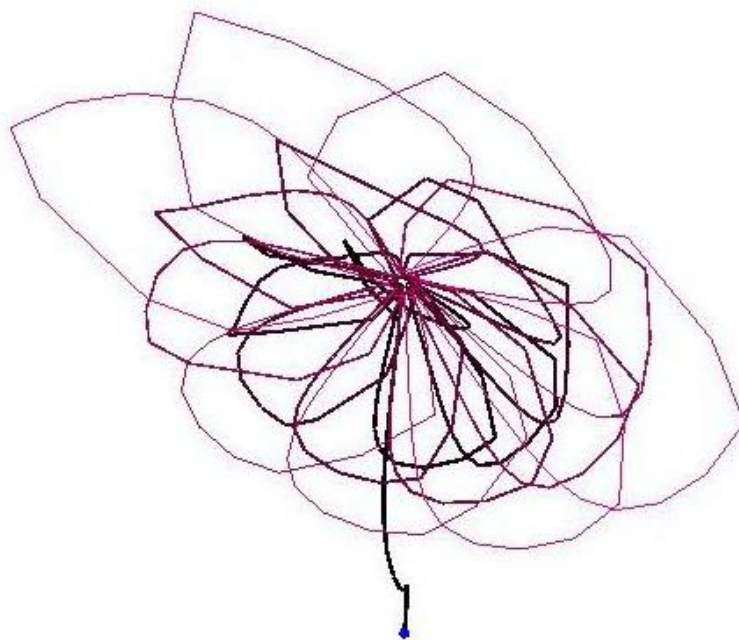


**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Математический факультет  
Кафедра геометрии и топологии**

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ  
В МОДЕЛЯХ ГЕННЫХ СЕТЕЙ**  
(учебно-методическое пособие)



Новосибирск

2011

Представлено изложение некоторых применений методов качественной теории дифференциальных уравнений к исследованию периодических траекторий нелинейных динамических систем, моделирующих функционирование генных сетей. Предназначено для сопровождения спецкурсов «Динамические системы, теория и приложения», «Гладкие многообразия» и «Введение в топологию», читаемых для студентов-математиков НГУ.

Цель спецкурса – заполнение пробела, существующего между вычислительными методами построения и исследования моделей генных сетей и традиционными математическими дисциплинами, подготовка студентов к лучшему восприятию связей между теоретическими и прикладными разделами математики, а также изложение математических методов, используемых в математической биологии, формирование представлений о месте качественной теории дифференциальных уравнений в структуре прикладных математических дисциплин.

**Ключевые слова:** нелинейные динамические системы, обратные связи в генной сети, стационарные точки, инвариантные области, теорема о неподвижной точке, циклы, бифуркации циклов, переходная матрица, унимодальные функции.

Автор  
д.ф.-м.н., профессор В.П.Голубятников

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г. г.

© Новосибирский государственный университет, 2011

# 1 Введение.

В этом учебном пособии описаны некоторые методы исследования фазовых портретов нелинейных динамических систем (био)химической кинетики, моделирующих функционирование генных сетей.

В первых разделах рассматриваются модели природных и искусственных генных сетей, регулируемых только отрицательными обратными связями, при которых скорость синтеза одного полимера (белка, РНК, биологической макромолекулы и т. п.) монотонно убывает с ростом концентрации одного другого вещества. Такие процессы описываются в биологических исследованиях уравнениями вида

$$\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_{i-1}) - k_i \cdot x_i, \quad \text{или же} \quad \frac{dx_i}{dt} = a_i - g_i(x_{i-1}) \cdot x_i.$$

Здесь и всюду ниже все функции и коэффициенты предполагаются положительными. В первом из приведенных уравнений  $f_i$  — гладкая монотонно убывающая функция, определённая при неотрицательных значениях своих аргументов. Монотонное убывание этих функций моделирует отрицательные обратные связи в генной сети. Положительным обратным связям соответствует монотонное возрастание таких слагаемых. В биологических приложениях в качестве таких убывающих функций обычно используются функции Хилла  $f(w) = \alpha \cdot (1 + w^m)^{-1}$  или другие рациональные функции с положительными коэффициентами, здесь  $\alpha, m > 0$ . Для простоты изложения в дальнейшем будем считать, что все коэффициенты  $k_i$  равны единице. Однако, даже в простейших случаях нелинейные динамические системы таких типов аналитически не интегрируются, и одна из наших основных задач — научиться предсказывать результаты численных экспериментов геометрическими и топологическими средствами качественной теории дифференциальных уравнений.

Во втором уравнении гладкие положительные монотонно возрастающие функции  $g_i$  и постоянные  $a_i$  описывают так называемый посттранскрипционный механизм регуляции моделируемой генной сети. Это соответствует увеличению скорости деградации (разложения) вещества « $x_i$ » при увеличении концентрации вещества « $x_{i-1}$ ».

Все эти неотрицательные переменные  $x_i$  обозначают концентрации веществ, участвующих в реакциях, слагаемое  $f_i(x_{i-1})$  описывает в каждом таком уравнении зависимость скорости синтеза вещества  $x_i$  от концентрации вещества  $x_{i-1}$ , а вычитаемые в этих уравнениях соответствуют естественному процессу деградации биологических молекул.

Будут также изучены модели генных сетей, у которых в механизмах регуляции имеются как отрицательные, так и положительные обратные связи. Такие комбинации обратных связей описываются гладкими унимодальными функциями:  $\dot{z} = \Lambda(y) - z$ . В приложениях в качестве таких унимодальных функций обычно используются функция Гласса-Макки  $\Lambda(u) = a \cdot u \cdot (1 + u^m)^{-1}$ , функция Риккера  $\Lambda(u) = a \cdot u \cdot \exp(-u/K)$  и др. В таких механизмах при малых концентрациях регулирующего полимера  $Y$  скорость синтеза регулируемого полимера  $Z$  возрастает с ростом концентрации  $y$  полимера  $Y$ , но, начиная с некоторого значения  $y_M$ , с ростом  $y$  скорость синтеза  $Z$  начинает монотонно убывать.

Отметим, что исследование всех описанных выше моделей генных сетей, проводится в рамках нашего сотрудничества с ИЦиГ СО РАН. На начальном этапе этих исследований рассматривались по преимуществу трёхмерные динамические системы таких типов, и во всех численных экспериментах эти системы были симметричны относительно циклических перестановок переменных  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$ .

В ряде публикаций по моделированию генных сетей (см., например [14]) рассматривались также динамические системы, в которых уравнения имеют вид  $\dot{x}_i = F_i(x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}) - x_i$ . Комбинаторная сложность таких моделей генных сетей намного больше, чем у системы (1) и других динамических систем, изучаемых в настоящем пособии. Основной круг вопросов, которыми мы здесь занимаемся, связан с существованием периодических траекторий указанных динамических систем. Следует подчеркнуть, что исследование существования, устойчивости и других свойств периодических траекторий нелинейных динамических систем, начиная ещё с зарождения небесной механики, проводится во многих разделах и чистой, и прикладной математики. Даже в двумерном случае здесь остаётся целый ряд нерешённых задач — 16-я Проблема Гильберта, Проблема «Центр-Фокус» и др. С увеличением размерности в фазовых портретах динамических систем могут наблюдаться хаотическое поведение траекторий, Странные Аттракторы, Фрактальные Структуры и другие подобные явления, изучение которых в последнее время породило новые направления в математике и её приложениях, а также огромное количество публикаций, в том числе и откровенно шарлатанских. Это, впрочем, ещё раз свидетельствует о популярности и перспективности данной тематики.

Основные наши результаты используют геометрические построения инвариантных областей рассматриваемых динамических систем, и с этих построений мы начинаем наше изложение.

## 2 Построение инвариантных областей.

Одна из основных моделей генной сети, которую мы будем рассматривать в этом учебном пособии, описывается нелинейной динамической системой химической кинетики нечетной размерности, имеющей безразмерный вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_{2k+1}) - x_1, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1) - x_2, \\ \dot{x}_3 = f_3(x_2) - x_3, \\ \dots \dots \\ \dot{x}_{2k} = f_{2k}(x_{2k-1}) - x_{2k}, \\ \dot{x}_{2k+1} = f_{2k+1}(x_{2k}) - x_{2k+1}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $f_i$  — гладкие монотонно убывающие функции, определённые при неотрицательных значениях своих аргументов, принимающих строго положительные значения;  $f_i(x_{i-1}) \rightarrow 0$  при  $x_{i-1} \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2k+1$ .

Иногда для упрощения формул мы будем записывать динамические системы (в том числе и чётномерные) в бескоординатном виде  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{V}(\mathbf{X})$ . Здесь вектор  $\mathbf{X}$  имеет координаты  $(x_1, \dots, x_m)$ . В силу цикличности системы (1) и некоторых её аналогов в дальнейшем при  $i = 1$  мы полагаем  $x_{i-1} = x_{2k+1}$  и т.п. В случае малых размерностей удобнее использовать обозначения  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . В дальнейшем мы предполагаем переносить полученные результаты и на чётномерные динамические системы, аналогичных системе (1), однако в чётномерном случае фазовые портреты, то-есть поведение траекторий заметно отличается от того, что мы наблюдаем в изучаемых здесь динамических системах. Полезные сведения о строении фазовых портретов подобных динамических систем в размерности два можно найти в учебном пособии [20].

Можно проверить, что у динамической системы (1) существует ровно одна стационарная точка. Действительно, исключая поочерёдно все неизвестные из описывающих стационарную точку системы уравнений  $f_i(x_{i-1}) - x_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq 2k + 1$ , получаем одно уравнение:

$$f_1(f_{2k+1}(f_{2k}(\dots(f_2(x_1)))))) = x_1, \quad (2)$$

в котором композиция нечетного числа монотонно убывающих функций в левой части — ограниченная монотонно убывающая функция переменной  $x_1$ . Отсюда следует, что уравнение (2) имеет единственное

решение  $x_1^*$ . Остальные координаты стационарной точки восстанавливаются однозначно:  $x_2^* = f_2(x_1^*)$  и т.д. Будем обозначать найденную стационарную точку через  $M^*$ , через  $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{2k}^*, x_{2k+1}^*)$  — ее радиус-вектор, а максимальные значения  $f_i(0)$  функций  $f_i(x_{i-1})$  — через  $B_i$ . Можно проверить, что при достаточно больших временах все эти траектории попадают в параллелепипед  $Q = [0, B_1] \times [0, B_2] \dots \times [0, B_{2k}] \times [0, B_{2k+1}]$  и в дальнейшем не выходят из него. Векторное поле скоростей системы (1) на любой из граней этого параллелепипеда направлено внутрь него:  $\dot{x}_i \Big|_{x_i \geq B_i} \leq 0$ ,  $\dot{x}_i \Big|_{x_i=0} > 0$ . Такие области  $Q$  в фазовых портретах динамических систем обычно (см., например, [20]) называются **инвариантными**.

Проведем через стационарную точку  $M^* \in Q$  все плоскости, параллельные координатным, и перенумеруем полученный набор из  $2^{2k+1}$  параллелепипедов разбиения бинарными индексами:  $\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_{2k+1}\} =$

$$\{\mathbf{X} \in Q \mid x_1 \geq_{\varepsilon_1} x_1^*, x_2 \geq_{\varepsilon_2} x_2^*, x_3 \geq_{\varepsilon_3} x_3^*, \dots, x_{2k+1} \geq_{\varepsilon_{2k+1}} x_{2k+1}^*, \},$$

где  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2k+1})$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2k+1} \in \{0, 1\}$ , а отношения задаются следующим образом: символ  $\geq_0$  означает  $\leq$ , а символ  $\geq_1$  означает  $\geq$ . Будем называть внутренними гранями этих параллелепипедов их грани, лежащие внутри инвариантной области  $Q$ . Подробное и наглядное описание этой конструкции для трехмерного аналога системы (1) см. в [5].

Рассмотрим параллелепипед  $\{00 \dots 00\}$ . Направление векторного поля через внутреннюю грань  $x_1 = x_1^*$  при  $x_{2k+1} \leq x_{2k+1}^*$  вдоль оси  $x_1$  есть  $\dot{x}_1 = f_1(x_{2k+1}) - x_1^* \geq f_1(x_{2k+1}^*) - x_1^* = 0$ . Проведя аналогичные выкладки для остальных внутренних граней  $\{00 \dots 00\}$  и  $\{11 \dots 11\}$ , нетрудно убедиться, что через их внутренние грани траектории системы (1) не могут входить вовнутрь этих двух параллелепипедов.

Найдем направления этих траекторий на всех гранях  $\{x_i = x_i^*\}$ , пользуясь соотношением  $\dot{x}_i \Big|_{x_i=x_i^*} = f_i(x_{i-1}) - x_i^*$ , из которого вытекает утверждение, имеющее место также и для четномерных аналогов системы (1):

**Лемма 1.** *Если  $x_{i-1} < x_{i-1}^*$ , то  $\dot{x}_i \Big|_{x_i=x_i^*} > 0$ . Поэтому из параллелепипеда  $\{.. \varepsilon_{i-2} 00 \varepsilon_{i+1} ..\}$  все траектории входят в  $\{.. \varepsilon_{i-2} 01 \varepsilon_{i+1} ..\}$ .*

Наоборот, если  $x_{i-1} > x_{i-1}^*$ , то  $\dot{x}_i \Big|_{x_i=x_i^*} < 0$ , и значит все траектории, которые выходят из параллелепипеда  $\{.. \varepsilon_{i-2} 1 1 \varepsilon_{i+1} ..\}$ , попадают в соседний параллелепипед  $\{.. \varepsilon_{i-2} 1 0 \varepsilon_{i+1} ..\}$ .

В обоих случаях индекс изменяется на  $i$ -том месте.

Введем обозначения:

$Q_{0,2m+1} = \{01010 \dots 00 \dots 01\}$ , где первый из сдвоенных нулей имеет порядковый номер  $2m + 1$ ;

$Q_{0,2m} = \{1010 \dots 00 \dots 0\}$ , где первый из сдвоенных нулей имеет порядковый номер  $2m$ ;

$Q_{1,2m+1} = \{1010 \dots 11 \dots 0\}$ , где первая из сдвоенных единиц имеет порядковый номер  $2m + 1$ ;

$Q_{1,2m} = \{01010 \dots 11 \dots 01\}$ , где первая из сдвоенных единиц имеет порядковый номер  $2m$ , и проследим за поведением траекторий системы (1) внутри всех этих параллелепипедов  $Q_{\varepsilon,m}$ ,  $\varepsilon = 0, 1$ ;  $m = 1, 2 \dots 2k+1$ .

