МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГУБАРЕВ ЮРИЙ ГЕННАДЬЕВИЧ

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ И СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

(курс лекций)

Новосибирск — 2009 г.

Курс лекций «Прямой метод Ляпунова в задачах устойчивости состояний равновесия и стационарных течений жидкостей и газов» подготовлен в рамках реализации Программы развития Новосибирского государственного университета — победителя конкурса отбора программ развития университетов, в отношении которых устанавливается категория «Национальный исследовательский университет».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 8

Понятия устойчивости/неустойчивости 8

Актуальность курса лекций 10

Краткий обзор известных результатов других авторов 13

Разрешимость рассматриваемых в курсе лекций смешанных задач для систем дифференциальных и интегродифференциальных уравнений с частными производными 23

Структура курса лекций 27

Распределение материала по главам 27

Научная новизна 31

Теоретическая и практическая ценность 33

Глава I. Прямой метод Ляпунова в линейной задаче неустойчивости состояний МГД равновесия (покоя) невязкой сжимаемой бесконечной по проводимости среды 36

Постановка точной задачи 37

Постановка линеаризованной задачи 39

Лагранжевы смещения 41

Переформулировка линеаризованной смешанной задачи (8)–(10) посредством поля лагранжевых смещений 43

Теорема Лагранжа и её обращение 44

Функционал Ляпунова 45

Оценки сверху и снизу 46

Сопоставление полученных результатов с известными результатами других авторов 51

Сводка результатов главы I 58

Глава II. Прямой метод Ляпунова в приложении к линейным задачам устойчивости установившихся вращательно–симметричных и винтовых течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью в магнитном поле 61

§1. Линейная задача устойчивости установившихся вращательно–симметричных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в магнитном поле 62

Точная задача 62

Линеаризованная задача 66

Лагранжевы смещения и функционал Ляпунова 67

Двусторонние оценки 69

Пример 72

Ряд завершающих замечаний 74

§2. Линейная задача устойчивости установившихся винтовых течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью в магнитном поле 75

Постановка точной задачи 76

Постановка линеаризованной задачи 79

Частный класс точных стационарных решений (2.9) 81

Функционал Ляпунова 82

Двусторонние оценки 84

Пример 88

Априорная нижняя экспоненциальная оценка 90

Сводка результатов главы II 104
Глава III. Прямой метод Ляпунова в линейных задачах устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной границей 107
§1. Устойчивость установившихся осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью и свободной поверхностью в азимутальном магнитном поле, прямо пропорционально зависящем от радиальной координаты 108
Формулировка точной задачи 109
Устойчивость установившихся осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений (1.20) однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной границей 117
Устойчивость одного подкласса установившихся осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений (1.20) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной поверхностью 120
Неустойчивость установившихся осесимметричных сдвиговых струйных течений (1.20) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной поверхностью в азимутальном магнитном поле 132
§2. Неустойчивость стационарных осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью и свободной поверхностью в

азимутальном магнитном поле, представляющем из себя наперёд заданную функцию радиуса 142
Постановка точной задачи 143
Постановка линеаризованной задачи 144
Априорная экспоненциальная нижняя оценка нарастания малых возмущений 146
Пример 149
§3. Устойчивость установившихся осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости со свободной границей и бесконечной проводимостью в полоидальном магнитном поле 151
Формулировка точной задачи 153
Постановка линеаризованной задачи 162
Формулировка специальной точной задачи 164
Формулировка специальной линеаризованной задачи 167
Функционал Ляпунова 168
Априорные оценки 173
Примеры 175
Ещё одна априорная оценка 179
Ещё один пример 183
Сводка результатов главы III 188
Глава IV. Прямой метод Ляпунова в приложении к линейным задачам устойчивости установившихся течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие внешних массовых сил 193

§1. К устойчивости стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости . . . 194
Формулировка точной задачи . . . 195
Постановка линеаризованной задачи . . . 197
Априорная экспоненциальная оценка снизу роста малых плоских возмущений . . . 200
Пример . . . 207
§2. К устойчивости установившихся трёхмерных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости . . . 219
Постановка точной задачи . . . 220
Постановка линеаризованной задачи . . . 221
Функционал Ляпунова . . . 225
Пример . . . 238
Сводка результатов главы IV . . . 254
Заключение . . . 257
Выводы . . . 260
Литература . . . 263

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий курс лекций посвящён разработке алгоритмов построения функционалов Ляпунова, обладающих свойством нарастать со временем в силу тех или иных начально–краевых задач, которые описывают эволюцию малых возмущений изучаемых состояний равновесия (покоя) либо стационарных течений жидкостей и газов, а также пригодных для использования в исследованиях самого широкого круга линейных задач теории гидродинамической устойчивости.

Цель данного курса лекций заключается в том, чтобы научить слушателей с помощью разработанных алгоритмов конструирования растущих во времени функционалов Ляпунова на регулярной основе или показывать абсолютную неустойчивость, или получать достаточные условия неустойчивости, или обращать известные достаточные условия устойчивости рассматриваемых состояний равновесия (покоя) либо установившихся течений жидкостей и газов по отношению к малым возмущениям.

ПОНЯТИЯ УСТОЙЧИВОСТИ/НЕУСТОЙЧИВОСТИ. В научной литературе встречается целый ряд определений свойства устойчивости разного рода процессов, которые могут происходить в сплошных средах [1–13]. Наиболее распространённым из этих определений служит определение устойчивости по Ляпунову, тоже понимаемое теми или другими авторами различным образом.

