = 1\}$ замкнута на $\mathbb{R}^2$, но

$$\mathrm{pr}_1 H = \mathrm{pr}_2 H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

— не замкнутое множество.



Предлож. 1.36. Пусть $f\colon E_1 \times E_2 \mapsto F$. Если f непрерывно в точке (a_1, a_2), то $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ непрерывно в a_1.

Д-во. $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ представима как суперпозиция двух непрерывных функций. Поэтому f является непрерывной:

$$x_1 \mapsto (x_1, a_2) \mapsto f(x_1, a_2).$$

□

Пояснение. Отображение

$$x_1 \mapsto (x_1, a_2)$$

является изометрией согласно предложению 1.29. Отображение

$$(x_1, a_2) \mapsto f(x_1, a_2)$$

является непрерывным, поскольку отображение f является непрерывным.

Аналогичное утверждение справедливо для равномерно непрерывных отображений.

Замеч. 1.15. Обратное, вообще говоря, неверно.
Для функции в $\mathbb{R}^2$ имеем

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{при} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{при} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$x_1 \mapsto f(x_1, 0), \quad x_2 \mapsto f(0, x_2)$$

непрерывны в нуле, но $f(x,y)$ не непрерывна (разрывна) в $(0,0)$.

Наконец, из предыдущих определений и предложений следует:

Предлож. 1.37. Пусть E_1 и E_2 — два непустых метрических пространства. Для того, чтобы произведение $E = E_1 \times E_2$ было пространством одного из следующих типов:

(a) дискретным,

(b) ограниченным,

(c) сепарабельным,

(d) полным,

(e) компактным,

(f) вполне ограниченным,

необходимо и достаточно, чтобы оба пространства E_1 и E_2 были пространствами со свойствами (a)–(f), соответственно.

Дополнение к предлож. 1.37:

(g) Для того, чтобы множество $A \subset E_1 \times E_2$ было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{pr}_1 A$ и $\mathrm{pr}_2 A$ были относительно компактны в E_1 и E_2, соответственно.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №8

1.18. Принцип сжимающих отображений и его приложения

1.18. Принцип сжимающих отображений и его приложения

Опр. 1.41. Пусть E — метрическое пространство. Отображение $A\colon E \mapsto E$ называется *сжимающим* (или, короче, *сжатием*), если существует число $\alpha < 1$, такое, что

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall\, x, y \in E. \tag{1.18}$$

Предлож. 1.38. Всякое сжимающее отображение непрерывно.

Д-во следует непосредственно из определений. $\square$

Опр. 1.42. Точка $x \in E$ называется *неподвижной точкой* отображения A, если

$$Ax = x.$$

Теорема 1.6. **(Принцип сжимающих отображений.)** Всякое сжимающее отображение, определённое в полном метрическом пространстве E, имеет единственную неподвижную точку.

Д-во.

1) Пусть x_0 — произвольная точка в E.
Положим

$$x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1 = A^2x_0,\ x_3 = Ax_2 = A^3x_0,\ \dots,$$

то есть, в общем виде,

$$x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0.$$

Пояснение. Здесь и далее обозначаем:

$$A^n := \underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{n \text{ операторов A}} \text{ — суперпозиция } n \text{ операторов } A.$$

2) Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Действительно, считая $m \geq n$, имеем

$$d(x_n, x_m) = d(A^n x_0, A^m x_0) \leq \alpha^n d(x_0, x_{m-n})$$
$$\overset{(*)}{\leq} \alpha^n \{d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\}$$
$$\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \left\{1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-n-1}\right\}$$
$$\overset{(**)}{\leq} \alpha^n d(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}.$$

Здесь, неравенство $(*)$ справедливо в силу неравенства треугольника, неравенство $(**)$ справедливо в силу известных свойств геометрической прогрессии.

Итак,

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}.$$

Так как $\alpha < 1$, то при достаточно большом n эта величина сколь угодно мала.
Аналогично получаем и при $m < n$.

ИТОГ: Фундаментальность последовательности $\{x_n\}$ доказана.

3) **Так как** E — полное пространство, $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, **то** $\{x_n\}$ имеет предел.
Положим
$$x := \lim_{n\to\infty} x_n.$$
В силу непрерывности отображения A имеем
$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

ИТОГ: Существование неподвижной точки доказано.

4) **Докажем единственность** неподвижной точки. Если $Ax = x$, $Ay = y$, то неравенство

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall\, x, y \in E \tag{1.18}$$

принимает вид

$$d(Ax, Ay) = d(x, y) \leq \alpha d(x, y).$$

Так как $\alpha < 1$, то это возможно только если $d(x, y) = 0$, то есть $x = y$.
Теорема 1.6 доказана. $\square$

Примеры применения принципа сжимающих отображений: интегральные уравнения

Уравнение Фредгольма 2-го рода

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x). \qquad (1.19)$$

Здесь K и φ — заданные функции, f — искомая функция, λ — некоторый фиксированный параметр.

Терминология: Функция $K = K(x,y)$ называется *ядром* интегрального оператора

$$f(x) \mapsto (Af)(x) := \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x).$$

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x) \qquad (1.19)$$

Теорема 1.7. Пусть $K(x,y)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \le x \le b$, $a \le y \le b$.
Тогда существует значение $\lambda_0 > 0$, такое, что при любом $|\lambda| < \lambda_0$ уравнение Фредгольма имеет единственное решение в $C[a,b]$.

Д-во. Так как $K(x,y)$ непрерывна в квадрате $[a,b]^2$, то

$$|K(x,y)| \le M.$$

Рассмотрим отображение $f \mapsto g = Af$ (полного) пространства $C[a, b]$ в $C[a, b]$, определённое формулой

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x).$$

Имеем,

$$\begin{aligned} d(g_1, g_2) = \max_{a \le x \le b} |g_1(x) - g_2(x)| \\ \le |\lambda| \, M \, (b - a) \max_{a \le x \le b} |f_1(x) - f_2(x)|. \end{aligned}$$

Следовательно, при

$$|\lambda| < \lambda_0 = \frac{1}{M(b-a)}$$

отображение A — сжимающее.
В силу принципа сжимающих отображений заключаем, что для любого λ, такого, что $|\lambda| < \lambda_0$, уравнение (1.19) имеет единственное решение. $\square$

Замеч. 1.16. Из доказательства принципа сжимающих отображений видно, что решение (1.19) может быть получено последовательными приближениями $f_0, f_1, \dots$ из рекуррентного соотношения

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f_{n-1}(y) dy + \varphi(x),$$

где в качестве f_0 можно взять любую непрерывную функцию.

Теперь рассмотрим нелинейное интегральное уравнение:

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y))dy + \varphi(x). \qquad (1.20)$$

Здесь, K и φ непрерывны. Также считаем, что K *липшицево* по третьему аргументу:

$$|K(x, y; z_1) - K(x, y; z_2)| \leq M |z_1 - z_2| \quad \forall x, y \in [a, b], \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Справедливо предложение, аналогичное предыдущему.

Оператор A строим следующим образом:

$$A: \quad f(x) \mapsto g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y))dy + \varphi(x).$$

Для оператора A получаем оценку в следующем виде:

$$d(Af_1, Af_2) = \max_{a \le x \le b} |g_1(x) - g_2(x)| \\ \le |\lambda| M (b - a) \max |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Следовательно, решение уравнения

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y))dy + \varphi(x) \qquad (1.20)$$

существует и единственно при

$$|\lambda| < \frac{1}{M (b - a)}.$$

Уравнение Вольтерра

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x). \tag{1.21}$$

Здесь, $K(x, y)$ и $\varphi(x)$ — заданные непрерывные функции, $x \in [a, b]$.
Докажем следующую теорему.

Теорема. 1.8. При любом $\lambda \in \mathbb{R}$ существует единственное решение уравнения (1.21) в пространстве $C[a, b]$.

Доказательство основано на обобщении принципа сжимающих отображений.

Теорема 1.9. **(Обобщение принципа сжимаемых отображений.)** Пусть A — такое непрерывное отображение полного метрического пространства E в E, что некоторое его степень $B = A^n$ является сжатием.
Тогда уравнение
$$Ax = x$$
имеет одно и только одно решение.

Д-во теоремы 1.9.

Пусть $Bx = x$. Имеем:

$$Ax = AB^k x = B^k Ax = B^k x_0 \underset{k\to\infty}{\to} x,$$

так как отображение B — сжимающее.
Значит для любой точки $x_0 \in E$ имеем, что последовательность

$$Bx_0, B^2 x_0, \dots, B^k x_0, \dots$$

сходится к неподвижной точке x, то есть

$$Ax = x.$$

Имеем, что точка x — это единственная неподвижная точка оператора A, так как x — это единственная неподвижная точка оператора $B = A^n$. $\square$

Д-во теоремы 1.8.

Рассматриваем уравнение Вольтерра

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) f(y) dy + \varphi(x). \qquad (1.21)$$

Рассмотрим оператор

$$A: \quad f(x) \mapsto g(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) f(y) dy + \varphi(x).$$

Пусть $f_1, f_2 \in C[a,b]$. Имеем:

$$\begin{aligned} Af_1(x) - Af_2(x) &\leq |\lambda| \left| \int_a^x K(x,y)(f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \\ &\leq |\lambda|\, M\, (x-a) \max |f_1(x) - f_2(x)|. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$
\begin{aligned}
Af_2(x) - Af_1(x) &\le |\lambda| \left| \int_a^x K(x,y)(f_2(y) - f_1(y))dy \right| \\
&\le |\lambda| \, M \, (x-a) \max |f_1(x) - f_2(x)|.
\end{aligned}
$$

Далее,

$$
A^2 f_1(x) - A^2 f_2(x) \le |\lambda|^2 \, M^2 \, \frac{(x-a)^2}{2} \max |f_1(x) - f_2(x)|,
$$

$$
A^2 f_2(x) - A^2 f_1(x) \le |\lambda|^2 \, M^2 \, \frac{(x-a)^2}{2} \max |f_1(x) - f_2(x)|.
$$

Продолжая оценивание, при произвольном $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$
\begin{aligned}
&|A^n f_1(x) - A^n f_2(x)| \\
&\qquad \le |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \max |f_1(x) - f_2(x)| \\
&\qquad\qquad \le |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} m,
\end{aligned}
$$

где $m := \max |f_1(x) - f_2(x)|$.

При большом n имеем

$$
\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1.
$$

В силу обобщённого принципа сжимающих отображений теорема 1.8 доказана. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №9

Глава 2. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Нормированные пространства и банаховы пространства

2.2. Ряды в нормированном пространстве

Глава 2
Нормированные пространства

2.1. Нормированные пространства и банаховы пространства

Опр. 2.1. *Векторным пространством* или *линейным пространством* называется коммутативная группа со сложением E, в которой определено умножение на скаляры.

Существование умножения на скаляры означает, что существует отображение

$$K \times E \mapsto E: \ (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

удовлетворяющее следующим аксиомам $(x, y \in E, \ \lambda, \mu, 1 \in K)$:

1. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$,
2. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
3. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$,
4. $1 \cdot x = x$.

Пояснение. Напомним, группа E со сложением называется коммутативной, если для любых $x, y \in E$ справедливо $x + y = y + x \in E$.

Примечание. В дальнейшем, $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$, то есть K — это пространство вещественных или комплексных чисел.

Опр. 2.2. *Нормой* в векторном пространстве E называется отображение $x \mapsto \|x\|$ пространства E в $\mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

(I) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$,

(II) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$,

(III) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E, \lambda \in K$,

(IV) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$.

Неравенство (IV) называется *неравенством треугольника*.

Предлож. 2.1. Если $x \mapsto \|x\|$ — норма в векторном пространстве E, то $d(x,y) = \|x - y\|$ — расстояние в E.
При этом, d обладает свойствами

- $d(x+z, y+z) = d(x,y)$,
- $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

Д-во. Справедливость предложения 2.1 следует непосредственно из определения метрики (определение 1.1) и определения нормы (определение 2.2). $\square$

Опр. 2.3. *Нормированное пространство* — это векторное пространство, снабжённое нормой.

Замеч. 2.1. Нормированное пространство является *метрическим пространством* согласно предложению 2.1.

Опр. 2.4. *Банахово пространство* — это полное нормированное пространство.

Пример 2.1. Норма в $\mathbb{R}^n$: $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

Пример 2.2. Норма в $C[a,b]$: $\|f\| = \max\limits_{a\le t\le b} |f(t)|$.

Примечание. Нормы в $\mathbb{R}^n$ и $C[a,b]$ порождают введённые ранее метрики. Эти пространства — полные, то есть *банаховы*. Напомним, что полноту $C[a,b]$ мы доказали в примере 1.14.

Пример 2.3. Пусть E — множество всех непрерывных на $[a, b]$ ($a, b < \infty$) функций $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Снабдим это *векторное пространство* E нормой

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|dt. \tag{2.1}$$

Замеч. 2.2. Формула (2.1) действительно определяет норму в E: аксиомы (I), (III) и (IV) выполняются очевидно. Свойство (II) определения нормы следует из *первой теоремы о среднем значении*. Эта теорема известна из курса классического математического анализа. Приведём её на следующем слайде.

Теорема *о среднем значении (первая).* Если φ непрерывна и вещественна, а $\psi' \geq 0$ на $[a, b]$, то найдётся $\tau \in [a, b]$, так что

$$\int_a^b \varphi(t)\psi'(t)dt = \varphi(\tau)[\psi(b) - \psi(a)].$$

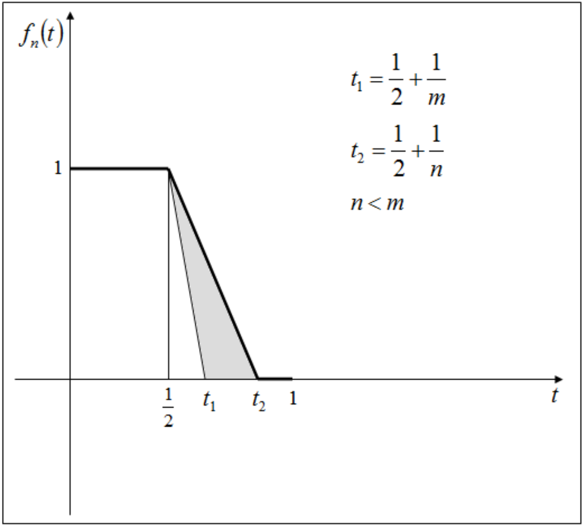
Для завершения обоснования свойства (II) нам достаточно взять $\varphi(t) = 1$, $\psi'(t) = |f(t)|$. Действительно, отсюда следует

$$0 = \int_a^b |f(t)|dt = \psi(b) - \psi(a).$$

Предлож. 2.2. Рассмотренное в предыдущем примере нормированное пространство E — неполное.

Д-во. Пусть $a = 0$, $b = 1$, для простоты.
Рассмотрим последовательность $\{f_n(t)\} \subset E$, такую, что

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2]; \\ 0, & t \in \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, 1\right]; \\ -nt + \dfrac{n+2}{2}, & t \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$$


$f_n(t)$
$t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$
$t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$
$n < m$
1
$\frac{1}{2}$
t_1
t_2
1
t

При $m > n$ имеем

$$\|f_m - f_n\|_1 = \int_0^1 (f_n - f_m)dt = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

Очевидно теперь, что $\{f_n\}$ — фундаментальная.

Далее заметим, что никакая непрерывная функция g, которая отличается от единицы на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и от нуля на полуоткрытом интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ хотя бы в одной точке не может быть пределом последовательности $\{f_n\}$.

Примечание. Пусть $t_0 \in (1/2, 1]$ (а случай $t_0 \in [0, 1/2]$ — проще), такое значение, что $g(t_0) \neq 0$.

Так как g — непрерывна, то существует окрестность U_{t_0}, такая, что $g(t) \neq 0$ для всех $t \in U_{t_0}$.

Исходя из конструкции последовательности $\{f_n\}$, существует последовательность натуральных чисел $k \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\forall\, k', k'' > k : \quad \begin{aligned} &U_{t_0} \cap \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k'}, 1\right) \neq \emptyset, \\ &U_{t_0} \cap \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k''}, 1\right) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Имеем по построению функции f_k, что

$$\|f_{k'} - g\|_1 \geq \|f_{k''} - g\| = \varepsilon_{k''} > 0 \text{ при } k' > k''.$$

Таким образом,

$$\|f_{k'} - g\|_1 \not\to 0.$$

Значит, единственно возможная предельная функция, это

$$\bar{f} = \begin{cases} 0, & t > 1/2, \\ 1, & t \leq 1/2. \end{cases}$$

Остаётся заметить, что $\bar{f} \notin E$. Этим самым доказательство предложения 2.2 завершается. $\square$

Предлож. 2.3. Если E — действительное (соответственно, комплексное) нормированное пространство, то отображение $(x, y) \mapsto x + y$ равномерно непрерывно в $E \times E$, отображение $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ непрерывно в $\mathbb{R} \times E$ (соответственно, в $\mathbb{C} \times E$), отображение $x \mapsto \lambda x$ равномерно непрерывно в E.

Д-во. Обоснование предложения 2.3 следует из трёх неравенств и из определений.
Для $(x, y) \mapsto x + y$ имеем неравенство

$$\|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_0 - x\| + \|y_0 - y\|.$$

Из этого неравенства следует, что отображение $(x, y) \mapsto x + y$ равномерно непрерывно в точке (x_0, y_0).

Для отображения $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ справедлива оценка

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)\|$$
$$\leq |\lambda_0| \cdot \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \cdot \|x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \cdot \|x - x_0\|.$$

Из этой оценки следует, что отображение $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ является непрерывным в точке (λ_0, x_0).

При фиксированных $\lambda \in K$ рассмотрим отображение $x \mapsto \lambda x$. Его непрерывность следует из простейшего неравенства

$$\|\lambda(x - x_0)\| \leq |\lambda| \cdot \|x - x_0\|.$$

Предложение 2.3 доказано. □

Следствие 2.1. Для любого $a \in E$ *сдвиг* $x \mapsto a + x$ и для любого $\lambda \in K$ *гомотетия* $x \mapsto \lambda x$ $(\lambda \neq 0)$ есть *гомеоморфизмы* E на себя.

2.2. Ряды в нормированном пространстве

Пусть E — нормированное пространство.

Опр. 2.5. Пара последовательностей $\{x_n\}_{n\ge 0}$, $\{s_n\}_{n\ge 0}$ называется *рядом*, если их элементы x_n, s_n при любом $n \in \mathbb{N}$ связаны соотношениями

$$s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$$

(или, что равносильно, $x_0 = s_0$, $x_n = s_n - s_{n-1}$).

Опр. 2.6.

- Элемент $x_n \in E$ называется *n-м членом* ряда.
- Элемент $s_n \in E$ называется *n-й частичной суммой* ряда.
- *Ряд* часто называют *рядом с общим членом x_n* и часто обозначают

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Опр. 2.7.

- Ряд с общим членом x_n называется *сходящимся к* $s \in E$, если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.
- В этом случае, s называется *суммой* ряда.
- Используем следующую запись:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Опр. 2.8. Элемент $r_n := s - s_n$ называется *n-м остатком ряда*.

Теорема 2.1. **(Критерий Коши.)**

- Если ряд с общим членом x_n сходится, то выполняется *условие фундаментальности*: для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$, так, что для любого $n \geq n_0$ и для любого $p \geq 0$ имеет место неравенство

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}\| \leq \varepsilon.$$

- Справедливо обратное утверждение. Если выполняется *условие фундаментальности* и если E — *полное* пространство, то ряд с общим членом x_n сходится.

Д-во.

- Доказательство тривиально. Оно непосредственно базируется на условии фундаментальности и на определении полного пространства.
- Напомним: всякая сходящаяся последовательность фундаментальна (предложение 1.19) и всякая фундаментальная последовательность в **полном** метрическом (нормированном) пространстве E сходится (определение 1.24).

$\square$

Предлож. 2.4. Если ряды с общим членом x_n и x'_n сходятся и имеют суммы s и s', то

- ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + x'_n) = s + s'$ сходится,
- ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda x_n) = \lambda s$ сходится для любого $\lambda \in K$.

Д-во. Это предложение непосредственно следует из определения сходимости ряда (определение 2.7) и предложения 2.3. $\square$

Предлож. 2.5. Если $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ — два таких ряда, что $x'_n = x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, за исключением *конечного* числа членов, то оба эти ряда сходятся или расходятся одновременно.

Д-во. Ряд $\{x'_n - x_n\}$ сходится, так как его члены при всех n, за исключением конечного числа, равны нулю. $\square$

Докажем технический результат.

Предлож. 2.6. Пусть $\{k_n\}$ — строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел и $k_0 = 0$.
Если ряд с общим членом x_n сходится к s и если y_n определено формулой

$$y_n = \sum_{p=k_n}^{k_{n+1}-1} x_p,$$

то ряд с общим членом y_n также сходится к s.

Д-во.

- Непосредственным вычислением выводим:

$$\sum_{i=0}^{n} y_i = \sum_{j=0}^{k_{n+1}-1} x_j.$$

- Значит последовательность $s'_n := \sum_{i=0}^{n} y_i$ является подпоследовательностью частичных сумм ряда с общим членом x_n.
- Остаётся заметить, что подпоследовательность сходится к тому же пределу, что и вся последовательность, то есть к s. □

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №10

2.3. Абсолютно сходящиеся ряды

2.3. Абсолютно сходящиеся ряды

Предлож. 2.7.

- Ряд с общим членом x_n *положительных чисел* сходится тогда и только тогда, когда для некоторой возрастающей последовательности $\{k_n\} \subset \mathbb{Z}_+$ последовательность $\{s_{k_n}\}$ частичных сумм ограничена сверху.
- Тогда
$$s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_{k_n}.$$

Д-во. Это предложение известно из курса классического математического анализа. Поэтому мы его доказывать не будем.

Опр. 2.9. Ряд с общим членом x_n в банаховом пространстве E называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд с общим членом $\|x_n\|$.

Теорема 2.2. **(О простой сходимости абсолютно сходящегося ряда.)** Если ряд с общим членом x_n абсолютно сходится в банаховом пространстве E, то он просто сходится (то есть сходится в смысле определения 2.7).

Имеет место оценка

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|. \tag{2.2}$$

Д-во.

- По определению 2.9:
$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \forall p \geq 0$$
имеем
$$\|x_{n+1}\| + \ldots + \|x_{n+p}\| \leq \varepsilon,$$
в силу критерия Коши для пространства $\mathbb{R}$.
- Тогда
$$\|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}\| \leq \varepsilon$$
по неравенству треугольника.
- Значит в силу критерия Коши (теорема 2.1) ряд с общим членом x_n сходится. Итак, сходимость доказали.

- Наконец, по неравенству треугольника имеем

$$\|x_0 + \ldots + x_n\| \leq \|x_0\| + \ldots + \|x_n\|.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ получаем оценку (2.2).

Теорема 2.2 доказана. □

Напомним следующие важные понятия для отображений (смотрите определения 1.3, 1.4, 1.5).

- Сюръективное отображение — отображение F: $X \mapsto Y$ такое, что $F(X) = Y$. То есть это *накрывающее* отображение (*накрытие*).
- Инъективное отображение — взаимно однозначное отображение.
- Биективное отображение — это одновременно сюръективное и инъективное отображение.

Коммутативность абсолютно сходящихся рядов

Предлож. 2.8. *(Свойство коммутативности абсолютно сходящихся рядов.)* Пусть x_n — общий член абсолютно сходящегося ряда. Пусть σ — биективное отображение множества $\mathbb{N}$ на себя. Пусть $y_n = x_{\sigma(n)}$. Тогда

- ряд с общим членом y_n *абсолютно сходится*,
- Суммы рядов равны:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Иными словами, мы можем как угодно переставлять местами слагаемые в абсолютно сходящемся ряде, и сумма ряда от этих перестановок не изменится.

Д-во.

- Пусть
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k, \quad s'_n = \sum_{k=0}^{n} y_k.$$
- Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ число $m \in \mathbb{N}$ — наибольшее число в $\sigma([0, n])$.
- Тогда, по определению числа m имеем
$$\sum_{k=0}^{n} \|y_k\| \leq \sum_{i=0}^{m} \|x_i\|,$$
так как среди $(x_i)_{i=0,\dots,m}$ содержатся все $(y_k)_{k=0,\dots,n}$.

- По предложению 2.7 ряд с общим членом y_n абсолютно сходится.
- Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём $n_0 \in \mathbb{N}$, так что

$$\|x_{n+1}\| + \ldots + \|x_{n+p}\| \leq \varepsilon/3 \text{ при } n \geq n_0,\ p \geq 0. \quad (2.3)$$

- Если m_0 — наименьшее число в $\sigma^{-1}[0, n_0]$, то при $n \geq m_0$, $p \geq 0$ имеем

$$\|y_{n+1}\| + \ldots + \|y_{n+p}\| \leq \varepsilon/3. \quad (2.4)$$

- Разность $s'_{m_0} - s_{n_0}$ является суммой членов x_j с номерами $j > n_0$, поэтому

$$\|s'_{m_0} - s_{n_0}\| \leq \varepsilon/3. \quad (2.5)$$

- Из (2.3)–(2.5) следует

$$\|s'_n - s_n\| \le \|s_n - s_{n_0}\| + \|s'_{m_0} - s'_n\| + \|s'_{m_0} - s_{n_0}\| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

- Эта оценка завершает доказательство предложения 2.8.

Опр. 2.10. Пусть A — произвольное *счётное* множество. Назовём семейство $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ элементов банахова пространства *абсолютно суммируемым*, если для некоторого биективного отображения $\varphi\colon \mathbb{N} \mapsto A$ ряд с общим членом $(x_{\varphi(n)})$ абсолютно сходится.

Замеч. 2.3.

- Из предложения 2.8 следует, что свойство абсолютной суммируемости множества A не зависит от выбора биективного отображения φ и что можно определить *сумму семейства* $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)}$.
- Сумму семейства также будем обозначать через

$$\sum_{\alpha\in A} x_\alpha.$$

Предлож. 2.9. Для того, чтобы семейство $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ элементов банахова пространства E было абсолютно суммируемо, необходимо и достаточно, чтобы конечные суммы

$$\sum_{\alpha\in J}\|x_\alpha\| \quad (J\subset A \text{ — конечное множество})$$

были ограничены в совокупности.

Д-во сразу следует из предложения 2.7. $\square$

Свойство аппроксимации

Предлож. 2.10. *(Свойство аппроксимации.)* Пусть выполнены условия предложения 2.9.
Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся конечное подмножество $H \subset A$ со следующими свойствами:

- Пусть $K \subset A$ — произвольное подмножество такое, что $H \cap K = \emptyset$. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha \in K} \|x_\alpha\| \leq \varepsilon.$$

- Пусть L — конечное подмножество множества A такое, что $L \supset H$. Тогда имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{\alpha \in A} x_\alpha - \sum_{\alpha \in L} x_\alpha \right\| \leq 2\varepsilon.$$

Д-во. Упражнение для семинарских занятий.

На лекции оставим это предложение без доказательства, потому что доказательство проводится теми же методами, что и доказательство предложений 2.8 и 2.9.

Ассоциативность абсолютно сходящихся рядов

Теорема 2.3. *(Об ассоциативности абсолютно сходящихся рядов.)* Пусть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ — абсолютно суммируемое семейство элементов банахова пространства E. Пусть (B_n) — такая *бесконечная* последовательность непустых подмножеств A, что

$$A = \bigcup_n B_n; \quad B_p \bigcap B_q = \emptyset \text{ при } p \neq q.$$

Пусть

$$z_n = \sum_{\alpha \in B_n} x_\alpha.$$

Тогда ряд (z_n) абсолютно сходится и $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha$.

Д-во.

- Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$ произвольно.
- В силу предложения 2.10 (об аппроксимации) имеем,

$\forall\, k \le n \quad \exists\, J_k \subset B_k \quad (J_k$ — конечное подмножество) :

$$\|z_k\| \le \sum_{\alpha \in J_k} \|x_\alpha\| + \frac{\varepsilon}{n+1}. \tag{2.6}$$

Пояснение:

- действительно, имеем

$$\|z_k\| = \left\| \sum_{\alpha\in B_k} x_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha\in J_k} x_\alpha + \sum_{\alpha\in B_k\setminus J_k} x_\alpha \right\| \le$$

$$\text{(нер-во треуг.)} \;\le \sum_{\alpha\in J_k} \|x_\alpha\| + \sum_{\alpha\in B_k\setminus J_k} \|x_\alpha\| \le$$

$$\text{(предложение 2.10)} \;\le \sum_{\alpha\in J_k} \|x_\alpha\| + \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

- Положим теперь $J = \bigcup\limits_{k=0}^{n} J_k$. Тогда, суммируя в (2.6) по k, выводим

$$\sum_{k=0}^{n} \|z_k\| \leq \sum_{\alpha \in J} \|x_\alpha\| + \varepsilon \leq \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\| + \varepsilon. \qquad (2.7)$$

- В силу неравенства (2.7) из предложения 2.7 следует, что *ряд (z_k) абсолютно сходится*.
- Остаётся доказать равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha.$$

Это доказательство также основано на предложении 2.10 (об аппроксимации).

- Пусть H — конечное множество такое, как в предложении 2.10:

$$\forall\, K \subset A\, (K \text{ — конечное}),\ H \cap K = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha \in K} \|x_\alpha\| \le \varepsilon,$$

и

$$\forall\, L \subset A\, (L \text{ — конечное}),\ H \subset L \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{\alpha \in A} x_\alpha - \sum_{\alpha \in L} x_\alpha \right\| \le \varepsilon.$$

- Пусть n_0 — наибольшее целое число такое, что $H \cap B_{n_0} \neq \emptyset$. Заметим, что $n_0 < +\infty$, так как H — *конечное* множество и B_p взаимно не пересекаются.
- Пусть $n \geq n_0$ произвольно. По предложению 2.10 для любого $k \leq n$ выберем конечное подмножество $J_k \subset B_k$ такое, что $J_k \supset (H \cap B_k)$ и что для любого конечного подмножества L_k такого, что $J_k \subset L_k \subset B_k$, выполняется неравенство

$$\left\| z_k - \sum_{\alpha \in L_k} x_\alpha \right\| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}, \text{ где } z_k = \sum_{\alpha \in B_k} x_\alpha. \qquad (2.8)$$

- Далее положим $L = \bigcup\limits_{k=0}^{n} L_k$ и просуммируем в левой и правой частях (2.8) по $k = 0, \ldots, n$.
- Используя неравенство треугольника, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \left\| z_k - \sum_{\alpha \in L_k} x_\alpha \right\| \leq \sum_{n+1 \text{ раз}} \frac{\varepsilon}{n+1} = \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{\alpha \in L} x_\alpha \right\| \equiv \left\| \sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{n} \sum_{\alpha \in L_k} x_\alpha \right\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left\| z_k - \sum_{\alpha \in L_k} x_\alpha \right\| \leq \varepsilon. \tag{2.9}$$

- Так как $H \subset L$ и

$$\forall\, K \subset A\,(K \text{ — конечное}),\ H \cap K = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha \in K} \|x_\alpha\| \le \varepsilon,$$

то имеем

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \right\| \le \left\| \sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{\alpha \in L} x_\alpha \right\| + \left\| \sum_{\alpha \in L} x_\alpha - \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \right\| \le 2\varepsilon$$

в силу (2.9) и по определению множества H.

■ Итак, разность между $\sum_{k=0}^{n} z_k$ и $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ произвольно мала.
Доказательство теоремы 2.3 завершено. □

Дополнение к теореме 2.3. Пусть A раскладывается на *конечное* число подмножеств B_k $(1 \le k \le n)$.
Тогда теорема 2.3 очевидно выполнена и справедливо обратное утверждение: если каждое из семейств $(x_\alpha)_{\alpha \in B_k}$ абсолютно суммируемо, то абсолютно суммируемо и семейство $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Д-во проводится индукцией по n. □

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №11

2.4. Подпространства и конечные произведения нормированных пространств

2.5. Критерий непрерывности полилинейного отображения

2.4. Подпространства и конечные произведения нормированных пространств

Предисловие. Пусть E — нормированное пространство, F — векторное подпространство нормированного пространства E. Иными словами, если $x, y \in F \subset E$, то $\alpha x + \beta y \in F$ для любых $\alpha, \beta \in K$.

Норма в пространстве E — это, очевидно, норма в F. Она определяет в F расстояние $d(x, y) = \|x - y\|$, такое же, как в пространстве E.
Итак:

Опр. 2.11. Говорим, что F — *подпространство нормированного пространства* E, если это — векторное подпространство с индуцированной (взятой) из E нормой.

Предлож. 2.11.

- Если E — банахово пространство, то любое замкнутое подпространство $F \subset E$ — это банахово пространство.
- Если $F \subset E$ — банахово пространство, то F замкнуто в E.

Д-во. Доказательство сразу следует из свойств метрических пространств. $\square$

Предлож. 2.12. Если F — векторное подпространство нормированного пространства E, то его замыкание $\bar{F}$ в E — это векторное подпространство.

Д-во.

- По предположению, что F — векторное пространство, отображение $(x, y) \mapsto x + y$ имеет сужение, как отображение из $F \times F$ в F. Это отображение непрерывно.
- Поэтому, $(x, y) \mapsto x + y$ отображает $\overline{F \times F}$ в $\bar{F}$.
- В силу предложения 1.31 (о произведении метрических пространств) имеем

$$\overline{F \times F} = \bar{F} \times \bar{F}.$$

- Отсюда заключаем, что если $x, y \in \bar{F}$, то $x + y \in \bar{F}$.
- Из предложения 2.3 выводим, что если $x \in \bar{F}$, то $\lambda x \in \bar{F}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\lambda \in \mathbb{C}$). $\square$

Тотальные множества

Опр. 2.12. Множество A в нормированном пространстве E *тотально*, если *конечные* линейные комбинации векторов из A образуют подпространство, плотное в E.

О конечном произведении нормированных пространств

Пусть E_1, E_2 — нормированное пространство. Рассмотрим $E = E_1 \times E_2$ — векторное пространство, в котором

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

для любых $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$ и $\lambda \in K$.

Предлож. 2.13. Отображение из $E_1 \times E_2$ в $\mathbb{R}$, заданное по закону $(x_1, x_2) \mapsto \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$ — это норма в $E = E_1 \times E_2$.

Д-во следует сразу из определения нормы. $\square$

Ассоциированное с этой нормой расстояние определяется стандартно:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{\|x_1 - y_1\|_{E_1}, \|x_2 - y_2\|_{E_2}\}.$$

Естественные вложения $x_1 \mapsto (x_1, 0)$, $x_2 \mapsto (0, x_2)$

Эти вложения — *изометрии* пространств E_1 и E_2 на замкнутые подпространства $E_1' = E_1 \times \{0\}$, $E_2' = \{0\} \times E_2$ пространства $E = E_1 \times E_2$.

Вспомним, что это нам знакомо из теории метрических пространств (из главы 1).

Опр. 2.13. Нормированное пространство E называется *прямой суммой* двух векторных пространств F_1 и F_2, если каждый элемент $x \in E$ может быть *единственным образом* записан в виде

$$x = p_1(x) + p_2(x),$$

где $p_1(x) \in F_1$, $p_2(x) \in F_2$ и p_1, p_2 являются линейными отображениями пространства E соответственно в F_1 и F_2.

Терминология. Говорят, что p_1 и p_2 — это *проекции* пространства E на F_1 и F_2.

Обозначение. $E := F_1 \oplus F_2$ — *прямая сумма*.

Используя это обозначение, часто будем записывать

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

Рассмотрим естественное отображение

$$(y_1, y_2) \equiv (y_1, 0) + (0, y_2) \mapsto y_1 + y_2$$

пространства-произведения $F_1 \times F_2$ на E.

Предлож. 2.14.

(1) Отображение $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$ линейно, биективно и непрерывно.

(2) Для того, чтобы отображение $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$ было гомеоморфизмом пространства $F_1 \times F_2$ на E, необходимо и достаточно, чтобы *одно из* линейных отображений p_1, p_2 было непрерывно.

Д-во.

- Пункт (1) очевиден.
- (2) Заметим, что если непрерывно одно из отображений p_1 и p_2, то непрерывно и второе из отображений, так как

$$x = p_1(x) + p_2(x) \text{ и } \mathbb{I}: \ x \mapsto x \text{ — непрерывно.}$$

- Вспомним из главы 1 (предложение 1.31 (a)): если $z \mapsto f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ — отображение метрического пространства F в $E = E_1 \times E_2$, то для того, чтобы f было непрерывным в точке $z_0 \in F$, необходимо и достаточно, чтобы f_1 и f_2 были непрерывными в точке z_0.
- Возьмём $f_1 = p_1$ и $f_2 = p_2$.

Предложение доказано. □

2.5. Критерий непрерывности полилинейного отображения

Теорема 2.4. **(Критерий непрерывности полилинейного отображения.)** Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — n нормированных пространств, F — нормированное пространство. Пусть

$$u : \ E_1 \times \ldots \times E_n \mapsto F$$

— полилинейное отображение.

Для того, чтобы u было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $C > 0$, что для любой точки $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ имеет место неравенство

$$\|u(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2} \ldots \|x_n\|_{E_n}. \tag{2.10}$$

Д-во.

- Доказательство проведём для случая $n = 2$. Доказательство при произвольном n следует отсюда по индукции.
- **Достаточность.** Пусть выполнено неравенство (2.10). Докажем, что u непрерывно в произвольной точке (c_1, c_2).
- Запишем

$$u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2) = u(x_1 - c_1, x_2) + u(c_1, x_2 - c_2).$$

Отсюда следует, что

$$\|u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2)\|_F$$

$$\leq C(\|x_1 - c_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2} + \|c_1\|_{E_1}\|x_2 - c_2\|_{E_2}). \quad (2.11)$$

- Пусть δ — произвольное, такое что $0 < \delta < 1$, $\|x_1 - c_1\|_{E_1} \leq \delta$ и $\|x_2 - c_2\|_{E_2} \leq \delta$. Значит,

$$\|x_2\|_{E_2} \leq \|c_2\|_{E_2} + 1, \tag{2.12}$$

так как
$\|x_2\|_{E_2} \leq \|x_2 - c_2\|_{E_2} + \|c_2\|_{E_2} \leq \delta + \|c_2\|_{E_2} \leq 1 + \|c_2\|_{E_2}.$

- Подставляя (2.12) в (2.11), получаем

$$\|u(x_1, x_2) - u(c_1, c_2)\|_F \leq C(\|c_1\|_{E_1} + \|c_2\|_{E_2} + 1)\delta.$$

- Правая часть в этом неравенстве произвольно мала в силу произвольной малости δ. Значит u — непрерывное отображение.

Утверждение достаточности доказано.