Рассмотрим грань между соседними параллелепипедами  $Q_{1,2k+1} = \{101 \dots 01\}$  и  $Q_{0,1} = \{001 \dots 01\}$ . Её уравнение имеет вид  $\{x_1 = x_1^*\}$ . Из леммы 1 следует, что через другие грани параллелепипеда  $Q_{1,2k+1}$  траектории могут только входить в него. Следовательно, через рассматриваемую грань траектории выходят из  $Q_{1,2k+1}$  в  $Q_{0,1}$ . Рассуждая аналогичным образом, получаем диаграмму

$$Q_{1,2k+1} \rightarrow Q_{0,1} \rightarrow Q_{1,2} \rightarrow Q_{0,3} \rightarrow \dots \rightarrow Q_{1,2k-1} \rightarrow Q_{0,2k} \rightarrow \dots, \quad (3)$$

в которой через общую грань двух соседних параллелепипедов из этого списка все траектории системы (1) уходят из предыдущего параллелепипеда в последующий, а из последнего — в первый. Таким образом, построенное объединение  $Q_{4k+2}$  этих  $4k + 2$  параллелепипедов является инвариантной областью динамической системы (1). Оказывается, что эту невыпуклую многогранную область можно уменьшить по объёму в два раза с сохранением ее инвариантности. А именно, построим во всех указанных параллелепипедах  $Q_{0,m}$ ,  $Q_{1,m}$  примыкающие к стационарной точке  $M^*$  треугольные призмы, определяемые неравенствами

$$P_{0,m} = \{ \mathbf{x} \in Q_{0,m} \mid \frac{f_m(x_{m-1}) - x_m}{x_m^*} + \frac{f_{m+1}(x_m) - x_{m+1}}{x_{m+1}^*} \geq 0 \},$$

$$P_{1,m} = \{ \mathbf{x} \in Q_{1,m} \mid \frac{f_m(x_{m-1}) - x_m}{B_m - x_m^*} + \frac{f_{m+1}(x_m) - x_{m+1}}{B_{m+1} - x_{m+1}^*} \leq 0 \},$$

и обозначим объединение всех таких призм через  $\mathcal{P}_{4k+2}$ . Треугольной призмой мы называем здесь декартово произведение треугольника на параллелепипед размерности  $2k - 1$ . Поскольку все функции  $f_j$  монотонно убывают, в каждой такой призме на построенной диагональной грани внутренняя нормаль к грани образует с векторным полем скоростей системы (1) острый угол, что эквивалентно определению этих призм:

$$\frac{f_m(x_{m-1}) - x_m}{x_m^*} + \frac{f_{m+1}(x_m) - x_{m+1}}{x_{m+1}^*} \geq 0, \quad \text{при } x \in \partial P_{0,m} \cap \text{int}(Q),$$

$$\frac{f_m(x_{m-1}) - x_m}{B_m - x_m^*} + \frac{f_{m+1}(x_m) - x_{m+1}}{B_{m+1} - x_{m+1}^*} \leq 0, \quad \text{при } x \in \partial P_{1,m} \cap \text{int}(Q).$$

Значит через такие диагональные грани указанных призм траектории системы (1) не могут выходить из области  $\mathcal{P}_{4k+2}$ , следовательно, эта область действительно является инвариантной. Так же, как и выше, можно проверить, что траектории системы (1) блуждают по невыпуклой многогранной области  $\mathcal{P}_{4k+2}$  согласно диаграмме

$$P_{1,2k+1} \rightarrow P_{0,1} \rightarrow P_{1,2} \rightarrow P_{0,3} \rightarrow \dots \rightarrow P_{1,2k-1} \rightarrow P_{0,2k} \rightarrow \dots \quad (4)$$

Деление параллелепипедов  $Q_{1,m}$  и  $Q_{0,m}$  на треугольные призмы проводилось здесь с целью локализации положения периодической траектории, существование которой будет доказано ниже. Поскольку при всех  $i = 1, 2, \dots, 2k+1$  выполняются неравенства  $f_i(B_{i-1}) > 0$ , инвариантная область  $\mathcal{P}_{4k+2}$  может быть уменьшена и далее путем удаления некоторых малых окрестностей ее граней, но этот процесс не приводит к значительному сокращению инвариантной области.

На рисунке 1 показана состоящая из шести треугольных призм инвариантная область  $\mathcal{P}_6$  трехмерной системы (1). Здесь соответствующая диаграмма переходов траекторий из одной призмы в другую имеет вид

$$\{001\} \rightarrow \{011\} \rightarrow \{010\} \rightarrow \{110\} \rightarrow \{100\} \rightarrow \{101\} \rightarrow \{001\}.$$

### Упражнения.

Рассмотрим нечетномерную динамическую систему, в которой все уравнения имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i - x_i \cdot g_i(x_{i-1}); \quad i = 1, \dots, 2k+1, \quad (I)$$



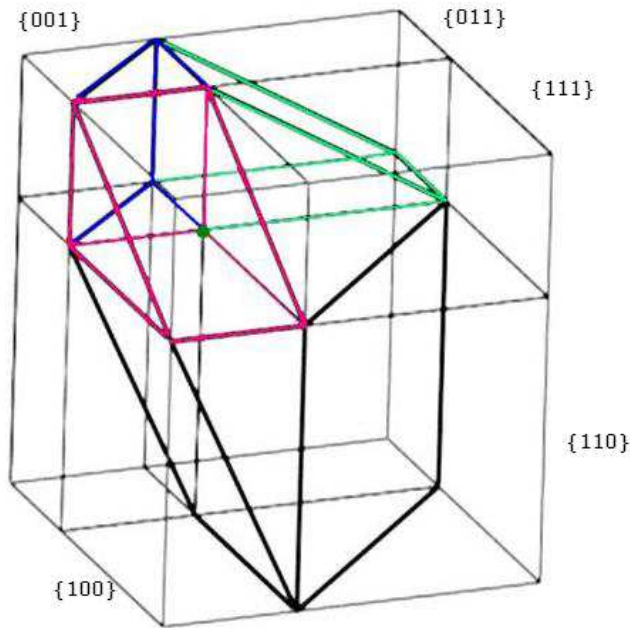


Рис. 1: Инвариантная область  $\mathcal{P}_6 \subset \mathbb{R}^3$ .

где все  $a_i$  постоянны, а гладкие функции  $g_i$  монотонно возрастают, см. Введение. Будем называть нечётномерную динамическую систему **смешанной**, если часть её уравнений имеет вид (1), а остальные уравнения имеют вид (I).

2.1. Показать, что у динамической системы (I), (а также и у смешанной системы) существует единственная стационарная точка.

2.2. Построить в положительном октанте инвариантный параллелепипед  $Q = [0, b_1] \times \dots \times [0, b_{2k+1}]$  обеих этих динамических систем.

Разобьём этот параллелепипед гиперплоскостями, параллельными координатным, и разобьём так же, как и выше, параллелепипед  $q$  на  $2^{2k+1}$  более мелких параллелепипедов.

2.3. Показать, что объединение  $\mathcal{Q}_{4k+2}$  параллелепипедов, построенных так же, как и для системы (1), является инвариантной областью

динамической системы  $(I)$  (а также и смешанной системы).

Пусть в шестимерной симметричной динамической системе, аналогичной  $(1)$ , все уравнения имеют вид

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{34}{1+x_i^4} - x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (II)$$

2.4. Проверить, что точка с координатами  $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$  является стационарной точкой системы  $(II)$ . Сколько еще стационарных точек имеет эта система?

Построим, как и в нечетномерном случае, для шестимерной динамической системы вида  $(I)$  инвариантный параллелепипед  $Q$  и разобьем его на  $2^6$  мелких параллелепипеда — как и выше.

2.5. Какие из этих мелких параллелепипедов являются инвариантными областями этой шестимерной динамической системы?

2.6. Обобщить полученный результат на произвольные четномерные динамические системы такого типа.

### 3 Существование циклов.

Рассмотрим линеаризацию динамической системы  $(1)$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & f'_1(x_{2k+1}^*) \\ f'_2(x_1^*) & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & f'_3(x_2^*) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f'_{2k+1}(x_{2k}^*) & -1 \end{pmatrix} (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*) \quad (5)$$

в окрестности ее единственной стационарной точки  $M^*$ . Для упрощения нижеследующих формул введем обозначение:

$$f'_1(x_{2k+1}^*) \cdot f'_2(x_1^*) \cdot f'_3(x_2^*) \dots f'_{2k+1}(x_{2k}^*) = -a^{2k+1}, \quad a > 0.$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$(-1 - \lambda)^{2k+1} - a^{2k+1} = 0$$

имеет одно отрицательное собственное число  $\lambda_1 = -1 - a < 0$ , соответствующее собственному вектору с положительными координатами. Так

как рассматриваемые динамические системы имеют только вещественные коэффициенты, то все оставшиеся собственные числа попарно комплексно сопряжены:

$$\operatorname{Re}\lambda_{2,3} := \operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\lambda_3 = -a \cdot \cos \frac{2\pi}{2k+1} - 1,$$

...

$$\operatorname{Re}\lambda_{2k,2k+1} := \operatorname{Re}\lambda_{2k} = \operatorname{Re}\lambda_{2k+1} = +a \cdot \cos \frac{\pi}{2k+1} - 1.$$

При этом  $\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_{2,3} < \operatorname{Re}\lambda_{4,5} < \operatorname{Re}\lambda_{2k,2k+1}$ . Отметим также, что если  $k > 1$ , то  $\operatorname{Re}\lambda_{2,3} < 0$ .

Если  $\operatorname{Re}\lambda_{2k,2k+1} < 0$ , то точка  $M^*$  является притягивающей.

Стационарная точка  $M^*$  называется **гиперболической**, если  $\operatorname{Re}\lambda_{2k,2k+1} > 0$ , и соответствующая матрица линеаризации не имеет мнимых собственных чисел, то есть ни одна из остальных вещественных частей  $\operatorname{Re}\lambda_{2s,2s+1}$  не обращается в нуль.

Обозначим через  $2m$  количество собственных чисел  $\lambda_j$  матрицы линеаризации, имеющих положительные вещественные части. Пусть, как обычно,  $[x]$  обозначает целую часть вещественного числа  $x$ . Несложные вычисления показывают, что

$$\text{если } a \cdot \sin \frac{\pi \cdot \left(4 \left[\frac{k}{2}\right] - 2k + 3\right)}{2(2k+1)} > 1, \quad \text{то } m = \left[\frac{k+1}{2}\right]. \quad (6)$$

Пусть  $\operatorname{Re}\lambda_{2k,2k+1} > 0$ . Можно проверить, что отвечающие отрицательному собственному значению  $\lambda_1$  собственные векторы  $\pm e_1$  матрицы (5) направлены из точки  $M^*$  в диагональные параллелепипеды  $\{00 \dots 00\}$  и  $\{11 \dots 11\}$ , поэтому из инвариантной области  $\mathcal{P}_{4k+2}$  можно вырезать малую цилиндрическую окрестность  $U$  точки  $M^*$  так, чтобы область  $\mathcal{P}'_{4k+2} = \mathcal{P}_{4k+2} \setminus U$  также была инвариантной для системы (1). Здесь образующие вырезаемого цилиндра должны быть параллельны  $\pm e_1$  и двумерным плоскостям, соответствующим собственным числам  $\lambda_j$ ,  $j > 1$  с отрицательными вещественными частями.

Рассмотрим усеченную общую грань двух соседних призм в диаграмме (4):  $F = (P_{1,2k+1} \cap P_{0,1}) \setminus U$ . Область  $U$  можно выбрать так, чтобы  $F$  также была гомеоморфной  $(2k)$ -мерному шару. Поскольку эту диаграмму можно нарисовать и для уменьшенных призм  $P_{\varepsilon,m} \setminus U$  при сдвигах стягиваемого компактного множества  $F$  вдоль траекторий динамической системы (1), то есть после  $4k+2$  шагов по диаграмме (4), оно переходит в себя:  $F \rightarrow F$ . Поэтому в данной ситуации справедлива теорема Брауэра о неподвижной точке, согласно которой в стягиваемом

компакте  $F$  существует неподвижная точка  $M_0$ , переходящая под действием динамической системы в себя. Поскольку  $M_0 \in F$  и  $M^* \notin F$ , то  $M_0 \neq M^*$ , значит траектория точки  $M_0$  замкнута, и тем самым доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $\operatorname{Re} \lambda_{2k, 2k+1} > 0$  для линеаризованной в окрестности неподвижной точки системы (1), и точка  $M^*$  является гиперболической. Тогда у этой динамической системы существует по меньшей мере один цикл в инвариантной области  $\mathcal{P}'_{4k+2}$ .

В трёхмерном случае эта теорема была установлена в [5].

Существует много разнообразных доказательств теоремы Брауэра о неподвижной точке. Одно из них, не использующее сложных дифференциально-топологических конструкций, приводится в заключительном разделе этого учебного пособия.

Численные эксперименты с динамическими системами вида (1) показывают наличие периодических траекторий при выполнении условий теоремы 1, см., например, рисунок 2, хотя теорема Брауэра о неподвижной точке не гарантирует ни единственности, ни устойчивости цикла в рассматриваемых динамических системах. На этом рисунке слева показан цикл трёхмерной динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6}{1+z^5} - x; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{1+x^7} - y; \quad \frac{dz}{dt} = 7 \cdot \exp(-5y) - z. \quad (7)$$

В некоторых случаях, когда пара комплексно сопряженных собственных чисел матрицы линеаризации имеет положительные, но достаточно малые вещественные части, единственность и устойчивость таких циклов в малых окрестностях стационарных точек вытекает из теории бифуркаций Андронова-Хопфа, см., например, [3, 14, 22]. На рисунке 2 справа показан бифуркационный цикл динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{8,8}{1+z^3} - x; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{9}{1+x^3} - y; \quad \frac{dz}{dt} = 2,88 - z \cdot (1+y^3). \quad (8)$$

На рисунке 3 слева показаны ортогональные проекции трех траекторий симметричной девятимерной системы типа (1) на трехмерную плоскость  $P_{1,8,9}$ , соответствующую собственным числам  $\lambda_1, \lambda_8, \lambda_9$  линеаризации (5). Все функции в правых частях уравнений этой системы

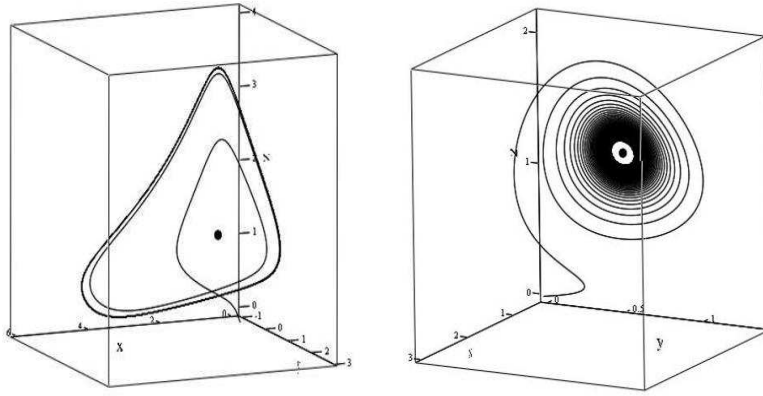


Рис. 2: Предельный цикл трехмерной системы (7) — слева, и бифуркационный цикл трехмерной системы (8) — справа.

имеют одинаковый вид

$$f_i(w) = \frac{130}{1 + w^n}, \quad n = 6. \quad (9)$$

При этом  $\mathbf{X}^* = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ . На левой части рисунка 3 предельный цикл этой системы проектируется в объемлющий криволинейный девятиугольник. Этот цикл проходит по инвариантной области  $Q$  согласно диаграмме (4). Собственному числу  $\lambda_1 < 0$  соответствует вертикальное направление на рисунке, точка, в которой сходятся три дуги в верхней части рисунка, показывает положение проекции стационарной точки  $M^*$ . На правой части этого рисунка изображены проекции тех же траекторий на плоскость  $P_{1,6,7}$ , соответствующую собственным числам  $\lambda_1, \lambda_6, \lambda_7$ . Здесь этот предельный цикл проектируется в криволинейный треугольник, «лежащий в основании». На обложке изображена проекция одной из этих траекторий на другую плоскость.