В качестве примера трактовки понятий устойчивости/неустойчивости ниже приводится определение, которое предложено автором работы [11]. Данное определение выделяется тем, что в нём в центре внимания оказывается непосредственно свойство устойчивости, тогда как вопросы корректности изучаемой математической модели остаются в стороне. Иными словами, автор монографии [11] предполагает, что решения исследуемых задач существуют и в каждом отдельном случае удовлетворяют всем предъявляемым к ним требованиям. Естественно, что при таком подходе полученные результаты об устойчивости/неустойчивости будут носить исключительно априорный характер.

Конкретно, пусть поведение сплошной среды описывается системой функций

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\, t) \equiv (\Psi_1(\boldsymbol{x},\, t),\ \Psi_2(\boldsymbol{x},\, t),\ \ldots,\ \Psi_n(\boldsymbol{x},\, t))$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ — пространственные координаты, t — время. Следуя работе [11], здесь и далее всякая вектор–функция $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\, t)$ называется процессом. Рассматриваются невозмущённый (основной) $\boldsymbol{\Psi_0}$ и возмущённый (любой, отличный от основного) $\boldsymbol{\Psi}$ процессы. Отклонения второго от первого характеризуются вектор–функцией

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\, t) \equiv \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\, t) - \boldsymbol{\Psi_0}(\boldsymbol{x},\, t)$$

в терминах которой невозмущённому процессу $\boldsymbol{\Psi_0}$ отвечает $\boldsymbol{\varphi} \equiv 0$.

Согласно монографии [11], определение свойства устойчивости состоит из двух частей (блоков).

Блок № 1. Вводится мера отклонения возмущённого процесса от невозмущённого. В качестве этой меры можно выбрать всякий вещественный функционал $M[\boldsymbol{\varphi}]$, определённый на изучаемой системе функций $\boldsymbol{\varphi}$ и подчиняющийся ограничениям: а) $M[\boldsymbol{\varphi}] \geq 0$; б) $M[0] = 0$; в) для любого исследуемого отклонения $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\, t)$ вещественная функция $m(\boldsymbol{x},\, t) \equiv M[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\, t)]$ непрерывна по независимой переменной t. Важно отметить, что мера отклонения $M[\boldsymbol{\varphi}]$ не обязана удовлетворять аксиомам расстояния либо нормы в соответствующих фазовых пространствах.

Блок № 2 (собственно устойчивость по Ляпунову). Невозмущённый процесс $\boldsymbol{\varphi} \equiv 0$ называется устойчивым по мере $m(\boldsymbol{x}, t)$ тогда, когда для всякого наперёд заданного положительного числа ϵ может быть указано такое положительное число δ, что если для всех допустимых начальных распределений $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\, 0)$ выполнено соотношение $m(\boldsymbol{x},\, 0) < \delta$, то для любых возможных отклонений $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ имеет место неравенство $m(\boldsymbol{x},\, t) < \epsilon$. Напротив, невозмущённый процесс $\boldsymbol{\varphi} \equiv 0$ называется неустойчивым по мере отклонения $m(\boldsymbol{x},\, t)$, если существует хотя бы одно число $\epsilon > 0$, для которого нельзя подобрать другое число $\delta > 0$ такое, чтобы из $m < \delta$ при $t = 0$ вытекало $m < \epsilon$ при $t > 0$.

В представляемом курсе лекций понятия устойчивости/неустойчивости эксплуатируются именно в трактовке автора работы [11].

Стоит подчеркнуть, что определение свойства устойчивости в смысле монографии [11] допускает обобщение и на случай конечных промежутков времени, поэтому тогда, когда, например, $t \in [0,\, T]$ с произвольной положительной постоянной величиной T, говорят о понятиях практической устойчивости/неустойчивости [9, 14–16].

АКТУАЛЬНОСТЬ КУРСА ЛЕКЦИЙ. В ходе теоретического рассмотрения природы тех или иных физических явлений огромную роль играет проблема адекватности математических моделей, построенных для описания этих явлений. К примеру, если доказано, что некое физическое явление действительно реализуется на практике, то та либо другая математическая модель будет ему адекватна в том и только в том случае, когда она обладает решениями, которые отвечают данному явлению, и эти решения устойчивы [17–21].

Учитывая вышесказанное, становится понятной настоятельная потребность в создании простых, эффективных и универсальных аналитических методик, позволяющих для той или иной математической модели, с одной стороны, быстро, экономично и надёжно определять классы устойчивых решений, а с другой — указывать начальные данные, из которых вероятно развитие нарастающих возмущений неустойчивых решений. Подобные методики, бесспорно, совершенно необходимы для того, чтобы с минимумом затрат времени и ресурсов выбирать среди множества математических моделей самую оптимальную с точки зрения последующего скрупулёзного изучения свойств того либо иного интересующего физического явления.

К сожалению, на сегодняшний день проблема адекватного математического моделирования физических явлений не имеет удовлетворительного решения. В настоящее время для отбраковки математических моделей, как правило, применяется подход, базирующийся на сравнительном анализе экспериментальных, аналитических и численных результатов. Однако, надо признать, этот подход очень трудоёмок и, что принципиально, до сих пор так и не получил должного научного обоснования. Что же касается простых, эффективных и универсальных аналитических методик выбраковки математических моделей, то они попросту отсутствуют.

Данный курс лекций как раз и фокусируется на создании простых, эффективных и универсальных аналитических методик отбора математических моделей. Правда, пока они разрабатываются в приложении к моделям гидродинамического типа, но идеи, которые содержатся в сердцевине этих методик, будут, несомненно, способствовать их распространению и на математические модели других типов.