- **Необходимость.** Теперь докажем, что если u непрерывно, то выполняется неравенство (2.10).
- Сперва заметим, что если φ — линейное отображение в нормированном пространстве E, то непрерывность в произвольной точке $x_0 \in E$ эквивалентна непрерывности в нуле.
- Если u непрерывно в точке $(0,0)$, то в $E_1 \times E_2$ существует такой шар

$$\{B :\ \max\{\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}\} \leq r\},$$

что

$$(x_1, x_2) \in B \quad \Rightarrow \quad \|u(x_1, x_2)\|_F \leq 1.$$

- Пусть теперь (x_1, x_2) — произвольная точка. Допустим, что $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$. Тогда, полагая

$$z_1 = \frac{rx_1}{\|x_1\|_{E_1}}, \quad z_2 = \frac{rx_2}{\|x_2\|_{E_2}},$$

получим $\|z_1\|_{E_1} = \|z_2\|_{E_2} = r$ и, следовательно,

$$\|u(z_1, z_2)\|_F \leq 1. \tag{2.13}$$

- В свою очередь, в силу линейности, имеем

$$u(z_1, z_2) = r^2 \frac{u(x_1, x_2)}{\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}},$$

и значит в силу формулы (2.13) выводим

$$\|u(x_1, x_2)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}, \quad C = \frac{1}{r^2}. \tag{2.14}$$

■ Наконец, если $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$, то $u(x_1, x_2) = 0$ и поэтому неравенство (2.14) (эквивалентное неравенству (2.10)) тоже справедливо.

Теорема 2.4 доказана. □

Предлож. 2.15. Пусть u — непрерывное линейное отображение банахова пространства E в банахово пространство F. Если (x_n) — это сходящийся (или абсолютно сходящийся) ряд в E, то $(u(x_n))$ — это сходящийся (соответственно, абсолютно сходящийся) ряд в F и имеет место равенство

$$\sum_n u(x_n) = u\left(\sum_n x_n\right).$$

Д-во.

- Сходимость ряда $(u(x_n))$ и равенство
$$\sum_n u(x_n) = u\left(\sum_n x_n\right)$$
вытекают из линейности и непрерывности отображения.
- Действительно, для конечного $m \in \mathbb{N}$ имеем
$$\sum_{n=1}^{m} u(x_n) = u\left(\sum_{n=1}^{m} x_n\right)$$
и
$$u\left(\sum_{n=1}^{m} x_n\right) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$$
в силу непрерывности отображения u.

- Из теоремы 2.4 следует, что существует $a > 0$ такое, что
$$\|u(x_n)\|_F \leq a\|x_n\|_E.$$
- Поэтому из предложения 2.7 следует, что ряд $(u(x_n))$ *абсолютно* сходится, если ряд x_n абсолютно сходится.

Предложение 2.15 доказано. $\square$

Напомним:

Предлож. 2.7.

- Ряд с общим членом x_n *положительных чисел* сходится тогда и только тогда, когда для некоторой возрастающей последовательности $\{k_n\} \subset \mathbb{Z}_+$ последовательность $\{s_{k_n}\}$ частичных сумм ограничена сверху.
- Тогда
$$s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_{k_n}.$$

Предлож. 2.16. Пусть E, F и G — три банаховых пространства. Пусть u: $E \times F \mapsto G$ — непрерывное билинейное отображение.

Если (x_n) — абсолютно сходящийся ряд в E и (y_n) — абсолютно сходящийся ряд в F, то семейство $(u(x_m, y_n))$ абсолютно суммируемо и справедливо равенство

$$\sum_{m,n} u(x_m, y_n) = u\left(\sum_n x_n, \sum_n y_n\right).$$

Д-во.

- На основании предложения 2.7 нам достаточно доказать, что для любого $p \in \mathbb{N}$ суммы $\sum\limits_{m,n \le p} \|u(x_m, x_n)\|_G$ в совокупности ограничены.
- В силу теоремы 2.4 имеем, что существует $a > 0$ такое, что

$$\|u(x_m, y_n)\|_G \le a\|x_m\|_E\|y_n\|_F.$$

- Отсюда следует, что

$$\sum_{m,n \le p} \|u(x_m, y_n)\|_G \le a \sum_{m,n \le p} \|x_m\|_E\|y_n\|_F =$$
$$= a\left(\sum_{n=0}^{p} \|x_n\|_E\right)\left(\sum_{n=0}^{p} \|y_n\|_F\right) < \text{const} < +\infty,$$

так как (x_n), (y_n) абсолютно сходятся.

- Итак, абсолютная суммируемость семейства $(u(x_m, y_n))$ *доказана*.
- Далее, из теоремы 2.3 (об ассоциативности сходящихся рядов) и из предложения 2.15 следует, что

$$\sum_{m,n} u(x_m, y_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u(x_m, y_n) \right) = \dots$$

$$\left(\text{по предложению 2.15: } s' = \sum_n y_n,\ s = \sum_m x_m\right)$$

$$\dots = \sum_{m=0}^{\infty} u(x_m, s') = u(s, s').$$

Предложение 2.16 доказано. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №12

2.6. Эквивалентные нормы

2.7. Пространства непрерывных полилинейных отображений

2.8. Замкнутые гиперплоскости и непрерывные линейные формы

2.6. Эквивалентные нормы

Вспомним: всякое нормированное пространство — это метрическое пространство.
Пусть для одного множества E имеем две метрики:

$$d_1(x, y) = \|x - y\|_1 \quad \text{и} \quad d_2(x, y) = \|x - y\|_2.$$

Обозначим: $E_1 := (E, d_1)$ и $E_2 := (E, d_2)$.

Пусть $I\colon x \mapsto x$ $(E_1 \mapsto E_2)$ — это непрерывное, но не взаимнонепрерывное отображение.; Тогда мы говорим, что метрика d_1 *сильнее*, чем метрика d_2 и норма $\|\cdot\|_1$ *сильнее*, чем норма $\|\cdot\|_2$.

Пример 2.4. Рассмотрим

$$E_1 = \left(\mathbb{R},\ d_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = y, \\ 1 & \text{при} \quad x \neq y \end{cases}\right)$$

и

$$E_2 = (\mathbb{R},\ d_2(x,y) = |x-y|).$$

Имеем, что d_1 *сильнее*, чем d_2, так как $d_2(x,y) < d_1(x,y)$ при $d_2(x,y) < \delta < 1$.

Предлож. 2.17. Если I — непрерывное отображение, то найдётся постоянная $a > 0$ такая, что $\|x\|_2 \leq a\|x\|_1$.

Д-во. Это предложение сразу следует из теоремы 2.4 (критерия непрерывности полилинейного отображения). □

Опр. 2.14. Две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ *эквивалентны* (соответственно, две метрики d_1 и d_2 *эквивалентны*), если $I\colon E_1 \mapsto E_2$ — это *гомеоморфное* отображение, то есть, если это *биективное* и *взаимно непрерывное* отображение.

Теорема 2.5. Для того, чтобы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ в *векторном пространстве* E были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две постоянные $a, b > 0$, что

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Дополнение: соответствующие метрики $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ и $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ будут равномерно эквивалентны.

Д-во. Справедливость теоремы 2.5 сразу следует из теоремы 2.4 (критерия непрерывности полилинейного отображения) и из предложения 2.17. $\square$

Пример 2.5. В произведении двух пространств $E_1 \times E_2$ нормы

$$\max\{\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}\}, \quad \|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2},$$

$$\sqrt{\|x_1\|_{E_1}^2 + \|x_2\|_{E_2}^2}$$

эквивалентны друг другу.

Пример 2.6. В векторном пространстве непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций нормы

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad \text{и} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

не эквивалентны.

2.7. Пространства непрерывных полилинейных отображений

Обозначение. Пусть E, F — два нормированных пространства. Через $\mathcal{L}(E, F)$ обозначим множество всех непрерывных линейных отображений E в F.

Замеч. 2.4. $\mathcal{L}(E, F)$ — векторное пространство.

Опр. 2.15. Для каждого отображения $u \in \mathcal{L}(E, F)$ введём *норму*

$$\|u\| = \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : \ \|u(x)\| \leq a\|x\|\}. \tag{2.15}$$

$$\|u\| = \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : \ \|u(x)\| \leq a\|x\|\} \qquad (2.15)$$

Предлож. 2.18. Имеет место соотношение

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|. \qquad (2.16)$$

Д-во.

- По определению 2.15 для любого $a > \|u\|$ и для любого x такого, что $\|x\| \leq 1$, имеем $\|u(x)\| \leq a \cdot 1 = a$.
- Значит, $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \leq \|u\|$. Напишем подробно:

- Действительно, так как a — любое, то для любого x такого, что $\|x\| \leq 1$, имеем

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \equiv \inf\{a\} \quad \Rightarrow$$

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \leq \|u\|. \tag{2.17}$$

- Из (2.17) сразу следует (2.16) при $\|u\| = 0$.
- Пусть $\|u\| > 0$. Тогда для любого b: $0 < b < \|u\|$ найдётся $x \in E$ такое, что

$$\|u(x)\| > b \cdot \|x\|. \tag{2.18}$$

Действительно, если (2.18) не выполняется, то не выполняется (2.15). А этого быть не может по предположению.

- Из неравенства $\|u(x)\| > b \cdot \|x\|$ очевидно следует, что $x \neq 0$.
- Рассмотрим $z := x/\|x\|$. Так как u — линейное отображение, то из (2.18) следует, что

$$\|u(z)\| > b \cdot \|z\| \equiv b.$$

- Так как $\|z\| = 1$, то получаем

$$b \le \sup_{\|x\| \le 1} \|u(x)\|,$$

то есть

$$\|u\| \le \sup_{\|x\| \le 1} \|u(x)\|. \tag{2.19}$$

Здесь мы использовали то, что $\{\|x\| \le 1\}$ — это более широкое множество, чем $\{\|x\| = 1\}$.

- Комбинируя (2.19) и (2.17), получаем (2.16).

Предложение 2.18 доказано. $\square$

Определение 2.15 является корректным. Более точно, справедливо следующее предложение.

Предлож. 2.19. Введённое по формуле (2.15) отображение $x \mapsto \|x\|$ является **нормой** в $\mathcal{L}(E, F)$.

Дополнение: по предложению 2.18, отображение, введённое формулой (2.16) является той же самой нормой, что и в определении 2.15.

Д-во.

- Если $u = 0$, то $\|u\| = 0$ вследствие формулы (2.16).
- Если $\|u\| = 0$, то $u(x) = 0$ при $\|x\| \leq 1$. Поэтому для любого $x \in E$ такого, что $x \neq 0$, имеем

$$u(x) = \|x\| u(x/\|x\|) = 0.$$

- Из (2.16) очевидно следует, что

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|.$$

- Наконец, если $w = u + v$, то

$$\|w(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\|.$$

Отсюда и из (2.16) следует, что

$$\|w\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Итак, все свойства нормы выполняются.
Предложение 2.19 доказано. □

Предлож. 2.20. Если F — полное пространство, то $\mathcal{L}(E, F)$ — это полное пространство.

Д-во.

- Пусть $\{u_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{L}(E, F)$. То есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$ такое число, что для любых $m, n \geq n_0$ имеем $\|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$.
- Из (2.16) следует, что

$$\|u_m(x) - u_n(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall\, x \in E : \ \|x\| \leq 1.$$

Значит $\{u_n(x)\}$ — фундаментальная последовательность в F при любом $x \in \{\|x\| \leq 1\}$.

- Поэтому, эта последовательность сходится к некоторому $v(x) \in F$ при любом $x \in \{\|x\| \leq 1\}$.
- Это утверждение верно и для любого $x \in E$: можно записать $x = \lambda z$, где $\|z\| \leq 1$. Тогда $u_n(x) = \lambda u_n(z)$ сходится к пределу $v(x) = \lambda v(z)$.
- Покажем, что v — линейное отображение. Из равенства

$$u_n(x+y) = u_n(x) + u_n(y)$$

и из того, что отображение $(x, y) \mapsto x + y$ равномерно непрерывно на $E \times E$, следует, что

$$v(x+y) = v(x) + v(y).$$

- Аналогично доказывается, что $v(\lambda x) = \lambda v(x)$.
  Итак, v — линейное отображение.
- Вспомним, что $\|u_m(x) - u_n(x)\| \le \varepsilon$ при $\|x\| \le 1$ при $m, n \ge n_0$.
  Отсюда следует, что
  $$\|v(x) - u_n(x)\| \le \varepsilon \quad \text{при} \quad \|x\| \le 1. \tag{2.20}$$
- В свою очередь, из (2.20) следует, что
  $$\|v\| \le \|u_n\| + \varepsilon. \tag{2.21}$$
- В силу теоремы 2.4 (критерия непрерывности полилинейного отображения) из (2.21) следует, что v — непрерывное отображение.

- Таким образом, $v \in \mathcal{L}(E, F)$.
- Наконец, $\|v - u_n\| \le \varepsilon$ при $n \ge n_0$ в силу (2.16). Значит
$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} v \quad \text{в } \mathcal{L}(E, F).$$

Предложение 2.20 доказано. $\square$

В дальнейшем, когда будет нужно, мы установим ещё несколько свойств пространства $\mathcal{L}(E, F)$.

2.8. Замкнутые гиперплоскости и непрерывные линейные формы

Опр. 2.16. *Линейная форма* в действительном (соответственно, комплексном) векторном пространстве E — это линейное отображение $f\colon E \mapsto \mathbb{R}$ (соответственно, $f\colon E \mapsto \mathbb{C}$).

Опр. 2.16*. Линейные формы очень часто называют *линейными функционалами*.

Опр. 2.17. *Ядром* отображения называется множество $H = f^{-1}(0)$. (В этом определении отображение не обязательно должно быть линейным.)

Замеч. 2.5. В случае, когда f — линейная форма, имеем

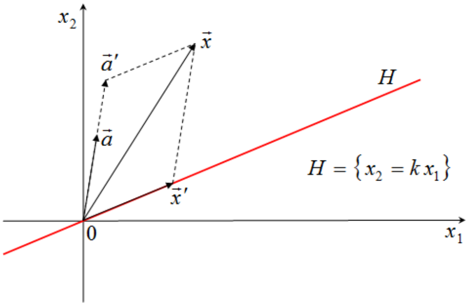
$$E = H + \mathbb{R}a \quad \forall\, a \notin H$$

или

$$E = H + \mathbb{C}a \quad \forall\, a \notin H.$$

В этих формулах знаком «плюс» $(+)$ обозначается *прямая сумма*: то есть, любой элемент $x \in E$ можно записать *единственным* образом в виде суммы элементов $x_1 \in H$ и $x_2 \in \mathbb{R}a$.

Опр. 2.18. Подпространство $H \subset E$, обладающее свойством $E = H + \mathbb{R}a$ (или $E = H + \mathbb{C}a$), называется *гиперплоскостью*.

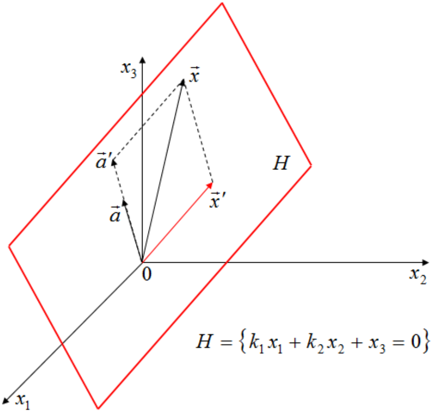


Пример 2.6. Гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$:

$$H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \quad x_2 = k\,x_1, \quad k = \text{const}\,\}.$$

Имеем, если $\vec{a} \notin H$ — заданный вектор, то

$$\forall\,\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \exists\vec{x}' \in H: \quad \vec{x} = \lambda\vec{a} + \vec{x}' \quad (\vec{a}' = \lambda\vec{a}).$$



Пример 2.7. Гиперплоскость в $\mathbb{R}^3$:

$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad k_1 x_1 + k_2 x_2 + x_3 = 0\}$.

Имеем, если $\vec{a} \notin H$ — заданный вектор, то

$\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \exists \vec{x}' \in H: \quad \vec{x} = \lambda\vec{a} + \vec{x}' \quad (\vec{a}' = \lambda\vec{a})$.

Предлож. 2.21. Если H — некоторая гиперплоскость, $a \notin H$ и если для любого $x \in E$ мы напишем

$$x = f(x) \cdot a + y, \tag{2.22}$$

где $f(x)$ — скаляр, $y \in H$, то f — линейная форма и $H = f^{-1}(0) \equiv \operatorname{Ker} f$.

Д-во.

- Имеем
$$\alpha x = \alpha f(x) \cdot a + \alpha y,$$
причём $\alpha y \in H$.
- Это следует из того, что H — подпространство, согласно формуле (2.22) имеем
$$\alpha x = f(\alpha x) \cdot a + y_1.$$

- В силу единственности представления $E = H + \mathbb{R}a$ имеем $y_1 = \alpha y \in H$. Следовательно
$$\alpha f(x) = f(\alpha x) \in a\mathbb{R}.$$
- Аналогично доказывается аддитивность отображения f:
$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2).$$
- Наконец, если $x \in \operatorname{Ker} f$, то есть $f(x) = 0$, то из формулы (2.22) очевидно выводим $x = y \in H$, то есть $\operatorname{Ker} f \subset H$.

Предложение 2.21 доказано. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №13

[2.8.] Замкнутые гиперплоскости и непрерывные линейные формы (окончание)

2.9. Конечномерные нормированные пространства

Лекцию 12 закончили доказательством следующего предложения.

Предлож. 2.21. Если H — некоторая гиперплоскость, $a \notin H$ и если для любого $x \in E$ мы напишем

$$x = f(x) \cdot a + y, \tag{2.22}$$

где $f(x)$ — скаляр, $y \in H$, то f — линейная форма и $H = f^{-1}(0) \equiv \operatorname{Ker} f$.

В связи с предложением 2.21 вводим следующее понятие.

Опр. 2.19. Отношение $f(x) = 0$ называется *уравнением гиперплоскости* H.

Замеч. 2.6. Если f_1 — другая линейная форма, для которой $H = f_1^{-1}(0)$, то $f_1 = \alpha f$, где α — скаляр.

Замеч. 2.7. Гиперплоскость *максимальна*: любое векторное подпространство $L \subset E$ такое, что $H \subset L$, является либо самой гиперплоскостью H, либо пространством E.

Теорема 2.6. **(Критерий замкнутости гиперплоскости.)**

- Пусть H — гиперплоскость с уравнением $f(x) = 0$ в действительном (или комплексном) нормированном пространстве E. Для того, чтобы гиперплоскость H была замкнута в E, необходимо и достаточно, чтобы линейная форма f была непрерывна.
- Пусть H — замкнутая гиперплоскость. Тогда для любого $b \notin H$ пространство E — это прямая сумма (в смысле определения 2.13) гиперплоскости H и одномерного подпространства $D = \mathbb{R} \cdot b$ (соответственно, $D = \mathbb{C} \cdot b$). Отображение $\mathbb{R} \cdot b + H \mapsto E$ — это гомеоморфизм.

Д-во основано на систематическом применении теоремы 2.4 (критерий непрерывности полилинейного отображения). В нашем курсе лекций мы доказательство теоремы 2.6 приводить не будем. (Смотрите приложение к части I настоящей разработки.)

Замеч. 2.8. Гиперплоскость H в нормированном пространстве E замкнута или всюду плотна.

Обоснование: будем использовать предложение 2.11. Напомним:

Предлож. 2.11. Если E — банахово пространство, то любое замкнутое подпространство $F \subset E$ — это банахово пространство. Если $F \subset E$ — банахово пространство, то F замкнуто в E.

По предложению 2.12, $\bar{H} = H$ или $\bar{H} = E$. $\square$

2.9. Конечномерные нормированные пространства

Теорема 2.7. Пусть E — n-мерное действительное (или комплексное) нормированное векторное пространство. Если $(a_1, \dots, a_n)$ — *базис* пространства E, то отображение

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n$$

пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) на E взаимно непрерывно.

Д-во. Доказательство проведём индукцией по n.

■ Пусть $n = 1$. Из предложения 2.3 следует, что

$$\xi \mapsto \xi a_1 \text{ — непрерывное отображение.}$$

Напомним:

Предлож. 2.3. Если E — действительное (соответственно, комплексное) нормированное пространство, то отображение $(x, y) \mapsto x + y$ равномерно непрерывно в $E \times E$, отображение $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ непрерывно в $\mathbb{R} \times E$ (соответственно, в $\mathbb{C} \times E$), отображение $x \mapsto \lambda x$ равномерно непрерывно в E.

- Так как $a_1 \neq 0$ и $\|\xi a_1\| = |\xi| \cdot \|a_1\|$, то

$$|\xi| = \frac{1}{\|a_1\|}\|\xi a_1\| \leq \frac{1}{\|a_1\|}\|\xi a_1\|,$$

а значит по критерию непрерывности полилинейных отображений (теорема 2.4) имеем:

$$\text{отображение } \xi a_1 \mapsto \xi \text{ непрерывно.}$$

- Теорему 2.7 для $n = 1$ доказали.

Индукционный переход

- *Индуктивное предположение*: Пусть теорема 2.7 справедлива для $n-1$. Пусть H — гиперплоскость в пространстве E с базисом $(a_1, \ldots, a_n)$, порождаемая элементами $a_1, \ldots, a_{n-1}$.
- Пояснение: это предположение означает, что

$$H = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i a_i \quad \forall\, \xi_i \in \mathbb{R} \; (\text{или } \forall\, \xi_i \in \mathbb{C}) \right\}.$$

- Важно заметить: H является гиперплоскостью (в смысле определения 2.18), так как H удовлетворяет соотношению

$$E = H + \mathbb{R}\, a_n \quad (\text{или } E = H + \mathbb{C}\, a_n).$$

- Из *индуктивного предположения* следует, что норма в H, индуцированная нормой в E, эквивалентна норме $\max\limits_{1\le i\le n-1}|\xi_i|$, поэтому H — полное пространство.
- Пояснение: имеем,

$$\{(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}\}$$

— полное пространство.
Норма $\max\limits_{1\le i\le n-1}|\xi_i|$ эквивалентна норме в H, поэтому H — полное пространство с индуцированной нормой из E и с нормой $\max\limits_{1\le i\le n-1}|\xi_i|$.

- Так как H полное, то оно замкнуто в E, поскольку, если подпространство F метрического пространства E является полным, то F замкнуто в E.
- Из теоремы 2.6 (о замкнутости гиперплоскости) следует, что отображение

$$f(x): \quad x = (\xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n) \mapsto \xi_n \text{ непрерывно.}$$

- ИТОГ: имеем, что

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \mapsto \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_{n-1} a_{n-1}$$

взаимно непрерывно по предположению, то есть,

$$p_1(x) \in H \text{ непрерывно,}$$

$$p_2(x) \in \mathbb{R}\, a_n \text{ непрерывно.}$$

■ Отсюда вытекает следующее: в силу предложения 2.14 отображение

$$\begin{aligned}(y_1 = p_1(x) &= \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_{n-1} a_{n-1},\\ y_2 = p_2(x) &= a_n \xi_n) \mapsto y_1 + y_2\end{aligned}$$

— это гомеоморфизм. Действительно:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \mapsto \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_{n-1} a_{n-1}$$

— это непрерывное отображение; $\xi_n \mapsto \xi_n a_n$ — это тоже непрерывное отображение.

$\square$

Предлож. 2.14. Отображение $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$ линейно, биективно и непрерывно. Отображение $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$ — это гомеоморфизм $F_1 \times F_2$ на E. $\Leftrightarrow$ *Одно из* линейных отображений p_1, p_2 непрерывно.

Теорема 2.8. Пусть V — замкнутое подпространство и W — конечномерное подпространство нормированного пространства E. Тогда $V+W$ замкнуто в E. В частности, любое конечномерное подпространство замкнуто в E.

Д-во. Доказательство проводим по индукции по размерности пространства W.

- Пусть $n=1$. Пусть $W=\mathbb{R}\,a$ (или $W=\mathbb{C}\,a$).
- Рассмотрим случай, когда $a \in V$. Тогда $V+W=V$. Так как V замкнуто, то доказательство в этом случае завершается.

- Если $a \notin V$, то любой элемент $x \in V + W$ можно записать в виде

$$x = f(x)a + y, \text{ где } y \in V.$$

- Так как V — замкнутая гиперплоскость в $V + W$, то в силу теоремы 2.6 (о замкнутости гиперплоскости) f — это непрерывная форма в $V + W$.
- Пусть (x_n) — последовательность точек подпространства $V + W$, сходящаяся к некоторому $b \in E$:

$$x_n \to b.$$

■ Запишем:

$$x_n = f(x_n)a + y_n.$$

В силу критерия непрерывности полилинейных отображений имеем: $\{f(x_n)\}$ — последовательность Коши, так как имеет место следующее:

$$\{x_n\} \text{ сходится } \Rightarrow$$

$$\{x_n\} \text{ — последовательность Коши } \Rightarrow$$

$$\{f(x_n)\} \text{ — последов-сть Коши в } \mathbb{R} \text{ (или в } \mathbb{C}).$$

- Значит,
$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda.$$
- Тогда,
$$y_n = x_n - f(x_n)\,a \to b - \lambda\,a.$$
- Вспомним, что V замкнуто, значит
$$\lim_{n\to\infty} y_n \in V \quad \Rightarrow \quad b \in V + W.$$
- Далее, индукционный переход совершаем также, как в теореме 2.7.

□

Теорема 2.9. **(Теорема Рисса: критерий конечномерности нормированного пространства.)** Локально компактное нормированное пространство E конечномерно.

Напомним: Определение 1.38: метрическое пространство E называется локально компактным, если у любой точки $x \in E$ в E существует компактная окрестность.

Д-во.

- Заменяя, если требуется, норму пространства E эквивалентной нормой, можем считать что шар $\bar{B}$: $\{\|x\| \leq 1\}$ компактен.
- Пояснение: По определению, существует окрестность, такая, что существует шар, вложенный в окрестность. Посредством гомотетии превращаем шар в единичный. При этом, нормы остаются эквивалентными.

- По *критерию компактности* (теорема 1.5) существует такое конечное множество

$$\{a_i\} \quad (1 \le i \le n), \text{ что } \bar{B} = \{\|x\| \le 1\} \subset \bigcup_i B(a_i, 1/2).$$

- Пусть V — конечномерное подпространство, порождённое точками $\{a_i\}$. Докажем, что $E = V$.
- Доказательство проведём методом от противного. *Предположение.* Пусть существует $x \in E$ такая, что $x \notin V$. В силу теоремы 2.8 имеем, что V *замкнуто*, так как оно конечномерно.

- Поэтому $d(x, V) = \alpha > 0$.
- По определению расстояния от точки до множества имеем:

$$\exists\, y \in V: \quad \alpha \le \|x - y\| \le \frac{3\alpha}{2}. \tag{2.23}$$

- Положим $z = \dfrac{x - y}{\|x - y\|}$.
- Так как $\|z\| = 1$, то $z \in \bar{B}$.
- Так как шар $\bar{B}$ компактен, то

$$\exists\, i \in \mathbb{N}: \quad \|z - a_i\| \le \frac{1}{2}.$$

- Запишем

$$x = y + \|x-y\|z = y + \|x-y\|a_i + \|x-y\|(z-a_i).$$

- Заметим, что $y + \|x-y\|a_i \in V$, так как $y \in V$ и $\|x-y\|a_i \in V$.
- Поэтому по определению расстояния $d(x, V)$ мы имеем, что

$$\|x-y\| \cdot \|z-a_i\| \geq \alpha,$$

значит

$$\|x-y\| \geq 2\alpha, \tag{2.24}$$

так как $\|z-a_i\| \leq \dfrac{1}{2}$.

- Неравенство (2.24) противоречит неравенству (2.23). Значит *предположение* (о том, что $\exists\, x \notin V$) неверно.

Теорема Рисса доказана. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №14

2.10. Сепарабельные нормированные пространства

ГЛАВА 3. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Эрмитовы формы

3.2. Положительные эрмитовы формы

2.10. Сепарабельные нормированные пространства

Теорема 2.10.

(i) Если в нормированном пространстве E существует *тотальная* последовательность, то E сепарабельно.

(ii) В любом сепарабельном нормированном пространстве E существует *тотальная* последовательность, состоящая из линейно независимых векторов.

Напомним: Множество A в нормированном пространстве E *тотально*, если конечные линейные комбинации векторов из A образуют подпространство, *плотное* в E.

Д-во. Докажем сначала утверждение (i) теоремы.

- Пусть (a_k) — тотальная последовательность. Можем считать, что все a_k не равны нулю.
- По определению тотального множества имеем, что множество

$$L = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k a_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}), \quad N = 1, 2, \ldots \right\}$$

плотно в E.
- Пусть D — множество всех конечных линейных комбинаций

$$r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n$$

с *рациональными* коэффициентами. (В комплексном случае рассматриваем $r_k = \alpha_k + i\beta_k$, где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}$.)
- Имеем, что D — счётное множество, так как $\mathbb{Q}$ — счётное множество.

- Остаётся доказать, что D — плотное множество в L.
- Имеем,

$$\|(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) - (r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n)\|_E \le \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - r_j| \cdot \|a_j\|_E.$$

- Так как множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, то существуют $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ такие, что

$$|\lambda_j - r_j| \le \frac{\varepsilon}{n\|a_j\|_E} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

- Значит
$$\|(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) - (r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n)\|_E \leq \varepsilon.$$
- Итак,
$$D \text{ — это плотное множество в } L,$$
$$L \text{ — это плотное множество в } E.$$
Значит,
$$D \text{ — это плотное множество в } E.$$
Утверждение (i) теоремы доказано.
- Теперь докажем утверждение (ii) теоремы.

- Пусть E сепарабельно.
Пусть E бесконечномерно.
Пусть (a_n) — бесконечная всюду плотная последовательность векторов пространства E.
- Наблюдение: если E конечномерно, то доказательство очевидно, так как базис в конечномерном пространстве — это тотальное множество.
- По индукции построим подпоследовательность (a_{k_n}) такую, что она состоит из линейно независимых векторов и что a_m — это линейная комбинация векторов $a_{k_1}, \ldots, a_{k_n}$ для любого $m \leq k_n$.

- Для этого возьмём в качестве k_1 первый индекс, при котором $a_n \neq 0$.
- Далее в качестве k_2 возьмём наименьший индекс из $[k_1 + 1, \infty)$, при котором a_{k_1} и a_{k_2} линейно независимы.
- Продолжая процесс, в качестве k_{n+1} возьмём наименьший индекс $m > k_n$, при котором a_m *не* принадлежит подпространству V_n, порождённому векторами $a_{k_1}, \ldots, a_{k_n}$.
- Заметим: такой вектор $a_{k_{n+1}}$ существует, потому что пространство E бесконечномерно.
- Наконец заметим: построенная подпоследовательность (a_{k_n}) — это тотальная последовательность в E.

Теорема 2.10 доказана. $\square$

ГЛАВА 3. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Эрмитовы формы

Опр. 3.1. *Эрмитова форма* в действительном (или комплексном) векторном пространстве E — это отображение $f\colon E \times E \mapsto \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), обладающее следующими свойствами:

(I) $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$,

(II) $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$,

(III) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$,

(IV) $f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x, y)$,

(V) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$.

Замеч. 3.1.

- Свойства (II) и (IV) вытекают из свойств (I), (III) и (V).
- Из (V) вытекает, что $f(x, x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in E$.
- Из (V) также вытекает, что $f(x, y) = f(y, x)$ в случае, когда E — действительное векторное пространство.

Эрмитовы формы в конечномерных системах

Рассмотрим конечные системы

$$(x_i) \subset E, \quad (y_j) \subset E,$$

$$(\alpha_i) \subset \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}), \quad (\beta_j) \subset \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}),$$

$$i \in [1, n],\ j \in [1, m].$$

По определению эрмитовой формы имеем

$$f\left(\sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \beta_j y_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\beta}_j f(x_i, y_j). \tag{3.1}$$

Предлож. 3.1. Если E — конечномерное векторное пространство с базисом (a_k), то эрмитова форма f полностью определяется её значениями

$$\alpha_{ij} = f(a_i, a_j), \tag{3.2}$$

причём $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$.

Д-во. Действительно, для $x = \sum_i \xi_i a_i$, $y = \sum_j \eta_j a_j$ имеем

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \alpha_{ij} \xi_i \bar{\eta}_j.$$

□

Пример 3.1. Пусть $a(x, y)$ — действительная непрерывная функция, D — относительно компактное открытое множество в $\mathbb{R}^2$, E — действительное (или комплексное) векторное пространство всех ограниченных непрерывных функций на D. Тогда отображение

$$(u, v) \mapsto f(u, v) = \iint\limits_D a(x, y)u(x, y)\overline{v(x, y)}dxdy$$

является эрмитовой формой в E.

Ортогональность

Опр. 3.2. Пара векторов x, y векторного пространства E *ортогональна относительно эрмитовой формы f в E*, если $f(x, y) = 0$.

Опр. 3.3. Если $f(x, x) = 0$, то вектор $x \in E$ называется *изотропным относительно f*.

Замеч. 3.2. Для любого множества $M \subset E$ множество векторов $y \in E$, ортогональных *всем* векторам $x \in M$, — это векторное подпространство пространства E.

Опр. 3.4. Это подпространство называется *ортогональным* множеству M относительно f.

Опр. 3.5. Если существует вектор $a \neq 0$ такой, что $f(a,x)=0$ $\forall\, x \in E$ (пишем часто: $a \perp E$), то говорим, что форма f *вырождается*.

Замеч. 3.3. (О конечномерных пространствах.) Среди эрмитовых форм f в конечномерном пространстве E не вырождаются те эрмитовы формы, для которых матрица $\mathbb{A}=(\alpha_{ij})$ имеет обратную матрицу $\mathbb{A}^{-1}$. Здесь $\alpha_{ij}=f(a_i,a_j)$, где (a_k) — это базис в E.

3.2. Положительные эрмитовы формы

Опр. 3.6. Эрмитова форма f в векторном пространстве E *положительна*, если $f(x,x) \geq 0$ для любого $x \in E$.

Предлож. 3.2. **(Неравенство Коши–Шварца.)** Если f — *положительная эрмитова форма*, то

$$|f(x,y)|^2 \leq f(x,x)f(y,y) \quad \forall\, x,y \in E.$$

Д-во.

- Положим $a = f(x,x)$, $b = f(x,y)$, $c = f(y,y)$. Имеем, $a, c \geq 0$.
- Предположим, что $c \neq 0$. Запишем

$$f(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}).$$

Отсюда выводим $a + \bar{b}\lambda + b\bar{\lambda} + c\lambda\bar{\lambda} \geq 0$.

- Подставляем $\lambda = -b/c$ и получаем нужное неравенство:

$$a - \frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{c} = a - \frac{b^2}{c} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ ac \geq b^2.$$

- Случай $a \neq 0$, $c = 0$ рассматривается аналогично.
- Наконец, если $a = c = 0$, то подставим в неравенство

$$a + \bar{b}\lambda + b\bar{\lambda} + c\lambda\bar{\lambda} \geq 0 \quad (\Leftrightarrow \quad \bar{b}\lambda + b\bar{\lambda} \geq 0)$$

значение $\lambda = -b$.
- Отсюда следует

$$-2b^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 \leq 0 \quad \Rightarrow b = 0,$$

что завершает доказательство. $\square$

Следствие 3.1.

Положительная эрмитова форма f в E не вырождается

$$\Leftrightarrow$$

$$f(x,x) > 0\ \forall\, x \in E,\ x \neq 0.$$

(Иными словами, не существует нетривиального изотропного вектора относительно f.)

Д-во.

- $\Rightarrow$ Если $f(x,x) = 0$, то $f(x,y) = 0\ \forall\, y \in E$ по неравенству Коши–Шварца.
- $\Leftarrow$ Если $f(x,y) = 0\ \forall\, y \in E$, то $f(x,x) = 0$. А так как f — невырожденная эрмитова форма, то $x = 0$. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №15

[3.2.] Положительные эрмитовы формы [окончание]

3.3. Ортогональная проекция на полное подпространство [начало]

Вспомним:

Опр. 3.6. Эрмитова форма f в векторном пространстве E *положительна*, если $f(x,x) \geq 0$ для любого $x \in E$.

Предлож. 3.2. **(Неравенство Коши–Шварца.)** Если f — *положительная эрмитова форма*, то

$$|f(x,y)|^2 \leq f(x,x)f(y,y) \quad \forall\, x, y \in E.$$

Предлож. 3.3. **(Неравенство Минковского для положительных эрмитовых форм.)** Если f — положительная эрмитова форма, то

$$\sqrt{f(x+y,x+y)} \leq \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)} \quad \forall\, x,y \in E.$$

Д-во.

- Так как

$$f(x+y,x+y) = f(x,x) + f(y,y) + f(x,y) + \overline{f(x,y)},$$

то достаточно показать, что

$$f(x,y) + \overline{f(x,y)} \leq 2\sqrt{f(x,x)f(y,y)}. \tag{3.3}$$

- Действительно, в этом случае имеем

$$f(x+y,x+y) \leq (\sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)})^2.$$

- Заметим:

$$f(x,y)+\overline{f(x,y)}=2\,\mathrm{Re}\,f(x,y).$$

- По неравенству Коши–Шварца получаем:

$$(\mathrm{Re}\,f(x,y))^2\le|f(x,y)|^2\le f(x,x)f(y,y). \tag{3.4}$$

- Комбинируем оценки (3.3) и (3.4) и этим завершаем доказательство. $\square$

Следствие 3.2. **(Следствие предложений 3.2, 3.3.)**
Если f — невырожденная положительная эрмитова форма, то $\sqrt{f(x,x)}$ — это *норма в* E.

Д-во.

- Действительно, в силу неравенства Минковского для функционала $x \mapsto \sqrt{f(x,x)}$ выполнено неравенство треугольника, как для нормы.
- Очевидно также, что

$$\sqrt{f(x,x)} \geq 0 \quad \forall\, x \in E,$$

так как f — положительно,

и что

$$\sqrt{f(\lambda x, \lambda x)} = |\lambda| \sqrt{f(x,x)} \quad \forall\, x \in E,$$

так как f — билинейно.

Опр. 3.7. *Предгильбертовым пространством* называется векторное пространство E, снабжённое положительной эрмитовой формой f.
Это пространство будем считать нормированным пространством с нормой

$$\|x\| = \sqrt{f(x,x)}.$$

Опр. 3.8. Если f — невырожденная форма, то $f(x,y) \equiv x \cdot y$ называем *скалярным произведением*.

Опр. 3.9. *Гильбертово пространство* — это *полное предгильбертово пространство*.

Предлож. 3.4. Если E — действительное *предгильбертово* пространство, то отображение $(x, y) \mapsto x \cdot y$ — непрерывная билинейная форма в $E \times E$.