### Упражнения.

3.1. Сколько устойчивых стационарных точек может иметь чётномерная динамическая система, в которой все уравнения имеют вид либо

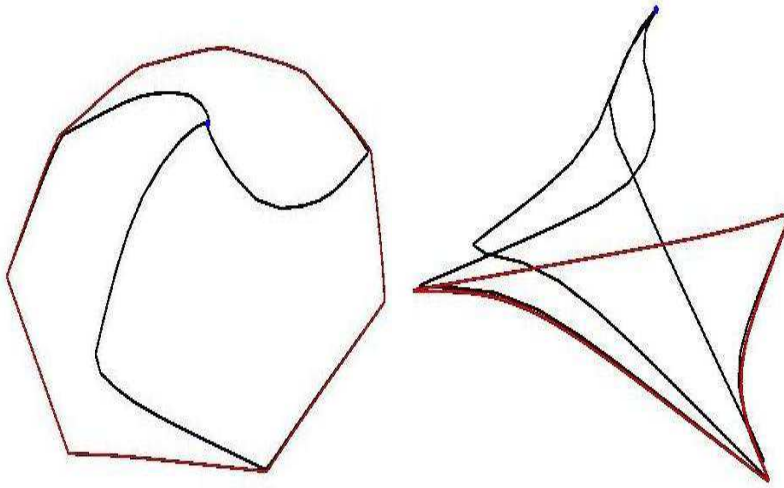


Рис. 3: Проекция траекторий девятимерной системы (9) на трёхмерную плоскость  $P_{1,8,9}$  — слева и на трёхмерную плоскость  $P_{1,6,7}$  — справа.

(1), либо (I)?

3.2. Сформулировать и доказать аналог теоремы 1 для такой смешанной динамической системы. (см. упражнения 1–3).

#### 4 Существование устойчивого цикла.

Некоторые достаточные условия устойчивости периодических траекторий могут быть получены с помощью результатов Р.Смита ([24]), изучавшего нелинейные динамические системы вида

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{X}) \equiv A \cdot \mathbf{X} + \Phi(\mathbf{X}), \quad (10)$$

где  $A$  — вещественная постоянная матрица  $n \times n$ , а нелинейная часть системы описывается гладким отображением  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Для этой системы определяется переходная матрица ([13]):

$$\chi(i\omega - \mu) := ((i\omega - \mu) \cdot E - A)^{-1}.$$

Здесь  $E$  — единичная матрица,  $\mu, \omega$  вещественны и  $(i\omega - \mu) \in \mathbb{C}$ . Пусть  $\|\chi(i\omega - \mu)\|$  — спектральная норма переходной матрицы. Следуя [24], введем обозначение  $\theta(\mu) := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\chi(i\omega - \mu)\|$ .

**Теорема** (Смит, [24]). Пусть для динамической системы (10) существует такое вещественное число  $\rho$ , что:

1. Матрица  $A$  имеет ровно два собственных значения  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ , для которых выполнено соотношение  $\operatorname{Re} \lambda_\alpha = \operatorname{Re} \lambda_\beta > -\rho$ ; остальные ее собственные значения удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} \lambda < -\rho$ .

2. Пусть в некоторой, не содержащей неподвижных точек, положительно инвариантной области системы (10) выполняется равномерная оценка Липшица

$$|\Phi(\mathbf{X}_1) - \Phi(\mathbf{X}_2)| \leq K \cdot |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|. \quad (11)$$

3.  $K < 1/\theta(\rho)$ .

Тогда все положительные полутраектории, расположенные в инвариантной области, не содержащей неподвижных точек рассматриваемой динамической системы, сходятся к замкнутым траекториям, причем в этой инвариантной области содержится по меньшей мере одна устойчивая периодическая траектория.

Представим динамическую систему (1) в виде (10), где

$$A = -E - \eta \cdot \Sigma =$$

$$-E - \eta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & -\eta \\ -\eta & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\eta & -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\Sigma$  — ортогональная матрица, циклически переставляющая координатные оси  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_{2k+1} \rightarrow x_1$ . Один из ее собственных векторов имеет координаты  $(1, 1, 1, \dots, 1)$ , и в подходящей системе

координат она разлагается на блоки  $2 \times 2$  вида

$$\Sigma_j = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi_j & -\sin 2\varphi_j \\ \sin 2\varphi_j & \cos 2\varphi_j \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где для сокращения размера формул мы вводим обозначение  $\varphi_j = \frac{\pi j}{2k+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Вещественные части собственных чисел матрицы  $A$  находятся явно:  $\lambda_1 = -1 - \eta$ ,

$$\operatorname{Re} \lambda_{2,3} = -1 - \eta \cdot \cos \frac{2\pi}{2k+1}, \dots, \operatorname{Re} \lambda_{2k,2k+1} = -1 + \eta \cdot \cos \frac{\pi}{2k+1}.$$

Из условий теоремы Смита на вещественные части собственных чисел матрицы  $A$  следует, что  $\eta > 0$ , а также, что значения параметра  $\rho$  должны удовлетворять неравенствам

$$\eta \cdot \cos 3\varphi_1 < 1 - \rho < \eta \cdot \cos \varphi_1. \quad (13)$$

Выбор матрицы  $A$  в (10) однозначно задает нелинейную часть  $\Phi$ :

$$\Phi(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \eta x_{2k+1} + f_1(x_5) \\ \eta x_1 + f_2(x_1) \\ \eta x_2 + f_3(x_2) \\ \dots \\ \eta x_{2k} + f_{2k+1}(x_{2k}) \end{pmatrix}.$$

Поэтому наилучшая для оценок устойчивости константа Липшица  $K$  из условия (11) в области  $\mathcal{P}'_{4k+2}$  определяется как норма матрицы Якоби отображения  $\Phi$ , которая в данном случае имеет очень простую форму:

$$K = \max_{i=1,2,\dots,2k+1} \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}'_{2k+1}} |\eta + f'_i(x_{i-1})| \right\}. \quad (14)$$

Квадрат нормы переходной матрицы  $\chi(i\omega - \rho) = ((i\omega - \rho)E - A)^{-1}$ , согласно известной теореме о сингулярном разложении матриц (см., например [7]), является обратной величиной минимального собственного значения матрицы

$$((i\omega - \rho)E - A)^* \cdot ((i\omega - \rho)E - A) = ((i\omega + 1 - \rho)E + \eta \cdot \Sigma)^* \cdot ((i\omega + 1 - \rho)E + \eta \cdot \Sigma).$$

В упомянутой выше системе координат, см. (12), эта матрица разлагается вместе с матрицей  $\Sigma$  на блоки вида

$$C_j = [(1 - \rho + \eta \cos 2\varphi_j)^2 + \omega^2 + \eta^2 \sin^2 2\varphi_j] \cdot E + Z_j, \quad \text{где}$$



$$Z_j = \begin{pmatrix} 0 & 2i\omega\eta \sin 2\varphi_j \\ -2i\omega\eta \sin 2\varphi_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа каждого такого блока также находятся явно:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= (1 - \rho)^2 + \eta^2 + \omega^2 + 2\eta - 2\eta\rho; \\ \hat{\lambda}_{2j,2j+1} &= (1 - \rho + \eta \cos 2\varphi_j)^2 + (\omega \pm \eta \sin 2\varphi_j)^2, \quad j = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Введем параметр  $\sigma$  из соотношения  $1 - \rho = \sigma\eta$ . Как и в (13),  $\cos \frac{3\pi}{2k+1} < \sigma < \cos \frac{\pi}{2k+1}$ . Таким образом получаем

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}} \hat{\lambda}_1 := a_1(\sigma, \eta) = \eta^2(\sigma+1)^2; \quad \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \hat{\lambda}_{2j,2j+1} := b_j(\sigma, \eta) = \eta^2(\sigma + \cos 2\varphi_j)^2,$$

и значит величина  $\theta(\rho)^{-1} = (\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\chi(i\omega - \rho)\|)^{-1}$  в случае системы (1) находится следующим образом

$$\frac{1}{\theta^2} = \min\{a(\sigma, \eta), b_j(\sigma, \eta)\},$$

где  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $\sigma \in I = (\cos 3\varphi_1; \cos \varphi_1)$ , то есть

$$\theta^{-1} = \begin{cases} \eta \cdot (\cos \varphi_1 - \sigma), & \text{при } \cos 2\varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \leq \sigma < \cos \varphi_1; \\ \eta \cdot (\sigma - \cos 3\varphi_1), & \text{при } \cos 3\varphi_1 < \sigma \leq \cos 2\varphi_1 \cdot \cos \varphi_1. \end{cases}$$

Можно проверить, что наибольшее значение коэффициента  $K$  в неравенстве (11) достигается при  $\sigma = \cos 2\varphi_1 \cdot \cos \varphi_1$ , то есть в середине отрезка  $I$ . Значит  $\theta^{-1} = \eta \cdot \sin 2\varphi_1 \cdot \sin \varphi_1$ , поэтому оценка (14) производных монотонно убывающих функций  $f_i$  имеет вид

$$|\eta + f'_i(x_{i-1})| < \eta \cdot \sin 2\varphi_1 \cdot \sin \varphi_1$$

при всех  $i = 1, 2, \dots, 2k + 1$ , и  $x_i \in (0, f_{i-1}(0))$ , или же

$$-\eta \cdot (1 + \sin 2\varphi_1 \cdot \sin \varphi_1) < f'_i(x_{i-1}) < -\eta \cdot (1 - \sin 2\varphi_1 \cdot \sin \varphi_1). \quad (15)$$

Таким образом, установлена теорема:

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Если в инвариантной области  $\mathcal{P}'_{4k+2}$  при некотором  $\eta > 0$  и всех  $i = 1, 2, \dots, 2k + 1$  выполнено неравенство (15), то в этой области  $\mathcal{P}'_{4k+2}$  существует устойчивая периодическая траектория.

В трехмерном случае этот результат был установлен в [4] для достаточно широкого интервала изменений производных убывающих функций  $f_i$ :

$$-7\tilde{\eta} < f'_i(x_{i-1}) < -\tilde{\eta}, \quad i = 1, 2, 3$$

при некотором  $\tilde{\eta} > 0$ . Для пятимерной динамической системы вида (1) условие существования устойчивого цикла имеет вид

$$-\bar{\eta}(4 + \sqrt{5}) < f'_i(x_{i-1}) < -\bar{\eta}(4 - \sqrt{5}), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

во всех точках этой инвариантной области при некотором  $\bar{\eta} > 0$ , см. [8].

Как видно из формулы (15), гарантирующая устойчивость цикла оценка производных монотонных функций  $f_i$  с ростом размерности не улучшается. С другой стороны, в работе [24] Р.Смит отмечает, что соответствующая оценка в условиях его теоремы не является наилучшей возможной. Избыточными, по-видимому, являются и установленные в теореме 2 условия (15).

Следует отметить, что основанные на построении функции Ляпунова стандартные методы теории устойчивости в случае системы (1) не срабатывают. Даже в малых размерностях в численных экспериментах наблюдается немонотонное стремление траекторий к предельным циклам.

### Упражнения.

4.1. Провести доказательство теоремы 2 для трехмерной динамической системы вида (1), не используя теорему о сингулярном разложении матрицы.

## 5 Вопросы неединственности циклов.

Как хорошо известно (см., например [18]), любая нелинейная динамическая система в некоторой малой окрестности  $W$  своей гиперболической стационарной точки заменой переменных приводится к линейному виду.

Рассмотрим линеаризацию симметричной динамической системы (9). Если показатель  $n$  достаточно велик, см. (6), то

$$\operatorname{Re}\lambda_{4,5} < 0 < \operatorname{Re}\lambda_{6,7} < \operatorname{Re}\lambda_{8,9},$$

и поэтому двумерные плоскости  $P_{8,9}$  и  $P_{6,7}$  покрыты разматывающимися траекториями такой линейной динамической системы. Поэтому

окрестность  $W$  содержит две инвариантные двумерные поверхности, которые состоят из размазывающихся траекторий исходной нелинейной динамической системы.

Численные эксперименты показали, что траектории системы (9) с начальными точками  $M_{8,9}$  и  $M_{6,7}$ , лежащими в малой окрестности стационарной точки вблизи от плоскостей  $P_{8,9}$  и, соответственно,  $P_{6,7}$ , имеют различные предельные циклы, как это показано на рисунке 4 слева. Здесь предельный цикл траектории, начинающейся в точке  $M_{8,9}$ , проектируется в «маленький криволинейный треугольник». Именно этот цикл проходит по инвариантной области  $\mathcal{P}'_{4k+2}$  ( $k = 4$ ), о которой говорится в теоремах 1 и 2. При описании некоторых рисунков мы будем называть этот цикл первым. Проекция предельного цикла траектории, начинающейся в точке  $M_{6,7}$ , это «большой треугольник». На такой проекции указанные треугольники выглядят гомотетичными, однако в объемлющем пространстве  $\mathbb{R}^9$  формы этих двух предельных циклов совершенно различны. Стационарная точка  $M^*$  проектируется в верхнюю часть этого рисунка.

Отметим, что для девятимерной системы (9) вблизи стационарной точки  $M^*$  двумерная плоскость  $P_{8,9}$  содержится в инвариантной области  $\mathcal{P}_{18}$ , а плоскость  $P_{6,7}$  пересекается с этой инвариантной областью только по одной точке —  $M^*$ .

Аналогичная неединственность циклов имеет место и для несимметричных динамических систем вида (9), а также и для других нечётных размерностей, больших семи, см., например, правую часть рисунка 4, где изображены проекции на плоскость  $P_{1,8,9}$  двух циклов одиннадцатимерной динамической системы, состоящей из уравнений вида (9). Результаты многочисленных численных экспериментов порождают гипотезу, которой автор с удовольствием делится с читателями:

**Гипотеза.** *Количество различных циклов у таких динамических систем не меньше количества пар комплексно сопряжённых собственных чисел матрицы линеаризации (5), имеющих положительные вещественные части.*

Все сложности её проверки происходят вне окрестности  $W$  и связаны также с тем, что некоторые из этих циклов могут оказаться неустойчивыми. В некоторых численных экспериментах наблюдались «срывы» траекторий, по-видимому приближавшихся к таким неустойчивым циклам, но затем притянутых устойчивым (первым) циклом, описанным в теоремах 1 и 2.

Для одиннадцатимерной динамической системы вида (1) блуждание второго цикла по разбиению инвариантной области  $Q$  на маленькие параллелепипеды происходит согласно диаграмме

$$\begin{aligned} &\{10110110100\} \rightarrow \{10110110101\} \rightarrow \{10110100101\} \rightarrow \{10110101101\} \rightarrow \\ &\{10100101101\} \rightarrow \{10101101101\} \rightarrow \{00101101101\} \rightarrow \{01101101101\} \rightarrow \\ &\{01101101001\} \rightarrow \{01101101011\} \rightarrow \{01101001011\} \rightarrow \{01101011011\} \rightarrow \\ &\{01001011011\} \rightarrow \{01011011011\} \rightarrow \{01011011010\} \rightarrow \{11011011010\} \rightarrow \\ &\{11011010010\} \rightarrow \{11011010110\} \rightarrow \{11010010110\} \rightarrow \{11010110110\} \rightarrow \\ &\{10010110110\} \rightarrow \{10110110110\} \rightarrow \{10110110100\}, \end{aligned}$$

которая замыкается после 22 шагов.