Конкретно, в настоящем курсе лекций речь пойдёт о новых аналитических методиках исследования наиболее широкого круга линейных задач теории гидродинамической устойчивости. Суть данных методик заключается в алгоритмическом конструировании функционалов Ляпунова [10, 16, 22], характеризующихся ростом со временем в силу соответствующих смешанных задач для малых возмущений рассматриваемых состояний равновесия (покоя) или стационарных течений жидкостей и газов.

Целесообразно заметить, что построение на регулярной основе функционалов Ляпунова, которым свойственно нарастание во времени согласно тем либо иным начально–краевым задачам для малых возмущений изучаемых состояний равновесия (покоя) или установившихся течений жидкостей и газов, само по себе служит отдельной фундаментальной научной проблемой, всё ещё ждущей своего разрешения.

Дело в том, что на сегодняшний день существует ряд приёмов конструирования растущих со временем функционалов Ляпунова, которые успешно используются в процессе исследования линейных задач устойчивости состояний равновесия (покоя) либо весьма узких подклассов стационарных течений жидкостей и газов. В то же время, несмотря на поистине титанические усилия учёных, занимающихся дальнейшим совершенствованием теории гидродинамической устойчивости, расширить область применимости этих приёмов на линейные задачи устойчивости произвольных установившихся течений жидкостей и газов никак не удаётся. Естественно, сложившаяся ситуация является абсолютно неприемлемой и требует немедленного устранения.

В данном курсе лекций, опять же, как раз и разбирается алгоритм построения нарастающих во времени функционалов Ляпунова, которые годятся для рассмотрения линейных задач устойчивости стационарных течений жидкостей и газов общего вида.

Итак, тема настоящего курса лекций, как это вытекает из вышеизложенного, действительно актуальна и неразрывно связана с решением, по крайней мере, двух научных проблем фундаментального характера — адекватности математического моделирования физических процессов и регулярного конструирования растущих со временем функционалов Ляпунова для линейных задач устойчивости любых допустимых установившихся течений жидкостей и газов.

КРАТКИЙ ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДРУГИХ АВТОРОВ. Ниже анализируется имеющаяся научная литература, посвящённая второму (или прямому) методу Ляпунова и его приложениям в теории гидродинамической устойчивости, с целью освещения истории возникновения и эволюции данного метода, а также нынешнего уровня его развития. Конечно же, представляемый анализ литературных источников никоим образом не претендует на всеохватность и полноту, однако позволяет понять позицию автора настоящего курса лекций по изучаемой в нём проблематике и мотивы, которые побудили его начать исследования, приведшие в итоге к выносимым на суд слушателей курса лекций результатам.

Именно, прямой метод Ляпунова служит одним из самых общих подходов современной теории устойчивости. При его использовании отпадает необходимость рассмотрения свойств частных решений, утверждение об устойчивости/неустойчивости делается сразу для широких их классов. Вариантом прямого метода Ляпунова является энергетический метод, сущность которого выражается применением в той либо иной форме функционалов Ляпунова энергетической природы.

Впервые энергетические соотношения в теории гидродинамической устойчивости были использованы в классических работах Лиувилля (1855), Томсона и Тэта (1883), Ляпунова (1884), Пуанкаре (1885) и ряда других авторов. В этих работах изучалась проблема устойчивости жидких масс, находящихся под действием собственного гравитационного поля. Подробные обзоры достижений данного периода содержатся в публикациях [6, 7, 23, 24].

Важно, что практически все относящиеся к этому раннему периоду исследования ограничивались лишь вычислениями второй вариации потенциальной энергии, на основании положительной определённости которой учёные приходили к словесному выводу об устойчивости, не подкреплённому хоть сколько–нибудь доказательными рассуждениями.

Анализ сути определения устойчивости состояний равновесия (покоя) жидкости впервые был выполнен А. М. Ляпуновым. В своей диссертации «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» (1884) [7] он ввёл концепцию устойчивости, которая впоследствии стала известна как «устойчивость по Ляпунову» [8–10, 25, 26].

Кроме того, придерживаясь традиций аналитической механики, А. М. Ляпунов дал определение устойчивости по отклонениям координат точек свободной поверхности от положений равновесия. На этом пути он встретил ряд трудностей, исключающих возможность получения условий устойчивости в рамках такого определения. Существо данных трудностей состоит в том, что применение энергетических функционалов Ляпунова означает закладывание в постановку задачи только информации о поведении гидродинамических полей и ничего более. Поэтому адекватное определение устойчивости может быть сформулировано лишь на языке среднеквадратичной меры отклонения $m(\boldsymbol{x}, t)$. Для построения же оценок в терминах отклонений координат нужно привлекать дополнительные сведения о виде решений, первая попытка естественного включения которых и была предпринята А. М. Ляпуновым [7]. Тем не менее, дискуссии о смысле дополнительного условия, введённого им в определение устойчивости, не утихают и в настоящее время.

Позднее концепция устойчивости по Ляпунову нашла своё продолжение в работах Н. Г. Четаева [16] по аналитической механике. Затем классические подходы А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева были

В. В. Румянцевым [10, 27–30] и В. А. Самсоновым [31–33] обобщены и распространены на задачи устойчивости состояний равновесия (покоя) жидкости. Последнее обстоятельство сыграло огромную роль в связи с зарождением и последующим совершенствованием космической техники, поскольку в данный период как раз и приобрели довольно большое значение задачи описания и устойчивости состояний равновесия (покоя) несжимаемой жидкости, которая обладает поверхностным натяжением, а также твёрдых тел с полостями, содержащими подобную жидкость [10, 27–51].