Д-во. В силу неравенства Коши–Шварца и критерия непрерывности полилинейных отображений имеем

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

□

Предлож. 3.5. **(Теорема Пифагора.)** Если x ортогонально y в предгильбертовом пространстве E, то

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Д-во следует прямо из определений. □

Предлож. 3.6. Любое конечномерное предгильбертово пространство — это гильбертово пространство.

Д-во очевидно. $\square$

Пример 3.2. Если $a > 0$ на D, то эрмитова форма

$$(f, g) \mapsto \iint_D a(x, y) f(x, y) \overline{g(x, y)} dxdy$$

— скалярное произведение.

3.3. Ортогональная проекция на полное подпространство

Теорема 3.1. Пусть E — предгильбертово пространство, F — полное векторное подпространство E ($F \subset E$). Тогда

(1) $\forall x \in E \quad \exists!\, y \overset{def}{=} P_F(x) \in F\colon \|x - y\| = d(x, F)$;

(2) точка $y = P_F(x)$ является единственной точкой $y_*(= y) \in F$, для которой $(x - y_*) \perp F$;

(3) отображение $x \mapsto P_F(x)\colon E \mapsto F$ линейно, непрерывно и если $F \neq \{0\}$, то $\|P_F\| = 1$.

(4) Его ядро $F' = P_F^{-1}(0)$ есть подпространство, ортогональное F, и E — это топологическая прямая сумма F и F' $\quad (E = F + F')$.

(5) Наконец, $F \perp F'$.

Опр. 3.10. Линейное отображение P_F называется *ортогональной проекцией* пространства E на F, а его ядро F' — *ортогональным* дополнением подпространства F в E.

Д-во теоремы 3.1.

- **(1)** Пусть $\alpha = d(x; F)$. По определению расстояния между точкой и множеством существует $\{y_n\} \subset F$:

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \alpha.$$

- Докажем, что $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность. По определению скалярного произведения (эрмитовой формы) имеем

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \tag{3.5}$$

Это тождество называется *тождеством параллелограмма*.

- Отсюда, перегруппируя слагаемые в выражении (3.5) с $u = y_m$, $v = y_n$, получаем

$$\|y_m - y_n\|^2 =$$

$$= 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2) - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\right\|^2. \tag{3.6}$$

- Так как F — векторное пространство, то $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in F$. Отсюда

$$\left\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_n)\right\|^2 \geq \alpha^2. \tag{3.7}$$

- Теперь зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall\, n \geq n_0$ по определению $d(x, F) \Rightarrow$

$$\|x - y_n\|^2 \leq \alpha^2 + \varepsilon. \tag{3.8}$$

- Отсюда в силу (3.6) и (3.7) выводим, что для любых $n, m \geq n_0$ выполняется неравенство

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2(\underbrace{\alpha^2 + \varepsilon + \alpha^2 + \varepsilon}_{\text{по неравенству (4)}}) - \underbrace{4\alpha^2}_{\text{по (3)}} = 4\varepsilon. \tag{3.9}$$

- Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то из (3.9) следует, что

$$\{y_n\} \text{ — фундаментальна.}$$

- Так как F — *полное* векторное пространство, то существует $y \in F$ такое, что $y_n \to y$. Таким образом,

$$d(x, F) = \|x - y\|.$$

Итак, существование точки $y = P_F(x)$ доказано.

- Приступим к доказательству единственности такой точки.
- Предположим, что $y' \in F$ такая, что $\|x - y'\| = d(x, F)$. То есть y' — это тоже проекция x на F, как и y.

- Тем же методом, как выводили формулы (3.6)–(3.9), получаем следующие формулы.
- Сначала с помощью тождества параллелограмма (3.5) выводим

$$\|y - y'\|^2 = 4\alpha^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y + y')\right\|^2. \qquad (3.10)$$

- Далее, для y' и y справедливо неравенство вида неравенства (3.7):

$$\left\|x - \frac{1}{2}(y + y')\right\|^2 \geq \alpha^2. \qquad (3.11)$$

- Комбинируя (3.10) и (3.11), выводим

$$\|y - y'\| = 4\alpha^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y + y')\right\|^2 \leq 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0,$$

то есть $y = y'$.

Итак, единственность точки $y = P_F(x)$ доказана.

Перейдём к доказательству утверждения **(2)** теоремы 3.1.

Теорема 3.1 (2) Точка $y = P_F(x)$ является единственной точкой $y_*(= y) \in F$, для которой $(x - y_*) \perp F$.

- Пусть $z \neq 0$ — произвольная точка подпространства F. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$ выполняется неравенство

$$\|x - (y + \lambda z)\|^2 > \alpha^2. \tag{3.12}$$

Здесь $\alpha = d(x, F) = \|x - y\|$.

- Замечание: это неравенство *строгое*, то есть имеем "$>$", а не "$\geq$", так как проекция y — *единственная*.

- Подставим в (3.12) выражение

$$\alpha^2 = \|x - y\|^2 = (x - y) \cdot (x - y)$$

и запишем (3.12) тогда в виде

$$2\lambda \mathrm{Re}\,((x - y) \cdot z) + \lambda^2 \|z\|^2 > 0.$$

- Заметим, что в случае $\mathrm{Re}\,((x - y) \cdot z) \neq 0$ можно подобрать λ так, что $\|z\| < 0$. Но такого быть не может. Значит $\mathrm{Re}\,((x - y) \cdot z) = 0$.
- Значит, если E — вещественное пространство, то $(x - y) \cdot z = 0$, то есть $x - y \perp z$.

- Если E — комплексное пространство, то вместо z в (3.12) подставляем iz. Аналогично предыдущему, получаем
$$\operatorname{Im}((x-y)\cdot z)=0.$$
- Значит в обоих случаях (вещественном и комплексном) выводим, что
$$(x-y)\cdot z=0 \quad \forall z\in F. \tag{3.13}$$

Итак, свойство ортогональности для $y=P_F(x)$ доказано.

Теперь докажем, что точка $y \in F$, удовлетворяющая свойству ортогональности (3.13), единственна.

- Пусть $y' \in F$ такая точка, что $x - y' \perp F$. Здесь x — это произвольный фиксированный элемент из E.
- Тогда по теореме Пифагора имеем

$$\|x - (y' + z)\|^2 = \|x - y'\|^2 + \|z\|^2 \quad \forall\, z \in F,\ z \neq 0.$$

- В этом равенстве возьмём $z = y - y' \in F$. Получим

$$\|x - y\|^2 = \|x - y'\|^2 + \|y - y'\|^2.$$

Заметим, что

$$\|x - y'\| > \|x - y\| = \alpha = d(x, F)$$

по определению расстояния и в силу единственности $y = P_F(x)$ (по пункту (1) теоремы 3.1). Таким образом выводим, что $\|y - y'\| < 0$. Но такого быть не может, значит

$$y = y'.$$

Свойство единственности точки $y = P_F(x)$, удовлетворяющей свойству ортогональности (3.13), доказано.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №16

[3.3.] Ортогональная проекция на полное подпространство (окончание)

3.4. Теорема о представлении функционала в гильбертовом пространстве (теорема Рисса)

Вспомним: Теорема 3.1 (1) Пусть E — предгильбертово пространство, F — полное векторное подпространство E ($F \subset E$).
Тогда

$$\forall x \in E \quad \exists y \overset{def}{=} P_F(x) \in F : \quad \|x - y\| = d(x, F).$$

Ещё вспомним, что точка $y = P_F(x)$ называется ортогональной проекцией предгильбертова пространства E на полное векторное подпространство F.

Перейдём к доказательству утверждения **(3)** теоремы 3.1.

Теорема 3.1 (3)

Отображение $x \mapsto P_F(x)\colon E \mapsto F$ линейно, непрерывно и если $F \neq \{0\}$, то $\|P_F\| = 1$.

- Убедимся, что $P_F\colon x \mapsto y$ — отображение из E в F, линейно.
- В самом деле, если $x - y$, $x' - y' \perp F$, то ему ортогональны и векторы $\lambda x - \lambda y$ и $(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y')$.
- Так как $y + y' \in F$ и $\lambda y \in F$, то это показывает, что

$$y + y' = P_F(x + x') \text{ и } \lambda y = P_F(\lambda x)$$

в силу единственности в утверждениях (1), (2) теоремы 3.1 (т.к. по $x + x'$ находим единственное $y + y'$).

- Остаётся заметить, что $y = P_F(x)$, $y' = P_F(x')$ и $\lambda y = \lambda P_F(x)$.
- Итак, свойство линейности для $P_F(x)$ доказано.
- Теперь проверим, что P_F *непрерывно и имеет норму, равную единице, в том случае, когда* $F \neq \{0\}$.
- По теореме Пифагора имеем

$$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|P_F(x)\| \leq \|x\|.$$

- В силу теоремы 2.4 (критерий непрерывности полилинейных отображений) P_F *непрерывно* и по определению нормы отображения имеем, что
$$\|P_F\| \leq 1.$$
- Наконец, так как $P_F(x) = x \; \forall \, x \in F$, то в точности получаем
$$\|P_F\| = 1.$$
- Итак, утверждение (3) теоремы 3.1 доказано.

Теорема 3.1 (4) Ядро проектора P_F, то есть множество $F' = P_F^{-1}(0)$ — это подпространство, ортогональное F, и E — это топологическая прямая сумма F и F' $\quad (E = F + F')$.

- Из определения отображения P_F и из определения ортогональности следует, что ядро $F' \stackrel{def}{=} P_F^{-1}(0)$ состоит из векторов $x \in E$, ортогональных F.
- Действительно:

$$P_F(x) = 0 (= y) \ \Rightarrow \ x - y \perp F \ \Rightarrow \ x \perp F.$$

- Наконец, докажем утверждение о том, что E — это топологическая прямая сумма F и F'.
- Имеем для любого $x \in E$, что

$$x = P_F(x) + (x - P_F(x)).$$

Замечаем, что $P_F(x) \in F$ и что $x - P_F(x) \in F'$, так как

$$P_F(x - P_F(x)) = 0. \tag{3.14}$$

- Таким образом, $E = F + F'$.
- Кроме этого замечаем, что если $x \in F \cap F'$, то x — изотропный.
- Действительно, $x \cdot x = x \cdot P_F(x) = 0$, так как $x \in F' = \operatorname{Ker} P_F$. Следовательно, $x = 0$.

- Ещё замечаем, что

$$P_F(x) \cdot P_F(x) = x \cdot x \quad \forall\, x \in F.$$

Таким образом, $P_F(x) = 0$ для изотропного вектора.

- Далее, поскольку отображение $x \mapsto P_F(x)$ непрерывно в силу утверждения (3), то по определению прямой (топологической) суммы имеем, что F и F' дают E, как прямую сумму.

Итак, утверждение (4) теоремы 3.1 доказано.

Теорема 3.1 (5) $F \perp F'$.

- Если $x \in E$ ортогонален F', то, в частности,

$$x \cdot (x - P_F(x)) = 0, \tag{3.15}$$

так как $x - P_F(x) \in F'$ (см. равенство (3.14)).

- Но мы имеем также, что

$$P_F(x) \cdot (x - P_F(x)) = 0, \tag{3.16}$$

так как $P_F(x) \in F$, $x - P_F(x) \in F'$.

- Комбинируя неравенства (3.15) и (3.16), получаем

$$\|x - P_F(x)\|^2 = 0.$$

- Из
$$\|x - P_F(x)\|^2 = 0$$
следует, что $x = P_F(x) \in F$. Иными словами, любой вектор из E, ортогональный F', лежит в F.
- Последнее включение даёт, что $F \perp F'$.

Доказательство теоремы 3.1 завершено. $\square$

Замеч. 3.4. (о тождестве параллелограмма). Пусть E — действительное нормированное пространство, в котором для любых $x, y \in E$ имеет место *тождество параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Тогда

$$f(x,y) := \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$

— это положительная невырожденная эрмитова форма в E.

3.4. Теорема о представлении функционала в гильбертовом пространстве (теорема Рисса)

Теорема 3.2. **(Теорема Рисса о представлении.)**

- Пусть E — предгильбертово пространство. Тогда для любого $a \in E$ отображение $x \mapsto x \cdot a$ — это непрерывная линейная форма с нормой $\|a\|$.
- Справедливо обратное утверждение: если E — гильбертово пространство, то для любой непрерывной формы (функционала) u: $E \mapsto \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ существует единственный такой вектор $a \in E$, что $u(x) = x \cdot a \quad \forall x \in E$.

Д-во.

- По неравенству Коши–Шварца имеем
$$|x \cdot a| \le \|a\| \cdot \|x\|.$$
- По критерию непрерывности полилинейных отображений (теорема 2.4) имеем, что отображение $x \mapsto x \cdot a$ непрерывно и имеет норму, меньшую либо равную, чем $\|a\|$.
- С другой стороны, если $\|a\| \ne 0$, то для $x_0 = \dfrac{a}{\|a\|}$ имеем $x_0 \cdot a = \|a\|$.
- Так как $\|x_0\| = 1$, то получаем, что норма больше либо равна $\|a\|$.

Итак, первая часть теоремы 3.2 доказана.

- Теперь, пусть E — гильбертово пространство. В случае, когда $u \equiv 0$ ($u \in E^*$), очевидно имеем, что существует $a \in E$ ($a = 0$).
- Поэтому, можно предположить, что $u \neq 0$.
- Тогда $H = u^{-1}(0) \equiv \operatorname{Ker} u$ — это замкнутая гиперплоскость в E (по теореме 2.6). То есть, $u(x) = 0$ — это уравнение гиперплоскости H. Вспомним: ортогональное дополнение H' гиперплоскости H — это одномерное подпространство.

- Пусть $b \neq 0$ — точка из H'. По утверждению (4) теоремы 3.1 гиперплоскость H ортогональна элементу (точке) b. Другими словами,

$$x \cdot b = 0 \quad \forall x \in H$$

— это тоже уравнение гиперплоскости H.
- Вспомним, что два уравнения гиперплоскости пропорциональны (см. замеч. перед формулировкой теоремы 2.6). Поэтому найдётся скаляр λ такой, что

$$\forall x \in E : \quad u(x) = \lambda x \cdot b.$$

- Остаётся взять $a = \bar{\lambda} b$. Тогда получим искомое представление:

$$u(x) = x \cdot a.$$

- *Единственность* a следует из того, что $x \cdot y$ невырождено.
- Действительно, если предположить, что

$$u(x) = x \cdot a = x \cdot a',$$

то просто возьмём

$$x = \bar{a} - \bar{a}' \quad \Rightarrow \quad u(\bar{a} - \bar{a}') - u(\bar{a} - \bar{a}') = 0,$$

но при этом,

$$u(\bar{a} - \bar{a}') - u(\bar{a} - \bar{a}') = |a - a'|^2.$$

Отсюда: $a = a'$.

Доказательство теоремы Рисса завершено. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №17

3.5. Гильбертова сумма гильбертовых пространств

3.5. Гильбертова сумма гильбертовых пространств

Пусть $\{E_n\}$ — последовательность гильбертовых пространств, $x_n \cdot y_n$ — скалярное произведение в E_n.

Пусть E — множество всех таких последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, что $x_n \in E_n$ при каждом n, и ряд с общим членом $\|x_n\|^2_{E_n}$ *сходится*.

Определим на E структуру векторного пространства.

Ясно, что если

$$x = (x_1, x_2 \ldots) \equiv (x_n) \in E,$$

то

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) \equiv (\lambda x_n) \in E.$$

Если $(x_n), (y_n) \in E$, то $(x_n + y_n) \in E$, так как из тождества параллелограмма следует

$$\|x_n + y_n\|_{E_n}^2 \le 2(\|x_n\|_{E_n}^2 + \|y_n\|_{E_n}^2).$$

Напомним тождество параллелограмма:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

В силу сделанных наблюдений полагаем *по определению*

$$x + y = (x_n + y_n), \quad \lambda x = (\lambda x_n).$$

Введём в векторном пространстве E норму и скалярное произведение.

По неравенству Коши–Шварца имеем

$$|x_n \cdot y_n| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n\| \leq \frac{1}{2}(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2).$$

Поэтому, если $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in E$, то ряд с общим членом $(x_n \cdot y_n)$ сходится абсолютно.

В силу этого полагаем *по определению*

$$x \cdot y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n.$$

Легко проверяется, что отображение $(x, y) \mapsto x \cdot y$ есть эрмитова форма в E. Кроме того,

$$x \cdot x = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

Значит $x \cdot y$ — положительная невырожденная эрмитова форма. Она определяет на E *структуру предгильбертова пространства*.

Предлож. 3.7. E — полное пространство. Таким образом, E — гильбертово пространство.

Д-во.

- Пусть $(x^{(m)}) = (x_n^{(m)})$ — последовательность Коши в E. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что при $p, q \geq m_0$ имеем
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\|^2 \leq \varepsilon. \tag{3.17}$$
- Отсюда следует, что при каждом фиксированном n выполняется неравенство
$$\|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\|^2 \leq \varepsilon,$$
поэтому последовательность $(x_n^{(m)})_{m=1,2,\ldots}$ является в E_n последовательностью Коши.

- Так как E_n гильбертово, то существует некоторый вектор $y_n \in E_n$ такой, что

$$x_n^{(m)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} y_n.$$

- Из неравенства (3.17) также следует, что для $\forall\, N \in \mathbb{N}$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ так, что при $p, q \in m_0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{N} \|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\|^2 \leq \varepsilon. \tag{3.18}$$

- Так как $x_n^{(q)} \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} y_n$ и норма является непрерывным отображением, то из неравенства (3.18) при переходе к пределу при $q \to \infty$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{N} \|x_n^{(p)} - y_n\|^2 \le \varepsilon. \tag{3.19}$$

- Наконец, так как N — произвольно, то из (3.19) выводим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^{(p)} - y_n\|^2 \le \varepsilon \quad \forall\, p \ge m_0.$$

- Это доказывает, что $(x_n^{(p)} - y_n) \in E$ и что $\|x^{(p)} - y\|_E^2 \le \varepsilon$ при $p \ge m_0$.
- Значит,
$$x^{(m)} \underset{m\to\infty}{\to} y \text{ в } E.$$
(Здесь, $y = (y_n)$.)

$\square$

Опр. 3.11. Введённое выше пространство E называется *гильбертовой суммой* последовательности гильбертовых пространств (E_n).

Сопоставим элементу $x_n \in E_n$ элемент $j_n(x_n) \in E$ по закону

$$j_n(x_n) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ нулей}}, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Опр. 3.12. Отображение $j_n\colon E_n \mapsto E$ называется *естественным вложением* E_n в E.

Замеч. 3.5. j_n — это изоморфизм E_n на $E_n' \subset E$, где E_n' — это множество последовательностей вида

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ нулей}}, x_n, 0, 0, \ldots),$$

то есть последовательностей, все члены которых равны нулю, кроме n-го члена.

Предлож. 3.8.

(1) $E'_m \perp E'_n$ при $n \neq m$,

(2) алгебраическая сумма подпространств E'_n *плотна* в E.

Д-во.

- Доказательство утверждения (1) элементарно.
- Для любой последовательности $x = (x_n) \in E$ ряд с общим членом $(j_n(x_n))$ сходится в E и имеем

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} j_n(x_n).$$

Это и означает плотность алгебраической суммы E'_n в E.

$\square$

Справедливо обратное утверждение.

Теорема 3.3. **(Об изоморфизме для гильбертовой суммы гильбертовых пространств.)** Пусть F — гильбертово пространство и (F_n) — это такая последовательность замкнутых его подпространств, что

(1) $F_m \perp F_n$ при $m \neq n$,

(2) совокупность конечных алгебраических сумм H подпространств F_n плотна в F.

Тогда, если E — гильбертова сумма подпространств F_n, то существует единственный изоморфизм j пространства F на E, совпадающий с естественным вложением $j_n \colon F_n \mapsto E$ на каждом F_n.

Без док-ва. Доказательство в нашем курсе приводить не будем. (Доказательство см. в приложении к части I настоящей разработки.)

В формулировке теоремы 3.3 использовали понятие *изоморфизма предгильбертовых пространств*. Определяется оно следующим образом:

Опр. 3.13. *Изоморфизм предгильбертова пространства E на предгильбертово пространство E'* — это линейное биективное отображение E на E' такое, что

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \quad \forall x, y \in E.$$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №18

3.6. Ортонормальные системы. Неравенство Парсеваля. Равенства Бесселя

3.7. Ортонормализация

3.6. Ортонормальные системы. Неравенство Парсеваля. Равенства Бесселя

Опр. 3.14. Пусть F — произвольное предгильбертово пространство. Будем говорить, что последовательность (конечная или бесконечная) $(a_n) \in F$ — *ортогональная система* в F, если

$$a_m \cdot a_n = 0 \text{ при } n \neq m; \quad a \neq 0 \, \forall \, n.$$

Опр. 3.15. Множество (a_n) называется *ортонормальной системой*, если (a_n) — ортогональная и $\|a_n\| = 1 \, \forall \, n$.

Опр. 3.16. Пусть (a_n) — произвольная ортонормальная система в гильбертовом пространстве F. Для любых $x \in F$ число $c_n(x) = x \cdot a_n$ называется *n-м коэффициентом* (или *n-й координатой*) вектора x относительно системы (a_n).

Неравенство Бесселя

Теорема 3.4. **(Теорема о неравенстве Бесселя.)** Пусть (a_n) — (не обязательно тотальная) ортонормированная система в гильбертовом пространстве F. Пусть $V \subset F$ — замкнутое подпространство, порождённое *всеми* векторами a_n.

Тогда для любого $x \in F$ имеем следующее.

(1) Ряд с общим членом $|c_n(x)|^2$ сходится, причём выполняется *неравенство Бесселя*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 = \|P_V(x)\|^2 \le \|x\|^2.$$

Напомним: здесь P_V — это ортогональный проектор на V.

Справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\overline{c_n(y)} = P_V(x) \cdot P_V(y). \tag{3.20}$$

(2) Ряд с общим членом $c_n(x)a_n$ сходится в F, причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)a_n = P_V(x). \tag{3.21}$$

(3) Справедливо обратное к пункту (2) утверждение, которое заключается в следующем.

Пусть (λ_n) — последовательность скаляров, для которой ряд с общим членом $|\lambda_n|^2$ сходится.

Тогда существует единственный вектор $y \in V$ такой, что $c_n(y) = \lambda_n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$. Любой другой вектор $x \in F$, для которого $c_n(x) = \lambda_n$ при любых $n \in \mathbb{N}$, имеет вид $x = y + z$, где $z \perp V$.

Д-во. **Первый шаг доказательства.** Рассмотрим V_n — одномерные подпространства V, порождённые векторами a_n.

Заметим, что $V_m \perp V_n$ при $n \neq m$, так как (a_n) — ортонормальная система, и что алгебраическая сумма V_n плотна в V по условию теоремы.

Важно: мы получили, что множества V_n удовлетворяют условиям теоремы 3.3 (об изоморфизме для гильбертовой суммы гильбертовых пространств). Поэтому эту теорему можно использовать.

Второй шаг доказательства.

- Пусть $x \in F$. Рассмотрим $P_V(x) \in V$. Имеем: существует α_n ($n = 1, 2, \ldots$) такое, что

$$P_V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n \quad \text{(по определению } V\text{)}. \tag{3.22}$$

- По теореме 3.3 между V и гильбертовой суммой E подпространств V_n имеется *изоморфизм*. (Обозначаем этот изоморфизм символом j.)

  Значит, для $P_V(x)$ и последовательности $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ имеет место равенство

$$(P_V(x) \cdot P_V(x))_V = (j(P_V(x)) \cdot j(P_V(x)))_E \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2. \tag{3.23}$$

- В силу представления (3.22) замечаем, что

$$c_k(P_V(x)) = P_V(x) \cdot a_k \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (a_k \cdot a_n) = \alpha_k. \quad (3.24)$$

- По теореме 3.1 (об ортогональной проекции на полное подпространство) имеем, что

$$x = P_V(x) + z, \text{ где } z \perp V,$$

и ещё имеем

$$c_k(x) = x \cdot a_k = (P_V(x) + z) \cdot a_k = P_V(x) \cdot a_k = c_k(P_V(x)). \quad (3.25)$$

- Из (3.23)–(3.25) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 = \|P_V(x)\|^2$$

и что, в силу теоремы Пифагора,

$$\|P_V(x)\|^2 \le \|P_V(x)\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2.$$

Итак, *неравенство Бесселя доказано*.

Представление (3.21) непосредственно вытекает из комбинации равенств (3.22), (3.24) и (3.25).

■ Вследствие теоремы 3.3 (об изоморфизме) имеем (аналогично формулам (3.23) и (3.24)), что

$$(P_V(x) \cdot P_V(y))_V = (j(P_V(x)) \cdot j(P_V(y)))_E$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_k(x) \cdot c_k(y) \text{ для любых } x, y \in F.$$

То есть, справедливо равенство (3.20).
Итак, *утверждения (1) и (2) теоремы 3.4 доказаны*.

Завершим доказательство теоремы 3.4 (о неравенстве Бесселя). Осталось доказать следующее:

Теорема 3.4. (3) Справедливо обратное к пункту (2) утверждение, которое заключается в следующем.
Пусть (λ_n) — последовательность скаляров, для которой ряд с общим членом $|\lambda_n|^2$ сходится.

Тогда существует единственный вектор $y \in V$ такой, что $c_n(y) = \lambda_n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$. Любой другой вектор $x \in F$, для которого $c_n(x) = \lambda_n$ при любых $n \in \mathbb{N}$, имеет вид $x = y + z$, где $z \perp V$.

Д-во.

- Берём
$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n. \tag{3.26}$$
Этот ряд сходится, так как сходится ряд с общим членом $|\lambda_n|^2$.
- Так как (a_n) — ортонормированная система, то
$$c_n(y) = y \cdot a_n = \lambda_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.27}$$
Таким образом, y — это искомый вектор.

- Предположим, что есть ещё один вектор с указанными свойствами, то есть $c_n(y') = \lambda_n$. Тогда имеем

$$0 = \lambda_n - \lambda_n = c_n(y') - c_n(y) \overset{(3.27)}{=} c_n(y' - y). \quad (3.28)$$

- Система (a_n) *тотальна* в V. Значит из (3.28) следует, что $y' = y$. Таким образом, y — это единственный вектор с требуемым свойством.

- Далее, пусть $x \in F$ и $c_n(x) = \lambda_n$.
- По теореме 3.1 (об ортогональной проекции) существует единственный вектор $\tilde{y} \in V$ такой, что $\|x - \tilde{y}\| = d(x, V)$.
- Этот вектор $\tilde{y}$ такой, что $x - \tilde{y} \perp V$, причём он единственный с этим свойством. Таким образом,

$$x = \tilde{y} + z, \quad \text{где } z \perp V.$$

- Наконец, $\tilde{y}$ совпадает с y по формуле (3.26):

$$c_n(\tilde{y}) = c_n(x - z) = x \cdot a_n - z \cdot a_n = \lambda_n - 0.$$

Доказательство теоремы 3.4 (о неравенстве Бесселя) завершено. $\square$

Замеч. 3.6. Важнейший случай: $V = F$, то есть, V — это *всё* гильбертово пространство. Тогда ортонормальная система (a_n) тотальна.

Опр. 3.17. Тотальная ортонормальная система называется *ортонормальным базисом* пространства F.

Пример 3.3. Последовательность

$$e_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ нулей}}, 1, 0, 0, \dots), \quad n = 1, 2, \dots$$

— это ортонормальный базис в l_2;

$$\left(\frac{\varphi_n}{\sqrt{2}}\right) \subset C_{\mathbb{C}}[0, 1], \quad \varphi_n = e^{i\pi nt}$$

— это ортонормальный базис в $L^2(0, 1)$.

Равенства Парсеваля

Замеч. 3.6. Если F — гильбертово пространство и замкнутое подпространство V порождено тотальной ортонормальной системой (то есть, ортонормальным базисом) в F, то в формулировке теоремы 3.4 (о неравенстве Бесселя) имеем, что

$$V = F \quad \text{и} \quad P_V(x) = x \quad \forall x \in F.$$

Из этого замечания сразу вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.5. **(Теорема о равенствах Парсеваля.)** Пусть (a_n) — это ортонормальный базис гильбертова пространства F. Тогда справедливы *равенства Парсеваля*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 = \|x\|^2, \quad \text{где } c_n(x) = x \cdot a_n, \tag{3.29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\overline{c_n(y)} = x \cdot y. \tag{3.30}$$

Замеч. 3.7. Из теорем 3.4 и 3.5 сразу следует, что равенства (3.29) и (3.30) составляют достаточное условие того, что (a_n) — тотальная система.

Следствие 3.3. (Следствие теоремы 3.4.) Два утверждения эквивалентны:

- Ортонормальная система (a_n) в гильбертовом пространстве F тотальна.
- Из равенства $x \cdot a_n = 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ следует, что $x = 0$.

Д-во. $(\Rightarrow)$ Пусть (a_n) тотальна и $x \cdot a_n = 0$. В силу

теоремы 3.4 (см. тождество (3.21) в формулировке теоремы 3.4) имеем равенство

$$P_V(x) = 0 \text{ согласно тождеству (3.21)}$$
$$\text{и так как } c_n(x) = x \cdot a_n,$$

и равенство

$$P_V(x) \equiv x, \text{ так как } V = F.$$

Таким образом получаем, что $x = 0$.

Д-во. $(\Leftarrow)$

- Пусть $z \in F$ — произвольный элемент. Пусть $y \perp V$, так что $z = P_V(z) + y$.
- С другой стороны, имеем

$$P_V(y) = P_V(z - P_V(z)) = P_V(z) - P_V(z) = 0.$$

- По утверждению (1) теоремы 3.4 (о неравенстве Бесселя) имеем, что

$$\|P_V(y)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (y \cdot a_n)^2,$$

то есть $y \cdot a_n = 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$.

- По предположению, это означает, что $y = 0$, $F = V$, то есть z принадлежит F и V одновременно. Таким образом, (a_n) — тотальная система.

Следствие теоремы 3.4 установлено. $\square$

3.7. Ортонормализация

Теорема 3.6. Пусть E — сепарабельное предгильбертово пространство, (b_n) — тотальная последовательность линейно независимых векторов в E.

(Заметим: такая последовательность существует по теореме о сепарабельных нормированных пространствах.)

Пусть V_n — n-мерное подпространство пространства E, порождённое векторами $b_1, \ldots, b_n$.

Тогда, **если** положим

$$c_n = b_n - P_{V_{n-1}}(b_n),$$

то последовательность (c_n) будет тотальной ортогональной системой ($n = 1, 2, \ldots$), обладающей тем свойством, что для любого $n \in \mathbb{N}$ векторы $(c_1, \ldots, c_n)$ порождают V_n.

Д-во проведём методом индукции по n.

- Случай $n = 1$ — тривиальный.
- Случай $n := n - 1$. Пусть $(c_1, \ldots, c_{n-1})$ — ортогональная система, порождающая $V_n - 1$. По определению $P_{V_{n-1}}$ (в утверждении (1) теоремы 3.1 (об ортогональной проекции)) имеем:

$$b_n = P_{V_{n-1}}(b_n) + y_n, \quad \text{где } y_n \perp V_{n-1}. \tag{3.31}$$

- Заданный равенством (3.31) вектор y_n мы называем вектором c_n, то есть $c_n := y_n$.
- Таким образом, $c_i \cdot c_j = 0$ при $i \neq j$, $i, j \in [1, n]$.
- Далее, $b_n \notin V_{n-1}$. Поэтому $c_n \neq 0$.

- Таким образом, $(c_1, \ldots, c_n)$ — ортогональная система.
- Наконец, $b_n - c_n \in V_{n-1}$. Следовательно, векторы $c_1, \ldots, c_n$ порождают то же подпространство, что и объединение V_{n-1} и $\{b_n\}$, то есть подпространство V_n.
- Пояснение: в явном виде мы имеем

$$b_n = c_n + P_{V_{n-1}}(b_n), \text{ где } c_n \in V_n \setminus V_{n-1},$$
$$P_{V_{n-1}}(b_n) \in V_{n-1}.$$

Доказательство теоремы 3.6 завершено. □

Замеч. 3.8. Нормируя систему (c_n), то есть полагая $a_n = \dfrac{c_n}{\|c_n\|}$, получаем ортонормальную систему (a_n), про которую говорят, что она получается из (b_n) *процессом ортонормализации*.

Следствие теорем 3.4 и 3.6. Любое сепарабельное предгильбертово (или гильбертово) пространство изоморфно всюду плотному подпространству пространства l_2 (для гильбертова пространства: изоморфно всему пространству l_2).

Д-во. Так как в сепарабельном предгильбертовом пространстве в силу теоремы 3.6 существует тотальная ортонормальная система, то утверждение следствия сразу вытекает из теоремы 3.4. $\square$

КОНЕЦ КУРСА ЛЕКЦИЙ
«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ I»

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЧАСТИ I

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТРЁХ ТЕОРЕМ

А.1. Теорема 1.2: теорема Хаусдорфа о пополнении

А.2. Теорема 2.6: критерий замкнутости гиперплоскости

А.3. Теорема 3.3: теорема об изоморфизме для гильбертовой суммы гильбертовых пространств

A.1. Теорема Хаусдорфа о пополнении

Теорема 1.2. **(Теорема Хаусдорфа о пополнении.)** Каждое метрическое пространство E имеет пополнение. Это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижные точки из E.

Доказательство существования.

Первый шаг. Введём в рассмотрение множество

$$\tilde{E} = \{\tilde{\mathbf{x}} = \{x_n\} : \{x_n\} \text{ — всевозможные последовательности Коши в } E\}$$

и отображение $\tilde{d}\colon \tilde{E} \times \tilde{E} \mapsto \mathbb{R}_+$, определённое формулой

$$\tilde{d}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \lim_{n\to\infty} d_E(x_n, y_n),$$

где $d_E\colon E \times E \mapsto \mathbb{R}_+$ — расстояние в E.

Замечание. В силу фундаментальности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, неравенства треугольника и полноты пространства $\mathbb{R}$ заметим, что предел $\tilde{d}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \lim\limits_{n\to\infty} d_E(x_n, y_n)$ существует.

Второй шаг. Введём в рассмотрение отношение эквивалентности на $\tilde{E}$:

$$R = \{(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) : \ \tilde{d}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = 0\}.$$

Отношение эквивалентности R разбивает $\tilde{E}$ на классы. Обозначим через Y множество этих классов:

- $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{y}}$ принадлежат одному классу $\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}})$, если $\tilde{d}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = 0$;
- если $\tilde{d}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \neq 0$, то $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{y}}$ принадлежат разным классам $\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}})$ и $\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}})$.

Метрика на Y

Определим расстояние между всевозможными классами $\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}})$ и $\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}})$ в Y:

$$d_Y(\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}}), \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}})) := \tilde{d}(\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{y}}'),$$
$$\forall\, \tilde{\mathbf{x}}' \in \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}}),\ \forall\, \tilde{\mathbf{y}}' \in \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}}).$$

Непосредственно проверяется, что отображение

$$(\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}}), \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}})) \mapsto d_Y(\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}}), \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}}))$$

удовлетворяет всем аксиомам расстояния.

Далее покажем, что Y — искомое пополнение.

Третий шаг. Введём отображение $\mathfrak{I}\colon E \mapsto Y$ по следующему правилу:

- Для любого $x \in E$ рассматриваем стационарную последовательность $\tilde{\mathbf{x}} = \{x_n = x\}_{n=1,2,\ldots}$. Так сконструировали отображение $x \mapsto \tilde{\mathbf{x}}$ из E в $\tilde{E}$.
- Имеем, что $\mathbf{x}$ лежит в некотором классе $\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}})$. Так сконструировали отображение $\tilde{\mathbf{x}} \mapsto \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}})$ из $\tilde{E}$ в Y.
- Теперь просто положим $\mathfrak{I}(x) := \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}}) \in Y$.

Заметим, что $\mathfrak{I}$ — изометрия:

$$
d_Y(\mathfrak{I}(x), \mathfrak{I}(y)) = d_Y(\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{x}}), \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}})) =
$$
$$
= \lim_{n\to\infty} d_E(x_n, y_n) \equiv d_E(x, y).
$$

Четвёртый шаг.

Докажем, что область значений $\Delta_{\mathfrak{I}}$ отображения $\mathfrak{I}$ плотна в Y.

Пусть $\mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}}) \in Y$ и $\{x_n\} \in \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}})$. По определению, $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в E. Рассмотрим $\mathfrak{I}(x_n) \subset \Delta_{\mathfrak{I}}$. Имеем:

$$d_Y(\mathfrak{I}(x_n), \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}})) = \lim_{m\to\infty} d_E(x_n, x_m)$$

для произвольно фиксированного $n \in \mathbb{N}$.

Далее имеем:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n, m \geq N \quad d_E(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, при $n \geq N$

$$d_Y(\mathfrak{I}(x_n), \mathfrak{R}(\tilde{\mathbf{y}})) = \lim_{m\to\infty} d_E(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Итак, множество $\Delta_{\mathfrak{I}}$ плотно в Y.

Пятый шаг. На первых четырёх шагах построили Y и показали, что Y содержит в себе X в том смысле, что $\Delta_{\mathfrak{I}} \subset Y$, где $\mathfrak{I}$ — изометрия. При этом, вложение $\Delta_{\mathfrak{I}} \subset Y$ плотное. Докажем сейчас, что Y — полное метрическое пространство.

Пусть $\{\mathcal{Y}_n\}$ — фундаментальная последовательность в Y.

Пояснение. При каждом $n = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$\mathcal{Y}_n \text{ — это класс } \mathfrak{K}(\tilde{\mathbf{y}}^{(n)}) \in Y,$$

соответствующий некоторой (фундаментальной) последовательности

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(n)} = \{y_m^{(n)}\}_{m=1,2,\ldots} \subset \tilde{E}.$$

Поскольку $\Delta_{\mathfrak{I}}$ плотно в Y, то

$$\exists\, x_n \in X : \quad d_Y(\mathfrak{I}(x_n), \mathcal{Y}_n) < \frac{1}{n}.$$

Так как $\{\mathcal{Y}_n\}$ фундаментальна, то (по неравенству треугольника) $\{\mathfrak{I}(x_n)\}$ тоже фундаментальна.
Т.к. $\mathfrak{I}$ — изометрия, то $\{x_n\}$ — фундаментальна в X.
Значит, $\{x_n\}$ лежит в некотором классе $\mathcal{Y} \in Y$.

Наконец,

$$d_Y(\mathcal{Y}_n, \mathcal{Y}) \leq d_Y(\mathcal{Y}_n, \mathfrak{I}(x_n)) + d_Y(\mathfrak{I}(x_n), \mathcal{Y}) <$$
$$< \frac{1}{n} + d_Y(\mathfrak{I}(x_n), \mathcal{Y}) = \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} d_E(x_n, x_m) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Итак, $\{\mathcal{Y}_n\}$ сходится в Y. Значит Y — полное пространство. Существование пополнения доказано.