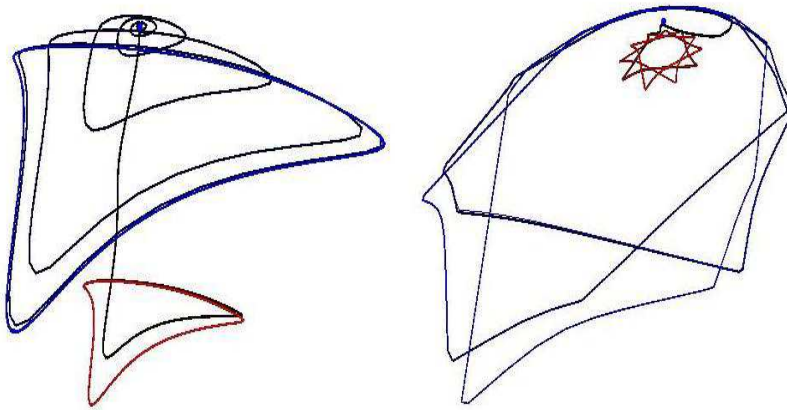


Рис. 4: Проекция двух циклов девятимерной системы (9) на трёхмерную плоскость  $P_{1,6,7}$  — слева, и проекция двух циклов аналогичной одиннадцатимерной системы на плоскость  $P_{1,8,9} \subset \mathbb{R}^{11}$  — справа.

Отметим, что для некоторых динамических систем вида (1), имеющих размерности 13 и более, в численных экспериментах наблюдались и «бесконечные» количества циклов, которые заполняют двумерные торы в положительных октантах соответствующих евклидовых пространств.

## 6 Некоторые дальнейшие обобщения.

Разбиение параллелепипедов  $Q_{\varepsilon, m}$  на треугольные призмы производилось с целью локализации расположения периодической траектории в инвариантной области  $Q$ . Утверждение, аналогичное теореме 1, остается справедливым и для динамических систем вида

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(x_{i-1}) \cdot (f_i(x_{i-1}) - x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2k + 1,$$

где функции  $f_i$  такие же, как и выше, а функции  $g_i$  положительны и монотонно возрастают, а также и для динамических систем несколько более общего вида  $\{\dot{x}_i = F_i(x_i, x_{i-1})\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2k + 1$ , в которых все функции  $F_i$  монотонно убывают по обоим переменным.

Это обобщение теоремы 1 устанавливается теми же средствами с помощью теоремы Брауэра при рассмотрении инвариантной области  $Q_{4k+2}$ .

Аналогичным же образом исследуются динамические системы произвольной размерности, имеющие вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) - x_1, \\ \dots \dots \\ \frac{dx_m}{dt} = f_m(x_{m-1}) - x_m, \\ \frac{dx_{m+1}}{dt} = \Lambda_{m+1}(x_m) - x_{m+1}, \\ \dots \dots \\ \frac{dx_l}{dt} = \Lambda_l(x_{l-1}) - x_l. \end{array} \right. \quad (16)$$

Здесь все функции  $f_i$  строго монотонно убывают, то есть описывают отрицательные обратные связи, а унимодальные функции  $\Lambda_j$  описывают переменные обратные связи.

Рассмотрим для простоты изложения пример шестимерной динамической системы (16) в случае  $l = 6$ ,  $m = 5$ . Другие системы такого вида, а также подобные системы, содержащие в правых частях монотонно убывающие функции  $f_i$  и унимодальные функции  $\Lambda_j$ , расставленные в произвольном порядке, изучаются аналогичным образом.

Как и при доказательстве теоремы 1, начнем с нахождения стационарных точек. Обозначим композицию  $f_5(f_4(f_3(f_2(f_1(x_6))))))$  через

$\Psi(x_6)$ . Это строго монотонно убывающая функция, пусть  $\psi(x_5)$  — функция, обратная к  $\Psi$ . Стационарные точки  $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*)$  шестимерной системы (16) находятся из уравнения

$$\Lambda_6(\Psi(x_6^*)) = x_6^*$$

и из соотношений

$$x_1^* = f_1^*(x_6^*), \quad x_2^* = f_2^*(x_1^*), \quad x_3^* = f_3^*(x_2^*), \quad x_4^* = f_4^*(x_3^*), \quad x_5^* = f_5^*(x_4^*).$$

Обозначим через  $x_5^M$  точку максимума унимодальной функции  $\Lambda_6(x_5)$  и рассмотрим случай

$$\psi(x_5^M) < \Lambda(x_5^M). \quad (17)$$

Нетрудно проверить, что при выполнении этого условия система (16) имеет единственную стационарную точку  $X^{*I}$ , у которой  $x_5^{*I} < x_5^M$ . В типичных для биологических приложений случаях эта система имеет ещё две стационарные точки, у которых  $x_5^{*I} > x_5^M$ . Траектории системы (16) в окрестностях таких стационарных точек ведут себя проще, чем в окрестности точки  $X^{*I}$ .

Ввиду того, что в этой точке  $X^{*I}$  производные функций  $f_j$  отрицательны, а  $d\Lambda_6/dx_5 > 0$ , линеаризация системы (16) в окрестности этой точки имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2,5,6} = -1 + a \cdot [\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm i \cdot \frac{1}{2}], \quad \lambda_{3,4} = -1 \pm i \cdot a, \quad \text{где}$$

$$a^6 = -\frac{df_1}{dx_6} \cdot \frac{df_2}{dx_1} \cdot \frac{df_3}{dx_2} \cdot \frac{df_4}{dx_3} \cdot \frac{df_5}{dx_4} \cdot \frac{d\Lambda_6}{dx_5}.$$

Здесь все производные вычисляются в стационарной точке  $X^{*I}$ , которая имеет инвариантную окрестность

$$Q_6 = [x_1^-, x_1^+] \times [x_2^-, x_2^+] \times [x_3^-, x_3^+] \times [x_4^-, x_4^+] \times [x_5^-, x_5^+] \times [x_6^-, x_6^+].$$

Границы этого параллелепипеда определяются так:  $x_6^-$  и  $x_6^+$  являются ближайшими к  $x_6^{*I}$  решениями уравнения  $\Lambda_6(\Psi(\Lambda_6(\Psi(x_6)))) = x_6$ , то есть  $x_6^* \in [x_6^-, x_6^+]$ . Пусть  $I_j := [x_j^-, x_j^+]$ , тогда

$$\begin{aligned} x_1^- &= \min_{x_6 \in I_6} f_1(x_6), & x_1^+ &= \max_{x_6 \in I_6} f_1(x_6); \\ x_2^- &= \min_{x_1 \in I_1} f_2(x_1), & x_2^+ &= \max_{x_1 \in I_1} f_2(x_1); \\ x_3^- &= \min_{x_2 \in I_2} f_3(x_2), & x_3^+ &= \max_{x_2 \in I_2} f_3(x_2); \\ x_4^- &= \min_{x_3 \in I_3} f_4(x_3), & x_4^+ &= \max_{x_3 \in I_3} f_4(x_3); \end{aligned}$$

$$x_5^- = \min_{x_4 \in I_4} f_5(x_4), \quad x_5^+ = \max_{x_4 \in I_4} f_5(x_4).$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, разобьем инвариантную область  $Q_6$  плоскостями, параллельными координатным и проходящими через стационарную точку  $X^{*I}$ . Отметим, что в этой области функции  $f_1, f_2, \dots, f_5$  монотонно убывают, а унимодальная функция  $\Lambda_6$  удовлетворяет условиям:  $\Lambda_5(x_5) < x_6^{*I}$  при  $x_5 < x_5^{*I}$  и  $\Lambda_5(x_5) > x_6^{*I}$  при  $x_5 > x_5^{*I}$ .

В силу этих неравенств правила перехода траекторий системы шестимерной динамической системы (16) из одного параллелепипеда разбиения в другой остаются почти теми же самыми, что и в теореме 1. Изменение направления этого перехода на противоположное происходит только на плоскости  $x_5 = x_5^{*I}$ . Таким образом для указанного разбиения области  $Q_6$  конструируется диаграмма, аналогичная (4):

$$\begin{array}{ccccccccc} \{101010\} & \rightarrow & \{101011\} & \rightarrow & \{001011\} & \rightarrow & \{011011\} & \rightarrow & \{010011\} \\ & & \uparrow & & & & & & \downarrow \\ \{101000\} & & & & & & & & \{010111\} \\ & & \uparrow & & & & & & \downarrow \\ \{101100\} & \leftarrow & \{100100\} & \leftarrow & \{110100\} & \leftarrow & \{010100\} & \leftarrow & \{010101\} \end{array}$$

Обозначим объединение перечисленных здесь 12 параллелепипедов через  $P_{12}$ . Следующая теорема доказывается так же, как и теорема 1.

**Теорема 3.** *При выполнении условий (17) и неравенства  $a \cdot \cos \frac{\pi}{6} > 1$  шестимерная динамическая система (16) имеет по крайней мере одну периодическую траекторию в области  $P_{12}$ .*

Для этой динамической системы имеет место также и аналог теоремы 2 о существовании устойчивого цикла. На рисунке 5 показаны проекции трех траекторий шестимерной системы вида (16) на трёхмерную плоскость, соответствующую собственным числам  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_6$ . Эти траектории начинаются вблизи от стационарной точки и образуют один предельный цикл. Здесь

$$\begin{aligned} f_1(x_6) &= \frac{7}{1+x_6^3}; & f_2(x_1) &= \frac{7}{1+x_1^3}; & f_3(x_2) &= \frac{8}{1+x_2^3}; \\ f_4(x_3) &= \frac{12}{1+x_3^3}; & f_5(x_4) &= \frac{11}{1+x_4^3}; & \Lambda_6(x_5) &= \frac{18x_5}{1+x_5^2}. \end{aligned}$$

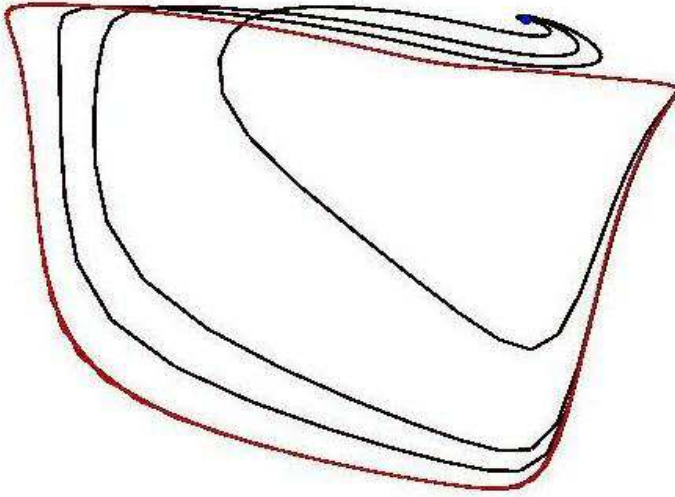


Рис. 5: Проекция траекторий системы (16) на 3-D плоскость  $P_{1,2,6}$ .

## 7 Более сложный пример.

Аналогичными рассуждениями, что и выше, удаётся исследовать фазовые портреты и других динамических систем, состоящих из уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_{i-1}) - x_i, \quad \text{и} \quad \frac{dx_j}{dt} = \Lambda_j(x_{j-1}) - x_j.$$

Количество стационарных точек у таких систем может оказаться довольно большим, что увеличивает сложность фазовых портретов. Однако, во многих случаях около некоторых стационарных точек можно строить инвариантные окрестности, и устанавливать существование в таких окрестностях (устойчивых) циклов с помощью теорем 1 и 2.

Рассмотрим в качестве примера трехмерную динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = f_1(z) - x; \quad \frac{dy}{dt} = \Lambda_2(x) - y; \quad \frac{dz}{dt} = \Lambda_3(y) - z, \quad (18)$$

у которой функции  $\Lambda_2$  и  $\Lambda_3$  унимодальны, а функция  $f_1$  монотонно убывает, как и в (1). При изучении поведения траекторий этой системы



мы будем предполагать, что функции  $\Lambda_2(x)$  и  $\Lambda_3(y)$  дифференцируемы при всех значениях их аргументов, кроме, быть может, точек  $x_M$  и  $y_M$  их максимумов.

Стационарные точки системы (18) находятся из уравнений

$$x = f_1(z), \quad z = \Lambda_3(\Lambda_2(x)).$$

В качестве инвариантной области системы (18) удобно взять параллелепипед

$$\tilde{Q} = [0, f_1(0)] \times [0, \Lambda_2(x_M)] \times [0, \Lambda_3(y_M)].$$

Пусть  $\psi : [f_1(\Lambda_3(y_M)), f_1(0)] \rightarrow [0, \Lambda(y_M)]$  — обратная функция к монотонно убывающей функции  $x = f_1(z)$ , и  $W(x) := f_1(\Lambda_3(\Lambda_2(x)))$ .

Следующее условие на функции  $\Lambda_2, \Lambda_3$  и  $f_1$  легко проверяется в каждом частном случае, когда унимодальные функции  $\Lambda_i$  имеют какой-либо конкретный тип из перечисленных во введении, а отрицательная обратная связь описывается функцией Хилла.

**Условие  $\Lambda$ .** Пусть существуют такие  $x_\alpha$  и  $x_\beta$ ,

$0 < x_\alpha < x_M < x_\beta < f_1(0)$ , что  $\Lambda_2(x_\alpha) = \Lambda_2(x_\beta) = y_M$ , и

пусть существуют такие  $x_\gamma$  и  $x_\delta$ ,  $0 < x_\gamma < x_\alpha < x_\beta < x_\delta < f_1(0)$ ,

что  $\Lambda_3(\Lambda_2(x_\gamma)) = \Lambda_3(\Lambda_2(x_\delta)) = \Lambda_3(\Lambda_2(x_M))$ , и

пусть выполняются следующие условия:

$$x_\alpha > W(x_\alpha), \quad x_M < W(x_M) < W(f_1(0)), \quad x_\gamma < W(x_M).$$

**Условие  $W$ .** Пусть график функции  $w = W(x)$  на каждом интервале своего монотонного роста  $(x_\alpha, x_M)$ ,  $(x_\beta, x_\delta)$ , и  $(x_\delta, f_1(0))$  трансверсально пересекается с прямой  $w = x$  в единственной точке.

Отметим, что такое одноточечное трансверсальное пересечение на интервалах  $(x_\gamma, x_\alpha)$ ,  $(x_M, x_\beta)$  монотонного убывания функции  $W$  имеет место без дополнительных предположений.

**Лемма 2.** Если условия  $\Lambda$  и  $W$  выполнены, то нелинейная динамическая система (18) имеет в точности пять стационарных точек  $M_I, M_{II}, M_{III}, M_{IV}, M_V$  в инвариантной области  $\tilde{Q}$ .