Иное направление энергетического метода — обнаружение условий устойчивости стационарных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости — эволюционировало независимо от нахождения условий устойчивости состояний равновесия (покоя). Потенциальной энергии (при отсутствии свободных границ) для течений указанного типа попросту нет, поэтому уже формулировка вариационного принципа оказывается в данном случае сложной задачей. По этой–то причине интенсивная разработка данного направления и началась сравнительно недавно.

Однако, два условия устойчивости, которые относятся к числу энергетических по своему характеру условий, были получены Релеем ещё в 1880 и 1916 годах. Они известны под названиями «сдвигового» (о точке перегиба в профиле скорости) [5, 52] и «центробежного» (о квадрате циркуляции скорости) [5, 53] условий устойчивости. Хотя вывод «центробежного» условия устойчивости изначально и опирался на рассмотрение свойств функционала энергии, но специфика этого рассмотрения (вращательная симметрия движений, сохранение циркуляции скорости при возмущениях, рассуждения в рамках крайне упрощённой модели) наложила, тем не менее, запрет на саму возможность распространения результата Релея на течения более общего вида. Что же касается первого («сдвигового») условия устойчивости, то оно было обнаружено в процессе изучения линейной краевой задачи на собственные значения и собственные функции, а потому Релей и не подозревал об энергетической природе данного результата.

Только в 1950 году Р. Фьортофт вычислил вторую вариацию энергии для некоторых плоских течений жидкости при условии, что величина завихренности остаётся неизменной в каждой жидкой частице [54]. В итоге им было установлено, что «сдвиговое» условие устойчивости Релея имеет энергетический характер и справедливо для гораздо более широких классов движений, нежели считалось ранее. К сожалению, статья Р. Фьортофта [54] была опубликована в малодоступном научном журнале геофизического профиля и долгое время находилась вне поля зрения специалистов в области механики жидкости и газа. Кроме того, понимание её сути оказалось затруднено из–за нечёткости формулировок базовых предположений и конечных результатов.

Новый этап развития энергетического метода для течений невязкой жидкости был инициирован работами В. И. Арнольда [55–57]. В них он сконструировал вариационный принцип общего вида, гласящий, что всякое трёхмерное стационарное течение однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости представляет собой стационарную же точку интеграла энергии. При этом вариации гидродинамических полей были В. И. Арнольдом подчинены условиям «равнозавихренности» [56], которые служат интегральной формой условий «вмороженности» вихревых линий в поле виртуальных перемещений жидких частиц. Условие «равнозавихренности» выражается как весьма сложное равенство циркуляций скорости по контурам, причём между данными контурами устанавливается соответствие. Однако, для класса плоских движений это условие удалось включить в варьируемый функционал [55]. Тем самым была выписана связка интегралов движения (функционал энергии и интеграл от произвольной функции завихренности), чья стационарная точка является абсолютной. Совершенствование данного подхода позволило В. И. Арнольду получить первые априорные оценки нелинейной устойчивости плоских течений общего вида. Дальнейшие шаги по развитию подхода В. И. Арнольда сделали Л. А. Дикий [58], предложивший новую форму вариационного принципа для энергии трёхмерных течений сжимаемой жидкости, и В. И. Седенко с В. И. Юдовичем [59], которые вывели достаточные условия линейной устойчивости плоских течений невязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью.

Лавинообразное нарастание публикаций по анализируемой тематике наблюдается с 80–х годов прошлого века [60–113]. Все эти работы расширяют сферу использования идей В. И. Арнольда и Р. Фьортофта, а интерес исследователей к данным идеям не ослабевает и по сей день.

Несколько особое положение среди других публикаций по теории гидродинамической устойчивости занимают статьи [114, 115]. В этих статьях рассматривалась устойчивость в плоской задаче потенциального обтекания пузыря. Свободная граница описывается счётным набором обобщённых координат, часть из них представляет собой циклические обобщённые координаты. Игнорирование последних по схеме Рауса [116] приводит к утверждениям об устойчивости течения. Работы [114, 115] наиболее ярко демонстрируют возможности непосредственного перенесения результатов аналитической механики в механику жидкости и газа.

Стоит подчеркнуть, что энергетический метод даёт лишь достаточные условия устойчивости. В то же время, похоже, подавляющее большинство установившихся течений жидкостей и газов неустойчиво, так как на это указывает узость области применимости условий устойчивости, обнаруженных для данных течений при помощи энергетического метода. Поэтому необходимо уметь находить общие условия неустойчивости. К сожалению, ситуация с ними в теории гидродинамической устойчивости крайне тяжёлая.

Дело в том, что по состоянию на сегодняшний день простые, эффективные и универсальные алгоритмы построения растущих во времени функционалов Ляпунова практически отсутствуют. Относительно разработанными могут восприниматься только те приёмы конструирования нарастающих со временем функционалов Ляпунова, которые хорошо себя зарекомендовали в процессе изучения линейных задач устойчивости состояний равновесия (покоя) либо отдельных подклассов стационарных течений жидкостей и газов.

Важность разрешения проблемы регулярного построения растущих во времени функционалов Ляпунова можно осветить ещё и с таких позиций. Во–первых, без использования нарастающих со временем функционалов Ляпунова не может быть решена фундаментальная научная проблема обращения энергетических достаточных условий устойчивости, то есть задача выявления факторов, обеспечивающих возможность возникновения неустойчивости при нарушении условий устойчивости (вероятное наличие возмущений, которые могли бы уменьшать энергию исследуемого состояния равновесия (покоя) или установившегося течения). И, во–вторых, растущий во времени функционал служит не менее содержательной характеристикой течения, чем интеграл движения (сохраняющийся со временем функционал). Нарастающий во времени функционал выражает, в частности, свойство необратимости в поведении сплошной среды, направление и качество накапливающихся в ней изменений.