Примечание. С помощью изометрии $\mathfrak{I}$ можем рассматривать E как подпространство Y. Для этого просто отождествим $x \in E$ и $\mathfrak{I}(x) \in Y$.

Доказательство единственности.

Надо показать, что если Y^* и Y^{**} — два пополнения пространства E, то существует такое взаимно однозначное отображение $\varphi\colon Y^* \mapsto Y^{**}$, что

- $\varphi(x) = x \quad \forall x \in E$,
- Если $\varphi(x^*) = x^{**}$ и $\varphi(y^*) = y^{**}$, то

$$d_{Y^*}(x^*, y^*) = d_{Y^{**}}(x^{**}, y^{**}),$$

где d_{Y^*} — расстояние в Y^*, $d_{Y^{**}}$ — расстояние в Y^{**}.

Первый шаг. Отображение φ определяется следующим образом.

- Пусть $x^* \in Y^*$ — произвольная. Тогда по определению пополнения имеем:

$$\exists \{x_n\} \subset E : \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^* \text{ в } Y^*$$

Т.к. Y^{**} полно и $\{x_n\} \subset Y \subset Y^{**}$, то также имеем

$$\exists x^{**} \in Y^{**} : \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^{**} \text{ в } Y^{**}.$$

- С помощью неравенства треугольника по определению предела последовательности заключаем, что x^{**} не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x^*.
- Итак, полагаем $\varphi(x^*) = x^{**}$.

Второй шаг. Покажем, что φ и есть искомое изометрическое отображение.

- По построению имеем $\varphi(x) = x \quad \forall x \in E$.
- Далее, пусть

$$x_n \to x^* \text{ в } Y^* \quad \text{и} \quad x_n \to x^{**} \text{ в } Y^{**},$$
$$y_n \to y^* \text{ в } Y^* \quad \text{и} \quad y_n \to y^{**} \text{ в } Y^{**};$$

тогда в силу непрерывности расстояния,

$$d_{Y^*}(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d_{Y^*}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d_E(x_n, y_n),$$
$$d_{Y^{**}}(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to\infty} d_{Y^{**}}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d_E(x_n, y_n).$$

Следовательно, $d_{Y^*}(x^*, y^*) = d_{Y^{**}}(x^{**}, y^{**})$. Этим самым завершаем доказательство утверждения единственности и обоснование теоремы 1.2. $\square$

A.2. Критерий замкнутости гиперплоскости

Теорема 2.6. **(Критерий замкнутости гиперплоскости.)**

(i) Пусть H — гиперплоскость с уравнением $f(x) = 0$ в действительном (или комплексном) нормированном пространстве E. Для того, чтобы гиперплоскость H была замкнута в E, необходимо и достаточно, чтобы линейная форма f была непрерывна.

(ii) Пусть H — замкнутая гиперплоскость. Тогда для любого $b \notin H$ пространство E — это прямая сумма (в смысле определения 2.13) гиперплоскости H и одномерного подпространства $D = \mathbb{R} \cdot b$ (соответственно, $D = \mathbb{C} \cdot b$). Отображение $\mathbb{R} \cdot b + H \mapsto E$ — это гомеоморфизм.

Д-во (i).

$(\Leftarrow)$ Считаем, что f — непрерывный функционал. Докажем, что гиперплоскость H замкнута. Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма А.1. Пусть f и g — два непрерывных отображения метрического пространства E в метрическое пространство F. Справедливо следующее утверждение: множество A всех точек $x \in E$, в которых выполняется равенство $f(x) = g(x)$, замкнуто в E.

Д-во леммы А.1. Докажем равносильное утверждение, а именно, докажем, что $E \setminus A$ открыто.

Пусть $a \in E \mapsto A$, то есть $f(a) \neq g(a)$. Считаем, что

$$d_F(f(a), g(a)) = \alpha (> 0). \qquad (A.1)$$

Через d_F обозначаем метрику в F.

Из непрерывности отображений f и g в точке a и из того, что конечное пересечение окрестностей есть окрестность, вытекает следующее:

$$\exists\, V_a \subset E \quad (V_a \text{ — окрестность точки } a):$$
$$d_F(f(a), f(x)) < \frac{\alpha}{2},$$
$$d_F(g(a), g(x)) < \frac{\alpha}{2}, \quad \forall\, x \in V_a.$$

Тогда при $x \in V$ будем обязательно иметь $f(x) \neq g(x)$. Иначе было бы

$$d_F(f(a), g(a)) \leq$$
$$\leq d_F(f(a), f(x)) + d_F(f(x), g(x)) + d_F(g(x), g(a)) <$$
$$< \frac{\alpha}{2} + 0 + \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

А это противоречит (A.1). Лемма доказана. $\square$

Вернёмся к доказательству теоремы 2.6. В лемме A.1 берём $g \equiv 0$ и тут же заключаем, что утверждение $(\Leftarrow)$ справедливо.

$(\Rightarrow)$ Считаем, что гиперплоскость H замкнута, докажем, что определяющий её функционал f непрерывен.

- Пусть $a \neq H$, так что $f(a) = 1$. Так как H замкнута, то множество $a + H$ (сдвиг) тоже замкнуто.
- Заметим, что $0 \notin a + H$. (Действительно: иначе $-a \in H$, а значит $a \in H$. Противоречие.)
- Значит найдётся шар $V = \bar{B}(0, r) = \{\|x\|_E \leq r\}$, такой, что $V \cap a + H = \emptyset$. Таким образом,

$$f(x) \neq 1 \quad \forall x \in V. \tag{A.2}$$

(Иначе $f(x) = f(a) \Rightarrow f(x - a) = 0 \Rightarrow x - a \in H \Rightarrow x \in a + H$. Противоречие с $V \cap a + H = \emptyset$.)

- Докажем, что $x \in V \Rightarrow |f(x)| \leq 1.$
- Используем метод доказательства от противного. **Предположение.** *Пусть* $f(x) = \alpha$, *где* $|\alpha| > 1$.
- Тогда

$$\left\| \frac{x}{\alpha} \right\|_E = \frac{1}{|\alpha|} \|x\|_E < r, \quad f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = 1,$$

то есть

$\dfrac{x}{\alpha} \in V$, но вместе с этим не выполняется $f\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) \neq 1$.

Это противоречит (A.2).

- Остаётся заметить следующее: если $|f(x)| < 1$ $\forall x \in V$, то

$$|f(x)| \leq \frac{1}{r}\|x\|_E \quad \forall x \in E. \tag{A.3}$$

- Действительно, для любого $x \in E$ возьмём $y = \dfrac{rx}{\|x\|_E}$. Тогда $\|y\|_E = r$. Значит, $|f(y)| \leq 1$, где, заметим, $|f(y)| = \dfrac{r}{\|x\|_E}|f(x)|$.
- Из (A.3) по критерию непрерывности полилинейных отображений (теорема 2.4) заключаем, что f — непрерывный функционал. Тем самым, завершаем доказательство утверждения (i) теоремы.

Д-во (ii).

- Заметим, если $b \neq H$, то

$$x = g(x)b + y, \quad \forall\, x \in E, \tag{A.4}$$

где $y \in H$ и $g(x) = 0$ — ещё одно уравнение гиперплоскости H.

- Поэтому функционал g непрерывен, так как H замкнуто, и значит отображение

$$x \mapsto g(x)b \quad (b \text{ фиксировано в } E \setminus H),$$

действующее из E в $\mathbb{R}b$ (или в $\mathbb{C}b$) непрерывно.

- Отсюда и из (A.4) в силу предложения 2.14 сразу вытекает утверждение (ii) теоремы.

Теорема 2.6 полностью доказана. □

А.3. Об изоморфизме для гильбертовой суммы гильбертовых пространств

Теорема 3.3. **(Об изоморфизме для гильбертовой суммы гильбертовых пространств.)** Пусть F — гильбертово пространство и (F_n) — это такая последовательность замкнутых его подпространств, что

(i) $F_m \perp F_n$ при $m \neq n$,

(ii) совокупность конечных алгебраических сумм H подпространств F_n плотна в F.

Тогда, если E — гильбертова сумма подпространств F_n, то существует единственный изоморфизм j пространства F на E, совпадающий с естественным вложением j_n: $F_n \mapsto E$ на каждом F_n.

Д-во.

Первый шаг. Пусть $F'_n = j_n(F_n)$ — совокупность всех последовательностей вида

$$(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ нулей}}, x_n, 0, 0, \ldots), \text{ где } x_n \in F_n \subset F.$$

Определим $h_n \colon F'_n \mapsto F_n$ — обратное отображение к j_n, то есть

$$h_n : \quad (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ нулей}}, x_n, 0, 0, \ldots) \mapsto x_n \in F_n.$$

Пусть G — совокупность конечных алгебраических сумм подпространств F'_k в E, то есть в G попадают всевозможные последовательности

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Имеем, G — это *прямая* сумма подпространств F'_k.

При этом $\sum_k |x_k|^2 < \infty$. Так как G — прямая сумма, то можем определить линейное отображение h: $G \mapsto F$ — отображение последовательности (на самом деле, конечномерного вектора) из G на F по правилу

$$h|_{F'_k} = h_k \text{ при } k \in \mathbb{N}.$$

Второй шаг. (Покажем, что h — изоморфизм G на H.) Сначала уточним понятие изоморфизма предгильбертова пространства на предгильбертово пространство.

Опр. А.1. *Изоморфизм предгильбертова пространства* E на предгильбертово пространство F — это линейное биективное отображение f: $E \mapsto F$, обладающее тем свойством, что $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \quad \forall x, y \in E$.

Линейность и биективность h очевидны.
Установим равенство из определения A.1.
Зафиксируем $x, y \in F$.
По условию (ii) существуют $x_k, y_k \in F_k$, такие, что

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

При произвольном $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} y_k\right) = \sum_{k,l=1}^{N} x_k \cdot y_l =$$
$$\stackrel{(\star)}{=} \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot y_k \stackrel{(\star\star)}{=} \sum_{k=1}^{N} j_k(x_k) \cdot j_k(y_k). \quad (A.5)$$

Равенство ($\star$) справедливо по условию (i): $x_k \cdot y_l = 0$ при $l \neq k$.
Равенство ($\star\star$) выполняется по определению скалярного произведения в гильбертовой сумме гильбертовых пространств.

По определению отображения h равенство (A.5) можно записать в виде

$$h\left(\sum_{k=1}^{N} j_k(x_k)\right) \cdot h\left(\sum_{k=1}^{N} j_k(y_k)\right) = \sum_{k=1}^{N} j_k(x_k) \cdot j_k(y_k), \tag{A.6}$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = \sum_{k=1}^{N} h_k(j_k(x_k)) = \\ = \sum_{k=1}^{N} h(j_k(x_k)) = h\left(\sum_{k=1}^{N} j_k(x_k)\right).$$

Вводя обозначения

$$\tilde{x}^N = \sum_{k=1}^{N} j_k(x_k), \quad \tilde{y}^N = \sum_{k=1}^{N} j_k(y_k),$$

запишем (A.6) в виде

$$h(\tilde{x}^N) \cdot h(\tilde{y}^N) = \tilde{x}^N \cdot \tilde{y}^N. \qquad (A.7)$$

Так как x_k и y_k произвольны и j_l — изоморфизмы, то $\tilde{x}^n$ и $\tilde{y}^N$ тоже произвольны. Значит из (A.7) следует, что $h\colon G \mapsto H$ — изоморфизм.

Третий шаг. (Продолжение изоморфизма h с G на E.) Перейдём к пределу в (A.6) (или, эквивалентно, в (A.7)) при $N \to \infty$.

Из (A.6) выводим

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{\infty} j_k(x_k) \cdot j_k(y_k) \ (\equiv \tilde{x}^{\infty} \cdot \tilde{y}^{\infty}),$$

или, иначе (эквивалентно), из (A.7) выводим

$$\bar{h}(\tilde{x}^{\infty}) \cdot \bar{h}(\tilde{y}^{\infty}) = \tilde{x}^{\infty} \cdot \tilde{y}^{\infty} \tag{A.8}$$

Здесь, естественно,

$$\tilde{x}^{\infty} = (x_1, x_2, \ldots), \quad \tilde{y}^{\infty} = (y_1, y_2, \ldots).$$

Итак, мы построили изоморфизм $\bar{h}$ из E в F. Обратный к нему — искомый изоморфизм из F в E:

$$\bar{j} = \bar{h}^{-1} : \quad F \mapsto E.$$

4-й шаг. (Единственность изоморфизма.) Наконец, изоморфизм $\bar{h}$ — единственный, так как h полностью определяется конструкцией, построенной на первом шаге, **однозначно** (по определению алгебраической и гильбертовой сумм), а $\bar{h}$ определён по непрерывности на **всюду плотном** множестве. Значит, и $\bar{j}$ — единственный.

Теорема 3.3 полностью доказана. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №19

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

4.1. Предварительные сведения о линейных непрерывных операторах и функционалах

4.2. Линейные операторы в конечномерных пространствах

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

4.1. Предварительные сведения о линейных непрерывных операторах и функционалах

Напомним, что пространства непрерывных линейных операторов и функционалов (мы называем их также *непрерывными полилинейными отображениями*) уже нами введены в пункте 2.7 лекции 12.

Обозначение. Пусть E, F — два нормированных пространства. Через $\mathcal{L}(E, F)$ обозначим множество всех непрерывных линейных отображений E в F.

Замеч. 4.1. $\mathcal{L}(E, F)$ — векторное пространство.

Докажем следующую теорему:

Теорема 4.1. Если линейный оператор непрерывен в какой-нибудь точке $x_0 \in E$, то он непрерывен во всех точках $x \in E$.

Д-во.

- Пусть оператор u непрерывен в точке $x_0 \in E$.
- Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, где $x_n, x \in E$.
- Тогда имеем следующее: из предельного соотношения $(x_n - x) + x_0 \to x_0$ вытекает, что $u(x_n - x + x_0) \underset{n\to\infty}{\to} u(x_0)$.
- В силу линейности имеем $u(x_n - x + x_0) = u(x_n) - u(x) + u(x_0)$.
- Таким образом, $u(x_n) - u(x) + u(x_0) \underset{n\to\infty}{\to} u(x_0)$, то есть
$$u(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} u(x).$$
- Теорема доказана. $\square$

Замеч. 4.2. В силу теоремы 4.1 непрерывность всегда понимается в *глобальном* смысле. То есть, если говорим, что u непрерывно, то значит u непрерывно в любой точке $x \in E$.
Вспомним определение нормы линейного оператора. Оно было введено в лекции 12.

Опр. 2.15. Для каждого отображения $u \in \mathcal{L}(E, F)$ введём *норму*

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : \ \|u(x)\|_F \leq a\|x\|_E\}.$$

Ещё вспомним из лекции 12:

Предлож. 2.18. Имеет место соотношение

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F.$$

Дополнение.

- Имеют место соотношения

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E\neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

- Введённые в определении 2.15, предложении 2.18 и первом пункте этого дополнения нормы эквивалентны и **равны между собой**.

Д-во следует из рассуждений лекции 12 и линейности оператора. $\square$

Теорема о продолжении линейного непрерывного оператора

Теорема 4.2. **(О продолжении.)** Пусть E — нормированное пространство, F — банахово пространство, $\Omega \subset E$ — линейное подпространство такое, что $\bar{\Omega} = E$. Пусть u непрерывно на Ω. Тогда существует единственный оператор $\bar{u}$: $E \mapsto F$ такой, что $\bar{u}$ непрерывен и $\bar{u}(x) = u(x)\ \forall\, x \in \Omega$.
При этом

$$\sup_{\|x\| \leq 1,\, x \in \Omega} \|u(x)\|_F = \|\bar{u}\|_E.$$

Док-во.

- Пусть $x \in E = \bar{\Omega}$ — произвольная точка.
- Существует последовательность $x_k \in \Omega$ такая, что

$$x_k \underset{k\to\infty}{\to} x \quad \text{по норме}$$

в силу плотности.
- Тогда существует $\bar{u}(x)$ так, что

$$\bar{u}(x) = \lim_{k\to\infty} u(x_k), \tag{4.1}$$

так как $\{u(x_k)\}$ — это фундаментальная последовательность.

- Здесь заметим, что F — это банахово пространство.
- Также заметим, что отображение $\bar{u}\colon E \mapsto F$ не зависит от выбора последовательности.
- Действительно, если $x_k' \to x$, $x_k'' \to x$, то

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k') = \lim_{k\to\infty} u(x_k'').$$

- Это предельное соотношение следует из непрерывности u и из неравенства треугольника.

- По критерию непрерывности (смотрите теорему 2.4 лекции 11 ниже на слайде) и по *дополнению* имеем

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|\leq 1,\, x\in\Omega} \|u(x)\|_F < +\infty,$$

$$\|u(x)\|_F \leq \|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E. \qquad (4.2)$$

Теорема 2.4. Пусть $E_1, \dots, E_n$ — n нормированных пространств. Пусть $u\colon E_1 \times \dots \times E_n \mapsto F$ — полилинейное отображение. Для того, чтобы u было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $C > 0$, что для любой точки $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ имеет место неравенство

$$\|u(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2} \dots \|x_n\|_{E_n}.$$

- Переходим к пределу в (4.2):

$$\|u(x_k)\|_F \le \|u\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x_k\|_E$$

$$\overset{(4.1)}{\Rightarrow} \quad \|\bar{u}(x)\|_F \le \|u\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E.$$

- Таким образом, получаем

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \|u\|_{\mathcal{L}(E,F)}. \tag{4.3}$$

- В частности, по теореме 2.4 имеем, что $\bar{u}$ — непрерывный оператор.

- С другой стороны,

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\bar{u}(x)\|_F \geq$$

$$\sup_{\|x\|\leq 1,\, x\in\Omega} \|u(x)\|_F = \|u\|_{\mathcal{L}(E,F)},$$

- так как

$$u(x) = \bar{u}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

- Итак, получаем

$$\|u\| = \|\bar{u}\|_\Omega.$$

- Остается доказать единственность продолжения.
- Единственность продолжения следует из леммы:

Лемма 4.1. Пусть f, g — два непрерывных отображения E в F. Тогда, множество $A \subset E$ всех точек x, в которых

$$f(x) = g(x),$$

замкнуто в E.

Д-во прямо следует из определений. Лемма 4.1 — это лемма A.1 из приложения к части I настоящего пособия. Доказательство приведено в приложении к части I. $\square$

4.2. Линейные операторы в конечномерных пространствах

Теорема 4.3. Всякий линейный оператор $u\colon E \mapsto F$ из конечномерного пространства E в нормированное пространство F непрерывен.

Д-во.

- Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — базис в E.
Тогда для любого $x \in E$ и

$$x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i.$$

- Так как u — линейный, то имеем

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i u(e_i).$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i u(e_i) \quad \Rightarrow$$

■

$$\|u(x)\|_F \le \sum_{i=1}^{m} |\xi_i| \|u(e_i)\|_F \le \max_{1 \le i \le m} |\xi_i| \sum_{i=1}^{m} \|u(e_i)\|_F .$$

- Заметим: здесь $\max\limits_{1 \le i \le m} |\xi_i| := \|x\|_\infty$ — это норма элемента x в E.
- Ещё заметим, что $C := \sum\limits_{i=1}^{m} \|u(e_i)\|_F$ не зависит от $x \in E$.
- Итак, получили

$$\|u(x)\|_F \le C\|x\|_\infty . \tag{4.4}$$

- Остаётся заметить, что норма $x \mapsto \|x\|_\infty$ эквивалентна любой другой норме в E. То есть она эквивалентна норме, которую с самого начала ввели в E.
- Более точно: это утверждение следует из теоремы 2.7 лекции 13:

Теорема 2.7. Пусть E — n-мерное действительное (или комплексное) нормированное векторное пространство. Если $(a_1, \ldots, a_n)$ — *базис* пространства E, то отображение

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n$$

пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) на E взаимно непрерывно.

- По теореме 2.7 $\exists\, c_0, c_1 = \text{const}$, так, что
$$c_0\|x\|_\infty \le \|x\|_E \le c_1\|x\|_\infty.$$
- Отсюда и из (4.4) следует, что
$$\|u(x)\|_F \le \frac{C}{c_0}\|x\|_E. \tag{4.5}$$
- Из (4.5) в силу критерия непрерывности полилинейного отображения (теорема 2.4) выводим, что u — непрерывное отображение.

$\square$

Замечание о связи линейных операторов в конечномерных пространствах с матрицами

Замеч. 4.3. Пусть

$$e_1, \dots, e_m \text{ — базис в } E,$$

$$f_1, \dots, f_n \text{ — базис в } F,$$

$$E, F \text{ — конечномерные нормированные пр-ва над } \mathbb{R},$$

$$u : \ E \mapsto F \text{ — линейный оператор.}$$

Имеем:
Для любого $x \in E$ существует $\xi_i \in \mathbb{R}$ такое, что

$$x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i.$$

Для любого $y \in F$ существует $\eta_i \in \mathbb{R}$ такое, что

$$y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i f_i. \tag{4.6}$$

Запишем разложение элемента $u(e_k) \in F$ по базису $(f_k) \subset F$:

$$\exists\ a_{jk} \text{ такое, что } u(e_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} f_j.$$

Таким образом, мы ввели матрицу (a_{jk}).
Далее имеем:

$$y = u(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_{jk} f_j.$$

В силу (4.6) получаем

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_{jk}.$$

(То есть получаем умножение матрицы на вектор-столбец.)

Вывод в замечании: итогом этих рассуждений является то, что мы *построили* при фиксированных базисах (e_k) и (f_k) *изоморфизм* пространства матриц и пространства линейных операторов в конечномерном пространстве.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №20

4.3. График оператора. Замкнутые операторы

4.3. График оператора. Замкнутые операторы

График оператора

Пусть u: $E \mapsto F$ — линейный оператор. Причём не предполагаем, вообще говоря, чтобы $\Omega_u = E$. (Как всегда, через Ω_u обозначаем область определения оператора u.)

Считаем, что E, F — два нормированных пространства над **одним** скалярным полем. Рассмотрим *линейное* пространство $E \times F$, определённое следующим образом:

$$E \times F := \{(x, y) : \quad x \in E,\ y \in F\},$$

где сложение и умножение на скаляр определены по закону:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Так как E, F — это нормированные пространства, то введём норму

$$\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F.$$

Замеч. 4.4. Можно ввести эквивалентную норму таким образом:

$$\|(x, y)\|_* = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$$

Замеч. 4.5. Сходимость последовательностей в пространстве $E \times F$ определяется стандартно:

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to x,\ y_n \to y.$$

Предлож. 4.1. Справедливо следующее утверждение:

$$E \times F \text{ — банахово пространство}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$E \text{ и } F \text{ — банаховы пространства.}$$

Д-во. Доказательство следует из предыдущих замечаний. $\square$

Опр. 4.1. *Графиком* $u\colon E \mapsto F$ называется множество

$$G_u = \{(x, u(x)) \mid x \in \Omega_u\} \subset E \times F.$$

Замкнутый график

Опр. 4.2. Оператор $u \colon E \mapsto F$ называется *замкнутым*, если его график — замкнутое подмножество в $E \times F$. (Более точно, оно является замкнутым линейным подпространством.)

Пояснение. В эквивалентном виде определение 4.2 выглядит так: Если $x_n \to x$ и $u(x_n) \to y$, **то** $x \in \Omega_u$ и $u(x) = y$.

Замеч. 4.6. Условия непрерывности и замкнутости близки друг к другу. Но это не одно и то же. Действительно, приведём пример.

Пример 4.1. Рассмотрим пространство $C[0,\pi]$. Рассмотрим оператор дифференцирования

$$\mathcal{D}: \ x(t) \mapsto x'(t), \quad \Omega_{\mathcal{D}} = C^1[0,\pi] \subset C[0,\pi].$$

$\mathcal{D}$ — это замкнутый, но не непрерывный оператор (то есть, $\mathcal{D}$ — это неограниченный оператор).

Действительно, пусть

$$x_n \to x, \quad x_n' \to y \text{ по норме в } C[0,\pi].$$

Это то же самое, что и равномерная сходимость

$$x_n(t) \rightrightarrows x(t), \quad x_n'(t) \rightrightarrows y(t) \quad \text{на } [0,\pi].$$

Из курса математического анализа известна следующая теорема:

Теорема. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$, такая, что последовательность $\{x_n(t_0)\}$ сходится при некотором $t_0 \in [a, b]$.
Тогда, если последовательность $\{x_n'\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции y, то и последовательность $\{x_n\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции x, причём $x'(t) = y(t)$.

По этой теореме получаем, что $x'(t) = y(t)$ на $[0, \pi]$. При этом $x \in C^1[0, \pi] = \Omega_{\mathcal{D}}$, $y \in C[0, \pi]$.

Значит график оператора $\mathcal{D}$: $C^1[0, \pi] \mapsto C[0, \pi]$ *замкнут*.

Теперь приведём такой пример: рассмотрим последовательность

$$\{x_n(t) = \sin(nt)\}.$$

Имеем,

$$\|x_n\| = 1. \tag{4.7}$$

Ещё имеем

$$x_n'(t) = n\cos(nt).$$

Отсюда следует, что

$$\|\mathcal{D}x_n\| = \|x_n'\| = n. \tag{4.8}$$

На основании соотношений (4.7) и (4.8) заключаем, что оператор $\mathcal{D}$ *неограничен*.
По *критерию непрерывности линейных отображений* получаем, что $\mathcal{D}$ не является непрерывным.

Замеч. 4.7. Сравним условия непрерывности и замкнутости оператора. Рассмотрим свойства

(а) $x_n \in \Omega_u$,

(б) $x_n \to x$ в E,

(в) $x \in \Omega_u$,

(г) $u(x_n) \to y$ в F,

(д) $u(x) = y$.

Сделаем следующее замечание:

- Пусть из свойств (а),(б),(в) следует, что выполняются свойства (г),(д). Тогда u — это непрерывный оператор.
- Пусть из свойств (а),(б),(г) следует, что выполняются свойства (в),(д). Тогда u — это замкнутый оператор.

Из замечания 4.7 вытекает следующее предложение:

Предлож. 4.2. Если u — непрерывный оператор, Ω_u — замкнутое множество, то u — замкнутый.

Свойства замкнутых операторов. Продолжение замкнутых операторов

Для непрерывных операторов обратный не всегда является непрерывным. Для замкнутых операторов есть следующее корректное утверждение.

Теорема 4.4. Пусть

$$u: \quad E \mapsto F \text{ — замкнутый линейный оператор;}$$

Ω_u, Δ_u — его множества определения и значения. Пусть существует

$$u^{-1}: \quad \Delta_u \mapsto \Omega_u \text{ — \textit{обратный оператор.}}$$

Тогда u^{-1} — замкнутый.

Опр. 4.3. Если линейный оператор u отображает Ω_u на Δ_u взаимнооднозначно, то *обратное отображение* Δ_u на Ω_u, то есть u^{-1}, определяется как линейное отображение, удовлетворяющее условиям

$$u^{-1}(u(x)) = x \quad \forall\, x \in \Omega_u,$$

$$u(u^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in \Delta_u.$$

Д-во теоремы 4.4. Графиком оператора u^{-1} служит множество

$$\{(u(x), x); \quad x \in \Delta_u\} \subset F \times E.$$

Поэтому утверждение сразу следует из того, что отображение

$$(x, y) \mapsto (y, x), \quad (x, y) \in E \times F, \quad (y, x) \in F \times E$$

является изометрией. $\square$

На предыдущей лекции был рассмотрен вопрос о продолжении (расширении) непрерывного оператора. Сейчас естественно поставить вопрос о расширении оператора до замкнутого.

А именно, можно задать вопрос:

Вопрос: Пусть $u\colon E \mapsto F$ $(\Omega_u \mapsto \Delta_u)$ — линейный оператор. При каких условиях найдётся $\bar{u}\colon E \mapsto F$ — замкнутый оператор, такой, что, $\Omega_u \subset \Omega_{\bar{u}}$ и $\bar{u}(x) = u(x)$ для любого $x \in \Omega_u$?

О замкнутом расширении линейного оператора

Теорема 4.5. **(О замкнутом расширении линейного оператора.)** Пусть E и F — нормированные пространства.
Линейный оператор u допускает замкнутое расширение $\bar{u}$ тогда и только тогда, когда из соотношений

$$x_n \in \Omega_u, \quad x_n \to 0, \quad u(x_n) \to y$$

следует, что

$$y = 0.$$

Д-во.

$(\Rightarrow)$ Считаем, что $\bar{u}$ — замкнут. Отсюда следует, что

$$u(x_n) = \bar{u}(x_n) \xrightarrow[x_n \to 0]{} \bar{u}(x) = 0.$$

Итак, прямое утверждение мы доказали прямо по определению замкнутости.

$(\Leftarrow)$ Определим $\bar{u}$ следующим образом: скажем, что точка x принадлежит $\Omega_{\bar{u}}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\} \subset \Omega_u$, такая, что

$$x_n \to x, \text{ причём } u(x_n) \to y.$$

Положим, $\bar{u}(x) = y$.

Опр. 4.4. Такое отображение $\bar{u}$ назовём *наименьшим замкнутым расширением* оператора u.

Остаётся заметить, что

(i) y однозначно определяется по x;

(ii) $\bar{u}$ действительно является замкнутым отображением.

Замечаем (i):

- Пусть
$$x_n' \to x, \quad u(x_n') \to y_1$$
и
$$x_n'' \to x, \quad u(x_n'') \to y_2.$$

- Тогда,
$$x_n' - x_n'' \to 0 \quad \text{и} \quad u(x_n' - x_n'') \to y_1 - y_2$$
и при этом $u(x_n' - x_n'') \to 0$ (по предположению).

Замечаем (ii):

- Пусть

$$w_n \in \Omega_{\bar{u}}, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = w, \quad \lim_{n\to\infty} \bar{u}(w_n) = y.$$

- Тогда существует последовательность $(x_n) \subset \Omega_u$, такая, что

$$\|w_n - x_n\| \le \frac{1}{n}, \quad \|\bar{u}(w_n) - u(x_n)\| \le \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

- Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} w_n = w; \quad \lim_{n\to\infty} u(x_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{u}(w_n) = y.$$

- По построению $\bar{u}$ отсюда следует, что $w \in \Omega_{\bar{u}}$ и $\bar{u}(w) = y$.

Теорема 4.5 доказана. □

Пример 4.2. Рассмотрим оператор взятия производной:

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt}, \quad (\mathcal{D}(x) = x'),$$
$$\mathcal{D}:\ L^2(-1,1) \mapsto L^2(-1,1),$$
$$\Omega_{\mathcal{D}} = L^2(-1,1) \cap C^1[-1,1].$$

Замеч. 4.8. Этот оператор не замкнут, но допускает замкнутое расширение в $L^2(-1,1)$.

Д-во. Действительно, пусть $(f_n) \subset \Omega_{\mathcal{D}}$, так, что

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ в } L^2 \text{ и } \mathcal{D}(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \text{ в } L^2.$$

Для всевозможных $\varphi \in C_0^1[-1,1]$ имеем

$$\int_{-1}^{1} \mathcal{D}(f_n)(t)\varphi(t)dt = -\int_{-1}^{1} f_n(t)\mathcal{D}(\varphi)(t)dt.$$

При $n \to \infty$ получаем

$$\int_{-1}^{1} g(t)\varphi(t)dt = -\int_{-1}^{1} 0 \cdot \mathcal{D}(\varphi)(t)dt = 0.$$

Так как φ — это произвольная функция, то $g \equiv 0$.

Для завершения обоснования этого замечания достаточно воспользоваться теоремой 4.5 (о замкнутом расширении).

$\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №21

4.4. Теоремы Банаха о замкнутом графике и открытом отображении [начало]

4.4. Теоремы Банаха о замкнутом графике и открытом отображении

Теорема 4.6. **(Теорема Банаха о замкнутом графике.)** Пусть E, F — банаховы пространства,

$$u: \ E \mapsto F \quad \text{— замкнутый лин. оператор, } \Omega_u = E.$$

Тогда u — *непрерывный оператор.*

Д-во. Доказательство проведём в два шага.

Шаг 1.

- Пусть выполнены условия теоремы.
- Пусть дополнительно имеем, что существуют постоянная $c \geq 0$, множество $M \subset E$, такое, что $\bar{M} = E$, и оценка

$$\|u(x)\|_F \leq c\|x\|_E \quad \forall x \in M. \tag{4.9}$$

- Докажем, что

$$\|u(x)\|_F \leq 2c\|x\|_E.$$

- Пусть элемент $x \in E$ является произвольным.
- Имеем: множество $B(0, \|x\|_E) \cap B\left(x, \frac{\|x\|_E}{2}\right)$ не пусто и открыто.
- Тогда из того, что $\bar{M} = E$, следует, что

$$\exists\, x_1 \in B(0, \|x\|_E) \cap B\left(x, \frac{\|x\|_E}{2}\right) \cap M.$$

- Далее, аналогично получаем

$$\exists\, x_2 \in B(0, \|x - x_1\|_E) \cap B\left(x - x_1, \frac{\|x - x_1\|_E}{2}\right) \cap M,$$

-

$$\exists\, x_3 \in B(0, \|x - (x_1 + x_2)\|_E) \cap$$
$$\cap\, B\left(x - (x_1 + x_2), \frac{\|x - (x_1 + x_2)\|_E}{2}\right) \cap M.$$

- Продолжая этот процесс, в общем случае получаем:
- $$\exists\, x_k \in B\left(0, \left\| x - \sum_{n=1}^{k-1} x_n \right\|_E\right) \cap$$
$$\cap\, B\left(x - \sum_{n=1}^{k-1} x_n, \frac{\left\| x - \sum\limits_{n=1}^{k-1} x_n \right\|_E}{2}\right) \cap M.$$

- Заметим, что $\|x_2\|_E < \|x - x_1\|_E < \dfrac{\|x\|_E}{2}$,
- $\|x_3\|_E < \|x - (x_1 + x_2)\|_E < \dfrac{\|x - x_1\|_E}{2} < \dfrac{\|x\|_E}{4}$.
- Продолжая этот процесс, получаем, что $\{x_k\}$ — это такая последовательность, что
-
$$\|x_k\|_E < \frac{\|x\|_E}{2^{k-1}}, \quad \|x - (x_1 + \cdots + x_k)\|_E < \frac{\|x\|_E}{2^k}.$$

- Рассмотрим подробно последовательность

$$s_k := x_1 + \ldots + x_k.$$

- Имеем: $s_k \to x$ *по построению*.
- Далее, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(x_k)$ *абсолютно сходится*,
- так как

$$\|u(x_k)\|_F \leq c\|x_k\|_E < \frac{\|x\|_E}{2^{k-1}},$$

то есть ряд оценивается сверху геометрической прогрессией с показателем $q = 1/2$.

Вспомним теорему о простой сходимости абсолютно сходящихся рядов (теорема 2.2, лекция 9):

Теорема 2.2. **(О простой сходимости абсолютно сходящегося ряда.)** Если ряд с общим членом x_n абсолютно сходится в банаховом пространстве E, то он просто сходится. Имеет место оценка

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\|_E \le \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E .$$

- Напомним, E является полным нормированным пространством.
- Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(x_k)$ сходится.
- То есть, сходится последовательность частичных сумм:

$$u(x_1) + u(x_2) + \ldots + u(x_k) \underset{k\to\infty}{\to} y \text{ в } F.$$

- Так как u — линейный оператор, то это означает, что

$$u(s_k) \underset{k\to\infty}{\to} y \text{ в } F.$$

- Итак, имеем, что $s_k \to x$, $u(s_k) \to y$ и u — замкнутый оператор (по условию теоремы).
- Значит, $\|u(s_k)\|_F \to \|u(x)\|_F$.
- Выводим оценку:

$$\|u(s_k)\|_F \leq \|u(x_1)\|_F + \ldots + \|u(x_k)\|_F \leq$$

$$\leq c \cdot (\|x_1\|_E + \ldots + \|x_k\|_E) <$$

$$< c\|x\|_E \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} \right) < 2c\|x\|_E.$$

- Итак,

$$\|u(s_k)\|_F < 2c\|x\|_E.$$

- Предельным переходом при $k \to \infty$ получаем

$$\|u(x)\|_F \leq 2c\|x\|_E \quad \forall\, x \in E.$$

Шаг 2. Освободимся от дополнительного условия.
Напомним:

Пусть, дополнительно, имеем, что существуют постоянная $c \geq 0$, множество $M \subset E$, такое, что $\bar{M} = E$ и оценка

$$\|u(x)\|_F \leq c\|x\|_E \quad \forall\, x \in M. \tag{4.9}$$

- Введём в рассмотрение множества

$$E_n = \{x \in E \ : \quad \|u(x)\|_F \leq n\|x\|_E\}.$$

- Заметим:

$$0 \in E_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

- Далее имеем, что E — полное. Значит по *теореме Бэра о категориях* получаем:
- E — множество *второй категории*.
- Отсюда следует, что хотя бы одно из E_n — тоже множество *второй категории*.

Напомним:

Теорема 1.4. (Лекция 5.)

(Теорема Бэра о категориях.) Полное метрическое пространство E не может быть представлено в виде объединения счётного числа нигде не плотных множеств.

Ещё напомним:

Опр. 1.28. (Лекция 5.)

Если множество можно представить в виде конечной или счётной суммы множеств, нигде не плотных в E, то оно называется *множеством первой категории*. Все остальные множества называются *множествами второй категории*.

- Из теоремы Бэра следует, что найдётся номер n_0, такой, что
$$\bar{E}_{n_0} \supset B(x_0, r_0).$$
- При этом можно легко добиться того, чтобы $x_0 \in E_{n_0}$, так как u — линейный.
- Нетрудно заметить, что
$$\overline{B(x_0, r_0) \cap E_{n_0}} = \overline{B(x_0, r_0)} \quad (= \bar{B}(x_0, r_0)).$$

Важно! Центральное место в доказательстве: Мы докажем, что для некоторого $n_1 = n_1(n_0, r_0, x_0)$ имеет место совпадение множеств $\overline{E_{n_1}} = E$.

- Пусть $x \in S(0, r_0)$ (— сфера радиуса r_0). Тогда

$$x + x_0 \in \bar{B}(x_0, r_0) = \overline{B(x_0, r_0) \cap E_{n_0}}.$$

- Существует последовательность $x'_n \in B(x_0, r_0) \cap E_{n_0}$ такая, что $x'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x + x_0$.
- Значит, $x_n := x'_n - x_0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.
- Покажем сейчас, что с некоторого номера N все x_n принадлежат некоторому E_{n_1}.