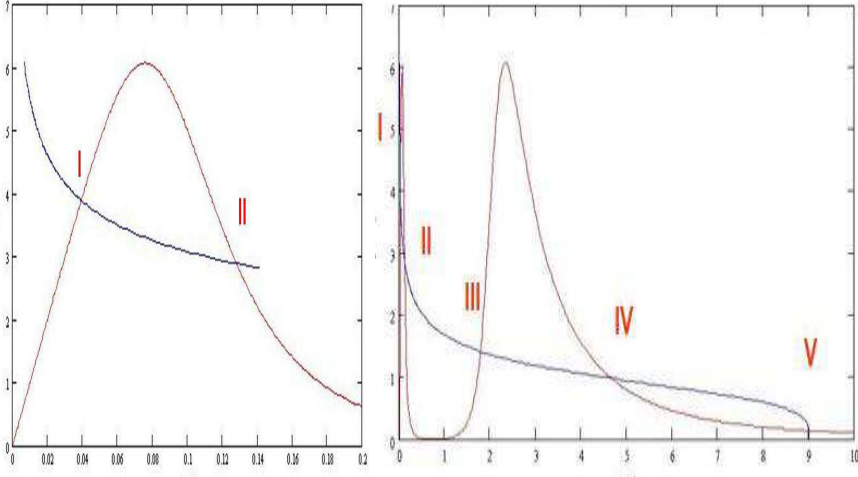


Рис. 6: Стационарные точки системы (19).

Доказательство почти очевидно. Все сложности здесь спрятаны в условия  $\Lambda$  и  $W$ , из которых следует, что координаты указанных стационарных точек удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x_\gamma < x_I < x_\alpha < x_{II} < x_M < x_{III} < x_\beta < x_{IV} < x_\delta < x_V < f_1(0);$$

$$0 < y_I < y_M < y_{II} < \Lambda_2(x_M); \quad y_M < y_{III} < \Lambda_2(x_M);$$

$$0 < y_{IV}, y_V < y_M; \quad \text{и} \quad z_I > z_{II} > z_{III} > z_{IV} > \Lambda_2(\Lambda_2(x_\delta)) > z_V.$$

Координаты  $z$  и  $y$  этих стационарных точек вычисляются из соответствующих уравнений:  $z = \psi(x)$  и  $y = \Lambda_2(x)$ .

При выполнении условий Леммы 2 из этих соотношений определяются элементы  $p = -\frac{df_1}{dz}$ ,  $q = \left| \frac{d\Lambda_2}{dx} \right|$  и  $r = \left| \frac{d\Lambda_3}{dy} \right|$  матрицы линеаризации системы (18) для каждой из пяти её стационарных точек.

На рисунке 6 показан процесс нахождения всех пяти стационарных точек  $M_I, \dots, M_V$  динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9}{1+z^4} - x; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{10 \cdot x}{1+x^4} - y; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{10 \cdot y}{1+y^5} - z. \quad (19)$$

На левой половине рисунка показан в увеличенном виде узкий левый пик графика функции  $z = \Lambda_3(\Lambda_2(x))$  и его пересечение с графиком функции  $x = f_1(z)$ .

Простые вычисления наклона  $|dW/dx| = p \cdot q \cdot r$  графика функции  $w = W(x)$  в точках  $x_I, x_{II}, \dots, x_V$  показывают, что линеаризация системы (18) в её стационарных точках  $M_I, \dots, M_V$  имеет следующие характеристические полиномы:

$$\begin{aligned} M_I; & (1 + \lambda)^3 + p \cdot q \cdot r = 0; (p \cdot q \cdot r)_I > 1, \lambda_1^I = -1 - \sqrt[3]{p \cdot q \cdot r} < -2. \\ M_{II}; & (1 + \lambda)^3 - p \cdot q \cdot r = 0; (p \cdot q \cdot r)_{II} > 1, \lambda_1^{II} = -1 + \sqrt[3]{p \cdot q \cdot r} > 0. \\ M_{III}; & (1 + \lambda)^3 + p \cdot q \cdot r = 0; (p \cdot q \cdot r)_{III} > 1, \lambda_1^{III} = -1 - \sqrt[3]{p \cdot q \cdot r} < -2. \\ M_{IV}; & (1 + \lambda)^3 - p \cdot q \cdot r = 0; (p \cdot q \cdot r)_{IV} > 1, \lambda_1^{IV} = -1 + \sqrt[3]{p \cdot q \cdot r} > 0. \\ M_V; & (1 + \lambda)^3 - p \cdot q \cdot r = 0; (p \cdot q \cdot r)_V < 1, \lambda_1^V = -1 + \sqrt[3]{p \cdot q \cdot r} < 0, \\ & \Re e \lambda_{2,3}^V < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, стационарная точка  $M_V$  устойчива, индекс векторного поля скоростей системы (18) в этой точке равен  $-1$ .

Индекс векторного поля скоростей в точках  $M_{II}$  и  $M_{IV}$  равен  $+1$ . Можно проверить, что около этих точек периодических траекторий система (18) не имеет.

Понятие **индекса векторного поля** обсуждается в последнем разделе этого учебного пособия.

Опишем теперь фазовый портрет системы (18) около её стационарных точек  $M_I$  и  $M_{III}$ . Напомним, что функции  $\Lambda_2(x)$  и  $\Lambda_3(y)$  возрастают около координат точки  $M_I(x_I, y_I, z_I)$  и убывают около координат точки  $M_{III}(x_{III}, y_{III}, z_{III})$ .

**I.** Начнём со стационарной точки  $M_I$ . Пусть  $x_\varepsilon$  — минимальное значение  $f_1(\Lambda_3(y_M))$  функции  $f_1$  на отрезке  $[0, \Lambda_3(y_M)]$ . Если

$$\Lambda_3(\Lambda_2(x_\varepsilon)) \geq \psi(x_\alpha), \quad (20)$$

то мы будем описывать поведение траекторий системы (18) на гранях параллелепипеда

$$Q^{I,1} = [x_\varepsilon, x_\alpha] \times [\Lambda_2(x_\varepsilon), y_M] \times [\psi(x_\alpha), \Lambda_3(y_M)].$$

$x = x_\varepsilon$ ;  $\dot{x} = f_1(z) - x_\varepsilon \geq 0$  поскольку в этом случае

$$\psi(x_\alpha) \leq z \leq \Lambda_3(y_M).$$

$x = x_\alpha$ ;  $\dot{x} = f_1(z) - x_\alpha \leq 0$ , так как  $z \leq f_1^{-1}(x_\alpha)$ .

$y = \Lambda_2(x_\varepsilon)$ ;  $\dot{y} = \Lambda_2(x) - \Lambda_2(x_\varepsilon) \geq 0$ , поскольку функция  $\Lambda_2(x)$  монотонно возрастает на сегменте  $[x_\varepsilon, x_\alpha]$ .

$y = y_M$ ;  $\dot{y} = \Lambda_2(x) - y_M \leq 0$ , так как здесь  $x < x_\alpha = \Lambda_2^{-1}(y_M)$ .

$$z = \psi(x_\alpha); \dot{z} = \Lambda_3(y) - \psi(x_\alpha) \geq 0$$

$z = \Lambda_3(y_M); \dot{z} = \Lambda_3(y) - \Lambda_3(y_M) \leq 0$ , так как функция  $\Lambda_3(y)$  монотонно возрастает на сегменте  $[\Lambda_2(x_\varepsilon), y_M]$ .

Таким образом, из условия (20) следует, что содержащий точку  $M_I$  параллелепипед  $Q^{I,1}$  является инвариантной областью системы (18). Индекс векторного поля скоростей этой системы в точке  $M_I$  равен  $-1$ .

В противоположном случае

$$\Lambda_3(\Lambda_2(x_\varepsilon)) \leq \psi(x_\alpha) \quad (21)$$

построение инвариантной области проводится аналогично: Обозначим через  $x_\zeta$  число, однозначно определяемое условиями  $\Lambda_3(\Lambda_2(x_\zeta)) = \psi(x_\alpha)$  и  $x_\zeta < x_\varepsilon < x_\alpha$ . Построим другой параллелепипед:

$$Q^{I,2} = [x_\zeta, x_\alpha] \times [\Lambda_2(x_\zeta), y_M] \times [\psi(x_\alpha), \Lambda_3(\Lambda_2(x_\zeta))].$$

Как и выше, можно проверить, что если условие (21) выполнено, то параллелепипед  $Q^{I,2}$  является инвариантной областью системы (18). Таким образом, в обоих случаях (20) и (21) индекс поля скоростей в стационарной точке  $M_I$  равен  $-1$  независимо от величины  $\operatorname{Re} \lambda_{2,3}^I$ , а эта точка окружена инвариантной областью  $P'$ , которая совпадает с  $Q^{I,1}$  либо с  $P' = Q^{I,2}$  в зависимости от случая (20) либо (21).

Одно из собственных чисел матрицы линеаризации в точке  $M_I$  отрицательно, а два оставшихся комплексно сопряжены:

$$\lambda_1^I = -1 - \sqrt[3]{p \cdot q \cdot r}, \quad \operatorname{Re} \lambda_{2,3}^I := \operatorname{Re} \lambda_2^I = \operatorname{Re} \lambda_3^I = \frac{-2 + \sqrt[3]{p \cdot q \cdot r}}{2}.$$

**Теорема 4.** *Если  $\operatorname{Re} \lambda_{2,3}^I > 0$ , и условия  $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{W}$  выполнены, то система (18) имеет по крайней мере одну периодическую траекторию в инвариантном параллелепипеде  $Q^{I,1}$  либо  $Q^{I,2}$ , содержащем стационарную точку  $M_I$ .*

Для доказательства теоремы разобьём параллелепипед  $Q^{I,1}$  или  $Q^{I,2}$  плоскостями  $x = x_I$ ,  $y = y_I$  и  $z = z_I$  на восемь меньших параллелепипедов  $Q_{ijk}^{I,m}$ ,  $m$  равно 1 либо 2. Нумерация этих параллелепипедов устроена почти так же, как и в случае динамической системы (1). Именно, поскольку функции  $\Lambda_2(x)$  и  $\Lambda_3(y)$  монотонно растут около точки  $M_I$ , нулевые значения двух индексов  $i$  и  $j$  означают, что соответствующая координата всех точек этого маленького параллелепипеда не меньше, чем координата стационарной точки  $S_I$ , и наоборот

— единичное значение этих индексов означает, что соответствующая координата не больше, чем координата стационарной точки. Значения 0 или 1 индекса  $k$  определяются противоположным образом, поскольку функция  $f_1(z)$  монотонно убывает.

Далее доказательство теоремы 4 проводится так же, как и доказательство теоремы 1.

**III.** Для изучения поведения траекторий системы (18) около её стационарной точки  $M_{III}$  построим параллелепипед

$$Q(M_{III}) = [x_{III} - \varepsilon_1, x_{III} + \varepsilon'_1] \times [y_{III} - \varepsilon_2, y_{III} + \varepsilon'_2] \times [z_{III} - \varepsilon_3, z_{III} + \varepsilon'_3],$$

где  $x_M < x_{III} - \varepsilon_1 < x_{III} < x_{III} + \varepsilon'_1 < x_\beta$  и  $\varepsilon_2, \varepsilon'_2, \varepsilon_3, \varepsilon'_3$  достаточно малы. Эти расстояния от точки  $M_{III}$  до граней параллелепипеда  $Q(M_{III})$  определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \Lambda_2(x_{III} - \varepsilon_1) &= y_{III} + \varepsilon'_2, & \Lambda_3(y_{III} + \varepsilon'_2) &= z_{III} - \varepsilon_3, \\ f_1(z_{III} - \varepsilon_3) &= x_{III} + \varepsilon'_1; & \Lambda_2(x_{III} + \varepsilon'_1) &= y_{III} - \varepsilon_2, \\ \Lambda_3(y_{III} - \varepsilon_2) &= z_{III} + \varepsilon'_3, & f_1(z_{III} + \varepsilon'_3) &= x_{III} - \varepsilon_1, \end{aligned}$$

или из

$$W(W(x_{III} - \varepsilon_1)) = x_{III} - \varepsilon_1. \quad (22)$$

Если в точке  $M_{III}$  выполняется неравенство  $\frac{dW(W(x))}{dx} = (p \cdot q \cdot r)^2 > 1$ , то между  $x = x_{III}$  и концом сегмента  $[0, f_1(0)]$  имеется достаточное количество максимумов функции  $w = W(x)$ .

Несложный анализ пересечений графика функции  $W(W(x))$  и прямой  $w = x$  в точке  $M_{III}$  показывает, что уравнение (22) имеет решение  $x_{III} - \varepsilon_1$  в интервале  $(x_M, x_\beta)$ . Значит параллелепипед  $Q(M_{III})$  является инвариантной областью системы (18), и поэтому из тех же рассуждений, что и в доказательствах теорем 1 и 4, вытекает следующее утверждение:

**Теорема 5.** *Если  $\operatorname{Re} \lambda_{2,3}^{III} > 0$ , и выполнены условия  $\mathbf{A}, \mathbf{W}$ , то система (18) имеет по крайней мере одну периодическую траекторию в инвариантной окрестности  $Q(M_{III})$  стационарной точки  $M_{III}$ .*

Аналогичная попытка использовать уравнение  $x = W(W(x))$  для построения инвариантного параллелепипеда в окрестности стационарной точки  $M_I$ , вообще говоря, не удаётся, поскольку, в отличие от точки

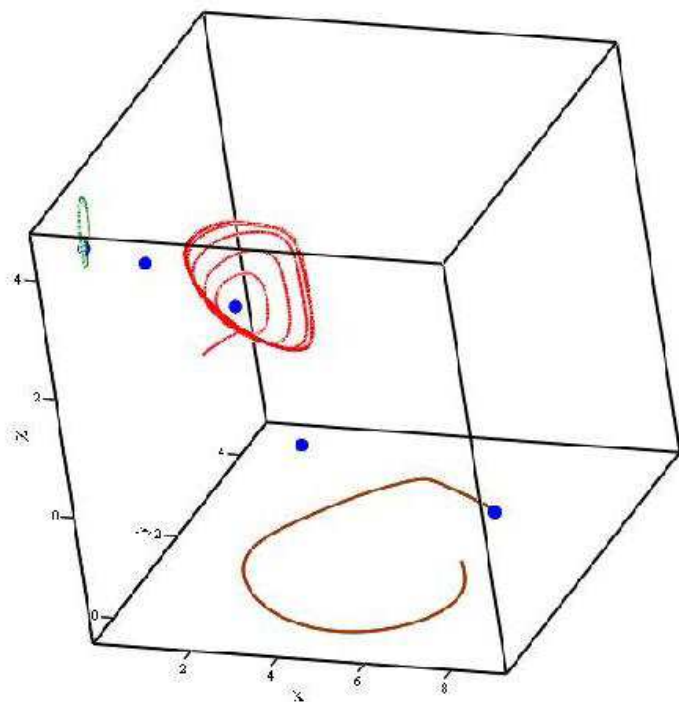


Рис. 7: Траектории и циклы системы (19).

$M_{III}$ , координата  $x$  точки  $M_I$  не отделена от концов сегмента  $[0, f_1(0)]$  изгибами графика функции  $W$ .

Аналоги теоремы 2 о существовании устойчивых циклов доказываются и для каждой стационарной точки системы (18), например:

**Теорема 6.** Если при некотором  $\tilde{\eta} > 0$  выполнены неравенства

$$-7\tilde{\eta} < f_1'(z) < -\tilde{\eta}; \quad -7\tilde{\eta} < \Lambda_i'(x_{i-1}) < -\tilde{\eta}, \quad i = 1, 2,$$

и выполнены условия теоремы 5, то система (18) имеет по крайней мере один устойчивый цикл в инвариантной области  $Q(M_{III})$ .

Все эти устойчивые циклы наблюдались в численных экспериментах с инвариантными окрестностями стационарных точек  $M_I$  и  $M_{III}$ , см. рисунок 7. Как и на рисунке 6, стационарные точки пронумерованы слева направо. Самая правая точка —  $M_V$  устойчивая (притягивающая). Отметим, что на рисунке 7 эта точка притягивает траекторию динамической системы «очень неэкономным» образом.