Пионерские публикации по применению прямого метода Ляпунова в ходе рассмотрения задач неустойчивости состояний равновесия (покоя) жидкости принадлежат В. В. Румянцеву [10, 29], обобщившему относящийся к аналитической механике классический задел А. М. Ляпунова [22] и Н. Г. Четаева [16]. Он предложил для механических систем «тело + жидкость» использовать как функционал Ляпунова величину, которую часто называют вириалом [24].

Иные интересные продвижения по пути, намеченному В. В. Румянцевым, но уже в задачах неустойчивости бароклинного вихря и состояний магнитогидродинамического (МГД) равновесия (покоя) приведены в статьях [117, 118]. Так, в работе [117] применён довольно оригинальный приём, когда неустойчивость показывается не для исходной системы уравнений движения, а для полученной из неё посредством n–кратного дифференцирования по времени. Однако, появляющееся при этом затруднение с заданием начальных условий осталось в статье [117] непреодолённым. В работе же [118] продемонстрировано, что изучаемые состояния МГД равновесия (покоя) неустойчивы по отношению к малым пространственным возмущениям, если линейный аналог потенциальной энергии обладает способностью принимать отрицательные значения. Более того, в ней сконструирована априорная экспоненциальная оценка снизу, которая свидетельствует о том, что вириал (функционал Ляпунова) имеет возможность расти со временем не медленнее, чем экспоненциально. Наконец, авторам статьи [118] удалось указать для величины инкремента нарастания малых трёхмерных возмущений как верхнее, так и нижнее допустимые предельные значения.

Наработки публикации [118] оказались самыми продуктивными и позволили создать алгоритм построения растущих во времени функционалов Ляпунова для линейных задач неустойчивости состояний равновесия (покоя) жидкостей и газов [71, 119–129], ряд приёмов конструирования нарастающих со временем функционалов Ляпунова для линейных задач неустойчивости стационарных течений [130, 131], сводящихся преобразованиями уравнений движения к неким эффективным состояниям равновесия (покоя), и нелинейных задач неустойчивости состояний равновесия (покоя) жидкостей и газов [127, 132]. Наибольший же прогресс был достигнут в статье [133], авторы которой смогли показать неустойчивость одного подкласса установившихся течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости, не сводящихся никакими преобразованиями уравнений движения к эффективным состояниям равновесия (покоя), относительно малых пространственных возмущений и построить с помощью вириала (функционала Ляпунова) априорную экспоненциальную оценку снизу роста последних во времени. К сожалению, использованный авторами работы [133] способ конструирования нарастающего со временем функционала Ляпунова обладает такими специфическими чертами, которые делают абсолютно невозможным расширение его сферы применимости на другие стационарные течения.

Выполненный выше анализ публикаций [10, 29, 71, 117–133] позволяет прийти к недвусмысленному заключению, что дальнейшее совершенствование прямого метода Ляпунова в приложении к нелинейным задачам неустойчивости состояний равновесия (покоя), а также как к линейным, так и нелинейным задачам неустойчивости установившихся течений жидкостей и газов остро нуждается в разработке простых, эффективных и универсальных алгоритмов построения растущих во времени функционалов Ляпунова. Главы II–IV данного курса лекций как раз и посвящены созданию таких алгоритмов конструирования нарастающих со временем функционалов Ляпунова вириального типа для исследования линейных задач неустойчивости произвольных стационарных течений жидкостей и газов.

В завершение этого пункта логично акцентироваться на сложившейся ситуации с рассмотрением вопросов практической неустойчивости [9, 14–16] установившихся течений жидкостей и газов. Главный недостаток полученных в данном направлении результатов состоит в том, что они, как правило, носят условный характер, поскольку требуют знания определённых свойств возмущений изучаемых течений, кои обычно неизвестны. Ясно, что с таким положением дел мириться нельзя, а потому в тех же главах II–IV будет предложена методика исследования практической неустойчивости стационарных течений жидкостей и газов по линейному приближению, свободная от необходимости знать любые дополнительные сведения о наложенных на них малых возмущениях.

РАЗРЕШИМОСТЬ РАССМАТРИВАЕМЫХ В КУРСЕ ЛЕКЦИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. В настоящем курсе лекций изучаются линеаризованные начально–краевые задачи для систем дифференциальных и интегродифференциальных уравнений с частными производными и переменными коэффициентами, чьи решения описывают эволюцию: 1) малых трёхмерных возмущений состояний равновесия (покоя) невязкой сжимаемой идеально проводящей среды с уравнением состояния общего вида в магнитном поле [134, 135]; 2) малых вращательно–симметричных возмущений установившихся вращательно–симметричных же МГД течений однородной по плотности и бесконечной по проводимости невязкой несжимаемой жидкости [135, 136]; 3) малых винтовых возмущений стационарных винтовых же течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в магнитном поле [135, 137, 138]; 4) малых осесимметричных длинноволновых возмущений установившихся осесимметричных же сдвиговых струйных МГД течений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной поверхностью [139–144]; 5) малых плоских возмущений стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости [145] и 6) малых пространственных возмущений установившихся трёхмерных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости [146, 147].

Целесообразно отметить, что вопросы разрешимости исследуемых в данном курсе лекций смешанных задач принадлежат к числу центральных проблем современной математической гидродинамики. Говоря о курсе лекций в целом, можно сказать, что значительная часть рассматриваемых в нём начально–краевых задач не обладает сколько–нибудь завершённым математическим обоснованием. Наряду с этим по некоторым вопросам имеются очевидные продвижения. Ниже приводится краткий обзор публикаций, характеризующих достигнутый на сегодня уровень понимания в проблемах разрешимости смешанных задач, которые изучаются в настоящем курсе лекций.