Имеем:

- $$\|u(x_n')\|_F \le n_0 \|x_n'\|_E;$$

- $$\|x_n\|_E = \|x_n' - x_0\|_E < r_0$$
 в силу того, что $x_n' \in B(x_0, r_0) \cap E_{n_0}$;

- из $x_n' \to x + x_0$ следует, что $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$, причём $\|x\|_E = r_0$ в силу того что $x \in S(0, r_0)$.

- Это означает, что
$$\exists\, N: \quad \forall\, n \ge N \text{ имеем } \|x_n\|_E > \frac{\|x\|_E}{2} = \frac{r_0}{2}.$$

- $$\Rightarrow \quad 1 < \frac{2\|x_n\|_E}{r_0}.$$

Оцениваем:

- $$\|u(x_n)\|_F \le \|u(x_n')\|_F + \|u(x_0)\|_F$$

- $$\le n_0(\|x_n'\|_E + \|x_0\|_E) = n_0(\|x_n + x_0\|_E + \|x_0\|_E)$$

- $$\le n_0 \left(\|x_n\|_E + 2\|x_0\|_E \frac{2\|x_n\|_E}{r_0} \right) = \dots$$

- (последнее неравенство справедливо в силу того, что $1 < 2\|x_n\|/r_0$)

- $$\dots = n_0 \left(1 + \frac{4\|x_0\|_E}{r_0} \right) \|x_n\|_E \quad \forall\, n \ge N.$$

- То есть, получили

$$n_1 = \left[n_0 \left(1 + \frac{4\|x_0\|_E}{r_0} \right) \right] + 1$$

и

$$\|u(x_n)\|_F \le n_1 \|x_n\|_E \ \forall\, n \ge N.$$

- Таким образом, из того, что

$$x_n \in E_{n_1}, \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x,$$

следует $S(0, r_0) \subset \overline{E_{n_1}}$ в силу произвольности $x \in S(0, r_0)$.

- Остаётся заметить, что для произвольного $x \in E$ ($x \neq 0$) имеем

$$\frac{r_0}{\|x\|_E} x \in S(0, r_0).$$

- Тогда

$$x_n \in E_{n_1}, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{r_0}{\|x\|_E} x \quad \Rightarrow$$

- $$\frac{\|x\|_E}{r_0} x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \tag{4.10}$$

  и

$$\left\| u\left(\frac{\|x\|_E}{r_0} x_n\right)\right\|_F < \frac{\|x\|_E}{r_0} n_1 \|x_n\|_E = n_1 \left\| \frac{\|x\|_E}{r_0} x_n \right\|_E. \tag{4.11}$$

- Из (4.10) и (4.11) следует, что $x \in \overline{E_{n_1}}$.
- Это означает, что

$$x \text{ — \textit{точка прикосновения} множества } E_{n_1}.$$

- Наконец, комбинируем результаты шагов 1 и 2.

Теорема 4.6 доказана. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №22

[4.4.] Теоремы Банаха о замкнутом графике и открытом отображении [окончание]

4.5. Теорема Неймана

4.6. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха — Штейнгауза

Теорема 4.7. **(Теорема Банаха об открытом отображении.)** Пусть E, F — банаховы пространства,

$$u: \; E \mapsto F \quad — \quad \text{линейный взаимно однозначный непрерывный оператор,}$$

$$\Omega_u = E, \quad \Delta_u = F.$$

Тогда обратный оператор непрерывен.

Д-во.

- По предложению 4.2 лекции 20 оператор u — замкнут, так как

$$u \text{ — непрерывен, } \Omega_u = E,$$

- Важно: всё полное пространство замкнуто.

- Значит u^{-1} замкнут по теореме 4.4 лекции 20.
- А по теореме 4.6 (о замкнутом графике)

$$u^{-1} \text{ является непрерывным.}$$

- Это следует из того, что u^{-1} замкнут и

$$\Delta_u = \Omega_{u^{-1}} = F.$$

□

Теорема 4.8. **(Критерий непрерывной обратимости.)** Справедливо следующее утверждение: Линейный оператор u имеет непрерывный обратный тогда и только тогда, когда

$$\exists\, m > 0 : \quad \|u(x)\|_F \geq m\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

Замеч. 4.9. Эта теорема также в литературе называется теоремой об обратном операторе.

$(\Rightarrow)$

- Если существует непрерывное отображение u^{-1}, то существует $C > 0$, такая постоянная, что
-

$$\|u^{-1}(y)\|_E \leq C\|y\|_F. \quad \text{Тогда } m = \frac{1}{C}.$$

Таким образом, утверждение в одну сторону доказано.

$(\Leftarrow)$

- При $x_1 \neq x_2$ получаем $u(x_1) \neq u(x_2)$.
- То есть, существует обратный оператор u^{-1}.
- И тогда из неравенства $\|u(x)\|_F \geq m\|x\|_E$ следует неравенство

$$\|u^{-1}\|_E \leq \frac{1}{m}\|y\|_F \quad \forall\, y \in \Delta_u.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие. Если $u_0 \in \mathcal{L}(E, F)$ — обратимый оператор, и притом

$$\|u_0(x)\|_F \geq m\|x\|_E,$$

то для любого

$$u \in \overline{B\left(u_0, \frac{m}{2}\right)} \subset \mathcal{L}(E, F) \tag{4.12}$$

найдётся обратный оператор u^{-1}.

Замеч. 4.10. Включение (4.12) означает, что

$$\|u - u_0\|_F \leq \frac{m}{2}$$

Иными словами, шар операторов с центром в обратимом операторе состоит из обратимых операторов.

Док-во.

$$\begin{aligned}\|u(x)\|_F &= \|u(x) - u_0(x) + u_0(x)\|_F \geq \\ &\geq \|u_0(x)\|_F - \|u(x) - u_0(x)\|_F \geq \\ &\geq m\|x\|_E - \|u - u_0\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E = \\ &= (m - \|u - u_0\|_{\mathcal{L}(E,F)})\|x\|_E \geq \frac{m}{2}\|x\|_E.\end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо при условии (смотрите формулировку следствия), когда

$$\|u - u_0\| \leq \frac{m}{2}.$$

$\square$

4.5. Теорема Неймана

Наблюдение. Линейные операторы можно не только складывать, но и умножать:
для $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ определим умножение:

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)).$$

Оператор $v \circ u$ — линейный (очевидно).
Имеет место оценка

$$\|v \circ u\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|v\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|u\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Замеч. 4.11. Если $E = F = G$, то возможна коммутативность произведения, то есть, может выполняться свойство $v \circ u = u \circ v$. Но, например, в случае $E = G \neq F$ вопрос о коммутативности поставить невозможно.

Докажем следующую теорему:

Теорема 4.9. **(Теорема Неймана.)** Пусть E — банахово пространство, $u \in \mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$, $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, **тогда** существует оператор

$$(\mathbb{I} - u)^{-1} \in \mathcal{L}(E),$$

где

$$(\mathbb{I} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

и

$$\|(\mathbb{I} - u)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{1 - \|u\|_{\mathcal{L}(E)}}.$$

Д-во.

- Имеем
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|u^n\|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty,$$
так как
$$\|u^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|u\|^n_{\mathcal{L}(E)}.$$
- Здесь заметили, что $\|u\|^n_{\mathcal{L}(E)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — это геометрическая прогрессия с показателем $q < 1$.
- Так как E — банахово пространство, то и $\mathcal{L}(E)$ — банахово пространство.

■ Отсюда следует, что ряд с общим членом (u^n) суммируем по следующей теореме из прошлого семестра:

Теорема 2.2, лекция 9.

Если ряд с общим членом x_n абсолютно сходится в банаховом пространстве E, то он просто сходится. Имеет место оценка

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|.$$

- Итак, имеем $v = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$.
- Обозначим: $v_m = \sum_{n=0}^{m} u^n$.
- Рассмотрим

$$v_m \circ (\mathbb{I} - u) = (\mathbb{I} + u + u^2 + \ldots + u^m) \circ (\mathbb{I} - u) = (\mathbb{I} - u^{m+1}). \tag{4.13}$$

- Переходим к пределу при $m \to \infty$. Имеем:

$$v_m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} v \quad \text{и} \quad u^{m+1} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Таким образом, из (4.13) выводим, что

$$v \circ (\mathbb{I} - u) = \mathbb{I}.$$

- Точно также устанавливаем, что

$$(\mathbb{I} - u) \circ v_m = (\mathbb{I} - u^{m+1}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{I} - u) \circ v = \mathbb{I}.$$

Теорема Неймана доказана. $\square$

4.6. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха — Штейнгауза

Теорема 4.10. **(Принцип равномерной ограниченности.)** Пусть E — банахово пространство, $u_n \in \mathcal{L}(E, F)$. Если для любого $x \in E$ выполнено

$$\sup_n \|u_n(x)\|_F < +\infty,$$

то

$$\sup_n \|u_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

Пояснение. Иными словами из поточечной равномерной ограниченности вытекает равномерная ограниченность по нормам операторов.

Д-во. Доказательство основано на применении теоремы Бэра о категориях.

- Пусть $m, n \in \mathbb{N}$.
- Рассмотрим множества

$$E_{m,n} = \{x \in E : \ \|u_n(x)\|_F \leq m\}.$$

Заметим, что это — замкнутые множества.

- Рассмотрим множества $E^m = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_{m,n}$ — тоже замкнутые.
- Имеем:

$$E^m = \{x : \ \|u_n(x)\|_F \leq m \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\}.$$

- По условию теоремы (то есть, потому, что $\sup\limits_n \|u_n(x)\|_F < +\infty$) имеем $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E^m = E$.

- САМОЕ ВАЖНОЕ! Справедливо следующее утверждение: *по теореме Бэра существует $m_0 \in \mathbb{N}$, такое, что найдётся замкнутый шар $\bar{B}(x_0, r) \subset E^{m_0}$.*
- Доказательство этого утверждения аналогично фрагменту доказательства теоремы о замкнутом графике.
- Теперь, основываясь на этом утверждении, завершаем доказательство принципа равномерной ограниченности.
- Пусть $\|u_n(x_0)\|_F \leq d$, где $d < +\infty$ — некоторое число. Пусть x — произвольная точка из замкнутого единичного шара $\bar{B}(0, 1)$.
- Тогда из простых геометрических соображений следует, что

$$x_0 + rx \in \bar{B}(x_0, r), \quad \|u_n(x_0 + rx)\|_F \leq m_0.$$

$$x_0 + rx \in \bar{B}(x_0, r), \quad \|u_n(x_0 + rx)\|_F \leq m_0$$

- Рассмотрим равенство

$$u_n(x) = \frac{1}{r} u_n(rx) + \frac{1}{r} u_n(x_0) - \frac{1}{r} u_n(x_0)$$

$$= \frac{1}{r} u_n(x_0 + rx) - \frac{1}{r} u_n(x_0).$$

- Из него следует оценка

$$\|u_n(x)\|_F \leq \frac{1}{r}\|u_n(x_0+rx)\|_F + \frac{1}{r}\|u_n(x_0)\|_F \leq \frac{1}{r} m_0 + \frac{1}{r} d.$$

$$\|u_n(x)\|_F \le \frac{1}{r}m_0 + \frac{1}{r}d$$

- В этой оценке число в правой части не зависит от номера n, а x (напомним) — это произвольная точка из замкнутого единичного шара $\bar{B}(0, 1)$.
- Значит, по определению нормы оператора получаем

$$\|u_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \frac{m_0 + d}{r} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4.10 доказана. $\square$

Следствие. Если
$$\sup_n \|u_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} = +\infty,$$
то найдётся $x_0 \in E$, такое, что
$$\sup_n \|u_n(x_0)\|_F = +\infty.$$

(Напомним, что в пространстве $\mathcal{L}(E,F)$ по определению имеем $\Omega_u = E$, $\Delta_u = F$.)

Опр. 4.5. Говорим, что последовательность $\{u_n\}$ *сильно сходится* к некоторому u, если
$$\forall\, x \in E \quad \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x),$$
то есть имеет место *поточечная сходимость*.

Замеч. 4.12. Очевидно, из операторной сходимости следует сильная сходимость. Обратное утверждение неверно.

Пример 4.3. Рассмотрим оператор проектирования в l_2:

$$f_n: \ (x_1, x_2, \ldots) \mapsto x_n.$$

Имеем, что для любого $x \in l_2$ последовательность $f_n(x)$ сильно сходится к нулю при $n \to \infty$. Однако,

$$\|f_n\|_{\mathcal{L}(l_2,\mathbb{R})} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то есть $f_n \not\to 0$ по операторной норме (равномерно).

Теорема 4.11. **(Теорема о сильной сходимости операторов.)** Пусть E — банахово пространство, F — нормированное пространство. Пусть $\{u_n\} \subset \mathcal{L}(E, F)$ — такая последовательность, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) < +\infty \quad \forall\, x \in E.$$

Тогда $u \in \mathcal{L}(E, F)$ и $\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Д-во.

- Из принципа равномерной ограниченности вытекает, что существует $c = \mathrm{const} > 0$, такая, что

$$\|u_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq c.$$

- Линейность предельного оператора u очевидна.

- Перейдём к пределу в неравенстве

$$\|u_n(x)\|_F \leq \|u_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E.$$

- Предел в левой части существует. Действительно,

$$\|u_n(x) - u(x)\|_F \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \Rightarrow \quad \|u_n(x)\|_F \underset{n\to\infty}{\to} \|u(x)\|_F.$$

- Оценивая в правой части с помощью $\liminf$, приходим к неравенству

$$\|u(x)\|_F \leq \left(\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\right) \|x\|_E.$$

Теорема 4.11 доказана. $\square$

Теорема 4.12. **(Теорема Банаха — Штейнгауза.)** Пусть

$$\{u_n\} \quad - \quad \text{последовательность линейных непрерывных операторов,}$$

действующих из банахова пространства E в банахово пространство F, то есть

$$\{u_n\} \subset \mathcal{L}(E, F).$$

Справедливо следующее утверждение:
$\{u_n\}$ сильно сходится к некоторому оператору $u \in \mathcal{L}(E, F)$ тогда и только тогда, когда

(i) $\|u_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq c$;

(ii) $\exists \mathcal{D} \subset E$, $\bar{\mathcal{D}} = E$ и для произвольно фиксированного $x \in \mathcal{D}$ последовательность $\{u_n(x)\}$ является фундаментальной.

Д-во.

- Утверждение $(\Rightarrow)$ сразу вытекает из теоремы 4.11 (о сильной сходимости). В этом утверждении $\mathcal{D} = E$.
- Теперь докажем утверждение $(\Leftarrow)$.
- Пусть $x \in E$ произвольно, $\varepsilon > 0$ произвольно.
- Выберем $x' \in \mathcal{D}$, так, что $\|x - x'\|_E < \varepsilon$.
- Так как последовательность $\{u_n(x')\}$ фундаментальна, то существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что для любых $n, m \geq N$ имеем

$$\|u_n(x') - u_m(x')\|_F < \varepsilon.$$

Замечаем

$$\|u_n(x) - u_m(x)\|_F \leq \|u_n(x) - u_n(x')\|_F$$

$$+\|u_n(x') - u_m(x')\|_F + \|u_m(x') - u_m(x)\|_F$$

$$\leq c\varepsilon + \varepsilon + c\varepsilon = (2c+1)\varepsilon,$$

так как

$$\|u_n(x) - u_n(x')\|_F = \|u_n(x - x')\|_F$$

$$\leq \|u_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x - x'\|_E \leq c\varepsilon.$$

- На основании этой оценки замечаем, что $\{u_n(x)\}_F$ — фундаментальная последовательность. Так как F — банахово пространство, то

$$\exists \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \quad \forall\, x \in E.$$

- Отсюда по теореме 4.11 (о сильной сходимости) выводим, что
$$u \in \mathcal{L}(E, F).$$

Теорема 4.12 доказана. $\square$

ЛЕКЦИЯ №23

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ГЛАВА 5. ТЕОРЕМЫ ХАНА — БАНАХА

5.1. Аналитическая форма теоремы Хана — Банаха [начало]

5.1. Аналитическая форма теоремы Хана — Банаха

Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Опр. 5.1. Функция p со свойствами

(1) $p(0) = 0,\ p(x) \geq 0\ \forall\, x \in X$,

(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \forall\, \lambda > 0\ \forall\, x \in X$,

(3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ \forall\, x, y \in X$

называется *положительно однородным выпуклым* функционалом.

Теорема 5.1. **(Теорема Хана–Банаха: вещественный случай.)** Пусть

- X — векторное пространство над $\mathbb{R}$,
- X_0 — подпространство в X,
- p — положительный однородный выпуклый функционал на X,
- f_0 — линейный функционал на X_0 и

$$f_0(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in X_0.$$

Тогда существует f — линейный функционал на X, *продолжающий* f_0 и *подчинённый* p, то есть

$$f(x) = f_0(x) \quad \forall\, x \in X_0 \quad \text{и} \quad f(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Доказательство, этап 1: лемма об элементарном продолжении

Лемма 5.1. **(Лемма об элементарном продолжении.)** Предположим, что существует $x_0 \notin X_0$, такое, что

$$X = \{x = x' + \lambda x_0\},$$

где x' — всевозможные вектора из X_0,
λ — всевозможные вещественные числа.
Иными словами:

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists\, x' \in X_0 : \quad x = \lambda x_0 + x'.$$

Тогда продолжение функционала f_0 имеет вид

$$f(x) = f(x' + \lambda x_0) \equiv f_0(x') + \lambda c. \qquad (5.1)$$

$$f(x) = f(x' + \lambda x_0) \equiv f_0(x') + \lambda c. \qquad (5.1)$$

Пояснение.

- Для любого $x \in X$ находим λ и x' и подставляем в формулу (5.1).
- Постоянную c найдём в зависимости только от f_0 в ходе доказательства.

Д-во леммы 5.1.

- Для начала заметим, что представление для любого $x \in X$ в виде $x = \lambda x_0 + x'$ однозначно.
- Действительно, пусть также имеем $x = \lambda_1 x_0 + x_1'$. Тогда
$$(\lambda - \lambda_1)x_0 = x_1' - x' \in X_0.$$
- Так как $x_0 \notin X_0$ и X_0 — линейное подпространство, то выводим $\lambda_1 = \lambda$.
- Отсюда также заключаем, что $x_1' = x'$.
- Приступим непосредственно к доказательству леммы.
- Очевидно, f, заданный формулой (5.1) — это линейный функционал.

- Также, f, заданный формулой (5.1) — это продолжение функционала f_0.
- Действительно, если $x \in X_0$, то $x' = x \in X_0$, $\lambda = 0$. Значит,
$$f(x) = f_0(x') + \lambda c = f_0(x).$$
- Очевидно, что (по построению) f задан на *всём* пространстве X.
- Необходимо выбрать постоянную $c \in \mathbb{R}$ так, чтобы была подчинённость:

$$f_0(x') + \lambda c \leq p(\lambda x_0 + x') \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x' \in X_0. \tag{5.2}$$

$$f_0(x') + \lambda c \le p(\lambda x_0 + x') \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x' \in X_0 \quad (5.2)$$

- В зависимости от знака числа λ, неравенство (5.2) эквивалентно двум следующим:

$$c \le p\left(x_0 + \frac{x'}{\lambda}\right) - f_0\left(\frac{x'}{\lambda}\right) \quad \text{при } \lambda > 0, \qquad (5.3a)$$

$$c \ge -p\left(-x_0 - \frac{x'}{\lambda}\right) - f_0\left(\frac{x'}{\lambda}\right) \quad \text{при } \lambda < 0. \quad (5.3b)$$

- Пусть $y', y'' \in X_0$ — произвольные элементы.
- Имеет место цепочка соотношений

$$f_0(y') - f_0(y'') = f_0(y' - y'') \leq p(y' - y'') =$$

$$= p(-x_0 - y'' + x_0 + y') \leq p(-x_0 - y'') + p(x_0 + y').$$

- (Здесь первое неравенство следует из подчинённости f_0, а второе неравенство следует из полуаддитивности p.)
- Из этой цепочки соотношений следует, что

$$-p(-x_0 - y'') - f_0(y'') \leq p(x_0 + y') - f_0(y') \quad \forall\, y', y'' \in X_0. \tag{5.4}$$

$$-p(-x_0-y'')-f_0(y'') \leq p(x_0+y')-f_0(y') \quad \forall\, y', y'' \in X_0 \tag{5.4}$$

- В силу произвольности y'' имеем, что множество

$$\{\mathbb{A}(x_0, y') := p(x_0 + y') - f_0(y') \quad \forall\, y' \in X_0\} \subset \mathbb{R}$$

ограничено снизу.

- Значит оно имеет точную нижнюю грань

$$\tilde{\mathbb{A}}(x_0) = \inf_{y' \in X_0} \mathbb{A}(x_0, y').$$

$$-p(-x_0-y'')-f_0(y'') \leq p(x_0+y')-f_0(y') \quad \forall\, y', y'' \in X_0 \tag{5.4}$$

- Аналогично, в силу произвольности y' имеем, что множество

$$\{\mathbb{B}(x_0, y'') := -p(-x_0 - y'') - f_0(y'') \quad \forall\, y'' \in X_0\} \subset \mathbb{R}$$

ограничено сверху.

- Значит оно имеет точную верхнюю грань

$$\tilde{\mathbb{B}}(x_0) = \sup_{y'' \in X_0} \mathbb{B}(x_0, y'').$$

$$-p(-x_0-y'')-f_0(y'') \le p(x_0+y')-f_0(y') \quad \forall\, y', y'' \in X_0 \tag{5.4}$$

- Ввиду (5.4) очевидно, что $\tilde{\mathbb{B}}(x_0) \le \tilde{\mathbb{A}}(x_0)$.
- Значит существует $c = c(x_0)$, такое, что

$$\tilde{\mathbb{B}}(x_0) \le c(x_0) \le \tilde{\mathbb{A}}(x_0). \tag{5.5}$$

- Заметим, что из (5.5) сразу следует (5.3a), если взять $y' = \dfrac{x'}{\lambda}$ (при $\lambda > 0$).
- Аналогично, из (5.5) следует (5.3b), если взять $y'' = \dfrac{x'}{\lambda}$ (при $\lambda < 0$).

■ Наконец, обратим внимание на то, что по построению постоянная c зависит только от x_0, f_0 и p.

Лемма 5.1 доказана. □

Замеч. 5.1. Если X — это *нормированное* пространство, то X_0 является гиперплоскостью в X.

Опр. 2.18. Подпространство $H \subset E$, обладающее свойством $E = H + \mathbb{R}a$ (или $E = H + \mathbb{C}a$), называется гиперплоскостью.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №24

[5.1.] Аналитическая форма теоремы Хана — Банаха [окончание]

5.2. Теорема Хана — Банаха (комплексный случай)

Вспомним:

Глава 5. Теоремы Хана–Банаха

5.1. Аналитическая форма теоремы Хана–Банаха

Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Опр. 5.1. Функция p со свойствами

(1) $p(0) = 0,\ p(x) \geq 0\ \forall\, x \in X$,

(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \forall\, \lambda > 0\ \forall\, x \in X$,

(3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ \forall\, x, y \in X$

называется положительно однородным выпуклым функционалом.

Теорема 5.1. **(Теорема Хана–Банаха: вещественный случай.)** Пусть

- X — векторное пространство над $\mathbb{R}$,
- X_0 — подпространство в X,
- p — положительный однородный выпуклый функционал на X,
- f_0 — линейный функционал на X_0 и

$$f_0(x) \le p(x) \quad \forall x \in X_0.$$

Тогда существует f — линейный функционал на X, продолжающий f_0 и подчинённый p, то есть

$$f(x) = f_0(x) \quad \forall x \in X_0 \quad \text{и} \quad f(x) \le p(x) \quad \forall x \in X.$$

Лемму 5.1 уже доказали.
Далее приступим ко второму этапу доказательства.
Этот этап основан на применении *леммы Цорна*.

Доказательство теоремы 5.1, этап 2: применение леммы Цорна

- Введём в рассмотрение множество

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \;=\; \{(Y, g):\quad & X_0 \subset Y \subset X,\\
& Y \text{ — всевозможные векторные}\\
& \text{подпространства в } X,\\
& g \text{ — всевозможные линейные}\\
& \text{функционалы на } Y \text{ со свойствами}\\
& (1)\quad f_0(x) = g(x) \quad \forall\, x \in X_0,\\
& (2)\quad g(x) \le p(x) \quad \forall\, x \in Y.\}
\end{aligned}
$$

- $\mathcal{A}$ — это множество всевозможных вещественных продолжений g функционала f_0.

- Введём на множестве $\mathcal{A}$ *отношения порядка* $\mathfrak{R}$ таким образом:
  Пусть
  $$a, b \in \mathcal{A}, \quad a = (Y_1, g_1), \quad b = (Y_2, g_2).$$
  Обозначаем:
  $$\langle a, b \rangle \in \mathfrak{R}$$
  тогда и только тогда, когда
  $$Y_1 \subset Y_2 \text{ и } g_2(x) = g_1(x) \quad \forall\, x \in Y_1.$$
- Иными словами,

  функционал g_2 служит продолжением функционала g_1.
- Применим для изучения множества $\mathcal{A}$ лемму Цорна.

Лемма Цорна

Если в частично упорядоченном множестве любое линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань, то во множестве есть максимальный элемент.

Лемма Цорна — это классическая лемма из курса математической логики. В нашем курсе мы её доказывать не будем. $\square$

Напомним несколько определений:

Некоторые необходимые сведения из математической логики

Пусть A — множество, $\mathfrak{R} \subseteq A^2$ — бинарное отношение.

Опр. 5.1. Бинарное отношение на множестве $\langle x, y \rangle$ *рефлексивно*, если $\langle x, x \rangle \in \mathfrak{R} \; \forall x \in A$.

Опр. 5.2. Бинарное отношение на множестве $\langle x, y \rangle$ *антисимметрично*, если из того, что $\langle x, y \rangle \in \mathfrak{R}$, $\langle y, x \rangle \in \mathfrak{R}$ следует, что $x = y$.

Опр. 5.3. Бинарное отношение на множестве $\langle x, y \rangle$ *транзитивно*, если из того, что $\langle x, y \rangle \in \mathfrak{R}$, $\langle y, z \rangle \in \mathfrak{R}$ следует, что $\langle x, z \rangle \in \mathfrak{R}$.

Опр. 5.4. Бинарное отношение $\mathfrak{R}$ на A — *частичный порядок*, если $\mathfrak{R}$ — рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Опр. 5.5. Частичный порядок называется *линейным порядком*, если $\forall\, x, y \in A$ имеет место:

$$\text{либо } \langle x, y\rangle \in \mathfrak{R}, \quad \text{либо } \langle y, x\rangle \in \mathfrak{R}.$$

Опр. 5.6. Пара $\{A, \mathfrak{R}\}$ называется *частично упорядоченным множеством*, если $\mathfrak{R}$ — частичный порядок.

Опр. 5.7. Элемент a называется *максимальным* в A, если имеем следующее утверждение:
$\langle a, x\rangle \in \mathfrak{R} \quad \forall\, x \in A \quad \Rightarrow \quad a = x.$

Вернёмся к доказательству теоремы Хана — Банаха.

- Заметим, что $(\mathcal{A}, \mathfrak{R})$ удовлетворяет условиям леммы Цорна.
- Действительно, *частичность порядка* очевидна.
- ВАЖНО: *Докажем наличие верхней грани* у линейно упорядоченного подмножества.
- Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ — линейно упорядоченное подмножество, то есть,

$$\text{если } a, b \in \mathcal{B}, \text{ то } \langle a, b\rangle \in \mathfrak{R} \text{ или } \langle b, a\rangle \in \mathfrak{R}.$$

- Введём
$$Z = \bigcup_{(Y,g)\in\mathcal{B}} Y.$$
- Заметим, что Z — линейное подпространство X:
$$\text{если } z_1, z_2 \in Z, \text{ то } \exists\, Y_1, Y_2 : \quad z_1 \in Y_1,\ z_2 \in Y_2.$$
- Отсюда следует, что в одном из Y_1 или Y_2 находятся *одновременно* z_1 и z_2.
- Это утверждение справедливо в силу линейной упорядоченности.
- В свою очередь, в этом подпространстве (Y_1 или Y_2) находится сумма $z_1 + z_2$, а значит $z_1 + z_2 \in Z$.

- Определим на Z функционал h так:
- если z принадлежит Z, то z принадлежит некоторому Y, так, что $(Y, g) \in \mathcal{B}$.
- Положим $h(z) = g(z)$.
- Такое определение корректно. В самом деле, пусть $z \in Z$, так, что $z \in Y_1$ и $z \in Y_2$ одновременно.
- Отсюда следует, что $(Y_1, g_1) \in \mathcal{B}$ и $(Y_2, g_2) \in \mathcal{B}$.
- Но в силу линейности порядка и того, что один из функционалов g_1, g_2 есть продолжение другого, имеем

$$g_2(z) = g_1(z) = h(z) \quad (\text{в } Y_1 \text{ или } Y_2).$$

- В силу этого построения имеем, что (Z, h) — это верхняя грань множества $\mathcal{B}$.
- Таким образом, все условия леммы Цорна выполнены.
- Значит в $\mathcal{A}$ существует максимальный элемент. Назовём его $a = (Y, f)$.
- Наконец, предположим, что $Y \neq X$.
- Но по лемме об элементарном продолжении a тогда можно продолжить ещё, так, что $\tilde{a} = (Y, \tilde{f})$ и $a \leq \tilde{a}$.
- Это противоречит максимальности a в $\mathcal{A}$.

Теорема 5.1 доказана. $\square$

5.2. Теорема Хана–Банаха: комплексный случай

Опр. 5.8. Функционал $p\colon X \mapsto \mathbb{R}$ (X — векторное пространство) называется *полунормой*, если

(1) $p(x) \geq 0$, $p(0) = 0$,

(2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,

(3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Наблюдение. Отличие полунормы от нормы заключается в следующем: для полунормы не обязательно, чтобы $x = 0$, если $p(x) = 0$.

Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Обозначим через $X_{\mathbb{R}}$ множество точек из X с заданной в X операцией сложения и с умножением только на $\lambda \in \mathbb{R}$ (точнее: на $\lambda \in \mathbb{C}$, у которых $\operatorname{Im} \lambda = 0$).

Тогда $X_{\mathbb{R}}$ – векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Далее, пусть f — какой-либо функционал на X,

$$\operatorname{Re} f(x) \stackrel{def}{=} g(x), \quad \operatorname{Im} f(x) \stackrel{def}{=} h(x).$$

То есть,

$$f(x) = g(x) + ih(x).$$

Наблюдение. Так как f — линейный, то можно указать связь между $h(x)$ и $g(x)$:

$$g(ix) + ih(ix) \equiv f(ix) = if(x) \equiv ig(x) - h(x),$$

и из равенства комплексных чисел слева и справа получаем

$$h(x) = -g(ix) \quad \forall\, x \in X. \tag{5.6}$$

Теорема Хана–Банаха в комплексном случае: теорема Сухомлинова–Боненблюста–Собчика.

Теорема 5.2. **(Теорема Сухомлинова–Боненблюста–Собчика.)** Пусть

- X — векторное пространство над $\mathbb{C}$,
- p — полунорма,
- X_0 — подпространство пространства X,
- f_0 — линейный комплексный функционал на X_0,

такой, что

$$|f_0(x)| \leq p(x) \quad \forall\, x \in X_0.$$

Тогда существует $f\colon X \mapsto \mathbb{C}$, такое, что

(i) $f(x) = f(x_0) \quad \forall\, x \in X_0$;

(ii) $|f(x)| \leq p(x) \quad \forall\, x \in X$.

Д-во.

- Обозначим $g_0(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$ — линейный функционал на вещественном векторном пространстве $X_{0,\mathbb{R}}$.
- Имеем: $g_0(x) \leq |g_0(x)| \leq |f_0(x)| \leq p(x)$.
- Таким образом, попали для g_0 в условия теоремы Хана–Банаха в вещественном случае для $X_{\mathbb{R}}$, $X_{0,\mathbb{R}}$. То есть существует продолжение $g(x)$ для $g_0(x)$ и имеем
$$g(x) \leq p(x).$$
- Отсюда и из соотношений
$$-g(x) = g(-x) \leq p(x) = p(-x)$$
(здесь, последнее (самое правое) из равенств справедливо в силу определения полунормы) получаем, комбинируя с предыдущим пунктом:
$$|g(x)| \leq p(x). \tag{5.7}$$

- *Определим* на X функционал f:

$$f(x) = g(x) - ig(ix). \tag{5.8}$$

- Здесь, $g(x)$ — это продолженный в силу теоремы Хана–Банаха в вещественном случае функционал, подчинённый условию (5.7).
- Проверим *линейность* f на X:
- Имеем $f(x+y) = f(x) + f(y)$, так как g — линейный функционал;

- далее, имеем:

$$f(\lambda x) = g(\lambda x) - ig(i\lambda x) = \lambda g(x) - \lambda ig(ix) = \lambda f(x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

в силу линейности g на $X_{\mathbb{R}}$.

- Наконец,

$$f(ix) = g(ix) - ig(i^2 x) = g(ix) - ig(-x) = \dots$$

$$\dots = (\text{линейность } g \text{ на } X_{\mathbb{R}}) = g(ix) + ig(x) \overset{(5.8)}{=} if(x),$$

- то есть из двух цепочек равенств получаем, что f — это линейный оператор на $X_{\mathbb{C}} \equiv X$.

- Отсюда в силу (5.8) и (5.7) получаем, что f — *продолжение* f_0 с X_0 на X в комплексном случае.
- Докажем *подчинённость*:
- по формуле Эйлера запишем

$$f(x) = re^{-i\vartheta}, \text{ где } r = |f(x)|,$$

тогда

$$r = |f(x)| = e^{i\vartheta} re^{-i\vartheta} = e^{i\vartheta} f(x) = f(e^{i\vartheta} x) = \dots$$

Здесь последнее равенство верно в силу линейности f

- Итак, $f(e^{i\vartheta} x)$ оказался вещественным и неотрицательным. Значит из (5.8) вытекает

$$f(e^{i\vartheta} x) = Re\, f(e^{i\vartheta} x) + iIm\, f(e^{i\vartheta} x) = g(e^{i\vartheta} x),$$

так как g — вещественный функционал.

- Продолжим равенство:
- $$r = |f(x)| = e^{i\vartheta} r e^{-i\vartheta} = e^{i\vartheta} f(x) = f(e^{i\vartheta} x) = \dots$$

$$\dots = g(e^{i\vartheta} x) \le p(e^{i\vartheta} x) = |e^{i\vartheta}| p(x) = p(x).$$

Здесь неравенство получилось, так как функционал g подчинён полунорме p, а равенство $p(e^{i\vartheta} x) = |e^{i\vartheta}| p(x)$ справедливо по определению полунормы.

- В итоге получили условие подчинённости

$$|f(x)| \le p(x).$$

Теорема 5.2 доказана. □

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №25

5.3. Теорема Хана–Банаха о продолжении линейных функционалов в нормированных векторных пространствах

5.4. Следствия теорем Хана–Банаха

5.3. Теорема Хана–Банаха о продолжении линейных функционалов в нормированных векторных пространствах

Теорема 5.3. **(Теорема Хана–Банаха в нормированном пространстве.)** Пусть

- X — нормированное пространство,
- X_0 — линейное подпространство в X,
- f_0 — непрерывный лин. функционал, заданный на X_0.

Тогда существует определённый на **всём** X непрерывный линейный функционал f, такой, что

(1) f служит продолжением функционала f_0;

(2) $\|f_0\| = \|f\|$.

Д-во.

- Положим $p(x) = \|f_0\| \|x\|_X$.
- Тогда p — полунорма, определённая на всём X, причём
$$|f_0(x)| \leq p(x) \text{ на } X_0.$$
(Напомним, что по определению нормы имеем $|f_0(x)| \leq \|f_0\| \|x\|_X$.)
- По теоремам в вещественном или комплексном случаях существует f — функционал, определённый на всём X, служащий продолжением f_0 и удовлетворяющий условию
$$|f(x)| \leq p(x).$$

- Таким образом,

$$\|f\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} p(x) = \|f_0\|.$$

- С другой стороны, так как f — продолжение f_0, то $\|f\| \geq \|f_0\|$.
- Итого, выводим, что

$$\|f_0\| = \|f\|.$$

Теорема 5.3 доказана. $\square$

5.4. Следствия теорем Хана–Банаха

Теорема 5.4. **(О существовании нетривиальных непрерывных функционалов.)** Пусть X — нормированное пространство.

Для произвольных $x_0 \in X$ $(x_0 \neq 0)$ найдётся $f \in X^*$, такой функционал, что

$$\|f\| = 1, \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

Д-во.

- Возьмём $X_0 = \{\lambda x_0 : \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$.
- Положим $f_0(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$.

  (То есть, f_0 — функционал, линейный определённый на X_0).
- Положим $p(x) = \|x\| \quad \forall\, x \in X$.

- Остаётся применить теорему Хана–Банаха для нормированных пространств:
- p — это полунорма, так как является нормой. Очевидно,

$$|f_0(x)| \leq p(x) \quad \forall\, x \in X_0.$$

- Более точно, $|f_0(x)| = p(x)$, так как

$$|f_0(x)| = |\lambda| \|x_0\|_X \quad \text{и} \quad p(x) = |\lambda| \|x_0\|_X.$$

- Очевидно, f_0 — линейный на X_0 функционал, причём $\|f_0\| = 1$, так как $|f(x_0)| = \|x_0\|_X$.

Теорема 5.4 доказана. $\square$

Теорема 5.5. **(Об аннуляторе.)** Пусть X — нормированное пространство, L — подпространство в X, $x_0 \notin L$ и $d(x_0, L) = d > 0$ — расстояние от x_0 до L.
Тогда существует $f \in X^*$ со следующими свойствами:

(i) $\forall x \in L \quad f(x) = 0$,

(ii) $f(x_0) = 1$,

(iii) $\|f\|_{X^*} = 1/d$.

Опр. 5.9. Совокупность функционалов, равных нулю на подпространстве L, называется *аннулятором* этого подпространства и обозначается $L^{\perp}$.

Д-во.

- Положим

$$X_0 = \{x = \lambda x_0 + x', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\, \forall\, x' \in L\}.$$

- Вспомним из лекции 12 (о понятии гиперплоскости): представление $x = \lambda x_0 + x'$ *единственно*.
- Определим:

$$f_0(x) = \lambda.$$

- Вспомним: здесь f_0 — это функционал, который определяет *гиперплоскость* L в пространстве X_0.
- Действительно, имеем $f_0(x) = 0 \quad \forall\, x \in L$. Значит, $f_0(x) = 0$ — это *уравнение гиперплоскости* в силу определения гиперплоскости.
- Очевидно, $f_0(x_0) = 1$ ($x_0 = x$ при $\lambda = 1$ и $x' = 0$).