Читателю предлагается в качестве упражнения сформулировать такую теорему для окрестности стационарной точки  $M_I$ . Некоторые подробности можно найти в [6].

## 8 Теорема Брауэра о неподвижной точке; индекс стационарной точки

В этом разделе для полноты изложения мы приводим достаточно несложное доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке. Именно на этой теореме и основано доказательство нашей теоремы 1 о существовании циклов в рассмотренных выше динамических системах. Кроме того, мы дадим краткое описание понятия индекса векторного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  в окрестности его особой точки, (т.е. стационарной точки динамической системы, соответствующей этому векторному полю).

Для начала опишем некоторые полезные геометрические конструкции, широко применяемые во многих разделах чистой и прикладной математики.

### 1. Симплексы.

Симплексом размерности  $n$  называется простейший  $n$ -мерный многогранник, имеющий минимальное возможное количество вершин —  $(n + 1)$ . Наиболее наглядным образом его можно представить как пересечение гиперплоскости  $P = \{x^0 + x^1 + \dots + x^n = 1\}$  в  $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве с координатами  $(x^0, x^1, \dots, x^n)$  и положительного октанта этого евклидова пространства. То есть точки  $n$ -мерного симплекса описываются наборами из  $(n + 1)$  положительной координаты, удовлетворяющих одному соотношению:  $x^0 + x^1 + \dots + x^n = 1$ . Эти координаты обычно называются **барицентрическими**.

Обозначим этот симплекс через  $\Delta^n$ , его вершинами являются точки пересечения гиперплоскости  $P$  с координатными осями, то есть точки

$V_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $V_1 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $V_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , — единица на  $i$ -м месте,  $V_n = (0, 0, \dots, 1)$ . В частности, одномерный симплекс — это отрезок, который в барицентрических координатах представлен в виде  $\Delta^1 = (x, y)$ ,  $x, y \geq 0$ ,  $x + y = 1$ , нуль-мерный симплекс — это точка с единичной координатой на положительной оси в  $\mathbb{R}^1$ . Отметим, что симплекс любой размерности является замкнутым и ограниченным множеством.

Граница  $n$ -мерного симплекса состоит из его пересечений с координатными плоскостями  $x^0 = 0$ ,  $x^1 = 0 \dots$ . Каждое такое пересечение является симплексом размерности  $(n - 1)$ . Действительно, пересечение  $\Delta^n$  с координатной плоскостью  $x^0 = 0$  описывается наборами из  $n$  положительных координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , вводимая для удобства обозначений координата «номер ноль» на таком пересечении обращается в ноль. В свою очередь граница каждого такого  $(n - 1)$ -мерного симплекса состоит из симплексов размерности  $(n - 2)$  и т.д.

## 2. Симплициальные разбиения.

Симплициальным разбиением произвольного  $n$ -мерного многогранника назовем такое его разбиение на симплексы, что любые два симплекса разбиения либо не пересекаются, либо пересекаются по целому симплексу меньшей размерности. На рисунке 8 представлены два разбиения прямоугольника на двумерные симплексы. Справа разбиение симплициальное, слева — несимплициальное, так как на нем два симплекса (большой и любой из маленьких) пересекаются по отрезку, который не является одномерным симплексом разбиения, так как в большом симплексе он ребром не является. Границы этого отрезка также не являются нульмерными симплексами этого разбиения.

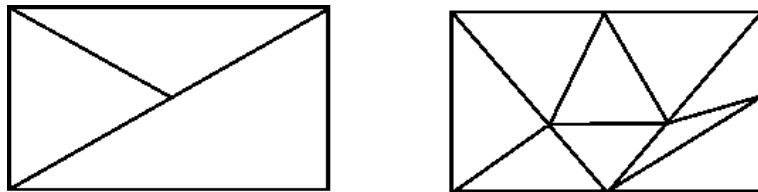


Рис. 8: Симплициальное разбиение прямоугольника — справа, несимплициальное разбиение — слева.



Для доказательства теоремы Брауэра о неподвижной точке нам понадобится один красивый геометрический результат, часто используемый в различных разделах дискретной и комбинаторной математики.

### Лемма Шпернера

Пусть  $n$ -мерный симплекс  $\Delta^n$  с вершинами  $V_0, V_1, \dots, V_n$  разбит симплицially на более мелкие симплексы, у которых вершины занумерованы следующим образом:

0. Каждая из вершин  $V_j$  занумерована своим индексом  $j$ .

1. Для всех  $k, j$  каждая вершина мелкого симплекса, лежащая на ребре  $[V_j V_k]$  симплекса, занумерована либо числом  $k$ , либо числом  $j$ .

2. Для всех  $t, k, j$  каждая вершина мелкого симплекса, лежащая на двумерной грани  $[V_j V_k V_t]$  симплекса  $\Delta^n$ , занумерована либо числом  $k$ , либо числом  $j$ , либо числом  $t$ .

Далее с ростом размерностей граней нумерация вершин мелких симплексов задается аналогично.

Тогда количество симплексов разбиения, у которых вершины занумерованы различными числами  $0, 1, 2, \dots, n$ , нечетно.

Доказательство проводится индукцией по размерности:

1. Для одномерного симплекса утверждение почти очевидно, если разбить отрезок  $[0, 1]$  на мелкие отрезки и занумеровать концы мелких отрезков числами  $0$  и  $1$  так, что начало отрезка  $[0, 1]$  занумеровано нулем, а конец — единицей, то количество мелких отрезков, с вершинами, занумерованными разными числами —  $\{0\}$  и  $\{1\}$  не может оказаться четным, в противном случае на графике ступенчатой функции, описывающей такую нумерацию, при движении от левого конца отрезка к правому пришлось бы сделать четное число шагов от нуля к единице или наоборот, а в общем итоге значение функции должно измениться от нуля (на левом конце отрезка) до единицы — на правом.

2. Пусть задано такое разбиение в двумерном симплексе. Обозначим через  $b(0, 1)$  количество лежащих на границе  $\Delta^2$  отрезков, у которых концы занумерованы числами  $0$  и  $1$ , а через  $i(0, 1)$  — количество таких

отрезков, лежащих во внутренности  $\Delta^2$ . Отметим, что такие отрезки  $0, 1$  могут лежать только на ребре  $[V_0V_1]$  симплекса  $\Delta^2$  (доказательство от противного), и поэтому число  $b(0, 1)$  нечетно. Введем также следующие обозначения: пусть  $t(0, 1, 0)$  — количество мелких треугольников, у которых вершины занумерованы числами  $0, 1, 0$ ;  $t(0, 1, 1)$  — количество мелких треугольников, у которых вершины занумерованы числами  $0, 1, 1$ . В каждом из таких треугольнике имеется ровно по два ребра, занумерованных числами  $0$  и  $1$ . Пусть  $t(0, 1, 2)$  — количество мелких треугольников, у которых вершины занумерованы числами  $0, 1, 2$ , в каждом из таких треугольников имеется ровно по одному ребру с номерами  $0$  и  $1$  на концах. Очевидно, что в треугольниках с другими нумерациями вершин отрезок с вершинами  $0, 1$  содержаться не может. Составим выражение  $2t(0, 1, 0) + 2t(0, 1, 1) + t(0, 1, 2)$ . В этой сумме каждый внутренний отрезок с вершинами  $0, 1$  будет учтен два раза, а каждый граничный отрезок с такими вершинами будет учтен один раз. Итого получаем  $2t(0, 1, 0) + 2t(0, 1, 1) + t(0, 1, 2) = 2i(0, 1) + b(0, 1)$ , и ввиду установленной в предыдущем пункте нечетности числа  $b(0, 1)$ , число  $t(0, 1, 2)$  также нечетно.

3. Рассуждение с разбиением трехмерного симплекса почти дословно повторяют предыдущие. Подсчет количества мелких треугольников  $t(0, 1, 2)$  этого разбиения приведет к равенству в котором обозначения имеют тот же смысл, что и в предыдущих пунктах. Далее проводится индукционный шаг, лемма доказана. Отметим, что из леммы Шпернера следует, что такой мелкий симплекс обязательно найдется, поскольку числа  $t(0, 1, 2)$  и т.п. не могут быть отрицательными.

**Теорема Брауэра о неподвижной точке.** Пусть  $\mathfrak{F} : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  — непрерывное отображение  $n$ -мерного симплекса в себя, тогда существует по крайней мере одна точка  $M_0 \in \Delta^n$  такая, что  $\mathfrak{F}(M_0) = M_0$ .

Доказательство этой теоремы вытекает из серии лемм. Введем следующие обозначения: пусть  $\mathfrak{F}(M) = N$ . Обозначим барицентрические координаты точки  $M$  через  $x^0, x^1, \dots, x^n$ , а координаты ее образа  $N$  — через  $y^0, y^1, \dots, y^n$ . Определим в симплексе  $\Delta^n$  подмножества  $A_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  следующим образом:

*Точка  $M \in \Delta^n$  принадлежит множеству  $A_j$  в том и только в том случае, когда  $x^j \geq y^j$ .*

**Лемма 3.** Каждое множество  $A_j$  замкнуто и содержит вершину симплекса  $V_j$ .

Замкнутость всех множеств несложным образом следует из нестрогости неравенств в их определении, а включение  $V_j \in A_j$  вытекает из того, что у  $j$ -ой вершины симплекса  $\Delta^n$   $j$ -ая координата равна единице, а  $j$ -ая координата точки  $\mathfrak{F}(V_j)$  не может быть больше единицы.

**Лемма 4.** *Каждое ребро  $[V_j V_k]$  содержится в объединении множеств  $A_j \cup A_k$ .*

Рассмотрим для определенности случай  $j = 0, k = 1$ . Предположим, что на ребре  $[V_0 V_1]$  найдется точка  $M \notin A_0 \cap A_1$ . Координаты этой точки имеют вид  $x^0, x^1, x^2 = 0, \dots, x^n = 0, x^0 + x^1 = 1$ . Поскольку  $M \notin A_0$ , то  $x^0 < y^0$ , аналогично и  $x^1 < y^1$ . Тогда имеем  $1 = x^0 + x^1 < y^0 + y^1$ , чего быть не может по определению барицентрических координат точки  $N$ .

**Лемма 5.** *Каждая двумерная грань  $[V_j V_k V_m]$  содержится в объединении множеств  $A_j \cup A_k \cup A_m$ .*

Как и выше, можно после переобозначений координат считать, что  $j = 0, k = 1, m = 2$ . Если бы точка  $M \in [V_j V_k V_m]$  не лежала в указанном объединении, то как и в предыдущей лемме, ее координаты удовлетворяли бы неравенствам  $x^0 < y^0, x^1 < y^1, x^2 < y^2$  и соотношению  $x^0 + x^1 + x^2 = 1$ , откуда сразу следует, что  $1 = x^0 + x^1 + x^2 < y^0 + y^1 + y^2$ .

Рассуждая аналогичным образом, мы приходим шаг за шагом к следующему утверждению:

**Лемма 6.** *Симплекс  $\Delta^n$  содержится в объединении всех построенных множеств  $A_0 \cup A_1 \dots \cup A_n$ .*

**Лемма 7.** *Пересечение  $A_0 \cap A_1 \dots \cap A_n$  непусто.*

*Доказательство.* Разобьем симплекс  $\Delta^n$  на мелкие симплексы так, чтобы их диаметры, то есть расстояния между самыми удаленными точками в каждом таком симплексе не превосходило  $2^{-1}$ . Занумеруем вершины мелких симплексов следующим образом:

0. Вершины большого симплекса  $\Delta^n$  сохраняют свои номера  $0, 1, \dots, n$ .

1. Ввиду леммы 4, вершины мелких симплексов, попадающие на ребро  $[V_j V_k]$ , нумеруем числами  $j$  или  $k$  — в зависимости от того, в котором множестве  $A_j$  или  $A_k$  эта вершина содержится. Если эта вершина принадлежит обоим этим подмножествам, номер  $j$  или  $k$  ставится произвольным образом.

2. Ввиду леммы 5, вершины мелких симплексов, попадающие на грань  $[V_j V_k V_m]$ , нумеруем числами  $j, k$  или  $m$  — в зависимости от того, в котором множестве  $A_j, A_k$  или  $A_m$  эта вершина содержится. И т.д.

Окончание доказательства этой леммы проведем для двумерного симплекса. Случай старших размерностей рассматривается аналогичным образом. Согласно лемме Шпернера, в полученном разбиении найдется мелкий треугольник диаметра меньше  $2^{-1}$ , у которого вершины занумерованы числами  $0, 1, 2$ , то есть одна его вершина принадлежит  $A_0$ , другая —  $A_1$ , а третья —  $A_2$ . Обозначим эти вершины соответственно так:  $V_0(1), V_1(1), V_2(1)$ , здесь индекс в скобках соответствует показателю в  $2^{-1}$ .

Разобьем теперь симплекс  $\Delta^2$  симплицально на мелкие симплексы диаметров меньше  $2^{-2}$  и перенумеруем их вершины так же, как и на предыдущем шаге. В этом более мелком разбиении также найдется треугольник, диаметра меньше  $2^{-2}$ , у которого вершины занумерованы числами  $0, 1, 2$ . Эти вершины обозначим как  $V_0(2), V_1(2), V_2(2)$ .

Таким образом конструируется последовательность измельчающихся разбиений симплекса  $\Delta^2$  и три последовательности  $\{V_0(s)\} \subset A_0, \{V_1(s)\} \subset A_1, \{V_2(s)\} \subset A_2$  вершин мелких треугольников. На шаге номер  $s$  мы получаем симплексы с диаметрами меньше, чем  $2^{-s}$ . Ввиду компактности симплекса  $\Delta^2$ , из последовательности  $\{V_0(s)\}$  вершин «с номерами ноль» можно выбрать сходящуюся подпоследовательность  $\{V_0(s_1)\}$ . Пусть  $V_0^*$  — ее предел. Поскольку множество  $A_0$  замкнуто  $V_0^* \in A_0$ . Рассмотрим теперь бесконечную последовательность  $\{V_1(s_1)\}$  вершин «с номерами один», из которой также выберем сходящуюся подпоследовательность  $\{V_1(s_2)\} \rightarrow V_1^*$ . И наконец, рассмотрим последовательность вершин  $\{V_2(s_2)\} \subset A_2$ , из которой также выбираем сходящуюся подпоследовательность  $\{V_2(s_3)\} \rightarrow V_2^*$ .

Нетрудно проверить, что  $V_0^* = V_1^* = V_2^*$ . Действительно, если бы расстояние между какими-либо двумя этими предельными точками было больше, чем  $2^{-p}$ , то при разбиении  $\Delta^2$  номер  $(p+1)$  и при последующих его разбиениях мы не смогли бы помещать вершины  $V_j(p+m)$  в треугольники с уменьшающимися диаметрами. Но, как было отмечено выше,  $V_0^* \subset A_0, V_1^* \subset A_1, V_2^* \subset A_2$ . Следовательно эта общая предельная точка  $V_0^* = V_1^* = V_2^*$  принадлежит непустому пересечению  $A_0 \cap A_1 \dots \cap A_n$ , и лемма 5 доказана. Обозначим эту точку через  $V_\#$ , ее координаты — через  $z^0, z^1, z^2$ , а координаты ее образа — через  $w^0, w^1, w^2$ . Тем самым лемма 7 доказана.