Самая благополучная ситуация с разрешимостью начально–краевых задач сложилась для модели идеальной магнитной газодинамики. Здесь развиты методы доказательства локальных (по времени) теорем существования и единственности как гладких, так и разрывных решений смешанных задач в весьма общих постановках [148–150].

Неплохо обстоят дела и с разрешимостью начально–краевых задач для длинноволновых моделей струйных течений идеальной несжимаемой жидкости в магнитном поле, преобразуемых переходом к смешанным эйлерово–лагранжевым переменным [151] в соответствующие модели типа вихревой мелкой воды [152]. Как известно, последние, в свою очередь, аналогичны моделям, которые описывают течения нормального газа в канале [17, 153]. Данный факт позволяет использовать задел газовой динамики по разрешимости начально–краевых задач для доказательства локальных (по времени) теорем существования и единственности решений смешанных задач длинноволновых моделей струйных МГД течений невязкой несжимаемой жидкости [151, 152, 154–168].

Труднее вопросы разрешимости начально–краевых задач снимаются для модели идеальной магнитной гидродинамики. Этому способствует, главным образом, отсутствие у уравнений, характеризующих течения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в магнитном поле, такой инвариантной величины, как «потенциальный вихрь» [169]. Исключение составляют лишь те случаи, когда исследуемые МГД течения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости обладают вращательной или винтовой симметриями. Действительно, тогда, опираясь на хорошо известную аналогию между эффектами вращения и плотностной стратификации [5, 53, 170–175], удаётся переписать уравнения движения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в магнитном поле так, что они становятся похожими на уравнения движения стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести [135–138].

Данное обстоятельство позволяет для доказательства локальных (по времени) теорем существования и единственности решений смешанных задач моделей вращательно–симметричных и винтовых МГД течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости применять наработки по разрешимости начально–краевых задач модели двумерных течений стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести [152, 176, 177].

Что же касается разрешимости смешанных задач для модели идеальной гидродинамики, то тут всё кардинально зависит от того, какие эволюционные течения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости рассматриваются: плоские либо трёхмерные. Если плоские, то, учитывая свойство завихренности сохраняться в жидких частицах при их движениях, оказывается возможным доказывать локальные (по времени) теоремы существования и единственности решений начально–краевых задач в самых общих постановках [178–184]. Если же трёхмерные, то имеются только отдельные результаты по разрешимости некоторых частных смешанных задач, поскольку в этом случае нет инвариантной величины типа «потенциального вихря» [169], а уравнение «вмороженности» завихренности может обладать и гладкими, и разрывными решениями [17, 184].

Соотнося выполненный здесь обзор публикаций по разрешимости начально–краевых задач в гидродинамике и магнитной гидрогазодинамике с перечисленными выше конкретными смешанными задачами, изучаемыми в данном курсе лекций, можно сделать следующие выводы: а) разрешимость начально–краевых задач 1)–5) [134–145] в достаточной мере обоснована; б) смешанная же задача 6) [146, 147] исследуется в отсутствие локальной (по времени) теоремы существования и единственности её решений, что, естественно, лишь усиливает как априорный характер соответствующих результатов об устойчивости/неустойчивости, так и степень их важности.

СТРУКТУРА КУРСА ЛЕКЦИЙ. Настоящий курс лекций состоит из введения, четырёх глав, которые разбиты на семь параграфов, заключения, выводов и списка литературы. В конце каждой главы помещена подробная сводка полученных в ней результатов. Суммарный объём курса лекций составляет 286 страниц, при этом 24 из них занимает список литературы. Нумерация параграфов ведётся во всех главах независимо друг от друга. Формулы помечаются номером, образованным из номеров главы, параграфа и порядкового номера внутри параграфа. При ссылках на ту или иную формулу внутри какой–либо главы номер последней опускается.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА ПО ГЛАВАМ. Первые две главы данного курса лекций посвящены изучению вторым (или прямым) методом Ляпунова устойчивости по линейному приближению состояний равновесия (покоя) идеального газа с произвольным уравнением состояния, а также стационарных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в магнитном поле, причём последние сводятся посредством несложных преобразований уравнений движения к неким эффективным состояниям равновесия (покоя). В остальных двух главах тем же методом исследуется линейная устойчивость как установившихся струйных МГД течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей и бесконечной проводимостью в рамках длинноволнового приближения, так и стационарных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в отсутствие внешних массовых сил и без всяких дополнительных приближений, при этом ни те, ни другие установившиеся течения никакими преобразованиями уравнений движения к эффективным состояниям равновесия (покоя) не сводятся.

Именно, в первой главе курса лекций рассматривается линейная задача неустойчивости состояний равновесия (покоя) идеальной сжимаемой бесконечной по проводимости среды с уравнением состояния общего вида в магнитном поле. Прямым методом Ляпунова демонстрируется, что данные состояния равновесия (покоя) неустойчивы по отношению к таким малым пространственным возмущениям, которые уменьшают эффективную потенциальную энергию, представляющую собой сумму внутренней энергии среды и энергии магнитного поля. Строятся априорные двусторонние экспоненциальные оценки роста изучаемых возмущений, причём инкременты экспонент, которые содержатся в этих оценках, вычисляются по параметрам состояний равновесия (покоя) и начальным данным для малых трёхмерных возмущений. Выделен подкласс наиболее быстро нарастающих малых пространственных возмущений и обнаружена точная формула для определения скорости их роста.