- При этом имеет место оценка:

$$\|x\|_X = \|\lambda x_0 + x'\|_X = |\lambda| \left\| x_0 - \left(-\frac{1}{\lambda}x'\right)\right\|_X \geq |\lambda| d = |f_0(x)|d.$$

- В этом неравенстве заметили, что $-\dfrac{1}{\lambda}x' \in L$ и что поэтому $\left\| x_0 - \left(-\dfrac{1}{\lambda}x'\right)\right\|_X \geq d(x_0, L) = d$.
- То есть,

$$|f_0(x)| \leq \frac{1}{d}\|x\|_X \quad \forall\, x \in X_0 \setminus L \quad (\lambda \neq 0).$$

- На L оценка очевидно справедлива, так как

$$f_0(x) = 0 \quad \forall\, x \in L.$$

- Таким образом,

$$\|f_0\|_{X^*} \le 1/d. \quad (f_0 : \ X_0 \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C}), \ \text{т.е. } f_0 \in X_0^*.) \tag{5.9}$$

- Далее заметим, что f_0 непрерывен на X_0 по своей конструкции.
- Отсюда по теореме о гиперплоскости из прошлого семестра следует, что L *замкнуто* в X_0.

- Так как L замкнуто, то найдётся $x_* \in L$, такое, что

$$d(x_0, L) = d(x_0, x_*) = \frac{1}{d}.$$

- Теперь положим $\tilde{x} = \dfrac{x_0 - x_*}{\|x_0 - x_*\|_X}$.
- Имеем $\|x_0 - x_*\|_X = d$, $f_0(x_0) = 1$, $f_0(x_*) = 0$.
- Значит,

$$f_0(\tilde{x}) = \frac{1}{\|x_0 - x_*\|_X}[f_0(x_0) - f_0(x_*)] = \frac{1}{d}. \qquad (5.10)$$

- Итак, из (5.9) и (5.10) выводим, что

$$\|f_0\|_{X^*} = \frac{1}{d}.$$

- Теперь мы можем применить теорему Хана–Банаха в нормированных пространствах и продолжить функционал f_0 с X_0 в X.

Теорема 5.5 (об аннуляторе) доказана. $\square$

Дополнение. При применении теоремы Хана–Банаха в конце доказательства теоремы 5.5 имеем, что *полунорма* имеет вид

$$p(x) = \frac{\|x\|_X}{d}.$$

Следствие 1 теоремы 5.5. Линейное подпространство L всюду плотно в нормированном пространстве X тогда и только тогда, когда из того, что $f \in X^*$ и $f(x) = 0 \ \forall\, x \in L$ **следует**, что $f \equiv 0$.

Опр. 5.10. Пусть

$$x_1, \ldots, x_n \in X, \quad f_1, \ldots, f_n \in X^*.$$

Системы

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{и} \quad \{f_1, \ldots, f_n\}$$

называются *биортогональными*, если

$$f_j(x_i) = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ — символ Кронекера}).$$

Следствие 2 теоремы 5.5.

(О биортогональности.)

- (1) Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — линейно независимая система в нормированном пространстве X.
- (1*) **Тогда** существует система $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset X^*$, биортогональная к ней.
- (2) Пусть $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — линейная независимая система линейных функционалов над векторным пространством X.

Тогда найдётся множество $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, биортогональное к множеству $\{f_1, \ldots, f_n\}$.

Д-во след. 2 теоремы 5.5.

- Положим

$$L = \{x = \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n\}.$$

- Множество L является замкнутым в векторном пространстве X, так как оно является конечномерным. См. теорему Рисса о конечномерных пространствах:
- Теорема 2.9. (Теорема Рисса. Лекция 14.) Локально компактное нормированное пространство E конечномерно.
- $x_1 \notin L$ в силу линейной независимости.
- Отсюда следует в силу замкнутости L, что

$$d(x_1, L) = d > 0.$$

- По теореме 5.5 (об аннуляторе) найдётся $f_1 \in X^*$, такой функционал, что
- $f_1(x_1) = 1$,
- $f_1(x') = 0 \quad \forall\, x' \in L$, в частности $f_1 = 0$ при $x = x_2, \ldots, x_n$.
- Точно так же строим $f_2, \ldots, f_n$.
- Таким образом, утверждение $(1*)$ доказано.

Пункт (2) Дадим только схему:

- Проведём индукцию по n:
- $n = 1$: f_1 — ненулевой функционал.
- Отсюда следует, что $f(x_*) \neq 0$ при некотором x_*.
- $\Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{x_*}{f(x_*)}$ — искомая точка.

Индукц. шаг

- Пусть верно для $n-1$ функционалов
$$\{f_2, \ldots, f_n\} \quad (n \geq 2).$$
- Положим: $\{\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\}$ — биортогональная система.
- Каждому $x \in X$ сопоставим
$$x' = x - (f_2(x)\tilde{x}_2 + \ldots + f_n(x)\tilde{x}_n) \in X.$$
- Заметим, что $f_1(x') \neq 0 \ \forall\, x \in X$,
- иначе имеет место противоречие с линейной независимостью системы $\{f_1, \ldots, f_n\}$.

- Получаем

$$x_1 = \frac{1}{f_1(x')} x' \text{ — искомый вектор в } X.$$

- Действительно, $f_j(x_1) = \delta_1^j$ по индуктивному предположению.

Доказательство следствия 2 теоремы 5.5 завершено. □

Дополнение к теореме Хана–Банаха

Замеч. 5.2.

- В случае *сепарабельного* векторного пространства можно упростить доказательство: не использовать лемму Цорна.
- Имеем: если X — сепарабельное пространство, **то** существует счётное всюду плотное множество X'.
- Пусть $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subset X'$.
- Здесь, X' — это линейное подпространство векторов, не принадлежащих $X_0 \equiv \Omega_{f_0}$.

- Согласно лемме об элементарном продолжении мы последовательно продолжаем f_0 на

$$X_1 = X_0 + \{x_1\}, \quad X_2 = X_1 + \{x_2\} \text{ и так далее.}$$

- В результате, $\tilde{f}$ — это ограниченный линейный оператор. Он определён на $\tilde{X} = \bigcup X_k$.
- Заметим, что $\bigcup X_k$ является плотным векторным подпространством в X.
- Теперь мы продолжаем $\tilde{f}$ *по непрерывности* согласно следующей лемме и этим самым завершаем доказательство.

□

Лемма 5.2. Пусть f и g — два непрерывных отображения метрического пространства E в метрическое пространство E'. Множество A всех точек $x \in E$, в которых выполняется равенство $f(x) = g(x)$, является замкнутым в E.

Д-во леммы 5.2. Лемма 5.2 — это лемма A.1 из приложения к части I настоящего пособия. Доказательство полностью приведено в приложении к части I.

- Здесь ограничимся идеей доказательства:
- надо доказать, что множество $E \setminus A$ открыто.
- Это доказательство несложное: оно сразу следует из определений *непрерывного отображения* и *открытого множества* и проводится методом от противного.

$\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №26

5.5. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Функционал Минковского

5.5. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Функционал Минковского

Опр. 5.11. Пусть $a, b \in X$, где X — векторное пространство. Множество

$$[a, b] := \{ta + (1 - t)b : \quad t \in [0, 1]\}$$

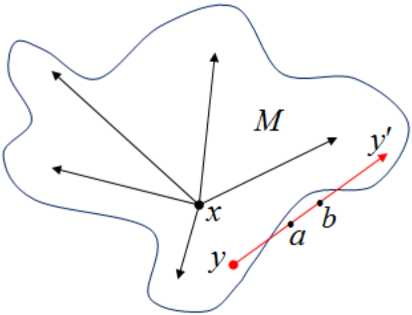
назовём *отрезком*.

Опр. 5.12. Говорим, что множество $M \subset X$ — выпуклое, если из того, что $a, b \in M$, следует $[a, b] \subset M$.

Опр. 5.13. Пусть $M \subset X$ — некоторое множество. Говорим, что $x \in M$ — это *$\star$-внутренняя точка*, если для любого $y \in X$ существует $\delta > 0$, так, что, $[x, x + \delta y] \subset M$.

Обозн. Через $J(M)$ обозначим множество $\star$-внутренних точек множества M.

Опр. 5.14. Множество $J(M)$ назовём *ядром множества* M.



Пример 5.1. Точка x — $\star$-внутренняя точка в $M \subset \mathbb{R}^2$.
Точка y — не $\star$-внутренняя точка в M, так как $[a, b] \subset [y, y']$, но $[a, b] \not\subset M$.

Предлож. 5.1. **(Базовые свойства выпуклых множеств.)**

(i) Пусть E_1 и E_2 — выпуклые множества.
Тогда $E_1 + E_2$ — выпуклое множество.

(ii) Пусть E — выпуклое множество.
Тогда $J(E)$ — выпуклое множество.
(Возможно $J(E)$ — это пустое множество.)

(iii) Пусть E — выпуклое множество.
Тогда λE — выпуклое множество.

(iv) Пусть E_1 — выпуклое множество, $x \in J(E_2)$.
Тогда $x \in J(E_1 + E_2)$.

(v) Пусть $x \in J(E)$, $\lambda \neq 0$.
Тогда $\lambda x \in J(\lambda E)$.

Опр. 5.15. Выпуклое множество с непустым ядром называется *выпуклым телом*.

Пример 5.2. **(Выпуклое множество с пустым ядром.)** Рассмотрим пространство l_2. Рассмотрим следующее множество:

$$M = \left\{ x \in l_2 \,|\, x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad |x_n| \le \frac{1}{2^{n-1}} \right\}.$$

Очевидно, M — выпуклое множество.
Пусть $x_0 \in M$ — произвольная точка,

$$y = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right).$$

Заметим, что $y \in l_2$, так как $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

Пусть $\delta > 0$ и $x_0 + \delta y \in M$. Тогда

$$\left| x_n + \delta \frac{1}{n} \right| \le \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Далее имеем:

$$\left| \frac{\delta}{n} \right| = \left| x_n + \frac{\delta}{n} - x_n \right| \le \left| x_n + \frac{\delta}{n} \right| + |x_n| \le$$
$$\le \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}},$$

то есть $\delta \le \dfrac{4n}{2^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Значит, при $n \to +\infty$ выводим $\delta = 0$, то есть ядро множества M — пустое. □

Опр. 5.15. Множество M называется *поглощающим*, если для любого $x \in X$ найдётся $\lambda > 0$, такое, что $x \in \mu M$ при $|\mu| > \lambda$.

Предлож. 5.2. **(Характеристическое свойство поглощающего выпуклого множества.)** M — поглощающее выпуклое множество тогда и только тогда, когда 0 (нуль) является $\star$-внутренней точкой M.

Д-во.

($\Rightarrow$) Так как M — поглощающее, то можем рассмотреть

$$x \in (\lambda + 1)M, \quad x \in (-\lambda - 1)M.$$

Так как M является выпуклым, то имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda + 1}x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\lambda + 1}x\right) = 0 \in M.$$

Теперь, пусть $y \in X$ произвольная. Тогда

$$\frac{1}{\lambda+1} y \in M, \text{ так как } M \text{ — поглощающее,}$$

$$\left[0, 0 + \frac{1}{\lambda+1} y\right] \subset M, \text{ так как } M \text{ — выпуклое.}$$

Эти два свойства как раз означают, что нуль является $\star$-внутренней точкой множества M.

($\Leftarrow$) Для того, чтобы доказать обратное утверждение, достаточно обратить предыдущие рассуждения.

Предложение 5.2 доказано. $\square$

Выпуклые функционалы

Вспомним:

Опр. 5.1. Функция p со свойствами

(1) $p(0) = 0$, $p(x) \geq 0 \ \forall\, x \in X$;

(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \ \forall\, \lambda > 0 \ \forall\, x \in X$;

(3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \ \forall\, x, y \in X$

называется *положительно однородным выпуклым функционалом*.

Теорема 5.6. Пусть $\lambda > 0$ — произвольно заданное.
Тогда

$$M := \{x : \ p(x) \leq \lambda\} \text{ — выпуклое тело,}$$

$$\{x : \ p(x) < \lambda\} \text{ — ядро этого выпуклого тела.}$$

Д-во. Пусть

$$a, b \in \{x: \; p(x) \le \lambda\}.$$

Имеем,

$$p(ta + (1-t)b) \le p(ta) + p((1-t)b)$$
$$= tp(a) + (1-t)p(b) \le t\lambda + (1-t)\lambda = \lambda.$$

Итак, $\{x: \; p(x) \le \lambda\}$ — выпуклое тело (множество).

Теперь, пусть

$$x_0 \in \{x: \; p(x) < \lambda\},$$

$y \in X$ — произвольная точка, $\delta > 0$ — произвольное число.
Имеем в силу полуаддитивности:

$$p(x_0 + \delta y) \le p(x_0) + \delta p(y).$$

$$p(x_0 + \delta y) \leq p(x_0) + \delta p(y)$$

Теперь выберем значение δ.
Если $p(y) = 0$, то δ может быть любым.
Если $p(y) > 0$, то полагаем

$$\delta < \frac{\lambda - p(x_0)}{p(y)}.$$

В итоге получаем

$$p(x_0 + \delta y) < \lambda.$$

Таким образом, множество $\{x : \ p(x) < \lambda\}$ состоит из $\star$-внутренних точек.

Теорема 5.6 доказана. $\square$

Опр. 5.16. Пусть M — поглощающее выпуклое множество. Функционал

$$p_M(x) := \inf\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda M\}$$

называется *функционалом Минковского*.

Теорема 5.7. Пусть M — поглощающее выпуклое множество. Тогда функционал Минковского есть положительно однородный выпуклый функционал. При этом

$$\{x : \ p_M(x) < 1\} \subset M \subset \{x : \ p_M(x) \leq 1\}.$$

Д-во. Доказательство сразу следует из определений положительно однородного выпуклого функционала (определение 5.1) и выпуклых и поглощающих множеств (определения 5.12 и 5.15).

Образ выпуклого множества при линейном отображении

Теорема 5.8. Пусть

$$X, Y \text{ — линейные пространства,}$$
$$f: \quad X \mapsto Y \quad \text{— линейное отображение,}$$
$$M \subset X \quad \text{— выпуклое множество.}$$

Тогда $\quad f[M] := \Delta_M$ — выпуклое множество.

Д-во. Пусть $y_1, y_2 \in f[M]$. Пусть

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2, \text{ где } \alpha, \beta \geq 0, \ \alpha + \beta = 1,$$

то есть множество таких y составляет выпуклую комбинацию точек y_1 и y_2.
Тогда

$$\exists\, x_1, x_2 \in M: \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2.$$

$$\exists\, x_1, x_2 \in M : \quad f(x_1) = y_1, \;\; f(x_2) = y_2$$

Так как M выпуклое, то

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 \in M,$$

а в силу линейности f имеем

$$f(x) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = y \in f[M].$$

Значит, $f[M]$ — выпуклое множество.

Теорема 5.8 доказана. $\square$

Следствие (теоремы 5.8). Пусть

X — линейное вещественное пространство,
f — линейный функционал,
$M \subset X$ — выпуклое множество.

Тогда $f[M]$ — это интервал в $\mathbb{R}$.

Д-во. Очевидно: $f[M]$ вместе с любыми двумя точками содержит отрезок с концами в этих точках. $\square$

Установим связь между $f[M]$ и $f[J(M)]$, где M — выпуклое множество. Из следствия теоремы 5.8 и из выпуклости M следует, что эти множества являются интервалами. Теперь заметим следующее.

Предлож. 5.3. Пусть

$$M \text{ — выпуклое множество,}$$
$$n \in J(M), \quad m \in M.$$

Тогда $\quad [n, m) \subset J(M)$.

Д-во.

- Пусть $k \in (n, m)$ (— отрезок), $x \in X$ — произвольный элемент.
- Поскольку $n \in J(M)$ имеем:

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad n + t[(x - k + n) - n] \in M \;\; \forall\, t \in [0, \varepsilon],$$

то есть, $n + t(x - k) \in M$.

- Из того, что $k \in (n, m)$, следует представление

$$k = \alpha n + \beta m, \text{ где } \alpha + \beta = 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

- Далее, из $m \in M$ и $n + t(x - k) \in M$ следует, что

$$\alpha(n + t(x - k)) + \beta m \in M.$$

То есть

$$k + \alpha t(x - k) \in M.$$

Значит,

$$k \in J(M).$$

Предложение 5.3 доказано. □

Теорема 5.9. Пусть

X — вещественное линейное пространство,

f — линейный функционал,

M — выпуклое множество, такое, что $J(M) \neq \emptyset$.

Тогда $\quad f[M] \subset \overline{f[J(M)]}$.

Примечание. Утверждение теоремы 5.9 в частности означает, что к множеству $f[J(M)]$ можно добавить одну или две точки.

Д-во.

- Из следствия теоремы 5.8 следует, что интервал $f[J(M)]$ содержится в интервале $f[M]$.
- Пусть $y \in f[M]$, то есть $y = f(m)$, $m \in M$. Заметим, что если $J(M) \neq \emptyset$, то существует $n \in J(M)$ и имеем $[n, m) \subset J(M)$ в силу предложения 5.3.

$$[n, m) \subset J(M)$$

- Представляет интерес только случай $n \neq m$. Рассмотрим

$$r \in \mathbb{N}, \quad a_r = \frac{1}{r} n + \left(1 - \frac{1}{r}\right) m.$$

То есть, $a_r \in [n, m) \subset J(M)$.

- Так как f линейный, то имеем

$$f(a_r) = \frac{1}{r} f(n) + \left(1 - \frac{1}{r}\right) f(m),$$

откуда следует

$$f(a_r) \in f[J(M)].$$

$$f(a_r) \in f[J(M)]$$

- Наконец, при $r \to \infty$ получаем

$$f(a_r) = \frac{1}{r} f(n) + \left(1 - \frac{1}{r}\right) f(m),$$

то есть

$$f(m) \in \overline{f[J(M)]}.$$

Теорема 5.9 доказана. □

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №27

5.6. Разделение выпуклых множеств

5.6. Разделение выпуклых множеств

В п. 5.6 будем везде считать, что X — это векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Опр. 5.17. Говорим, что линейный функционал f на X *разделяет* множества M и N, если

$$\sup_{x\in M} f(x) \le \inf_{x\in N} f(x).$$

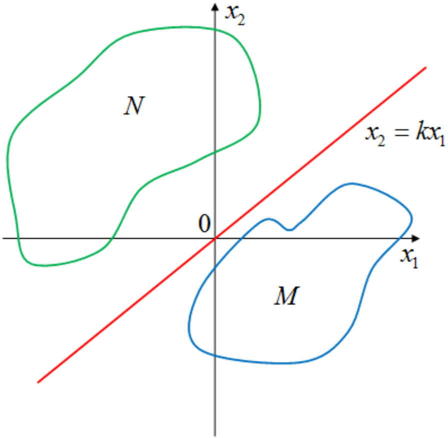
Опр. 5.18. Говорим, что линейный функционал f на X *строго разделяет* множества M и N, если

$$\sup_{x\in M} f(x) < \inf_{x\in N} f(x).$$

Опр. 5.19. Говорим, что гиперплоскость H *выделяет* телесное множество M, если

$$\exists\, x_0 \in X : \quad (\{x_0\} + H) \cap J(M) = \emptyset.$$

Пример 5.3. Функционал $f(x_1, x_2) = x_2 - kx_1$ $(k > 0)$ разделяет множества M и N в $\mathbb{R}^2$.



Геометрическая форма теоремы Хана – Банаха

Опр. 5.20. Множество $\alpha \subset X$ называется *аффинным многообразием*, если оно имеет вид $\alpha = \{y_0\} + \mathcal{L}(\alpha)$, где $y_0 \in X$ — некоторая фиксированная точка, а $\mathcal{L}(\alpha) \subset X$ — некоторое подпространство.

Теорема 5.10. **(Геометрическая форма теоремы Хана – Банаха: теорема Минковского – Асколи – Мазура.)** Если

$$\alpha = \{y_0\} + \mathcal{L}(\alpha) \text{ — непустое аффинное многообразие,}$$

$$M \text{ — выпуклое телесное множество,}$$

$$\alpha \cap J(M) = \emptyset,$$

то существуют $x_0 \in X$ и гиперплоскость H, так, что $\alpha \subset \{x_0\} + H$ и H выделяет M, то есть

$$\exists\, x_0 \in X : \quad (\{x_0\} + H) \cap J(M) = \emptyset.$$

Д-во.

- Можно считать, что
$$0 \in J(M),$$
то есть M — выпуклое поглощающее множество.
- Действительно, из того, что $J(M) \neq \emptyset$ следует, что существует $m_0 \in J(M)$ и множества
$$\alpha - m_0, \quad M - m_0$$
полностью удовлетворяют условиям теоремы.
- Поэтому, решив задачу для
$$\alpha - m_0, \quad M - m_0,$$
можно потом «сдвинуть» на m_0.

- В силу понятия гиперплоскости (смотрите определение 2.18 и предложение 2.21 лекции 12) существует функционал f_0, определённый на подпространстве $\mathbb{R}\, y_0 + \mathcal{L}(\alpha)$, такой, что

$$\alpha = \{x : \ f_0(x) = 1\}, \quad \operatorname{Ker} f_0 = \mathcal{L}(\alpha).$$

(Считаем, что $y_0 \notin \mathcal{L}(\alpha)$. Случай $y_0 \in \mathcal{L}(\alpha)$ тривиален.)

- Покажем, что

$$f_0(x) \leq p_M(x) \quad \forall\, x \in \big(\mathbb{R}\, y_0 + \mathcal{L}(\alpha)\big),$$

где p_M — функционал Минковского множества M.

- Пусть $x_0 \in \alpha$. Тогда

$$\forall\, x \in \left(\mathbb{R}\, y_0 + \mathcal{L}(\alpha)\right)$$

$$\exists!\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exists!\, x' \in \operatorname{Ker} f_0 (= \mathcal{L}(\alpha)) :$$

$$x = \lambda x_0 + x'.$$

- Рассмотрим $x \in \alpha$.
- По условию теоремы следует, что $x \notin J(M)$, и по теореме 5.6 выводим, что $p_M(x) \geq 1$.
- Значит, если $\lambda \leq 0$, то $f_0(x) = \lambda \leq 0 \leq p_M(x)$.
- А если $\lambda > 0$, то $\dfrac{1}{\lambda} x \in \alpha$. Действительно:

$$\frac{1}{\lambda} x = x_0 + \frac{1}{\lambda} x' \in \alpha + \mathcal{L}(\alpha) = \alpha.$$

- Комбинируя, получаем

$$\frac{1}{\lambda}p_M(x) = p_M\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \geq 1, \quad f_0(x) = \lambda \leq p_M(x).$$

- Теперь применим теорему 5.1 (Хана — Банаха) и продолжим f_0 до f на X с условием подчинения

$$f(x) \leq p_M(x).$$

- Получим $\alpha \subset (\{x_0\} + H) = \{x : \; f(x) = 1\}$.
- Если теперь $x \in J(M)$, то

$$p_M(x) < 1, \quad f(x) < 1, \quad x \notin \alpha.$$

- Значит, $L \cap J(M) = \emptyset$.

Теорема 5.10 доказана.

Приложения

Опр. 5.21. Функционал f называется *опорным* для множества E в точке $x_0 \in E$, если существует $\lambda > 0$, такое, что $f(x_0) = \lambda$, а множество E содержится в $\{x : \ f(x) \leq \lambda\}$ или в $\{x : \ f(x) \geq \lambda\}$.

Следствие 1 теоремы 5.10. Если C — выпуклое тело в X, то для любой граничной точки тела C существует опорный функционал.

Следствие 2 теоремы 5.10 и следствия 1. Пусть X — нормированное пространство. Пусть $x_0 \neq 0$. Тогда существует $f \in X^*$ — функционал такой, что

$$f(x_0) = 1,$$
$$f(x) \leq 1 \quad \forall\, x \in X, \ \ \|x\|_X \leq \|x_0\|_X.$$

Предлож. 5.4. Следующие свойства эквивалентны друг другу:

- f разделяет M и N;
- f разделяет $M - N$ и 0;
- f разделяет $(M - x)$ и $(N - x)$.

Д-во. Утверждение предложения 5.4 непосредственно следует из определения и свойств sup и inf.

Теорема о разделении выпуклых множеств

Теорема 5.11. **(О разделении выпуклых множеств.)** Пусть

$$M \text{ — выпуклое тело,}$$
$$N \text{ — выпуклое множество,}$$
$$J(M) \cap N = \emptyset.$$

Тогда существует линейный функционал, разделяющий M и N.

Д-во.

■ Воспользуемся свойствами выпуклых множеств, доказанными в п. 5.5.
Имеем: $J(M)$ — выпуклое множество;
N — выпуклое, значит и $(-N)$ — тоже выпуклое.

- Таким образом, $(J(M) - N)$ — выпуклое множество.
- Более того, $(J(M) - N)$ — телесное множество: Пусть $m \in J(M)$, $n \in N$, $v \in X$ — произвольные. По определению $J(M)$ существует $\varepsilon > 0$, такое, что

$$[m, m + \varepsilon x) \subset M.$$

Значит по предложению 5.3 получаем

$$[m, m + \varepsilon x) \subset J(M).$$

- Отсюда следует, что

$$m + n \text{ — внутренняя точка для } (J(M) - N).$$

- Далее, из $J(M) \cap N = \emptyset$ следует, что $0 \notin (J(M) - N)$.
- По теореме 5.10 (Минковского – Асколи – Мазура) имеем:

  $\exists\, H$ — гиперплоскость:

  H выделяет телесное множество $(J(M) - N)$.

- Пусть f — функционал, т.ч. $H = \operatorname{Ker} f$.
- Имеем: $H \cap (J(M) - N) = \emptyset \Rightarrow$
  $$f(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (J(M) - N).$$
- Так как $f[J(M) - N]$ — интервал, то
  $$f(x) > 0 \text{ или } f(x) < 0.$$
- Таким образом, всюду получаем $f(x) < f(y)$ для любого $x \in J(M)$, $y \in \mathbb{N}$.

Теорема 5.11 доказана. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №28

Глава 6. СЛАБАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТИ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

Глава 6. СЛАБАЯ И СЛАБАЯ* СХОДИМОСТИ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

6.1. Определение слабого предела

Опр. 6.1. Последовательность $\{x_n\} \subset X$, где X — нормированное пространство, называется *слабо сходящейся к элементу* $x \in X$, если

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \forall f \in X^*.$$

Опр. 6.2. $x = \text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ называется *слабым пределом* $\{x_n\}$.

Теорема 6.1. (Единственность слабого предела.) Пусть $\{x_n\}$ сходится слабо. Справедливо утверждение: **слабый предел единственен**, то есть

$\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'$ и $\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'' \quad \Rightarrow \quad x' = x''.$

Д-во.

- Пусть

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x'), \quad f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x'') \quad \forall\, f \in X^*.$$

- При этом считаем, что

$$x' \neq x''. \tag{6.1}$$

- По известному результату из курса математического анализа имеем, что предел сходящегося числового ряда *единственный*, то есть имеем равенство

$$f(x') = f(x'') \quad \forall\, f \in X^*. \tag{6.2}$$

- Для доказательства теоремы рассмотрим по отдельности два случая:
- *Случай (1)*: x' и x'' линейно зависимы.
- *Случай (2)*: x' и x'' линейно независимы.
- Случай (1) означает, что x' и x'' принадлежат одному и тому же *одномерному* линейному подпространству, то есть
$$\exists\,\lambda \neq 0 : \quad x'' = \lambda x'.$$
- Тогда
$$f(x') = \lambda f(x') \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \tag{6.3}$$
к тому же $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$.
- (Здесь заметили, что если $\lambda \neq 1$, то имеет место противоречие с (6.1). А нулевой вектор $x = 0$ — это линейно зависимый вектор с любым другим вектором.)

- Из (6.3) получаем:
$$f(x') = 0 \quad \forall f \in X^*. \tag{6.4}$$
- Таким образом получаем противоречие с теоремой 5.4 о существовании нетривиального линейного функционала: действительно, по теореме о существовании нетривиального функционала *существует* $f \in X^*$, такой, что $f(x') = \|x'\|_X$ и $\|f\|_{X^*} = 1$.

Напомним теорему из прошлой главы:

Теорема 5.4. **(О существовании нетривиальных непрерывных функционалов.)** Пусть X — нормированное пространство. Для произвольных $x_0 \in X$ $(x_0 \neq 0)$ найдётся $f \in X^*$, такой функционал, что $\|f\|_{X^*} = 1$, $f(x_0) = \|x_0\|_X$.

- Итак, в случае (1) теорема доказана. Приступим теперь к случаю (2).
- *Случай (2)*: x' и x'' линейно независимы.
- Это означает, что одномерное подпространство

$$L := \{x = \lambda x'', \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$$

не содержит x'.
- Так как L — замкнуто, (а L — замкнуто, так как является конечномерным), то

$$d(x', L) = d > 0.$$

- По теореме 5.5 об аннуляторе из прошлой лекции имеем, что *существует функционал* $f \in X^*$, такой, что $f(x') = 1$ и при этом для любого $x \in L$ справедливо, что $f(x) = 0$.
- Конечно, в частности справедливо, что $f(x'') = 0$, так как $x'' \in L$.
- (Ещё заметим по теореме 5.5: $\|f\|_{X^*} = 1/d$.)
- Так как получили $f(x'') = 0$ и $f(x') = 1$, то имеем противоречие с равенством (6.2). То есть, (6.2) выполняется не для всех $f \in X^*$.

Доказательство теоремы 6.1 завершено. $\square$

6.2. Слабая сходимость сильно сходящихся последовательностей. Ограниченность слабо сходящихся последовательностей

Теорема 6.2. Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ сильно в X, то $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ слабо в X.

Д-во. Для любого $f \in X^*$ имеем

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\|_{X_*} \|x_n - x\|_X \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Теорема доказана. □

Теорема 6.3. **(Об ограниченности слабо сходящихся последовательностей.)** Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ слабо в X, тогда $\{x_n\}$ равномерно ограничено в X, то есть найдётся постоянная $C > 0$, не зависящая от n, такая, что

$$\|x_n\|_X \leq C \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Д-во.

- Любому $x \in X$ поставим в соответствие $\tau_x \in X^{**}$ по закону

$$\tau_x(f) = f(x) \quad \forall\, f \in X^*.$$

- Последовательности $\{x_n\}$ ставим в соответствие $\{\tau_{x_n}\} \subset X^{**}$.
- Причём,

$$\tau_{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} \tau_x \text{ сильно в } X^{**} \text{ (то есть поточечно).}$$

- Заметим, что X^*, $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ — это банаховы пространства.
- Действительно: ясно, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — банаховы. А X^* — это банахово пространство по критерию полноты пространства $\mathcal{L}(X, Y)$, так как $Y = \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — банахово.
- По теореме Банаха–Штейнгауза (теорема 4.12) имеем, что

$$\exists\, C = \text{const} > 0 : \quad \|\tau_{x_n}\|_{X^{**}} \leq C.$$

- Остаётся заметить, что τ_x — это *изометрия* из X в X^{**}, то есть

$$\|\tau_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X.$$

(Смотрите предложение 6.1 на следующих слайдах.)
- Тогда $\|x_n\|_X = \|\tau_{x_n}\|_{X^{**}} \leq C$.

Теорема 6.3 доказана. $\square$

6.3. Изометричное вложение во второе сопряжённое пространство

Предлож. 6.1. Если X — банахово пространство, то X изометрично вложено в X^{**}.

Д-во.

- Так как $f \in X^*$, то для любого $x \in X$ имеем

$$|f(x)| \leq \|f\|_{X^*}\|x\|_X.$$

- Это неравенство эквивалентно следующему:

$$|\tau_x(f)| \leq \|x\|_X\|f\|_{X^*}.$$

- То есть

$$\|\tau_x\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X. \tag{6.5}$$

- С другой стороны, по следствию теоремы Х.–Б. о существовании нетривиальных функционалов (теореме 5.4) для любого $x \in X$ (соответственно, $\tau_x \in X^{**}$) найдётся функционал $f_0 \in X^*$, такой, что $\|f_0\|_{X^*} = 1$ и $f_0(x) = \|x\|_X$.
- Последнее утверждение означает, что

$$f_0(x) = |f_0(x)| = |\tau_x(f_0)| = \|x\|_X = \|f_0\|_{X^*}\|x\|_X.$$

(Здесь заметили, что $\|f_0\|_{X^*} = 1$.)

- Значит в неравенстве (6.5) при функционале f_0 выполняется равенство. Итак, $\|\tau_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X$.

Предложение 6.1 доказано. □

Опр. 6.3. Если $X^{**} \sim X$, то пространство называется *рефлексивным*. (Иными словами, для любого $\tau \in X^{**}$ найдётся $x \in X$, такое, что $\tau = \tau_x$.)

6.4. Слабая сходимость в конечномерных пространствах

Теорема 6.4. **(Эквивалентность сильной и слабой сходимостей в конечномерном нормированном пространстве.)** Если X — конечномерное нормированное пространство, то в X понятия сильной и слабой сходимости эквивалентны, то есть

$$x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0 \quad \text{слабо в } X \quad \Leftrightarrow \quad x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0 \quad \text{сильно в } X.$$

Д-во. В теореме 6.2 уже доказали, что из сильной сходимости следует слабая сходимость.

- Докажем теперь, что из слабой сходимости следует сильная.
- Пусть $\{a_1, \dots, a_m\}$ — базис в X. Тогда

$$x_n = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(n)} a_i, \quad x_0 = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^0 a_i.$$

- Возьмём в X^* линейные функционалы $f_1, \dots, f_m$, так, что

$$f_l(a_i) = \delta_{il} \quad (\delta_{il} \text{ — символ Кронекера.})$$

- Такую систему лин. функционалов f_l можем взять по следствию о биортогональности (следствие 2 теоремы 5.5, на следующем слайде напомним):

Следствие 2 теоремы 5.5. (О биортогональности.)

- (1) Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ — линейно независимая система в нормированном пространстве X. **Тогда** существует система $\{f_1, \dots, f_n\} \subset X^*$, биортогональная к ней.
- (2) Пусть $\{f_1, \dots, f_n\}$ — линейная независимая система линейных функционалов над векторным пространством X.

Тогда найдётся множество $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, биортогональное к множеству $\{f_1, \dots, f_n\}$.

- По предположению теоремы 6.4 о слабой сходимости, имеем

$$\xi_l^{(n)} \equiv f_l(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f_l(x_0) = \xi_l^{(0)} \quad (l = 1, \ldots, m).$$

- Таким образом, последовательность векторов $(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}) \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$ сходится к $(\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$, то есть

$$d_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{\xi}^{(n)}, \boldsymbol{\xi}^{(0)}) = \|\boldsymbol{\xi}^{(n)} - \boldsymbol{\xi}^{(0)}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Остаётся вспомнить теорему 2.7 из лекции 13 прошлого семестра.
- Из этой теоремы следует утверждение:

$$d_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{\xi}^{(n)}, \boldsymbol{\xi}^{(0)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \quad d_X(x_n, x_0) = \|x_n - x_0\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом установили сильную сходимость.

Теорема 6.4 доказана. $\square$

Теорема 2.7. Пусть X — m-мерное действительное или комплексное нормированное пространство. Если $(a_1, \ldots, a_m)$ — базис в X, то отображение

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m) \mapsto x = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_m a_m$$

— гомеоморфизм.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №29

6.5. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно

6.6. Критерий слабой сходимости

6.7. Слабая ограниченность множества

6.8. Признаки слабой сходимости в различных пространствах

6.9. Сходимость в X^*

6.10. Счётная компактность шара в нормированном пространстве

6.11. Теорема Алаоглу

6.5. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно

Замеч. 6.1. В бесконечномерном пространстве из слабой сходимости сильная сходимость, вообще говоря, не следует.

Пример 6.1. Рассмотрим $\{e_i\} = \{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)\} \subset l_2$. (Здесь, единица стоит на i-м месте.)
Имеем, $e_i \underset{i\to\infty}{\to} 0$ слабо в l_2, но $\|e_i\|_{l_2} = 1$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Значит, e_i не сходится к нулю *сильно в* l_2.
Более того, $\{e_i\}$ не является фундаментальной последовательностью.

Предл. 6.2. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ слабо в X. Тогда

$$Ax_n \underset{n\to\infty}{\to} Ax \quad \text{слабо в } Y.$$

Д-во.

- Введём в рассмотрение $g = f \circ A$ для любых $f \in Y^*$.
- Замечаем, что $g \in X^*$. В частности,

$$\|g\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*} \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

- По условию имеем: $g(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} g(x)$;
- по построению получаем

$$f(Ax_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(Ax) \quad \forall f \in Y^*.$$

Доказательство завершено. □

6.6. Критерий слабой сходимости

Теорема 6.5. **(Критерий слабой сходимости.)** Пусть X — нормированное пространство.
Два следующих утверждения эквивалентны:

(i) Первое утверждение: $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ слабо в X,

Второе утверждение:

(iia) $\exists\, C = \text{const}\colon \|x_n\| \le C \quad \forall\, n \quad$ (C не зависит от n);

(iiб) $\exists\, A \subset X^*$, так, что $\bar{A} = X^*$ и для любого $f \in A$ имеем

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x).$$

Д-во.

- Утверждение $(\Rightarrow)$ справедливо в силу теоремы 6.3, то есть из (i) следуют утверждения (iia-iiб).
- Докажем теперь обратное утверждение: $(\Leftarrow)$:
- Примéним теорему Банаха–Штейнгауза (теорему 4.12) и предложение 6.1 (об изометричном вложении X в X^{**}), рассматриваем

$$x_n \quad \sim \quad \tau_{x_n} \in X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{R}(\mathbb{C})).$$

- Имеем:
(iia) $\|\tau_{x_n}\| \le C$ (так как $\|\tau_{x_n}\| = \|x_n\|$ — изометрия).
(iiб) $\exists\, A \subset X^*$: $\bar{A} = X^*$ и

$$f(x_n) = \tau_{x_n} = \tau_{x_n}(f) \underset{n\to\infty}{\to} \tau_x(f) = f(x) \quad \forall\, f \in A.$$

- Отсюда следует, что

$$\tau_{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} \tau_x \text{ сильно в } X^{**}$$

(то есть, поточечно на X^*).

- Это эквивалентно тому, что

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \text{ слабо в } X.$$

Теорема 6.5 доказана. $\square$

6.7. Слабая ограниченность множества

Опр. 6.4. Пусть $M \subset X$, где X — нормированное пространство. Говорим, что множество M *слабо ограничено*, если для любого фиксированного $f \in X^*$ множество $\{f(x),\ x \in M\}$ ограничено в $\mathbb{R}$, то есть существует $c_f \in \mathbb{R}_+$, такое, что $|f(x)| \leq c_f\ \forall\, x \in M$.