Приступим теперь к доказательству теоремы Брауэра. В лемме 7 установлено существование точки  $V_{\#}$ , которая принадлежит всем замкнутым множествам  $A_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Поскольку  $V_{\#} \in A_0$ ,  $z^0 \geq w^0$ , и аналогично  $z^1 \geq w^1$ ,  $z^2 \geq w^2$ . Сложив все эти неравенства, получаем  $1 = z^0 + z^1 + z^2 \geq w^0 + w^1 + w^2 = 1$ . Легко видеть, что ни одно из этих неравенств не может быть строгим, и поэтому  $z^0 = w^0$ ,  $z^1 = w^1$  и  $z^2 = w^2$ , то есть у точек  $V_{\#}$  и  $F(V_{\#})$  все координаты совпадают, а значит и совпадают сами эти точки. Тем самым существование неподвижной точки  $F(V_{\#}) = V_{\#}$  в симплексе  $\Delta^2$  установлено, и теорема Брауэра доказана.

**Следствие из теоремы Брауэра.** Пусть  $X$  — топологическое пространство, гомеоморфное симплексу  $\Delta^n$ , и  $\Phi : X \rightarrow X$  — непрерывное отображение, тогда в пространстве  $X$  найдется по крайней мере одна такая точка  $N$ , что  $\Phi(N) = N$ .

*Доказательство.* Пусть  $\alpha : X \rightarrow \Delta^n$  и  $\alpha^{-1} : \Delta^n \rightarrow X$  — взаимно-однозначные непрерывные отображения, осуществляющие гомеоморфизм  $X$  и  $\Delta^n$ . Построим диаграмму

$$\Delta^n \xrightarrow{\alpha^{-1}} X \xrightarrow{\Phi} X \xrightarrow{\alpha} \Delta^n.$$

Композиция непрерывных отображений тоже непрерывное отображение, и согласно теореме Брауэра, существует такая точка  $M \in \Delta^n$ , что  $\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}(M) = M$ . Применяя к обеим частям этого равенства взаимно-однозначное отображение  $\alpha^{-1}$ , получаем  $\Phi \circ \alpha^{-1}(M) = \alpha^{-1}(M)$ . Очевидным образом найденная точка  $N := \alpha^{-1}(M) \in X$  при отображении  $\Phi$  переходит сама в себя, и поэтому следствие из теоремы Брауэра также доказано.

### 3. Примечания.

1. Условие гомеоморфности симплексу в доказанном следствии существенно, что показывает простой пример: пусть пространство  $X$  является окружностью и отображение  $\Phi : X \rightarrow X$  состоит в повороте на угол  $\pi/10$ . Ни одна точка окружности при этом отображении в себя не переводится.

2. Следует отметить разницу между теоремой Брауэра и известной теоремой о сжимающем отображении, широко применяемой во многих разделах вычислительной математики. В теореме Брауэра отображение

$\Phi$  является непрерывным, пространство  $X$  компактным и гомеоморфным шару, других ограничений нет. В теореме о сжимающем отображении предполагается, что для любых двух точек  $M, N \in X$  полного метрического пространства  $X$  расстояния между ними и расстояния между их образами удовлетворяют неравенству  $d(M, N) > k \cdot d(\Phi(M), \Phi(N))$ , где  $k > 1$ .

При этом в условиях теоремы Брауэра неподвижных точек может оказаться много — например при тождественном отображении симплекса в себя все его точки оказываются неподвижными. А в теореме о сжимающем отображении доказывается, что неподвижная точка единственна и в понятном смысле устойчива.

3. Условие замкнутости (т.е. компактности) симплекса в теореме Брауэра также существенно, см. упражнение 8.5. Отметим также, что при доказательстве теоремы 1 мы вырезали из инвариантной полиэдральной области  $\mathcal{P}_{4k+2}$  открытую цилиндрическую окрестность  $U$  стационарной точки  $M^*$  с тем, чтобы в результате у нас получилась бы не содержащая стационарную точку компактная  $2k$ -мерная поверхность  $F = (P_{1,2k+1} \cap P_{0,1}) \setminus U$ , к которой и применяется теорема Брауэра о неподвижной точке. Если у линеаризации динамической системы (1) в окрестности стационарной точки  $M^*$  вещественные части всех собственных значений отрицательны, то описанная выше редукция доказательства теоремы 1 к теореме Брауэра не проходит.

### Упражнения.

8.1. Построить симплицальные разбиения двумерного симплекса, для которых  $t(0, 1, 2) = 3$ ,  $t(0, 1, 2) = 5$ .

8.2. Построить симплицальные разбиения трёхмерного симплекса, для которых  $t(0, 1, 2, 3) = 3$ ,  $t(0, 1, 2, 3) = 5$ .

8.3. Построить непрерывное отображение  $f : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$  двумерного симплекса в себя, имеющее

- i) ровно две неподвижных точки;
- ii) ровно четыре неподвижных точки.

8.4. Построить непрерывное отображение  $f : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$  двумерного симплекса в себя, для которого неподвижными точками являются только вершины этого симплекса.

8.5. Пусть множество  $\Omega^2 \subset \mathbb{R}^2$  определено соотношениями

$$\Omega^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; \quad x < 1\},$$

т.е. это замкнутый единичный круг, из которого выколота одна точка.

Проверить, что  $\Omega^2$  некомпактно и построить непрерывное отображение  $f : \Omega^2 \rightarrow \Omega^2$ , не имеющее неподвижных точек.

#### 4. Индекс векторного поля.

Если векторное поле  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  рассматривается вне связи с динамической системой  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{V}(\mathbf{X})$ , то точки, в которых  $\mathbf{V}(\mathbf{X}) = 0$ , называют обычно **особыми точками** векторного поля. Если в некоторой окрестности особой точки векторного поля других особых точек нет, то такая особая точка называется **изолированной**.

Корректное определение индекса  $ind(M^*)$  векторного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  в окрестности её изолированной особой точки  $M^*$  основано на некоторых топологических результатах, связанных с понятием степени отображения гладких многообразий, см., например, [10, 16, 19].

Мы дадим здесь краткое описание этого материала, достаточное для того, чтобы «почти во всех случаях» вычислять индекс векторного поля, соответствующего изучаемой динамической системе.

В двумерном случае это определение выглядит следующим образом (для простоты изложения изолированную особую точку  $M^* \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}^1$  гладкого векторного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$  расположим в начале координат,  $M^* = 0$ ):

Рассмотрим окружность  $S^1(\varepsilon)$  достаточно малого радиуса  $\varepsilon$  и будем поворачивать точку  $\mathbf{X}(0) = (\varepsilon, 0) = \varepsilon \cdot (1 + i \cdot 0)$  по этой окружности против часовой стрелки:  $\mathbf{X}(t) = \varepsilon \cdot (\cos 2\pi t + i \cdot \sin 2\pi t)$ . После одного оборота точки  $\mathbf{X}(t)$  по окружности  $S^1(\varepsilon)$ , когда  $t$  изменится от 0 до 1, единичный вектор  $\mathbf{W}(\mathbf{X}) \equiv \frac{\mathbf{V}(\mathbf{X})(t)}{|\mathbf{V}(\mathbf{X})(t)|}$  совершит на единичной окружности  $S^1(1)$  целое число оборотов. Это число оборотов и называется индексом двумерного векторного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  в его особой изолированной точке. Как нетрудно видеть, понятие индекса двумерного векторного поля имеет глубокие корни в стандартном курсе теории функций комплексного переменного.

Аналогичным же образом индекс векторного поля в его особой точке можно определить и для динамических систем  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{V}(\mathbf{X})$  любых размерностей, если заранее объяснить смысл утверждения: « $n$ -мерная сфера  $S^n(\varepsilon)$  наматывается  $k$  раз на  $n$ -мерную сферу  $S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  единичного радиуса», где  $k$  — произвольное целое (возможно, что и отрицательное) число. Это число  $k$  называется степенью отображения  $\mathbf{W} : S^n(\varepsilon) \rightarrow S^n(1)$ .

Несколько ниже мы дадим формальное определение этой величины, а пока рассмотрим так называемый «случай общего положения».

Пусть  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , и  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  —  $(n+1)$ -мерное векторное поле. Обозначим через  $J(\mathbf{X})$  определитель матрицы Якоби отображения  $\mathbf{V} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{X})$ , и рассмотрим случай, когда  $J(M^*) \neq 0$ . Такие особые точки векторных полей называются **невырожденными**.

**Утверждение 1.** *Индекс невырожденной особой точки  $M^*$  векторного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  равен  $+1$ , если  $J(M^*) > 0$ , и равен  $-1$ , если  $J(M^*) < 0$ .*

Доказательство см. в [10, 19].

Такой рецепт вычисления индекса стационарной точки вполне достаточен для большинства приложений, в частности, для изучаемых нами моделей генных сетей, поскольку имеет место следующее

**Утверждение 2.** *Если у векторного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  изолированная особая точка  $M^*$  вырождена, то для любого  $\delta > 0$  найдётся такое векторное поле  $\mathbf{V}_1(\mathbf{X})$ , у которого все стационарные точки невырождены и такое, что  $|\mathbf{V}(\mathbf{X}) - \mathbf{V}_1(\mathbf{X})| < \delta$  при всех  $\mathbf{X}$ .*

Иными словами, и более наглядно: сколь угодно малые изменения векторного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  позволяют «разменять» одну вырожденную особую точку индекса  $k$  на  $k$  невырожденных особых точек.

Доказательства этого утверждения также содержатся в [10, 16, 19]. Отметим, что во всех динамических системах, рассматривавшихся в предыдущих разделах, все стационарные точки оказывались невырожденными.

Приведем один способ нахождения индекса любой (не обязательно невырожденной) изолированной особой точки векторного поля в случае произвольной размерности.

Пусть  $M^n$  и  $N^n$  — гладкие компактные ориентированные многообразия, и  $\varphi : M^n \rightarrow N^n$  гладкое отображение. Назовем точку  $y \in N^n$  **регулярным значением** отображения  $\varphi$  (для простоты — регулярной точкой,) если ее прообраз  $\varphi^{-1}(y)$  либо пуст, либо состоит из конечного набора точек  $x_1, \dots, x_k \in M^n$ , и в локальных системах координат окрестностей этих прообразов якобианы отображения  $\varphi$  отличны от нуля.



Согласно известной теореме Сарда, [19], регулярные значения гладкого отображения  $\varphi$  образуют открытое всюду плотное подмножество многообразия  $N^n$ .

Пусть в  $m$  таких прообразов этот якобиан положителен, а в остальных  $(k - m)$  прообразах — отрицателен.

**Степенью отображения  $\varphi$  в регулярной точке  $y$**  называется (возможно, что и отрицательное) число  $(2k - m)$ , здесь из количества прообразов с положительными якобианами вычитается количество прообразов с отрицательными якобианами. В точности так же при определении степени отображения окружности в окружность (или, более наглядно — намотки одной окружности на другую) мы вычитаем из количества оборотов в положительном направлении количество оборотов этой намотки в отрицательном направлении.

В стандартных курсах дифференциальной топологии (см., например, [10, 16, 19]) показывается, что определенная таким образом степень гладкого отображения не зависит от выбора регулярного значения  $y \in N^n$ .

Итак, в многомерном случае индекс гладкого векторного поля  $\mathbf{V}(x)$  в изолированной особой точке  $M^*$  определяется как степень отображения  $\mathbf{W} : S^n(\varepsilon) \rightarrow S^n(1)$ , которое является гладким, поскольку особая точка изолирована, для достаточно малого  $\varepsilon$  на сфере  $S^n(\varepsilon)$  особых точек нет, и  $|\mathbf{V}(x)|$  в ноль не обращается.

### Упражнения.

8.6. Найти индексы находящейся в начале координат вырожденной особой точки двумерных векторных полей, задаваемых в координатах  $(x, y)$  следующим образом:

i)  $\mathbf{V}(\mathbf{X}) = (x; -y); \quad \mathbf{V}(\mathbf{X}) = (x^2 - y^2; 2xy);$

ii)  $\mathbf{V}(\mathbf{X}) = (x^3 - 3xy^2; 3x^2y - y^3)$ . Какие еще особые точки имеет это векторное поле?

8.7. Пусть вещественное число  $\varepsilon$  не равно нулю. Показать, что у векторного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{X}) = (x^3 - 3xy^2; 3x^2y - y^3 + \varepsilon)$  все особые точки невырождены. Найти все эти особые точки.

Следующие задания «построить векторное поле» означают «выписать координаты векторного поля», удовлетворяющего указанным свойствам.

8.8. Для любого целого  $k$  построить на плоскости векторное поле, у которого особая точка  $(0; 0)$  изолирована и имеет индекс  $k$ .

8.9. Для любого целого  $k$  построить в  $\mathbb{R}^3$  векторное поле, у которого особая точка  $(0; 0; 0)$  изолирована и имеет индекс  $k$ .

## 9 Заключение.

Биохимические интерпретации аналогичных моделей функционирования природных и искусственных генных сетей приводятся в [14, 15, 23]. Доступные для математиков изложения биологических основ этого направления математических исследований приводятся в [11, 17]. Следует подчеркнуть, что в настоящее время при моделировании генных сетей обратные задачи нахождения аргументов неизвестных функций и коэффициентов в уравнениях вида (1), (18) и т.п. становятся все более и более актуальными, в первую очередь с точки зрения биологов, поскольку конструируются модели генных сетей по результатам биологических экспериментов. В численных же экспериментах с указанными моделями выбор нужного набора функций в правых частях таких динамических систем — Гласса-Маки, Рикера, Хилла и др. и соответствующих параметров в уравнениях обычно проводится на основе сугубо эвристических рассуждений, что, конечно же, объясняется необозримой сложностью моделируемых процессов.

Со стороны математиков попытки построения математических основ такого моделирования проводятся систематически ([14, 23]). В частности, в работе [1] была поставлена в самом общем виде задача «определения причин по их следствиям».

В следующей части этого учебного пособия мы планируем дать подробный обзор таких обратных задач и подходов к их решениям, а пока приведем несколько важных примеров, опуская стандартные теоретические подробности, излагаемые в обязательных университетских курсах.

1. Как правило, косвенная информация об указанных неизвестных функциях и коэффициентах задается в той или иной интегральной форме, например в рамках таких разделов математики, как интегральная геометрия и (компьютерная) томография, типичные задачи которых формулируются так:

*Найти неизвестную функцию  $F$  (или же вектор-функцию, матричную функцию, и т.п.), если известны ее интегралы (возможно, что с*

теми или иными весовыми функциями) по заданному набору подмножеств области определения этой функции.

Всюду в этих рассуждениях предполагается достаточная регулярность искомой функции  $F$  и существование всех интегралов, фигурирующих в постановках задач. С этой целью будем считать, что искомая функция финитна, то-есть обращается в нуль вне некоторого компактного множества. Во многих публикациях рассматриваются случаи, в которых искомая функция  $F$  является характеристической для некоторой ограниченной области.

Одним из самых известных примеров обратной задачи такого рода является восстановление функции  $F(X)$ ,  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  по ее преобразованию Фурье

$$\widehat{F(P)} = c_n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} F(X) \exp(-i\langle P, X \rangle) dX.$$

Здесь  $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle X, P \rangle$  обозначает скалярное произведение векторов  $X$  и  $P$ , а постоянный множитель  $c_n$  в обычных определениях преобразования Фурье имеет вид  $c_n = (2\pi)^{-n/2}$ .