Во второй главе курса лекций исследуются линейные задачи устойчивости стационарных вращательно–симметричных и винтовых МГД течений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости. Прямым методом Ляпунова в двух параграфах настоящей главы получены необходимые и достаточные условия устойчивости этих течений относительно вращательно–симметричных и винтовых малых возмущений соответственно. В случае, когда данные условия линейной устойчивости нарушаются, конструируются априорные экспоненциальные оценки нарастания малых возмущений как снизу, так и сверху, при этом для одной части настоящих оценок инкременты присутствующих в них экспонент вычисляются по параметрам установившихся течений и начальным данным рассматриваемых возмущений, а для оставшейся являются произвольными положительными постоянными. Выведены достаточные условия практической линейной неустойчивости. Указаны подклассы самых быстро растущих малых возмущений и найдены точные формулы, позволяющие определять скорость их нарастания. Построены примеры стационарных течений и начальных малых возмущений, которые иллюстрируют установленные результаты.

В третьей главе курса лекций изучаются линейные задачи устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой бесконечной по проводимости жидкости со свободной поверхностью и в азимутальном, и в полоидальном магнитных полях. В трёх параграфах этой главы прямым методом Ляпунова обнаружены необходимые и достаточные условия устойчивости данных течений по отношению к малым осесимметричным же длинноволновым возмущениям как специального, так и общего вида. Если эти условия линейной устойчивости не выполняются, то конструируются и нижние, и верхние априорные экспоненциальные оценки роста исследуемых возмущений, причём инкременты экспонент, фигурирующих в одних оценках, вычисляются по параметрам рассматриваемых установившихся течений и начальным данным для малых осесимметричных длинноволновых возмущений, а в остальных служат произвольными положительными постоянными величинами. Выделены подклассы быстрее всего нарастающих малых возмущений и получены точные формулы для определения скорости их роста. Найдены достаточные условия практической линейной неустойчивости. Приведены примеры стационарных осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений и налагаемых на них малых осесимметричных же длинноволновых возмущений, которые развиваются на линейной стадии согласно построенным оценкам.

И, наконец, в четвёртой главе курса лекций исследуются линейные задачи устойчивости установившихся плоско–параллельных сдвиговых и любых допустимых трёхмерных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости при отсутствии внешних массовых сил. Прямым методом Ляпунова в двух параграфах этой главы показывается, что данные течения абсолютно неустойчивы относительно малых плоских и пространственных возмущений соответственно. При этом в случае стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений установлено, что все известные достаточные условия устойчивости (Релея, Фьортофта и Арнольда) данных течений по отношению к малым плоским возмущениям являются также и необходимыми. Конструируются априорные оценки снизу, свидетельствующие о том, что изучаемые малые возмущения неустойчивых стационарных течений если и нарастают во времени, то не медленнее, чем экспоненциально. Обнаружены достаточные условия практической линейной неустойчивости. Строятся иллюстративные аналитические примеры установившихся течений и наложенных на них малых возмущений, которые растут со временем в согласии со сконструированными оценками.

Детальная информация как о содержании той или иной главы, так и о найденных в них результатах может быть почерпнута из сводок результатов, приведённых в конце каждой из глав.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Автором курса лекций были впервые получены следующие основные результаты, которые выносятся на суд его слушателей:

1) прямым методом Ляпунова обнаружены необходимые и достаточные условия линейной устойчивости стационарных вращательно–симметричных и винтовых течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в магнитном поле относительно малых вращательно–симметричных же и винтовых возмущений соответственно; для неустойчивых установившихся МГД течений построены априорные экспоненциальные оценки нарастания рассматриваемых малых возмущений сверху и снизу; найдены достаточные условия практической линейной неустойчивости; предложенные приёмы конструирования растущих во времени функционалов Ляпунова можно использовать и при исследовании других линейных задач устойчивости стационарных течений жидкостей и газов, сводящихся преобразованиями уравнений движения к тем либо иным эф-

фективным состояниям равновесия (покоя);

2) прямым методом Ляпунова или продемонстрирована абсолютная линейная неустойчивость, или установлены достаточные условия линейной неустойчивости (в том числе и практической), или обращены известные достаточные условия линейной устойчивости, или получены необходимые и достаточные условия линейной устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной границей либо в азимутальном, либо в полоидальном магнитных полях, а также установившихся плоско–параллельных сдвиговых и произвольных трёхмерных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в отсутствие внешних массовых сил по отношению к соответствующим изучаемым малым возмущениям; построены как верхние, так и нижние априорные экспоненциальные оценки нарастания малых возмущений неустойчивых стационарных течений; разработанные способы конструирования растущих со временем функционалов Ляпунова могут быть применены для рассмотрения, в принципе, любых линейных задач устойчивости установившихся течений жидкостей и газов, причём вне зависимости от того, сводятся эти течения при помощи тех или других преобразований уравнений движения к неким эффективным состояниям равновесия (покоя) либо нет;

3) для одного подкласса стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в пространстве между двумя неподвижными непроницаемыми

твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями без точек перегиба в профиле скорости обнаружены частные аналитические решения классической краевой задачи на отыскание собственных значений и собственных функций для уравнения Релея [4, 5, 21, 52, 145, 147, 185], которые отвечают нарастающим во времени малым плоским и трёхмерным возмущениям в виде нормальных волн и уточняют известные теоремы Релея [52], Фьортофта [54] и Арнольда [55] о линейной устойчивости установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений; данный факт говорит о том, что использование методов интегральных соотношений [52, 185] и связки интегралов движения [54, 55] в процессе исследования тех или иных линейных задач устойчивости стационарных течений жидкостей и газов требует строгого описания изучаемых подклассов малых возмущений, поскольку в противном случае высока вероятность получить ошибочные результаты.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Научная значимость настоящего курса лекций определяется плодотворностью созданных алгоритмов построения функционалов Ляпунова, имеющих свойство расти со временем в силу тех либо других смешанных задач, которые характеризуют эволюцию малых возмущений рассматриваемых состояний равновесия (покоя) или установившихся течений жидкостей и газов.