Теорема 6.6. M слабо ограничено $\quad\Leftrightarrow\quad$ M ограничено в X.

Д-во.

$(\Leftarrow)$ Это утверждение очевидно:

$$|f(x)| \leq \|f\|_{X^*}\|x\|_X \leq \|f\|_{X^*} C \equiv c_f.$$

Здесь имеем $\|x\|_X \leq C$.

$(\Rightarrow)$ Доказательство проведём *методом от противного*: пусть множество M слабо ограничено, но не ограничено, то есть существует $\{x_n\} \subset M$, так, что $\|x_n\|_X \geq n^2$.

- Из слабой ограниченности M следует, что

$$\forall\, f \in X^* \quad \exists\, c_f : \quad |f(x)| \le c_f .$$

- Построим $y_n := \dfrac{x_n}{n}$.
- Имеем

$$|f(y_n)| = \frac{|f(x_n)|}{n} \le \frac{c_f}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

то есть $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ слабо в X.
- По теореме 6.3 (о необходимом условии сходимости) существует $k \in \mathbb{R}_+$, такое, что $\|y_n\|_X \le k$. С другой стороны, по построению имеем, что $\|y_n\|_X = \dfrac{\|x_n\|_X}{n} \ge n$.
- Получили противоречие.

Теорема 6.6 доказана. □

6.8. Признаки слабой сходимости в различных пространствах

Пример 6.2. В l_2 и в l_p при $1 < p < \infty$ имеем

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \text{ слабо в } l_p \quad \Leftrightarrow$$

$$(1)\ \|x_n\| \leq C\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (2)\ x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \text{ покоординатно.}$$

Пример 6.3. В $L^2(\Omega)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, имеем

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} u \text{ слабо в } L^2(\Omega) \quad \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad \int_\Omega u_n^2 dx \leq C \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

$$(2) \quad \int_I u_n dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_I u dx \quad \forall\, I \subset \Omega,$$

где I — всевозможные открытые множества в Ω.

Пример 6.4. В $C[a,b]$ имеем

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \text{ слабо в } C[a,b] \quad \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad \|x_n\| \le C \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

$$(2) \quad x_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} x(t) \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Все эти примеры основаны на теореме 6.5. Напомним, что теорема 6.5 основана на теореме 4.12 (Банаха–Штейнгауза). Оставим примеры 6.2–6.4 без доказательства.

Пример 6.5. В произвольном гильбертовом пространстве в силу теоремы Рисса о представлении (теорема 3.2, лекция 16) имеем

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \text{ слабо в } H \quad \Leftrightarrow \quad x_n \cdot a \underset{n\to\infty}{\to} x \cdot a \quad \forall\, a \in H.$$

6.9. Сходимость в X^*

Напомним: $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.
Имеем в X^* следующие виды сходимости:

(1) Равномерная сходимость (по норме X^*):
$\|f_n - f\|_{X^*} \to 0$;

(2) слабая сходимость: $F(f_n) \to F(f)\ \forall\, F \in X^{**}$;

(3) сильная сходимость (в операторном смысле):

$$f_n(x) \to f(x) \quad \forall\, x \in X \text{ (поточечная сходимость).}$$

Опр. 6.5. Сильную сходимость в операторном смысле называем *слабой* сходимостью*:

$$f_n \to f \text{ слабо* в } X^*, \text{ если } f_n(x) \to f(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Предлож. 6.3. Если $f_n \to f$ слабо в X^*, то $f_n \to f$ слабо*.

Наблюдение. Это предложение проясняет связь сходимостей (2) и (3).

Д-во предлож. 6.3. Доказательство сразу следует из изометричности вложения X в X^{**}: как в ряде предыдущих доказательств, вводим $\tau_x(f_n) := f_n(x)$. $\square$

Замеч. 6.2. Сделаем важное замечание: утверждение

$$f_n \xrightarrow{w^*} f \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{w-X^*} f$$

верно только для рефлексивных пространств.

Предлож. 6.4. Если $\{f_n\}$ — слабо сходящаяся последовательность в X^* (где X — банахово пространство), то существует $C = \text{const} \geq 0$, такое, что $\|f_n\|_{X^*} \leq C \; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Иными словами, любая слабо сходящаяся последовательность из X^* (где X — банахово) ограничена по норме.

Д-во. Доказывается это предложение точно так же, как и теорема 6.3. □

Теорема 6.3. **(Об ограниченности слабо сходящихся последовательностей.)** Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ слабо в X, тогда $\{x_n\}$ равномерно ограничено в X, то есть найдётся постоянная $C > 0$, не зависящая от n, такая, что

$$\|x_n\|_X \leq C \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

6.10. Счётная компактность шара в нормированном пространстве

Теорема 6.7. Пусть X — сепарабельное пространство, M — ограниченное множество в X^*. Тогда для любой $\{f_n\} \subset M$ существуют $\{f_{n_k}\}$ и $f \in X^*$, так, что

$$f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f.$$

Терминология. Свойство, которое утверждает теорема 6.7, называется *счётной (секвенциальной) компактностью* множества M.

Д-во.

- Выберем в X счётное всюду плотное множество $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Если $\{f_n\}$ ограничена по норме (в X^*), то численная последовательность

$$f_1(x_1), f_2(x_1), \ldots, f_n(x_1), \ldots \text{ ограничена.}$$

- Поэтому из $\{f_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $f_1^{(1)}, \ldots, f_n^{(1)}, \ldots$ так, чтобы сходилась *числовая* последовательность

$$f_1^{(1)}(x_1), \ldots, f_n^{(1)}(x_1), \ldots.$$

- Далее, из $\{f_n^{(1)}\}$ можно выбрать подпоследовательность так, чтобы

$$f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, \dots, f_n^{(2)}, \dots \quad \text{сходилась в точке } x_2 :$$

$$f_1^{(2)}(x_2), \dots, f_n^{(2)}(x_2), \dots.$$

- Продолжая этот процесс, получим такую систему последовательностей

$$f_1^{(1)}, \dots, f_n^{(1)}, \dots;$$

$$f_1^{(2)}, \dots, f_n^{(2)}, \dots;$$

$$\dots,$$

что каждая из них содержится в предыдущей и что $\{f_n^{(k)}\}$ сходится в точках $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$.

- Тогда, взяв *диагональную* последовательность

$$f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \dots, f_n^{(n)}, \dots,$$

получим такую подпоследовательность линейных функционалов, что

$$f_1^{(1)}(x_n), f_2^{(2)}(x_n), \dots, f_n^{(n)}(x_n), \dots$$

сходится для всех n.

- По теореме 6.5 последовательность $f_i^{(i)}$ сходится для любого $x \in X$, так как $\{x_n\}$ — это счётное, всюду плотное множество.

Теорема 6.7 доказана. □

Наблюдение. Доказательство теоремы 6.7 основано на трёх идеях: построение диагонального процесса, использование предкомпактности в $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ и использование критерия слабой сходимости (теоремы 6.5).

6.11. Теорема Алаоглу

Теорема 6.8. Пусть X — сепарабельное пространство. По отношению к слабой* сходимости пространство X^* метризуемо, то есть множество линейных непрерывных функционалов метризуемо.
Иными словами: существует $d^*(f, g)$ — метрика, такая, что

$$f_n \underset{n\to\infty}{\to} f \text{ слабо* в } X^* \quad \Leftrightarrow \quad d^*(f_n, f) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Д-во. Метрику можно ввести следующим образом:

$$d^*(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |f(x_k) - g(x_k)|,$$

где $\{x_k\}$ — некоторое счётное всюду плотное множество в $B(0, 1)$ в X.

Для завершения доказательства нужно проверить все аксиомы метрики. Это несложно. □

Теорема 6.9. **(Теорема Алаоглу.)** Пусть X сепарабельно. Справедливо утверждение: по отношению к метрике d^*, определённой в теореме 6.8, единичный шар в X^* предкомпактен.
А именно, всякое ограниченное множество M в X^* предкомпактно в смысле слабой* сходимости, то есть, в смысле метрики d^*.

Д-во аналогично доказательству теоремы 6.7 с $d = d^*$. При этом, имеем

$$f_{n_k} \to f \text{ сильно в метрике } d^*.$$

□

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №30

ГЛАВА 7. СПЕКТР ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

7.1. Понятие резольвентного множества и спектра

7.2. Классификация точек спектра

ГЛАВА 7. СПЕКТР ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

7.1. Понятие резольвентного множества и спектра

Резольвентное множество

Пусть X — *комплексное* банахово пространство. Рассмотрим линейный оператор A: $X \mapsto X$, где область определения оператора A — это некоторое множество Ω_A, плотное в X.

Далее, рассмотрим оператор $\lambda\mathbb{I} - A$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbb{I}$ — единица в $\mathcal{L}(X)$.

Опр. 7.1.

Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой* оператора A, если оператор $\lambda\mathbb{I} - A$ непрерывно обратим, то есть $(\lambda\mathbb{I} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Опр. 7.2. Совокупность регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* оператора A и обозначается $\rho(A)$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то линейный оператор $R_\lambda(A) := (\lambda\mathbb{I} - A)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A.

Опр. 7.3. Дополнение к $\rho(A)$ (в комплексной плоскости) называется *спектром* оператора A и обозначается $\sigma(A)$ (то есть, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$).

Теорема 7.1. **(Об ограниченности спектра ограниченного оператора.)** Спектр ограниченного оператора является ограниченным множеством. Более точно: пусть $A \in \mathcal{L}(X)$, тогда

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Д-во.

- Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, так, что $|\lambda| > \|A\|$.
- Докажем, что $\lambda \in \rho(A)$ или, что то же самое, $R_\lambda(A) \subset \mathcal{L}(X)$.

- Строим
$$R_\lambda(A) = (\lambda\mathbb{I} - A)^{-1} =$$
$$= \left((\lambda\mathbb{I})\left(\mathbb{I} - \frac{1}{\lambda}A\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(\mathbb{I} - B)^{-1},$$
где $B = \dfrac{1}{\lambda}A$.
- В силу выбора λ имеем
$$\|B\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{|\lambda|}\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

- По теореме Неймана существует $(\mathbb{I} - B)^{-1}$:

$$(\mathbb{I} - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} A\right)^k \in \mathcal{L}(X).$$

- Таким образом,

$$R_\lambda(A) \equiv \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} A\right)^k \in \mathcal{L}(X).$$

Теорема 7.1 доказана. $\square$

Теорема о замкнутости спектра

Теорема 7.2. **(О замкнутости спектра.)** Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда $\sigma(A)$ является замкнутым множеством.

Д-во.

■ Вспомним следствие критерия непрерывной обратимости (лекция 23):

Следствие. Если $u_0 \in \mathcal{L}(E, F)$ — обратимый оператор, и притом

$$\|u_0(x)\|_F \geq m\|x\|_E,$$

то для любого

$$u \in \overline{B\left(u_0, \frac{m}{2}\right)} \subset \mathcal{L}(E, F)$$

найдётся обратный оператор u^{-1}.

- Применим это следствие: положим $u_0 := \lambda_0 \mathbb{I} - A$ $(\lambda_0 \in \rho(A))$.
- Пусть $u := \lambda \mathbb{I} - A$. Имеем оценку

$$\|u - u_0\| = \|\lambda \mathbb{I} - \lambda_0 \mathbb{I}\| = |\lambda - \lambda_0|.$$

- Итак, если $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{m}{2}$, то $\lambda \in \rho(A)$. (Здесь, m — это постоянная из неравенства $\|u_0(x)\|_F \geq m\|x\|_E$.
- В силу произвольной малости m по определению замкнутости завершаем доказательство теоремы 7.2. $\square$

Следствие. Спектр оператора из $\mathcal{L}(X)$ является компактным множеством на $\mathbb{C}$.

7.2. Классификация точек спектра

Если $\lambda \in \sigma(A)$, то возможны следующие три случая:

(1) $\lambda\mathbb{I} - A$ не обратим;

(2) $\lambda\mathbb{I} - A$ обратим, но $\Delta_{\lambda\mathbb{I}-A} \neq X$;

(3) $\lambda\mathbb{I} - A$ обратим, $\Delta_{\lambda\mathbb{I}-A} = X$, но $(\lambda\mathbb{I} - A)^{-1}$ неограничен.

Наблюдение. Из теоремы Банаха об открытом отображении (теорема 4.7 лекции 22) следует, что случай (3) невозможен, если $\Omega_A = X$ и A ограничен.

Теорема 4.7. (Теорема Банаха об открытом отображении.) Пусть E, F — банаховы пространства, $u\colon E \mapsto F$ — линейный взаимно однозначный непрерывный оператор и $\Omega_u = E$, $\Delta_u = F$. Тогда обратный оператор непрерывен.

Рассмотрим описанные выше три случая для точек спектра:

Случай (1) $\lambda\mathbb{I} - A$ не обратим $\Rightarrow$

$\lambda\mathbb{I} - A$ не взаимно однозначен $\Rightarrow$

существуют $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, такие, что $(\lambda\mathbb{I} - A)x_1 = (\lambda\mathbb{I} - A)x_2$. Это эквивалентно тому, что найдётся $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$ и при этом

$$(\lambda\mathbb{I} - A)x_0 = 0 \quad (\lambda x_0 = A x_0).$$

Опр. 7.4. Число λ, при котором $\lambda\mathbb{I} - A$ не обратим, называется *собственным числом*, а x_0 — *собственным вектором*.

Ещё одно определение, связанное со случаем (1):

Опр. 7.5. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда записываем $\lambda \in \sigma_p(A)$, если $\lambda \in \sigma(A)$ и существует точка $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$, такая, что $\lambda x_0 = Ax_0$.
Множество $\sigma_p(A)$ называется *точечным спектром*.

Случай (2)

Опр. 7.6. Пусть $\lambda\mathbb{I} - A$ — взаимно однозначный оператор. Тогда

$$R_\lambda(A) = (\lambda\mathbb{I} - A)^{-1}$$

определён на

$$L := (\lambda\mathbb{I} - A)(X) = \Delta_{\lambda\mathbb{I}-A},$$

но $\bar{L} \neq X$.
Множество таких значений λ обозначается через $\sigma_r(A)$ и называется *остаточным спектром*.

Случай (3)

Опр. 7.7. Множество остальных точек спектра $\sigma(A)$ называется *непрерывным спектром* и обозначается через $\sigma_c(A)$. То есть, имеем

$$\sigma_c(A) := \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)).$$

Множество $\bar{L}$ совпадает со всем пространством X, но $R_\lambda(A)$ не является ограниченным.

Итак, $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A)$.
Приведём некоторые примеры спектров операторов.

Пример 7.1. Рассмотрим X — конечномерное пространство. Тогда $\mathcal{L}(X)$ — конечномерное пространство, изоморфное пространству матриц. Для любого $A \in \mathcal{L}(X)$ имеем, что $\sigma(A) \equiv \sigma_p(A)$ — множество всех собственных чисел матрицы A.

Пример 7.2. Спектр $\sigma(A)$ всякого вполне непрерывного оператора A в бесконечномерном банаховом пространстве X является счётным множеством, причём $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. (Это утверждение докажем в последующих лекциях.)

Пример 7.3. Рассмотрим $Au(t) = tu(t)$, A: $C[0,1] \mapsto C[0,1]$. Найдём $\sigma(A)$ и $\sigma_p(A)$.

■ Построим резольвенту:

$$\lambda u(t) = Au(t) + v(t) = tu(t) + v(t) \;\Rightarrow\; u(t) = \frac{v(t)}{\lambda - t},$$

таким образом

$$R_\lambda(A)v(t) = \frac{v(t)}{\lambda - t}.$$

- Имеем также, что $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \max\limits_{t\in[0,1]} t = 1$ и

$$\|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(X)} = \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{|\lambda - t|} < +\infty.$$

- Из этих двух оценок на нормы в силу теоремы 7.1 следует, что

$$\sigma(A) = [0,1].$$

- Рассмотрим части спектра: определим $\sigma_p(A)$.
- Предположим, что существует $u_0 \not\equiv 0$, так, что

$$\lambda u_0(t) = t u_0(t) \quad \forall\, t \in [0,1].$$

- Это означает, что $(\lambda - t)u_0(t) = 0$. Тогда для любого $t \neq \lambda$ получаем $u_0(t) = 0$, то есть $u_0 \equiv 0$.
- Получили противоречие, значит $\sigma_p = \emptyset$. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №31

7.3. Спектр операторов в гильбертовом пространстве

7.3. Спектр операторов в гильбертовом пространстве

Рассмотрим $A\colon H \mapsto H$, $A \in \mathcal{L}(H)$, H — гильбертово пространство над $\mathbb{C}$.

Опр. 7.8. Пусть H — гильбертово пространство. A^* называется *сопряжённым оператором*, если

$$Ax \cdot y = x \cdot A^* y.$$

Предлож. 7.1. **(Существование и единственность сопряжённых операторов.)** Для любого $A \in \mathcal{L}(H)$ существует единственный $A^* \in \mathcal{L}(H)$, причём $\|A\| = \|A^*\|$.

Доказательство

п. 1. Единственность:

- Предположим, что

$$Ax \cdot y = x \cdot A^* y = x \cdot \tilde{A}^* y \quad \forall\, x, y \in H.$$

- Зафиксируем произвольно $y \in H$. Имеем:

$$x \cdot (A^* y - \tilde{A}^* y) = 0 \quad \forall\, x \in H \quad \Rightarrow$$

$$A^* y = \tilde{A}^* y \quad \forall\, y \in H \quad \Rightarrow \quad A^* \equiv \tilde{A}^*.$$

- Единственность доказана.

п. 2. Существование:

- Для любого $y \in H$ рассмотрим

$$f_y(x) = Ax \cdot y \quad (f_y : H \mapsto \mathbb{C} \text{ — линейный}).$$

- Имеем, что $f_y \in H^*$, так как

$$|f_y(x)| = |Ax \cdot y| \leq \|Ax\|_H \|y\|_H \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)} \|y\|_H \|x\|_H,$$

откуда следует, что $\|f_y\|_{H^*} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)} \|y\|_H$.

- По теореме Рисса о представлении функционалов в гильбертовом пространстве (теорема 3.2 лекции 16) имеем

$$\exists\, y^* \in H, \text{ такой, что } f_y(x) = x \cdot y^* \quad \forall\, x \in H.$$

$$\exists\, y^* \in H, \text{ такой, что } f_y(x) = x \cdot y^* \quad \forall\, x \in H.$$

- Полагаем: $y^* := A^* y$.
- Имеем по построению, что A^* — *линейный*.
- По теореме Рисса имеем:

$$|f_y(x)| = |x \cdot A^* y| \quad \Rightarrow \quad \|A^* y\|_H = \|f_y\|_{H^*}$$

и выше уже установили, что $\|f_y\|_{H^*} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)} \|y\|_H$.

- Значит, $\|A^* y\|_H \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)} \|y\|_H$, откуда следует, что

$$\|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)},$$

то есть оператор A^* — *ограниченный*.

Наконец, точно установим норму оператора A^*.

- По следствию теоремы Хана–Банаха о существовании нетривиальных непрерывных функционалов (теорема 5.4 лекции 26) имеем, что для любого $x_0 \in H$, такого, что $Ax_0 \neq 0$, существует $f_0 \in H^*$, такой, что

$$\|f_0\|_{H^*} = 1, \quad f_0(Ax_0) = \|Ax_0\|_H.$$

- Отсюда следует, что

$$\|Ax_0\|_H = |f_0(Ax_0)| \overset{\text{по т. Рисса}}{=} |Ax_0 \cdot y_{f_0}| =$$

$$= |x_0 \cdot A^* y_{f_0}| \leq \|x_0\|_H \|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} \|y_{f_0}\|_H.$$

Здесь по утверждению изометрии в теореме Рисса имеем $\|y_{f_0}\|_H = \|f_0\|_{H^*} = 1$.

- Итак, из последней цепочки равенств и неравенств выводим, что $\|Ay\|_H \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} \|y\|_H$.

■ Таким образом установили равенство

$$\|A^* y\|_H = \|A\|_{\mathcal{L}(H)} \|y\|_H.$$

Предложение 7.1 доказано. □

Предлож. 7.2. **(Свойства сопряжённых операторов.)**

(1) $A^{**} := (A^*)^* = A$,

(2) $(A + B)^* = A^* + B^*$,

(3) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$,

(4) $(AB)^* = B^* A^*$,

(5) $\exists\, A^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Д-во. Доказательство утверждений (1)–(4) тривиально. Установим только утверждение (5):

$\exists\, A^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$

Имеем,

$$x \cdot y = A^{-1}Ax \cdot y = Ax \cdot (A^{-1})^* y = x \cdot A^*(A^{-1})^* y \quad \forall\, x, y \in H.$$

Отсюда в силу произвольности $x \in H$ следует, что

$$y = A^*(A^{-1})^* y \quad \forall\, y \in H.$$

В свою очередь, отсюда в силу произвольности $y \in H$ следует, что $\mathbb{I} = A^*(A^{-1})^*$, то есть $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. Предложение 7.2 доказано. $\square$

Опр. 7.9. Оператор A называется *нормальным оператором*, если $AA^* = A^*A$.

Опр. 7.10. Оператор A называется *самосопряжённым оператором*, если $A = A^*$.

Опр. 7.11. Оператор $U \in \mathcal{L}(H)$ называется *унитарным оператором*, если $\Omega_U = \Delta_U = H$ и имеет место равенство $U^{-1} = U^*$.

Предлож. 7.3. Унитарный оператор U *изометричен*, то есть

$$\|Ux\|_H = \|x\|_H \quad \forall\, x \in H. \tag{7.1}$$

Также справедливо обратное утверждение: если для оператора $U \in \mathcal{L}(H)$ выполняется (7.1), то $U^{-1} = U^*$.

Д-во.

■ Если $U^{-1} = U^*$, то

$$\|Ux\|_H^2 = Ux \cdot Ux = x \cdot U^* Ux = x \cdot x = \|x\|_H^2.$$

Прямое утверждение предложения доказали.

- Теперь докажем обратное утверждение.
- По тождеству параллелограмма имеем

$$4Re\left(Ux \cdot Uy\right) = \|U(x+y)\|_H^2 - \|U(x-y)\|_H^2$$
$$= \|x+y\|_H^2 - \|x-y\|_H^2 = 4Re\left(x \cdot y\right).$$

- Заменяя в предыдущей цепочке равенств y на iy, получаем

$$4Im\left(Ux \cdot Uy\right) = 4Im\left(x \cdot y\right).$$

Доказательство предложения 7.3 завершено. $\square$

Тождество параллелограмма в гильбертовом пространстве H:

$$\|x-y\|_H^2 + \|x+y\|_H^2 = 2\left(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2\right).$$

Теорема 7.3. **(О спектре сопряжённого оператора.)** Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$, H — гильбертово пространство. Справедливо утверждение:

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\lambda} \in \sigma(A^*).$$

Д-во.

- Докажем, что $\lambda \in \rho(A)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda} \in \rho(A^*)$.
- Имеем: если $\lambda \in \rho(A)$, то $R_\lambda(A) = (\lambda\mathbb{I} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.
- По предложению 7.1 существует единственный $((\lambda\mathbb{I} - A)^{-1})^* \in \mathcal{L}(H)$,
- а по предложению 7.2 имеем

$$((\lambda\mathbb{I} - A)^{-1})^* = ((\lambda\mathbb{I} - A)^*)^{-1} = (\bar{\lambda}\mathbb{I} - A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H).$$

- Это означает, что $\bar{\lambda} \in \rho(A^*)$. В обратную сторону доказательство проводится точно так же.

Теорема 7.4. **(О структуре спектра сопряжённого оператора.)** Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$. Справедливы следующие утверждения:

(1) $\lambda \in \sigma_r(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$,

(2) $\lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in (\sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*))$,

(3) $\lambda \in \sigma_c(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*)$.

Доказательство

Имеем

$$(\lambda \mathbb{I} - A)x \cdot y = x \cdot (\bar{\lambda} \mathbb{I} - A^*)y \quad \forall\, x, y \in H.$$

(1)

- Пусть $\lambda \in \sigma_r(A)$. По определению остаточного спектра имеем

$$\bar{L} := \overline{\Delta_{\lambda \mathbb{I} - A}} \neq H.$$

- Значит H можно разложить в прямую сумму:

$$H = \bar{L} \oplus \bar{L}^{\perp}.$$

- Это означает, что существует $z \in \bar{L}^{\perp}$, такой, что $z \neq 0$, но

$$0 = (\lambda \mathbb{I} - A)x \cdot z = x \cdot (\bar{\lambda}\mathbb{I} - A^*)z \quad \forall x \in H.$$

- Отсюда в силу произвольности $x \in H$ по теореме Рисса о представлении функционалов выводим, что $(\bar{\lambda}\mathbb{I} - A^*)z = 0$, то есть $\bar{\lambda}\mathbb{I}z = A^* z$. Так как $z \neq 0$, то это означает, что

$$\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*).$$

Утверждение (1) теоремы 7.4 доказано.

(2)

- Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$. По определению точечного спектра это означает, что существует $z \neq 0$, такой, что $(\lambda\mathbb{I} - A)z = 0$.
- Отсюда следует, что

$$0 = (\lambda\mathbb{I} - A)z \cdot y = z \cdot (\bar{\lambda}\mathbb{I} - A^*)y \quad \forall\, y \in H.$$

Возможны две ситуации:

- (2.1) $(\bar{\lambda}\mathbb{I} - A^*)y = 0$ для какого-либо $y \in H$. Тогда $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.
- (2.2) Вектор z ортогонален подпространству $\bar{L} := \overline{\Delta_{\bar{\lambda}\mathbb{I} - A^*}}$, то есть $z \in \bar{L}^\perp$, причём (важно!) $\bar{L} \neq H$. Это означает, что $\bar{\lambda} \in \sigma_r(A^*)$.
- Итак, $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$. Утверждение (2) теоремы 7.4 доказано.

(3) Доказательство проведём методом от противного.

- Пусть $\lambda \in \sigma_c(A)$. Значит по теореме 7.3 число $\bar{\lambda}$ принадлежит спектру оператора A^*.
- Предположим, что $\bar{\lambda} \in \sigma_r(A^*) \cup \sigma_p(A^*)$. Возьмём тогда $A^{**} = A$ и рассмотрим спектр этого оператора.
- По пунктам (1)-(2) настоящей теоремы (то есть, теоремы 7.4) имеем, что тогда $\lambda \in \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$, то есть $\lambda \notin \sigma_c(A)$.
- Получили противоречие. Значит, $\bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*)$. Утверждение (3) теоремы 7.4 доказано. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №32

7.4. Пример: спектры операторов левого и правого сдвига в l_2

ГЛАВА 8. КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

8.1. Основные свойства компактных (вполне непрерывных) операторов

7.4. Пример: спектры операторов левого и правого сдвига в l_2

Пример 7.4. В пространстве l_2 рассмотрим T — *оператор левого сдвига*:

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto Tx = (x_2, x_3, \ldots).$$

Определим T^*, определим и классифицируем спектры T и T^*.

(1) Имеем,

$$Tx \cdot y = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1}\bar{y}_i = \sum_{i=2}^{\infty} x_i \bar{y}_{i-1} = x \cdot T^* y = x \cdot z,$$

где $z = T^* y$.

Таким образом, приравнивая компоненты, получаем, что

$$y = (y_1, y_2, \ldots) \mapsto T^* y = (0, y_1, y_2, \ldots),$$

то есть T^* — это *оператор правого сдвига*.

(2) На семинарском занятии уже доказали, что $\|T\|_{\mathcal{L}(l_2)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(l_2)} = 1$.
Таким образом, по теореме 7.1 имеем

$$\sigma(T) \subset \{\lambda : \quad |\lambda| \leq 1\} \text{ и } \sigma(T^*) \subset \{\lambda : \quad |\lambda| \leq 1\}.$$

(3) Пусть $\lambda \in \sigma_p(T)$, то есть существует $x \in l_2$, $x \neq 0$, такой, что

$$Tx = \lambda x. \tag{7.2}$$

Решим уравнение (7.2) относительно x. Имеем:

$$x_2 = \lambda x_1, \quad x_3 = \lambda x_2, \ldots,$$

то есть получаем равенство

$$x_n = \lambda^{n-1} x_1.$$

Так как $x \neq 0$, то должно быть $x_1 \neq 0$. Отсюда получаем, что собственные вектора имеют вид

$$x = x_1 \cdot (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots), \quad x \in l_2.$$

$$x = x_1 \cdot (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots), \quad x \in l_2.$$

Значит, числа λ, такие, что $|\lambda| \geq 1$, не могут принадлежать $\sigma_p(T)$. А при $|\lambda| < 1$ имеем, что $x \in l_2$. Итак,

$$\sigma_p(T) = \{\lambda : \quad |\lambda| < 1\}.$$

(4) Сделаем уточнение к пункту (2) о множествах $\sigma(T)$ и $\sigma(T^*)$.
Так как спектр — это замкнутое множество по теореме 7.2, то

$$\sigma(T) = \{\lambda : \quad |\lambda| \leq 1\},$$

а по теореме 7.3 отсюда получаем, что

$$\sigma(T^*) = \{\lambda : \quad |\lambda| \leq 1\}.$$

(5) Предположим, что $\lambda \in \sigma_p(T^*)$. Это означает, что существует $x \in l_2$, такой, что $x \neq 0$ и $\lambda x = T^* x$. Отсюда следует, что

$$\lambda x_1 = 0,\ \lambda x_2 = x_1,\ \lambda x_3 = x_2, \ldots .$$

Имеем две возможности:

(5.1) $\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x = 0$. Получаем противоречие с тем, что $x \neq 0$.

(5.2) $\lambda \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (так как $\lambda x_1 = 0$) $\Rightarrow x = 0$. Снова получаем противоречие с тем, что $x \neq 0$.
Итак,

$$\sigma_p(T^*) = \emptyset.$$

(6) Найдём остаточный спектр $\sigma_r(T)$.
По теореме 7.4 имеем, что если $\lambda \in \sigma_r(T)$, то $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Вместе с этим, в пункте (5) уже нашли, что $\sigma_p(T^*) = \emptyset$. Значит,

$$\sigma_r(T) = \emptyset.$$

(7) Пусть $\lambda \in \sigma_r(T^*)$. Тогда $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T) \equiv \{|\lambda| < 1\}$.
Значит,

$$\sigma_r(T^*) \subset \{\lambda : \quad |\lambda| < 1\}.$$

Теперь, пусть $\lambda \in \sigma_p(T)$. Тогда $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*) = \sigma_r(T^*)$. То есть,

$$\sigma_r(T^*) \supset \{\lambda : \quad |\lambda| < 1\}.$$

Итак,

$$\sigma_r(T^*) = \{\lambda : \quad |\lambda| < 1\}.$$

(8) Наконец, имеем:

$$\sigma_c(T) = \sigma(T) \setminus (\sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_c(T) = \{\lambda : \quad |\lambda| = 1\}.$$

По теореме 7.4 отсюда следует, что

$$\sigma_c(T^*) = \{\lambda : \quad |\lambda| = 1\}.$$

Итоги: Мы полностью изучили спектр T и T^*. Можем составить такую таблицу:

	σ	σ_p	σ_r	σ_c
$T:$	$\lvert\lambda\rvert \le 1$	$\lvert\lambda\rvert < 1$	$\emptyset$	$\lvert\lambda\rvert = 1$
$T^*:$	$\lvert\lambda\rvert \le 1$	$\emptyset$	$\lvert\lambda\rvert < 1$	$\lvert\lambda\rvert = 1$

Опр. 8.1. Линейный оператор $A\colon X \mapsto Y$, где X, Y — нормированные пространства, называется *компактным* или *вполне непрерывным*, если он *ограниченные* множества переводит в *относительно компактные*.

8.1. Основные свойства компактных (вполне непрерывных) операторов

Предлож. 8.1. u — компактный оператор, тогда и только тогда, когда u переводит единичный шар в относительно компактное множество.

Д-во. Утверждение 8.1 сразу следует из определения 8.1, так как оператор — линейный. □

Предлож. 8.2. Если u — компактный оператор, то Δ_u — сепарабельное множество.

Д-во.

- Если u — компактное множество, то $u[B(0,n)]$ — относительно компактное множество для любого $n \in \mathbb{N}$.
- По пункту (б) предложения 1.24 лекции 6 прошлого семестра имеем, что $u[B(0,n)]$ — *вполне ограниченное* множество, то есть существует конечная ε-сеть W_ε^n, покрывающая $u[B(0,n)]$.
- Полагаем $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$, $m = 1, 2, \ldots$.
  Переобозначим $W_\varepsilon^n = W_m^n$.

- Рассмотрим $Y_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} W_m^n$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$.

  Заметим, что Y_n — это счётное объединение конечных множеств, то есть счётное множество, всюду плотное множество в $u[B(0,n)]$.

- Теперь рассмотрим объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n = S$.

  Получаем, что S — это счётное объединение счётных множеств, то есть счётное множество, плотное в

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} u[B(0,n)] \supset \Delta_u.$$

Предложение 8.2 доказано. $\square$

Теорема 8.1. Справедливы следующие утверждения:

(1) если u — компактный оператор, то u — ограниченный оператор;

(2) если u — компактный оператор и A — ограниченный оператор, то $u \circ A$ и $A \circ u$ — компактные операторы;

(3) линейная комбинация компактных операторов является компактным оператором;

(4) если $\{u_n\}$ — последовательность компактных операторов и $\|u_n - u\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$ при $n \to \infty$, то u — это компактный оператор.

Д-во. Утверждения теоремы следуют непосредственно из определений компактного оператора, ограниченного оператора и определения равномерной сходимости в $\mathcal{L}(X, Y)$. $\square$

Следующая теорема не относится непосредственно к теории компактных операторов, но имеет в этой теории очень важное значение.

Теорема 8.2. **(Лемма о почти-перпендикуляре.)** Пусть $x_1, \dots, x_n, \dots$ — линейно независимые вектора в нормированном пространстве X. Пусть подпространство X_n порождено системой $\{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда существует последовательность векторов $y_1, y_2, \dots \in X$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$(\mathbf{1})\ \|y_n\|_X = 1; \quad (\mathbf{2})\ y_n \in X_n; \quad (\mathbf{3})\ d(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2},$$

$n = 1, 2, \dots$.

Д-во.

- Для начала, вспомним:

$$d(y_n, X_{n-1}) = \inf_{x \in X_{n-1}} \|y_n - x\|_X.$$

- Далее, так как $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — линейно независимая система, то $x_n \notin X_{n-1}$ и

$$d(x_n, X_{n-1}) = \alpha > 0.$$

- Пусть x^* — такой вектор в X_{n-1}, что

$$\|x_n - x^*\|_X < 2\alpha.$$

- В силу того, что $x^* \in X_{n-1}$, то есть $d(x^*, X_{n-1}) = 0$, имеем

$$\alpha = d(x_n, X_{n-1}) = d(x_n - x^*, X_{n-1}).$$

- Отсюда следует, что вектор

$$y_n = \frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|_X}$$

удовлетворяет условиям (1)–(3) в формулировке теоремы.

- Остаётся заметить, что подпространство X_0 никак не определено, поэтому мы не определяем никак x^* в $X_0 = X_{n-1}$ (при $n = 1$), а берём $y_1 := \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$.

Теорема 8.2 доказана. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №33

[8.1.] Основные свойства компактных (вполне непрерывных) операторов [окончание]

Вспомним из лекции 31:

Теорема 8.1. Справедливы следующие утверждения:

(1) если u — компактный оператор, то u — ограниченный оператор;

(2) если u — компактный оператор и A — ограниченный оператор, то $u \circ A$ и $A \circ u$ — компактные операторы;

(3) линейная комбинация компактных операторов является компактным оператором;

(4) если $\{u_n\}$ — последовательность компактных операторов и $\|u_n - u\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$ при $n \to \infty$, то u — это компактный оператор.

Ещё вспомним из лекции 31:

Теорема 8.2. **(Лемма о почти-перпендикуляре.)** Пусть $x_1, \dots, x_n, \dots$ — линейно независимые вектора в нормированном пространстве X. Пусть подпространство X_n порождено системой $\{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда существует последовательность векторов $y_1, y_2, \dots \in X$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\textbf{(1)}\ \|y_n\|_X = 1; \quad \textbf{(2)}\ y_n \in X_n; \quad \textbf{(3)}\ d(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2},$$

$n = 1, 2, \dots$.

Следствие теорем 8.1 и 8.2

Следствие. В бесконечномерном нормированном пространстве X тождественный оператор $\mathbb{I}x = x$ является ограниченным, но не является компактным.

Д-во.

- По теореме 8.2 имеем, что

$$\|y_i\|_X = 1, \quad y_i \in X, \quad \|y_i - y_s\|_X > \frac{1}{2} \quad \forall\, i \neq s.$$

- Следовательно, $\{y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots\}$ — ограниченная, но не фундаментальная последовательность.
- Значит $\mathbb{I}$ переводит ограниченное множество во множество, которое *не* является относительно компактным.
- Следовательно, единичный шар в бесконечномерном нормированном пространстве X не компактен. $\square$

Замечание к пункту (4) теоремы 8.1

Замеч. 8.1. Для того, чтобы $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ был компактным, недостаточно, чтобы последовательность компактных операторов сходилась всего лишь *сильно*, а не *равномерно*.
Приведём пример.

Пример 8.1. Рассмотрим последовательность $\{u_n\} \subset l_2$, где

$$u_n : \quad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Очевидно, u_n — компактный оператор, так как имеет значения в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$.
Вместе с этим имеем, что $u_n \to \mathbb{I}$ при $n \to \infty$, а по следствию теорем 8.1 и 8.2 тождественный оператор $\mathbb{I}$ не компактен. $\square$

Теорема Шаудера о сопряжённом операторе

Теорема 8.4. **(Теорема Шаудера.)** Пусть $u \colon H \mapsto H$ — линейный оператор, где H — гильбертово пространство. Справедливо следующее утверждение:
u — компактный оператор тогда и только тогда, когда u^* — компактный оператор.

Д-во.

($\Rightarrow$) Пусть u — компактный оператор.

- Рассмотрим скалярное произведение:

$$ux \cdot g = x \cdot u^* g.$$

- Пусть M — ограниченное множество в H. Считаем, что $\|g\|_H \leq C \; \forall\, g \in M$.

- Положим $\bar{K} := \overline{u[B(0,1)]} \subset H$. Заметим, что $\bar{K}$ — это компакт, так как u — компактный оператор.
- Зафиксируем произвольно $g \in M$. Если $y \in K$, то имеем

$$|y \cdot g| \le \|y\|_H \|g\|_H = \|ux\|_H \|g\|_H \le \\ \le \|u\|_{\mathcal{L}(H)} \|x\|_H \|g\|_H \le C\|u\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

Здесь заметили, что $\|x\|_H \le 1$, так как $y \in K$.