Приведем еще один пример задачи такого класса, ограничившись для простоты изложения двумерным случаем: *Восстановить финитную функцию  $F(x, y)$  двух переменных по ее моментам*

$$m_{\alpha, \beta} = \int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) \cdot x^\alpha \cdot y^\beta dx dy.$$

Мы рассматриваем только целые неотрицательные  $\alpha$  и  $\beta$ ; отметим, что при небольших значениях этих показателей с помощью моментов функций распределения случайных величин (в данных рассуждениях двумерных) выражаются их математические ожидания, дисперсии, и другие характеристики, широко используемые при статистической обработке данных измерения, что подробно описано во всех учебниках по математической статистике, см. также [9, 11].

Фактически оба приведенных примера тесно связаны друг с другом, поскольку с точностью до постоянного множителя  $\pm c_n$  момент  $m_{\alpha, \beta}$  совпадает с

$$\left. \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial^\alpha p_1 \partial^\beta p_2} \widehat{F(P)} \right|_{p_1=0; p_2=0},$$

что в свою очередь совпадает с соответствующим коэффициентом ряда Тейлора функции  $\widehat{F(P)}$  в окрестности начала координат. Таким обра-

зом, задача восстановления функции по ее моментам может быть сведена к задаче ее восстановления по ее ряду Тейлора в окрестности нуля.

В классических разделах функционального анализа подобные интегральные характеристики функций  $F$  интерпретируются как скалярные произведения в соответствующих гильбертовых пространствах, и описанная выше обратная задача приобретает таким образом естественную геометрическую интерпретацию:

*Найти в гильбертовом пространстве  $L_2$  вектор по его скалярным произведениям с векторами из некоторой заданной системы векторов.*

В самой общей формулировке для решения такой обратной задачи требуется, чтобы указанная система векторов содержала базис рассматриваемого гильбертова пространства  $L_2$ , то-есть состояла как минимум из счетного числа векторов.

В связи с этим возникает широкий спектр задач восстановления неизвестных функций по конечным наборам таких скалярных произведений («измерительных данных»). В их основе лежит классическая теория моментов, см. [2].

В работе [21] изучался один широкий класс задач реконструкции области  $G \subset \mathbb{R}^n$ , у которой граница удовлетворяет некоторым, заранее неизвестным, дифференциальным соотношениям, если известен некоторый конечный набор моментов характеристической функции этой области. Такие рассуждения тесно связаны с теорией условно-корректных задач, см., например, [12].

Основным объектом рассмотрения в этом разделе настоящего учебного пособия является компактная плоская область, ограниченная частью эллиптической кривой

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (23)$$

Отметим, что эллиптические кривые естественным образом появляются во многих разделах анализа, криптографии и алгебраической геометрии, см., например, [21].

**2.** Рассмотрим эллиптическую кривую (23). Будем заранее предполагать, что у уравнения

$$f(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (24)$$

корни  $x_1 < x_2$ , и  $x_3$  вещественны, и что на интервале  $(x_1, x_2)$  функция  $f(x)$  положительна. Следовательно, уравнение  $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$  задает над и под отрезком  $[x_1, x_2]$  область  $G$ , ограниченную кривой (23).

Рассмотрим конечный набор моментов

$$m_{\alpha,\beta} = \int_G x^\alpha \cdot y^\beta dx dy.$$

Поскольку область  $G$  симметрична относительно оси  $Ox$ ,  $m_{\alpha,\beta} = 0$  для нечетных  $\beta$ , и при этом

$$m_{\alpha,2\beta} = \frac{2}{2\beta + 1} \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)^{\beta+1/2} dx.$$

Для упрощения формул мы используем обозначение

$$M_{\alpha,2\beta} = \frac{2\beta + 1}{2} \cdot m_{\alpha,2\beta}, \quad (25)$$

и будем называть эти величины «Моментами». Таким образом, из уравнений (24), (25) следует, что

$$M_{\alpha,2\beta+2} = a \cdot M_{\alpha+3,2\beta} + b \cdot M_{\alpha+2,2\beta} + c \cdot M_{\alpha+1,2\beta} + d \cdot M_{\alpha,2\beta}.$$

Наша задача состоит в определении кривой (23) по конечному (минимально возможному) набору Моментов (26).

Рассмотрим Моменты  $M_{\alpha,\beta}$  при небольших значениях индексов, например

$$M_{0,2} = a \cdot M_{3,0} + b \cdot M_{2,0} + c \cdot M_{1,0} + d \cdot M_{0,0}; \quad (26)$$

$$M_{1,2} = a \cdot M_{4,0} + b \cdot M_{3,0} + c \cdot M_{2,0} + d \cdot M_{1,0}. \quad (27)$$

Таким образом можно получить систему соотношений с неизвестными коэффициентами  $a, b, c, d$ , а также и способ проверки совместности «измерительных данных»  $\{M_{\alpha,\beta}\}$ .

**3.** Укажем еще два способа получения подобных соотношений.

а). Рассмотрим Момент

$$M_{\alpha,2} = \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)^{3/2} dx,$$

и совершим интегрирование по частям:  $du = x^\alpha dx$ ,  
 $v = (ax^3 + bx^2 + cx + d)^{3/2}$ .

То есть, пусть  $u = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$ ,  $dv = 3/2 \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)^{1/2} \cdot (3ax^2 + 2bx + c) dx$ ,  
 и тогда

$$M_{\alpha,2} = \int_{x_1}^{x_2} v du = - \int_{x_1}^{x_2} u dv + u \cdot v|_{x_1}^{x_2}.$$

Поскольку  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями уравнения (24)  $v(x_1) = v(x_2) = 0$ , внеинтегральные члены обращаются в нуль, и

$$M_{\alpha,2} = -\frac{3}{2(\alpha+1)} \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha+1} \cdot (3ax^2 + 2bx + c) \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)^{1/2} dx,$$

или

$$M_{\alpha,2} = -\frac{3}{2(\alpha+1)} \cdot (3a \cdot M_{\alpha+3,0} + 2b \cdot M_{\alpha+2,0} + c \cdot M_{\alpha+1,0}).$$

При  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 0$  из (26) и (27) получаем

$$-\frac{4}{3} \cdot M_{1,2} = 3a \cdot M_{4,0} + 2b \cdot M_{3,0} + c \cdot M_{2,0}, \quad (28)$$

$$-\frac{2}{3} \cdot M_{0,2} = 3a \cdot M_{3,0} + 2b \cdot M_{2,0} + c \cdot M_{1,0}. \quad (29)$$

b). Поскольку  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , несложная замена переменных очевидным образом показывает, что

$$\int_{x_1}^{x_2} (3ax^2 + 2bx + c) \cdot (ax^3 + 2bx^2 + cx + d)^{1/2} dx = 0,$$

и следовательно,

$$0 = 3a \cdot M_{2,0} + 2b \cdot M_{1,0} + c \cdot M_{0,0}. \quad (30)$$

Подобные соотношения выписываются и в случаях  $\beta \neq 0$ .

4. Рассмотрим систему трех линейных уравнений (28), (29), (30) относительно неизвестных коэффициентов  $a, b, c$ .

**Лемма 8.** *Определитель системы (28) – (30) отличен от нуля.*

Для доказательства рассмотрим гильбертово пространство  $L_{2,f}[x_1, x_2]$ , состоящее из соответствующих функций, определенных на отрезке  $[x_1, x_2]$ , и со скалярным произведением

$$\langle F(x), H(x) \rangle := \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot H(x) \cdot \sqrt{f(x)} dx. \quad (31)$$

При таких обозначениях  $M_{4,0} = \langle x^2, x^2 \rangle$ ,  $M_{3,0} = \langle x^2, x^1 \rangle$ ,  
 $M_{1,0} = \langle x^1, x^0 \rangle$ ,  $M_{2,0} = \langle x^2, x^0 \rangle = \langle x^1, x^1 \rangle$  и  $M_{0,0} = \langle x^0, x^0 \rangle$ .

Нулевая и первая степени переменной  $x$  здесь и ниже указаны для единообразия. Определитель системы уравнений (28), (29), (30) равен

$$6 \cdot \det \begin{pmatrix} M_{4,0} & M_{3,0} & M_{2,0} \\ M_{3,0} & M_{2,0} & M_{1,0} \\ M_{2,0} & M_{1,0} & M_{0,0} \end{pmatrix} = 6 \cdot \det \begin{pmatrix} \langle x^2, x^2 \rangle & \langle x^2, x^1 \rangle & \langle x^2, x^0 \rangle \\ \langle x^2, x^1 \rangle & \langle x^1, x^1 \rangle & \langle x^1, x^0 \rangle \\ \langle x^2, x^0 \rangle & \langle x^1, x^0 \rangle & \langle x^0, x^0 \rangle \end{pmatrix},$$

что с точностью до коэффициента пропорциональности 6 совпадает с определителем матрицы Грама системы из трех функций  $x^2$ ,  $x^1$  и  $x^0$ , линейно независимых в пространстве  $L_{2,f}[x_1, x_2]$ . Фактически здесь было рассмотрено трехмерное пространство с базисом  $x^0$ ,  $x^1$ ,  $x^2$  и скалярным произведением (31). Из курса аналитической геометрии хорошо известно, что этот определитель строго положителен, и поэтому система линейных уравнений (28), (29), (30) имеет единственное решение  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Коэффициент  $d$  однозначно определяется из уравнения (26), поскольку, как легко видеть,  $M_{0,0} > 0$ . Таким образом, на основании леммы 8 нами установлена

**Теорема 7.** *Эллиптическая кривая (23) однозначно восстанавливается по набору из 7 моментов  $m_{0,0}$ ,  $m_{1,0}$ ,  $m_{2,0}$ ,  $m_{3,0}$ ,  $m_{4,0}$ ,  $m_{0,2}$  и  $m_{1,2}$ .*

Отметим, что такая «переопределенность» позволяет получить соответствующие несложные нелинейные соотношения между этими перечисленными моментами. С другой стороны, как показано в [21], наличие в уравнении (23) слагаемого  $y^2$  не позволяет восстановить эту кривую (23) без информации о моментах  $m_{\alpha,2}$ , двойка в показателе у  $y^2$  соответствует присутствию моментов с индексом  $\beta = 2$  в данных, по которым можно восстановить искомую кривую.

### Упражнения.

9.1. Исследовать подобным образом задачи восстановления более сложных кривых:

- i).  $y^2 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ;
- ii).  $y^4 + b_2y^2 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .

9.2. Пусть  $P(x)$  — определенная на отрезке  $[a, b]$  непрерывная неотрицательная функция, тождественно неравная нулю. Доказать неравенство

$$\left(\int_a^b x^4 \cdot P(x) dx\right) \cdot \left(\int_a^b x^0 \cdot P(x) dx\right) > \left(\int_a^b x^3 \cdot P(x) dx\right) \cdot \left(\int_a^b x^1 \cdot P(x) dx\right).$$

Автор искренне благодарен и признателен А. А. Акиньшину, Ю. А. Гайдову, И. В. Голубятникову, И. Н. Йомдину и В. А. Лихошвай за полезные обсуждения и помощь, оказанную в рамках Междисциплинарного гранта 119 СО РАН, гранта РФФИ 09-01-00070 и программы АВЦП «Развитие научного потенциала Высшей школы», проект N 2.1.1/3707.

## Список литературы

- [1] Аниконов Ю.Е. Обратная задача математической биологии. *Сибирский математический журнал*, 1992, т. 33, N 3, с. 21 – 25.
- [2] Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов. М., ФМ., 1961.
- [3] Волокитин Е.П., Тресков С.А. Бифуркации Андронова-Хопфа в модели гипотетических генных сетей. *Сибирский журнал индустриальной математики*, 2005. Т. 8, N 1, С. 30–40.
- [4] Гайдов Ю.А. Об устойчивости периодических траекторий в некоторых моделях генных сетей // *Сибирский журнал индустриальной математики*, 2008. Т. 11, N 1, С. 57–62.
- [5] Гайдов Ю.А., Голубятников В.П. О некоторых нелинейных динамических системах, моделирующих несимметричные генные сети. *Вестник НГУ, Серия математическая*, 2007, Т. 7, N 2, С. 8–17.
- [6] Гайдов Ю.А., Голубятников В.П., Лихошвай В.А. О некоторых нелинейных динамических системах, моделирующих несимметричные генные сети. 2. *Вестник НГУ, Серия математическая*, 2010, Т. 10, N 1, С. 18–28.
- [7] Годунов С.К., Антонов А.Г., Кириллюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск, Наука 1992, 354 с.



- [8] Голубятников В.П., Голубятников И.В., Лихошвай В.А. О существовании и устойчивости циклов в пятимерных моделях генных сетей. *Сибирский журнал вычислительной математики*, 2010, Т. 13, N 4, С. 403–411.
- [9] Голубятников В.П., Лихошвай В.А. Одномерная модель развития популяции земноводных. *Сиб. журн. индустриальной математики*, 2002, Т. 5, N 1, с. 53 – 60.
- [10] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия Т.1.,2., М. Наука, 1984.
- [11] Животовский Л.А. Популяционная биометрия. М., Наука, 1991.
- [12] Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск, ИМ СО РАН, 2010.
- [13] Леонов Г.А. Об устойчивости фазовых систем. *Сибирский математический журнал*. 1974. Т. 15, N 1. С. 49–60.
- [14] Лихошвай В.А., Голубятников В.П., Демиденко Г.В., Евдокимов А.А., Фадеев С.И. Теория генных сетей. Системная компьютерная биология. Интеграционные проекты, вып.14. Под ред. Н.А.Колчанова и С.С.Гончарова. Новосибирск, СО РАН 2008, С. 395–480.
- [15] Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Фадеев С.И. Задачи теории функционирования генных сетей. *Молекулярная биология*, 2001, Т. 35, N 6, С. 926–932.
- [16] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М. МГУ, 1980.
- [17] Ратнер В.А. Генетика, молекулярная кибернетика. Новосибирск, Наука, 2002.
- [18] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мир, М. 1970.
- [19] Хирш М. Дифференциальная топология. М. Мир, 1979.
- [20] Чумаков Г.А., Чумакова Н.А. Нелинейная динамика, бифуркации и хаос. НГУ, Новосибирск, 2006.

- [21] Batenkov D. Moment inversion problem for piecewise  $D$ -finite functions. *Inverse problems*, 2009, V. 25 N 10, p. 105001-105024.
- [22] Golubyatnikov V.P., Likhoshvai V.A., Volokitin E.P., Gaidov Yu.A., Osipov A.F., Periodic Trajectories and Andronov—Hopf Bifurcations in Models of Gene Networks // In: *Bioinformatics of Genome Regulation and Structure II*, Springer Science+Business Inc., 2006, P. 405–414.
- [23] Murray J.D. *Mathematical biology. 1. An introduction*. 3-d Edition. NY, Springer-Verlag, 2002.
- [24] Smith R.A. Orbital Stability for Ordinary Differential Equations. *Journal of Differential Equations*. 1987. V. 69. P. 265–287.

### Оглавление.

1. Введение.	3.
2. Построение инвариантных областей.	5.
3. Существование циклов.	10.
4. Существование устойчивого цикла.	14.
5. Вопросы неединственности циклов.	18.
6. Некоторые дальнейшие обобщения.	21.
7. Более сложный пример.	24.
8. Теорема Брауэра о неподвижной точке, индекс стационарной точки.	31.
9. Заключение.	42.
10. Литература.	48.