Программа курса по функциональному анализу

5, 6 семестр (2012-2013 гг.)

1. **Метрические пространства.** Неравенства Гельдера и Минковского. Примеры.
2 Замкнутые, открытые множества в метрическом пространстве. Свойства.
3. Сходимость в метрическом пространстве. Полнота метрических пространств.
4. Полнота пространства $L_1(X)$, где X – измеримое в R^n множество. Полнота пространства $L_p(X)$, где X - множество конечной меры, $1 \le p < \infty$.
5. Теорема о пополнении метрических пространств.
6. Теорема о плотности полиномов в пространстве $C[a,b]$.
7. Теорема о плотности непрерывных функций в пространстве $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$.
8. Критерий полноты метрического пространства (теорема о вложенных шарах). Контрпримеры к теореме.
9. Принцип сжимающих отображений в метрическом пространстве.
10. Теорема Бэра.
11. Сепарабельные метрические пространства. Примеры несепарабельных пространств.
12. Компактные, вполне ограниченные метрические пространства. Критерий компактности метрического пространства (теорема).
13. Компактные и относительно компактные множества в метрическом пространстве. Теорема Хаусдорфа.
14. Критерии относительной компактности множеств в конкретных пространствах: в R^n, в $l_p, 1 \le p < \infty$, в C[a,b] (теорема Арцела), $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$.
15. Линейные пространства. Свойства. Примеры.
16. **Нормированные, банаховы пространства**. Примеры.
17. Теорема об изоморфизме конечномерных нормированных пространств. Следствия.
18. Линейные пространства со скалярным произведением. Свойства. Примеры.
19. Тождество параллелограмма (теорема).
20. Ортонормальные системы. Свойства. Лемма об ортогонализации.
21. **Гильбертовы пространства**. Примеры. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму. Следствие (критерий всюду плотности линейного многообразия).
22. Существование ортонормального базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве.
23. Ряды Фурье. Теорема о свойстве минимальности коэффициентов Фурье. Следствие (неравенство Бесселя).
24. Равенство Парсеваля. Теорема об эквивалентности в сепарабельном гильбертовом пространстве понятий полной и замкнутой ортонормальных систем.
25. Теорема Рисса-Фишера. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
26. **Операторы, действующие из X в Y (**X, Y – нормированные пространства). Линейность, непрерывность, ограниченность операторов. Теорема об эквивалентности понятий непрерывности и ограниченности линейного оператора. Примеры.
27. Пространство L (X,Y). Норма оператора. Равномерная и сильная сходимости операторов. Полнота пространства L(X,Y). Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности.
28. **Сопряженное пространство X*** . Теорема Хана-Банаха. Следствия из теоремы.
29. Общий вид линейных непрерывных функционалов в конкретных пространствах: в конечномерном, в c_0, в l_1, в l_p (p>1), в гильбертовом (теорема Рисса), $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$

30. Естественное вложение X в X** . Рефлексивные нормированные пространства. Примеры.
31. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема о полноте пространства L (X,Y) в смысле сильной сходимости. Критерий сильной сходимости линейных операторов.
32. Слабая сходимость в нормированных пространствах. Свойства. Ограниченность слабо сходящейся последовательности. Критерий слабой сходимости. Теорема об эквивалентности ограниченности и слабой ограниченности множества.
33. Критерий слабой сходимости в конечномерном пространстве, l_p (p>1), гильбертовом пространстве, $L_p[a,b]$ (p>1) .
34. Слабая сходимость и *- слабая сходимость в сопряженном пространстве. Свойства. Теорема о *- слабой компактности замкнутого шара в X^*, где X - сепарабельное нормированное. пространство.
35. Обратные операторы. Свойства. Критерий существования обратного линейного оператора. Критерий существования обратного линейного ограниченного оператора.
36. Теорема Неймана. Теорема об открытости множества операторов в L(X,Y), имеющих обратные ограниченные операторы.
37. Теорема Банаха об обратном операторе. Следствие об эквивалентности норм.
38. Замкнутые операторы. Свойства. Примеры. Теорема Банаха о замкнутом графике.
39. Спектр и резольвента линейного оператора. Классификация точек спектра.
40. Компактность спектра линейного непрерывного оператора. Аналитичность резольвенты на резольвентном множестве. Следствие.
41. Сопряженные операторы в банаховом пространстве. Теорема существования.
42. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема существования. Свойства сопряженных операторов.
43. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма оператора. Свойства спектра. Теорема о границе спектра самосопряженного оператора. Следствие.
44. Вполне непрерывные (компактные) линейные операторы. Примеры. Свойства.
45. Лемма Рисса (о почти перпендикуляре). Следствие. Критерий конечномерности нормированного пространства (теорема).
46. Теорема о замкнутости множества вполне непрерывных операторов в L(X,Y). Компактность оператора Гильберта-Шмидта.
47. Теорема о компактности сопряженного оператора (д-во в гильбертовом пространстве).
48. Леммы о конечномерности ядра и о замкнутости множества значений оператора I – A, где A - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве.
49. Линейные операторные уравнения с вполне непрерывными операторами. Теорема Рисса об обратном операторе. Альтернатива Фредгольма.
50. Теорема о связи между неоднородным и однородным сопряженным уравнением (д-во в гильбертовом пространстве).
51. Теорема об одинаковом количестве линейно независимых решений однородного и сопряженного однородного уравнений (д-во в гильбертовом пространстве).
52. Теорема о спектре компактного оператора.
53. Теорема Гильберта - Шмидта о полноте собственных функций вполне непрерывного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Следствия.
54. Функции с ограниченным изменением (ограниченной вариации). Свойства.
55. Теорема о представлении функции с ограниченным изменением в виде разности двух монотонно возрастающих функций.
56. Абсолютно непрерывные функции. Свойства. Примеры.
57. Теорема о представлении функции с ограниченным изменением в виде суммы функции скачков, абсолютно непрерывной функции и сингулярной функции.
58. Интеграл Римана-Стилтьеса. Определение. Свойства.
59. Теорема существования интеграла от непрерывной функции по функции ограниченной вариации.

60. Вычисление интеграла Р.- С. в случае функции скачков, абсолютно непрерывной функции.
61. Теорема Рисса о виде линейного непрерывного функционала в пространстве C[a,b]. Нерефлексивность пространства C[a,b].

Программу составила доцент кафедры прикл. матем. НГУ, к.ф.-м.н. Люлько Н.А. 2013 г.