- Если $y \in \bar{K}$, то существует $\{y_n\} \subset K$, так, что $y_n \to y$ в H при $n \to \infty$. Для y_n имеем

$$|y_n \cdot g| \le C\|u\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

$$|y_n \cdot g| \leq C\|u\|_{\mathcal{L}(H)} = C_u.$$

- Переходя к пределу в этой оценке при $n \to \infty$, выводим

$$|y \cdot g| \leq C\|u\|_{\mathcal{L}(H)} (= C_u).$$

- Эта оценка означает, что семейство функционалов

$$\{F(y) = y \cdot g, \quad g \in M\}$$

равномерно ограничено на $\bar{K}$, то есть

$$|F(y)| \leq C_u \quad \forall\, y \in \bar{K}.$$

- Далее, имеет место оценка:

$$|F(y') - F(y'')| = |F(y' - y'')| = |(y' - y'') \cdot g|$$
$$\leq \|g\|_H \|y' - y''\|_H \leq C\|y' - y''\|_H \quad \forall\, y', y'' \in \bar{K},$$

где, напомним, $g \in M$.
- Эта оценка означает, что семейство

$$\mathcal{M} := \{F(y) = y \cdot g, \quad g \in M\}$$

равностепенно непрерывно на $\bar{K}$.

- Теперь можем применить *теорему Асколи–Арцела*. Напомним:
  Теорема Асколи–Арцела. Пусть F — банахово пространство, E — компактное метрическое пространство. Справедливо утверждение: $G \subset C_F(E)$ — относительно компактное множество тогда и только тогда, когда G равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. (Здесь через $C_F(E)$ обозначено пространство непрерывных функций в пространстве E со значениями в F.)
- По этой теореме в $\mathcal{M}$ можно выделить равномерно сходящуюся на $\bar{K}$ последовательность $\{F_n\}$.
- По определению равномерной сходимости функционалов и по теореме Рисса о представлении отсюда выводим, что $\|g_n - g\|_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\|g_n - g\|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

- Далее, имеем

$$F_n(ux) = ux \cdot g_n = x \cdot u^* g_n.$$

Так как F_n равномерно сходится на $\bar{K}$, то последовательность функционалов $x \mapsto x \cdot u^* g_n$ равномерно сходится на $B(0,1)$.

- Последнее означает, что $\|u^* g_n - u^* g\|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$
- ИТОГ: доказали, что в произвольном ограниченном множестве $M \subset H$ можно выбрать последовательность g_n так, что $u^* g_n$ сходится сильно. Значит u^* — компактный оператор. Утверждение $(\Rightarrow)$ доказано.

(⇐) Пусть u^* — компактный оператор.

■ Достаточно вспомнить, что $u = (u^*)^*$, поэтому доказательство утверждения (⇐) совершенно аналогично доказательству утверждения (⇒). Теорема Шаудера доказана. □

Теорема 8.5. Если $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ — компактный оператор и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ слабо в X, то $ux_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ux$ сильно в Y.

Д-во. Имеем: $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность по теореме 6.3, а оператор u переводит ограниченные множества в относительно компактные. По теореме 1.5 лекции 5 прошлого семестра (критерий компактности в метрическом пространстве) имеем:

$$\exists\, y_* \in Y : \quad \|ux_n - y_*\|_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Так как u непрерывный, то очевидно $y_* = ux$, что завершает доказательство теоремы. □

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №34

8.2. Множество значений и ядро оператора $\mathbb{I} - A$

8.2. Множество значений и ядро оператора $\mathbb{I} - A$

Будем рассматривать компактные операторы A: $X \mapsto X$.

Теорема 8.6. Пусть A — компактный оператор. Тогда $\Delta_{\mathbb{I}-A}$ замкнута.

Д-во.

- Пусть $y_n \in \Delta_{\mathbb{I}-A}$, $y_n \to y_0$, где имеем $y_n = x_n - Ax_n$. Требуется доказать, что существует $x_0 \in X$, так что $y_0 = x_0 - Ax_0$.
- Рассмотрим два случая:
  (1) $\{x_n\}$ ограничено,
  (2) $\{x_n\}$ неограничено.

Случай (1)

- Предположим, что $\|x_n\| \leq C$. Тогда существует подпоследовательность $Ax_{n_k} \to \bar{y}$.
- Отсюда,

$$x_{n_k} = y_{n_k} + Ax_{n_k} \underset{n_k \to \infty}{\to} x_0 := y_0 + \bar{y}.$$

- Так как A непрерывен, то $Ax_{n_k} \to Ax_0$.
- Наконец, переходим к пределу:

$$y_{n_k} = x_{n_k} - Ax_{n_k} \to x_0 - Ax_0 \text{ и } y_{n_k} \to y_0.$$

Таким образом $y_0 = x_0 - Ax_0$. Доказательство теоремы в случае (1) завершено.

Случай (2)

- Предполагаем, что $\{x_n\}$ неограничено. Рассмотрим
$$N = \{x : \ x - Ax = 0\}.$$
- Вспомним лемму: Пусть f, g — непрерывные отображения. Множество $\{x : \ f(x) = g(x)\}$ — замкнуто.
- По этой лемме получаем, что N — это замкнутое линейное подпространство.
- Обозначим
$$d_n = d(x_n, N) = \inf_{z \in N} \|x_n - z\|_X < +\infty.$$
По определению *inf*
$$\exists\, z_n \in N : \quad d_n \leq \|x_n - z_n\|_X < d_n + \frac{d_n}{n}. \qquad (8.1)$$

Теперь возможны два варианта:

Случай (2a): $\{d_n\}$ ограничено.

- В этом случае заметим, что последовательность $x'_n := x_n - z_n$ такова, что

$$\begin{aligned} x'_n - Ax'_n &= x_n - z_n - Ax_n + Az_n \\ &= x_n - Ax_n - \underbrace{(z_n - Az_n)}_{\text{равно нулю}} = x_n - Ax_n = y_n. \end{aligned}$$

- Итак, $x'_n - Ax'_n = y_n$, причём $\{x'_n\}$ ограничена в силу (8.1).
- Таким образом для x'_n выполняются условия случая (1). Значит имеем по случаю (1), что

$$x'_n \to x'_0 \quad y_0 = x'_0 - Ax'_0.$$

Итак, теорема в случае (2a) доказана.

Случай (2б): $\{d_n\}$ неограничено. Считаем, что $d_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$

- Рассмотрим $u_n := \dfrac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|_X}$. Имеем $\|u_n\|_X = 1$,

$$(\mathbb{I} - A)u_n = \frac{1}{\|x_n - z_n\|_X} y_n \to 0, \tag{8.2}$$

так как $\|x_n - z_n\|_X \to \infty$ в силу (8.1).

- Поскольку A компактный оператор и $\{u_n\}$ — ограниченная последовательность, то из (8.2) выводим, что существует подпоследовательность

$$Au_{n_k} \to \bar{y}.$$

- Рассмотрим $v_{n_k} := u_{n_k} - Au_{n_k}$. Имеем $u_{n_k} \xrightarrow{w} u_0$, $Au_{n_k} \xrightarrow{s} Au_0$.
- Значит $v_{n_k} \xrightarrow{w} 0$. Отсюда следует, что

$$u_0 - Au_0 = 0.$$

- Вследствие представления $u_n = \dfrac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|_X}$ имеет место равенство равенство

$$x_{n_k} - (z_{n_k} + \|x_{n_k} - z_{n_k}\|_X u_0) = \|x_{n_k} - z_{n_k}\|_X (u_{n_k} - u_0). \tag{8.3}$$

В этом равенстве правую часть обозначим через t_{n_k},

$$t_{n_k} := \|x_{n_k} - z_{n_k}\|_X (u_{n_k} - u_0).$$

$$x_{n_k} - (z_{n_k} + \|x_{n_k} - z_{n_k}\|_X u_0) = \|x_{n_k} - z_{n_k}\|_X (u_{n_k} - u_0). \tag{8.3}$$

- В левой части (8.3) заметим, что

$$(z_{n_k} + \|x_{n_k} - z_{n_k}\|_X u_0) \in N.$$

Значит, по построению множества N имеем, что

$$\|t_{n_k}\|_X \geq d_{n_k}. \tag{8.4}$$

- Наконец, имеем

$$\|u_{n_k} - u_0\|_X \overset{(8.3),(8.4)}{\geq} \frac{d_{n_k}}{\|x_{n_k} - z_{n_k}\|_X} \overset{(8.1)}{>} \frac{d_{n_k}}{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) d_{n_k}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n_k}},$$

где $\|u_{n_k} - u_0\|_X \to 0$ и $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{n_k}} \to 1.$

- Таким образом, получается, что $0 > 1$, чего быть не может. Значит, случай (2б) невозможен, то есть d_n обязательно ограничено.

Доказательство теоремы 8.6 завершено. □

Следствие. Если X — гильбертово пространство, то $\Delta_{\mathbb{I}-A^*}$ — замкнутое множество.

Теорема о стабилизации ядра

Теорема 8.7. Пусть $A\colon X \mapsto X$ — компактный оператор (X — банахово пространство), $(\mathbb{I} - A)^k$ — k-я степень оператора $\mathbb{I} - A$. Пусть

$$N_k = \{x \in X : \quad (\mathbb{I} - A)^k x = 0\}.$$

Тогда N_k — неубывающая по включению последовательность замкнутых подпространств в X, *стабилизирующаяся* с некоторого k_0, то есть

$$N_{k_0} = N_{k_0+1} = N_{k_0+2} = \dots .$$

Д-во. **Шаг 1.**

- Заметим, что N_k — *замкнутые* подпространства в силу непрерывности $(\mathbb{I}-A)^k$ по известной лемме из первого семестра: Пусть f, g — непрерывные отображения. Тогда множество $\{x: \ f(x)=g(x)\}$ замкнуто. В данном случае имеем $g=0$ и $f=(\mathbb{I}-A)^k$.
- Рассмотрим $x_* \in N_k$. Имеем

$$(\mathbb{I}-A)^{k+1}(x_*)=(\mathbb{I}-A)((\mathbb{I}-A)^k x_*)=(\mathbb{I}-A)(0)=0,$$

то есть $x_* \in N_{k+1}$. Значит $N_k \subset N_{k+1}$, то есть последовательность $\{N_k\}$ *не убывает по включению*.

Шаг 2.

- Покажем, что если $N_k = N_{k+1}$, то $N_{k+1} = N_{k+2}$. Иными словами, если при каком-либо k_0 нет строгого включения, то его нет для любого $k > k_0$, то есть имеет место *стабилизация*.
- Пусть $x \in N_{k+2}$ и выполняется $N_k = N_{k+1}$. Имеем, что $(\mathbb{I} - A)^{k+2}x = 0$, так как $\{N_k\}$ не убывает по включению.
- Запишем:

$$0 = (\mathbb{I} - A)^{k+2}x \equiv (\mathbb{I} - A)^{k+1}((\mathbb{I} - A)x),$$

откуда следует, что $(\mathbb{I} - A)x \in N_{k+1}$.

- Тогда по предположению $N_k = N_{k+1}$ выводим, что $(\mathbb{I} - A)x \in N_k$.

- $(\mathbb{I} - A)x \in N_k$ эквивалентно тому, что $(\mathbb{I} - A)^k(\mathbb{I} - A)x = 0$, то есть $x \in N_{k+1}$.
- Итак, из того, что $x \in N_{k+2}$ вывели то, что $x \in N_{k+1}$. То есть,
$$N_{k+2} \subset N_{k+1}. \tag{8.5}$$
- Так как последовательность $\{N_k\}$ не убывает по включению, то в силу (8.5) выводим, что
$$N_{k+1} = N_{k+2}.$$

Осталось показать, что существует k_0, такое число, что $N_{k_0} = N_{k_0+1}$. Доказательство будем проводить *методом от противного*, то есть сначала предположим, что $\{N_k\}_{k=1,2,3,\dots}$ строго возрастает по включению.

Доказательство будет основано на *усиленной версии* леммы о почти-перпендикуляре:

Лемма 8.1. **(Лемма Рисса — усиленная версия леммы о почти-перпендикуляре.)** Пусть L — подпространство в нормированном пространстве E, причём $L \neq E$. Тогда существует $z \notin L$, $\|z\|_E = 1$, такой, что $d(z, L) > \dfrac{1}{2}$.

Д-во.

- Пусть $x \notin L$. Такое x существует, так как $L \neq E$.
- Положим $d = d(x, L) = \inf\limits_{u \in L} \|u - x\|_E > 0$.
- Возьмём $u_* \in L$, такой, что

$$d \leq \|u_* - x\|_E < 2d.$$

Такое u_* существует по определению inf.

- Определим $z := \dfrac{u_* - x}{\|u_* - x\|_E}$.
- Покажем, что z является элементом, который нужно было найти.
- Действительно, имеем $z \notin L$. (Если предположить, что $z \in L$, то $u_* - x \in L$ и значит $x \in L$. Это — противоречие с тем, что $x \notin L$.)
- Очевидно имеем $\|z\|_E = 1$.

- Наконец, справедлива оценка

$$\|z-u\|_E = \left\| \frac{u_* - x}{\|u_* - x\|_E} - u \right\|_E$$
$$= \frac{\|x - (u_* - \|u_* - x\|_E u)\|_E}{\|u_* - x\|_E} > \frac{1}{2} \quad \forall\, u \in L,$$

поскольку

$$u_* - \|u_* - x\|_E u \in L \text{ и } \|x - u\|_E \geq d \; (\forall\, u \in L),$$

а значит

$$\|x - (u_* - \|u_* - x\|_E u)\|_E \geq d \text{ и } \|u_* - x\|_E < 2d.$$

Лемма Рисса доказана. □

Наблюдение. Лемма 8.1 называется *усиленной версией* теоремы 8.2, потому что в теореме 8.2 подпространства $L_n := X_n$ — конечномерные (они порождены системами $\{x_1, \dots, x_n\}$), а в лемме 8.1 множество L может быть бесконечномерным. Соответственно, теорема 8.2 является следствием леммы 8.1.

Вернёмся к обоснованию теоремы 8.7.

Шаг 3.

- По лемме 8.1 существует $z_k \in N_{k+1}$, такое, что $d(z_k, N_k) > \dfrac{1}{2}$, то есть

$$\|z_k - z\|_X > \frac{1}{2} \quad \forall\, z \in N_{k-1}.$$

При этом $\|z_k\|_X = 1$.

- Рассмотрим произвольные m, n, такие, что $m > n$.
- Заметим, что

$$z_m \in N_{m+1}, \quad z_n \in N_{n+1}, \tag{8.6}$$

$$z_m - Az_m = (\mathbb{I} - A)z_m \in N_m, \tag{8.7}$$

$$z_n - Az_n = (\mathbb{I} - A)z_n \in N_n. \tag{8.8}$$

- Ещё заметим, что $N_m \supset N_{n+1} \supset N_n$, значит в силу $(8.6)_2$–(8.8) имеем, что

$$z_m - Az_m - (z_n - Az_n) + z_n \in N_m. \tag{8.9}$$

- В силу предположения строгого возрастания (по включению) последовательности $\{N_k\}$ и формул $(8.6)_1$ и (8.9) имеем:
$\|Az_m - Az_n\|_X = \|z_m - [z_m - Az_m - (z_n - Az_n) + z_n]\|_X > \frac{1}{2}$.

$$\|Az_m - Az_n\|_X > \frac{1}{2}.$$

- Таким образом, последовательность $\{Az_k\}$ — не фундаментальная. Отсюда и из того, что $\|z_k\|_X = 1$ следует, что оператор A *не компактен*.
- Пришли к противоречию с компактностью оператора A. Значит, последовательности $\{N_k\}$ возрастает не строго, то есть существует k_0, такой, что $N_{k_0} = N_{k_0+1}$.

Теорема 8.7 доказана. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка
(Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №35

ГЛАВА 9. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА

9.1. Первая теорема Фредгольма

9.1. Первая теорема Фредгольма

Теорема 9.1. **(Первая теорема Фредгольма.)** Пусть X — банахово пространство, $A\colon X \mapsto X$ — компактный оператор.

Следующие четыре утверждения эквивалентны друг другу:

(α) Уравнение $x - Ax = y$ разрешимо для любого $y \in X$.

(β) Уравнение $z - Az = 0$ имеет только нулевое решение.

(γ) Уравнение $f - A^*f = g$ разрешимо для любого $g \in X$.

(δ) Уравнение $h - A^*h = 0$ имеет только нулевое решение.

При этом, если выполнено одно из утверждений (α)–(δ), то операторы $\mathbb{I} - A$ и $\mathbb{I} - A^*$ непрерывно обратимы.

Пояснение. В нашем курсе утверждения (γ) и (δ) имеют смысл только когда X — *гильбертово* пространство.

Д-во.

$(\alpha \;\Rightarrow\; \beta)$

- По условию имеем $\Delta_{\mathbb{I}-A} = X$. Требуется доказать, что
$$N_1 = ker\,(\mathbb{I} - A) = \{0\},$$
то есть, что ядро состоит только из нуля.
- Доказательство проведём методом от противного: предположим, что существует $x_1 \in N_1$, такой, что $x_1 \neq 0$.
- Тогда в силу утверждения (α) можем последовательно найти $x_2, x_3, \ldots$ из уравнений
$$x_{k+1} - Ax_{k+1} = x_k.$$

- Замечаем, что если

$$x_2 - Ax_2 = x_1, \text{ и при этом } x_1 \neq 0,$$

то

$$x_2 \notin ker\,(\mathbb{I} - A) = N_1. \tag{9.1}$$

- Вместе с этим,

$$(\mathbb{I} - A)(x_2 - Ax_2) = (\mathbb{I} - A)x_1 \overset{x_1 \in N_1}{=} 0,$$

откуда следует, что

$$x_2 \in ker\,(\mathbb{I} - A)^2 = N_2. \tag{9.2}$$

- Аналогично, если

$$x_{k+1} - Ax_{k+1} = x_k, \text{ и при этом } x_k \in N_k \text{ и } x_k \neq 0$$

при каком-либо $k > 1$, то

$$x_{k+1} \in N_{k+1}, \quad x_{k+1} \notin N_k. \tag{9.3}$$

- Справедливость формул (9.1)–(9.3) означает, что (9.3) справедливо *для всех* $k = 1, 2, \ldots$.
- В свою очередь, (9.3) означает, что последовательность $\{N_k\}$ строго возрастает по включению. Это противоречит теореме 8.7 (о стабилизации ядра). Значит, $x_1 = 0$ обязательно.
- Итак, из утверждения (α) следует утверждение (β).

$(\beta \Rightarrow \alpha)$

- По условию имеем $ker\,(\mathbb{I} - A) = \{0\}$. Надо доказать, что $\Delta_{\mathbb{I}-A} = X$.
- **Шаг 1.** Заметим сначала, что $\Delta_{(\mathbb{I}-A)^n}$ — замкнутое подпространство.
- Действительно,

$$(\mathbb{I} - A)^n = \sum_{k=0}^{n} c_n^k \mathbb{I}^k (-1)^{n-k} A^{n-k} =$$

$$= \mathbb{I} - \sum_{k=0}^{n-1} c_n^k (-1)^{n-k-1} A^{n-k} = \mathbb{I} - B$$

и заметим, что $B := \sum_{k=0}^{n-1} c_n^k (-1)^{n-k-1} A^{n-k}$ является компактным оператором, так как это — линейная комбинация компактных операторов.
- В силу этого, замкнутость $\Delta_{(\mathbb{I}-A)^n}$ вытекает из теоремы 8.6.

- **Шаг 2.** Далее, имеем

$$\Delta_{\mathbb{I}-A} \supset \Delta_{(\mathbb{I}-A)^2} \supset \ldots \supset \Delta_{(\mathbb{I}-A)^k} \supset \ldots .$$

Действительно, если $y \in \Delta_{(\mathbb{I}-A)^{k+1}}$, то

$$y = (\mathbb{I} - A)^{k+1}x = (\mathbb{I} - A)^k((\mathbb{I} - A)x)$$

для некоторого x, то есть, $y \in \Delta_{(\mathbb{I}-A)^k}$.

- **Шаг 3.** Теперь, пусть $X \neq \Delta_{\mathbb{I}-A}$, то есть существует $x_1 \in X$, такое, что $x_1 \notin \Delta_{\mathbb{I}-A}$.
- Рассмотрим
$$x_{n+1} = (\mathbb{I} - A)^n x_1.$$
- В силу предыдущих рассуждений замечаем, что
$$x_{n+1} \in \Delta_{(\mathbb{I}-A)^n}.$$
- В свою очередь, x_{n+1} будет принадлежать $\Delta_{(\mathbb{I}-A)^{n+1}}$, если существует $\bar{x} \in X$, такой, что
$$x_{n+1} = (\mathbb{I} - A)^{n+1} \bar{x}.$$

$$x_{n+1} = (\mathbb{I} - A)^{n+1}\bar{x}$$

- Но в этом случае получаем

$$0 = x_{n+1} - x_{n+1} = (\mathbb{I} - A)^n x_1 - (\mathbb{I} - A)^{n+1}\bar{x}$$
$$= (\mathbb{I} - A)[(\mathbb{I} - A)^{n-1}x_1 - (\mathbb{I} - A)^n\bar{x}].$$

- Так как в силу (β) имеем, что $ker\,(\mathbb{I} - A) = \{0\}$, отсюда выводим

$$0 = (\mathbb{I} - A)^{n-1}x_1 - (\mathbb{I} - A)^n\bar{x}.$$

- Аналогично предыдущему, это равенство можем записать в виде

$$0 = (\mathbb{I} - A)[(\mathbb{I} - A)^{n-2}x_1 - (\mathbb{I} - A)^{n-1}\bar{x}].$$

- Аналогично предыдущему, используя утверждение (β), отсюда выводим равенство

$$0 = (\mathbb{I} - A)^{n-2} x_1 - (\mathbb{I} - A)^{n-1} \bar{x}.$$

- Продолжая это рассуждение («спуск вниз по степени n»), в итоге получаем

$$x_1 = (\mathbb{I} - A)\bar{x},$$

то есть $x_1 \in \Delta_{\mathbb{I}-A}$. Получили противоречие с предположением $x_1 \notin \Delta_{\mathbb{I}-A}$.

- То есть получили, что обязательно должно выполняться одно свойство из двух:
(1) $X = \Delta_{\mathbb{I}-A}$. В этом случае доказательство завершено;
(2) $x_{n+1} \notin \Delta_{(\mathbb{I}-A)^{n+1}}$.

- **Шаг 4.** Так как $\Delta_{(\mathbb{I}-A)^k}$ — замкнутые подпространства, можем применить лемму 8.1 (Рисса). Построим последовательность $\{z_n\} \subset X$, такую, что $\|z_n\|_X = 1$, $z_n \in \Delta_{(\mathbb{I}-A)^n}$,

$$d\left(z_n, \Delta_{(\mathbb{I}-A)^{n+1}}\right) > \frac{1}{2}.$$

- Возьмём произвольные $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Как в доказательстве леммы 8.1 (шаг 3), имеем,

$$\|Az_n - Az_m\|_X = \|z_n - [z_n - Az_n - z_m + Az_m + z_m]\|_X > \frac{1}{2},$$

то есть последовательность $\{Az_n\}$ — не фундаментальная, откуда следует, что A — не компактный.

- Получили противоречие. Значит, $\Delta_{\mathbb{I}-A} = X$.
- ИТАК: доказали эквивалентность утверждений (α) и (β).
- Совершенно аналогично доказывается эквивалентность утверждений (γ) и (δ) в случае, когда X — это гильбертово пространство.

$(\alpha \Rightarrow \delta)$ X — гильбертово пространство.

- Имеем $\Delta_{\mathbb{I}-A} = X$. Надо доказать, что $ker\,(\mathbb{I} - A^*) = \{0\}$.
- Пусть $(\mathbb{I} - A^*)h = 0$. Пусть $y \in X$ — произвольный. Тогда в силу утверждения (α) существует $x \in X$, такой, что $x - Ax = y$.
- Имеем:

$$y \cdot h = (\mathbb{I} - A)x \cdot h = x \cdot (\mathbb{I} - A^*)h = 0.$$

Так как y произвольно, то отсюда следует, что $h = 0$, а значит $ker\,(\mathbb{I} - A^*) = \{0\}$.

$(\delta \Rightarrow \alpha)$ X — гильбертово пространство.

- Имеем $ker\,(\mathbb{I} - A^*) = \{0\}$. Надо доказать, что $\Delta_{\mathbb{I}-A} = X$.
- Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что существует $y_0 \in X$, такое, что $y_0 \notin \Delta_{\mathbb{I}-A}$.
- Применим теорему 5.5 (об аннуляторе). Напомним: Теорема 5.5. Пусть X — нормированное пространство, L — подпространство в X, $x_0 \notin L$ и $d(x_0, L) = d > 0$ — расстояние от x_0 до L. Тогда существует $f \in X^*$ со следующими свойствами:
(1) $\forall\, x \in L \quad f(x) = 0$,
(2) $f(x_0) = 1$,
(3) $\|f\|_{X^*} = 1/d$.

- По теореме об аннуляторе существует $h_0 \in X^*$, так, что $h_0(y_0) = 1$, $h_0[\Delta_{\mathbb{I}-A}] = 0$.
- Соответственно, по теореме Рисса о представлении существует элемент $H_0 \in X$, такой, что

$$H_0 \cdot y_0 = 1, \quad H_0 \cdot y = 0 \quad \forall\, y \in \Delta_{\mathbb{I}-A}. \tag{9.4}$$

- Возьмём $y := (\mathbb{I} - A)x$, где $x \in X$ произвольно. Формула $(9.4)_2$ означает, что

$$0 = H_0 \cdot (\mathbb{I} - A)x = (\mathbb{I} - A^*)H_0 \cdot x.$$

- В силу произвольности x отсюда следует, что $H_0 \in ker\,(\mathbb{I} - A^*)$, причём имеем $H_0 \neq 0$ в силу $(9.4)_1$.
- Получили противоречие. Таким образом, $\Delta_{\mathbb{I}-A} = X$, то есть, вывели $(\delta \;\Rightarrow\; \alpha)$. $\square$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II

Электронная учебно-методическая разработка (Слайд-презентации лекций)

ЛЕКЦИЯ №36

9.2. Вторая теорема Фредгольма

9.3. Третья теорема Фредгольма

9.4. Альтернатива Фредгольма

9.2. Вторая теорема Фредгольма

Теорема 9.2. **(Вторая теорема Фредгольма.)** Пусть X — гильбертово пространство. Пусть $A\colon X \mapsto X$ — компактный оператор.
Справедливо утверждение: пространства решений уравнений $x - Ax = 0$ и $h - A^* h = 0$ конечномерны и имеют одинаковую размерность.

Д-во.

■ Имеем: пространство решений уравнения

$$x - Ax = 0$$

есть $Ker\,(\mathbb{I} - A) \stackrel{def}{=} N(\mathbb{I} - A)$ — замкнутое подпространство в X.

Этап 1: *доказем конечномерность* $N(\mathbb{I} - A)$ *и* $N(\mathbb{I} - A)^*$.

- Пусть M ограничено в X, $M \subset N(\mathbb{I} - A)$. Тогда $A[M] = M$, так как $Ax = x$ для любого $x \in M$.
- Отсюда следует, что M — относительно компактное множество в X, поскольку A — компактный оператор.
- Таким образом, $\bar{M}$ — компактное. При этом, $\bar{M} \subset N(\mathbb{I} - A)$, так как $N(\mathbb{I} - A)$ замкнуто.
- Значит получили, что любое ограниченное подмножество в $N(\mathbb{I} - A)$ относительно компактно.
- Вспомним теорему Рисса (теорема 2.9, лекция 13 в прошлом семестре): Локально компактное нормированное пространство E конечномерно.
- По этой теореме получаем, что $N(\mathbb{I} - A) = Ker\,(\mathbb{I} - A)$ — конечномерное пространство. Точно также доказывается конечномерность $N(\mathbb{I} - A^*)$, так как A^* — компактный оператор.

Этап 2: *докажем равенство размерностей $N(\mathbb{I}-A)$ и $N(\mathbb{I}-A)^*$.*

- Предположим противное: пусть

$$dim\, N(\mathbb{I}-A) \stackrel{def}{=} n < m \stackrel{def}{=} dim\, N(\mathbb{I}-A^*).$$

- Пусть $\{x_1,\dots,x_n\}$ — базис в $N(\mathbb{I}-A)$, $\{f_1,\dots,f_n\}$ — биортогональная к этому базису система.
- Пусть $\{g_1,\dots,g_m\}$ — базис в $N(\mathbb{I}-A^*)$, $\{y_1,\dots,y_m\}$ — биортогональная к этому базису система.
- Рассмотрим оператор

$$\tilde{A} = A + u, \text{ где } ux = \sum_{k=1}^{n} (x \cdot f_k) y_k.$$

(Заметим, что u определён корректно, так как $n < m$.)

Для дальнейшего доказательства теоремы 9.2 потребуются следующие две леммы.

Лемма 9.1. u — это линейный компактный оператор.

Д-во. Утверждение леммы следует из того, что пространство Δ_u конечномерно, а значит локально компактно. □

Лемма 9.2. Уравнение $x - \tilde{A}x = 0$ имеет только нулевое решение.

Д-во.

- Имеем, $0 = x - \tilde{A}x = x - Ax - ux$ эквивалентно $x - Ax = ux \in X_0$, где X_0 — конечномерное пространство, порождённое линейно независимой системой $\{y_1, \ldots, y_n\}$, то есть

$$x - Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i. \tag{9.5}$$

$$x - Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i. \qquad (9.5)$$

- В силу биортогональности $\{g_k\}$ и $\{y_k\}$ имеет место цепочка равенств

$$g_k \cdot (x - Ax) = g_k \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i = g_k \cdot \xi_k y_k = \xi_k.$$

- С другой стороны, справедлива цепочка равенств

$$g_k \cdot (x - Ax) = (I - A^*) g_k \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

так как $\{g_k\}$ — это базис в $N(\mathbb{I} - A^*)$.

$$x - Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i. \tag{9.5}$$

- Таким образом, сравнивая эти две цепочки равенств, получаем, что $\xi_k = 0 \ \forall\, k = 1, \ldots, n$. В силу (9.5) отсюда следует
$$x - Ax = 0. \tag{9.6}$$
- На *этапе 1* доказали, что решение уравнения (9.6) конечномерно. В связи с этим, полагаем
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$
- Напомним, что $ux = \sum_{k=1}^{n} \xi_k y_k$ и что $\xi_k = 0$. Значит $ux = 0$.

- С другой стороны, по определению оператора u имеем:

$$ux = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \cdot f_i \right) y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i.$$

Здесь последнее равенство справедливо, так как системы $\{f_k\}$ и $\{x_k\}$ биортогональны.

- В силу линейной независимости системы $\{y_1, \ldots, y_n\}$ отсюда следует, что $\lambda_k = 0 \; \forall \, k = 1, \ldots, n$. Значит, $x = 0$.

- Итак, доказали следующее: $Ax + ux = x \Rightarrow ux = 0 \Rightarrow Ax = x \Rightarrow u = 0$.

Лемма 9.2 установлена. $\square$

- Таким образом, выполняются условия (β) первой теоремы Фредгольма, то есть

$$(\mathbb{I} - \tilde{A})x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

(Соответственно, $(\mathbb{I} - A)x = 0 \Rightarrow x = 0$.)

- Рассмотрим $\tilde{A}^* = A^* + u^*$. Напомним, что $\{f_k\}$ — базис в $N(\mathbb{I} - A)$. Значит,

$$u^*(g) = \sum_{k=1}^{n} (y_k \cdot g) f_k.$$

- Отсюда следует

$$x \cdot u^*(g) = x \cdot \sum_{k=1}^{n} (y_k \cdot g) f_k = \sum_{k=1}^{n} (y_k \cdot g)(x \cdot f_k).$$

$$x \cdot u^*(g) = x \cdot \sum_{k=1}^{n} (y_k \cdot g) f_k = \sum_{k=1}^{n} (y_k \cdot g)(x \cdot f_k)$$

- По определению сопряжённого оператора,

$$ux \cdot g = \sum_{k=1}^{n} (y_k \cdot g)(x \cdot f_k).$$

- Теперь рассмотрим

$$(\mathbb{I} - \tilde{A}^*) g_m \in X^*, \quad g_m \neq 0.$$

(Напомним, $\{g_k\}$ — базис в $N(\mathbb{I} - A^*)$.)

- Имеем,

$$(\mathbb{I}-\tilde{A}^*)g_m = (\mathbb{I}-A^*)g_m - u^*(g_m) = 0 - \sum_{k=1}^{n}(y_k \cdot g_m) = 0, \tag{9.7}$$

так как $g_m \in Ker\,(\mathbb{I} - A^*)$.

- Формула (9.7) противоречит утверждению (δ) первой теоремы Фредгольма, так как получили, что $(\mathbb{I} - \tilde{A}^*)g_m = 0$, но при этом, $g_m \neq 0$. Значит предположение $n < m$ *неверно*.
- Наконец, случай, когда $m < n$, доказывается аналогично: надо поменять местами A и A^* в предыдущем рассуждении.

Доказательство теоремы 9.2 завершено. □

Дополнение к теореме 9.2. Заметим, что для доказательства конечномерности $N(\mathbb{I} - A)$ в теореме 9.2 (этап 1) нигде не использовалось то, что пространство X является гильбертовым: достаточно того, чтобы X было банаховым пространством. Поэтому справедливо следующее дополнение к теоремы 9.2.

Дополнение к теореме 9.2.

Пусть X — *банахово* пространство. Пусть $A\colon X \mapsto X$ — компактный оператор.

Справедливо утверждение: пространство решений уравнения $x - Ax = 0$ конечномерно.

9.3. Третья теорема Фредгольма

Теорема 9.3. **(Третья теорема Фредгольма.)** Пусть X — гильбертово пространство. Пусть $A\colon X \mapsto X$ — компактный оператор. Пусть $y \in X$ задано. Справедливо утверждение: для того, чтобы уравнение

$$x - Ax = y \tag{9.8}$$

имело хотя бы одно решение необходимо и достаточно, чтобы для любого $h \in X$ — решения однородного сопряжённого уравнения

$$h - A^* h = 0$$

выполнялось условие ортогональности $y \cdot h = 0$.

Д-во.

- Пусть x_0 — некоторое решение уравнения $x_0 - Ax_0 = y$. Пусть $h - A^* h = 0$.
- Докажем утверждение ($\Rightarrow$):

$$y \cdot h = (x_0 - Ax_0) \cdot h = x_0 \cdot (\mathbb{I} - A*)h = x_0 \cdot 0 = 0.$$

- Теперь докажем утверждение ($\Leftarrow$). Доказательство проведём методом от противного: пусть $y_* \cdot h = 0$ для любого h — решения уравнения $h - A^* h = 0$, но уравнение $x - Ax = y_*$ не имеет решений.
- Это означает, что $y_* \notin \Delta_{\mathbb{I}-A}$.
- По теореме 5.5 (об аннуляторе и по теореме Рисса о представлении имеем, что существует $H_0 \in X$, так, что

$$H_0 \cdot y_* = 1, \quad H_0 \cdot y = 0 \quad \forall\, y \in \Delta_{\mathbb{I}-A}. \tag{9.9}$$

$$H_0 \cdot y_* = 1, \quad H_0 \cdot y = 0 \quad \forall\, y \in \Delta_{\mathbb{I}-A} \tag{9.9}$$

- Имеем

$$x \cdot (H_0 - A^* H_0) = (\mathbb{I} - A)x \cdot H_0 = 0 \quad \forall\, x \in X$$

в силу $(9.9)_2$, так как $(\mathbb{I} - A)x \in \Delta_{\mathbb{I}-A}$.

- В силу произвольности $x \in X$ выводим, что

$$H_0 - A^* H_0 = 0,$$

то есть $H_0 \in \Delta_{\mathbb{I}-A}$.

- Тогда по условию теоремы имеем, что $H_0 \cdot y_* = 0$. Но по построению имеем $H_0 \cdot y_* = 1$. Получили противоречие. Значит уравнение $x - Ax = y_*$ разрешимо. Теорема 9.3 доказана. $\square$

Справедливо следующее дополнение к третьей теореме Фредгольма.

Дополнение к теореме 9.3. Для того, чтобы уравнение $f - A^* f = g$ имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого $z \in X$ — решения уравнения $Az - z = 0$ выполнялось условие ортогональности $z \cdot g = 0$.

Д-во. Обоснование этого дополнения совершенно аналогично доказательству теоремы 9.3. $\square$

9.4. Альтернатива Фредгольма

В случае гильбертова пространства X итогом предыдущих рассмотрений в главе 9 является следующая теорема:

Теорема 9.4. **(Альтернатива Фредгольма.)** Пусть X — гильбертово пространство. Пусть $A \colon X \mapsto X$ — компактный оператор. Пусть $y \in X$ задано. Тогда для уравнения

$$x - Ax = y \tag{9.10}$$

выполняется одна из следующих возможностей:

(1) Пусть $\mathbb{I} - A$ имеет непрерывный обратный. Тогда уравнение (9.10) разрешимо единственным образом для любого заданного $y \in X$.

(2) Пусть $N(\mathbb{I} - A) \neq \{0\}$ и существует h, так, что $h - A^* h = 0$ и $y \cdot h \neq 0$. Тогда уравнение (9.10) не имеет решений.

(3) Пусть $N(\mathbb{I} - A) = \{0\}$ и для любого h — решения уравнения $h - A^* h = 0$ выполняется условие ортогональности с правой частью уравнения (9.10), то есть $y \cdot h = 0$. Тогда уравнение (9.10) имеет бесконечно много решений. Эти решения имеют общий вид

$$x + x_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

где x_0 — частное решение, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — базис пространства $N(\mathbb{I} - A)$, λ_k — произвольные скаляры.

Д-во. Утверждения теоремы 9.4 сразу следуют из теорем 9.1, 9.2 и 9.3. □

КОНЕЦ КУРСА ЛЕКЦИЙ
«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ II»

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

- Дьедонне Ж. Основы современного анализа / Пер. с франц. - М.: Мир, 1964. - 430 с.
- Иосида К. Функциональный анализ / Пер. с англ. - М.: ЛКИ, 2010. - 624 с.
- Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 572 с.
- Треногин В.А. Функциональный анализ: Учебник для вузов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.

Дополнительная литература

- Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. - 156 с.
- Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. - Новосибирск: Изд-во Института Математики, 2006. - 356 с.
- Люлько Н.А., Максимова О.Д. Функциональный анализ. Теоремы и задачи: учебное пособие; Новосиб. гос. ун-т. - Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. - 384 с.
- Рудин У. Функциональный анализ / Пер. с англ. - М.: Мир, 1975. - 443 с.
- Tao T. An Introduction to Measure Theory. - AMS, 2011. - xvi+206 pp.