Эти алгоритмы конструирования нарастающих во времени функционалов Ляпунова открывают совершенно ошеломляющие перспективы для развития прямого метода Ляпунова в теории гидродинамической устойчивости.

Конкретно, уже сейчас посредством данных алгоритмов построения растущих со временем функционалов Ляпунова не составляет особых проблем исследовать весьма широкий круг линейных задач устойчивости как состояний равновесия (покоя), так и стационарных течений жидкостей и газов.

Далее, зная, что в линейном приближении роль нарастающего во времени функционала Ляпунова играет вириал [24], логично попытаться найти его нелинейный аналог, обобщив тем самым разработанные алгоритмы конструирования растущих со временем функционалов Ляпунова на как можно большее количество нелинейных задач устойчивости и состояний равновесия (покоя), и установившихся течений жидкостей и газов.

Наконец, если распространить действие созданных алгоритмов построения нарастающих во времени функционалов Ляпунова как на линейные, так и на нелинейные задачи устойчивости эволюционных течений жидкостей и газов, то окажется вполне реальным с минимумом затрат отбирать среди множества математических моделей наиболее оптимальные с точки зрения адекватного математического моделирования изучаемых физических явлений в жидкостях и газах.

Практическая же значимость настоящего курса лекций обусловлена тем, что с помощью развитых в нём алгоритмов конструирования растущих со временем функционалов Ляпунова из рассматриваемых математических моделей тех либо иных физических процессов в жидкостях и газах может извлекаться информация и о классах устойчивых стационарных течений, и о начальных данных, из которых вероятно нарастание малых возмущений неустойчивых установившихся течений, и о достаточных условиях практической линейной неустойчивости, при этом, что принципиально, без выполнения сложного и трудоёмкого теоретического анализа свойств как самих исследуемых математических моделей, так и их решений. В свою очередь, данную информацию можно применять для создания и последующей модернизации разного рода технологий, использующих те или другие течения жидкостей и газов, различных программных продуктов, которые предназначены для расчёта тех либо иных физических явлений в жидкостях и газах, и т. д. и т. п.

Глава I. ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ МГД РАВНОВЕСИЯ (ПОКОЯ) НЕВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПО ПРОВОДИМОСТИ СРЕДЫ

В этой главе излагаются результаты по неустойчивости состояний равновесия (покоя) идеальной сжимаемой среды с бесконечной проводимостью в магнитном поле.

Прямым методом Ляпунова показывается, что данные состояния МГД равновесия (покоя) абсолютно неустойчивы по отношению к малым пространственным возмущениям, уменьшающим эффективную потенциальную энергию, которая является суммой внутренней энергии среды и энергии магнитного поля. Строятся двусторонние экспоненциальные оценки роста рассматриваемых возмущений, причём инкременты экспонент, содержащихся в этих оценках, вычисляются по параметрам состояний равновесия (покоя) и начальным данным малых трёхмерных возмущений. Указывается подкласс самых быстро нарастающих малых пространственных возмущений и конструируется точная формула для определения скорости их роста. Проводится сопоставление результатов настоящей главы с известными результатами, которые получены другими авторами.

Стоит подчеркнуть, что с математической точки зрения все представляемые ниже результаты первой главы носят априорный характер, поскольку теоремы существования решений исследуемых краевых и смешанных задач не доказываются.

Подробная сводка установленных в этой главе результатов помещена в её конце. Материал данной главы опубликован в работах [134, 135].

ПОСТАНОВКА ТОЧНОЙ ЗАДАЧИ. Изучаются трёхмерные движения невязкой сжимаемой идеально проводящей среды в магнитном поле [134, 135]. Предполагается, что эти движения происходят в области τ с покоящейся непроницаемой твёрдой бесконечной по проводимости границей $\partial\tau$ и описываются следующими уравнениями [186]:

$$\rho D v_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{h_k}{4\pi}\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i}\right),\ D\rho + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{I.1}$$

$$D h_i = h_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - h_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k},\ \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = 0,\ Ds = 0$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i};\ e = e(\rho, s),\ de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

где ρ, $\boldsymbol{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$, p, s, e и T — поля плотности, скорости, давления, энтропии, внутренней энергии и температуры; $\boldsymbol{h} = (h_1,\ h_2,\ h_3)$ — магнитное поле; $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ — декартовы координаты; t — время. Если не оговорено особо, то по повторяющимся латинским индексам всюду в первой главе осуществляется суммирование от единицы до трёх.

Полагается, что на поверхности $\partial\tau$ выполняются условия непротекания

$$v_i n_i = 0,\ h_i n_i = 0 \tag{I.2}$$

(здесь $\boldsymbol{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3)$ — единичная внешняя нормаль к границе $\partial\tau$). Второе из условий (2) означает, что магнитное поле $\boldsymbol{h}$ (1) целиком сосредоточено внутри области течения τ и за её пределы не проникает.

Начальные данные для краевой задачи (1), (2) задаются в виде

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\,0) = \boldsymbol{v^0}(\boldsymbol{x}) \tag{I.3}$$

$$\rho(\boldsymbol{x},\,0) = \rho^0(\boldsymbol{x})\,,\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\,0) = \boldsymbol{h^0}(\boldsymbol{x})\,,\ s(\boldsymbol{x},\,0) = s^0(\boldsymbol{x})$$

При этом скалярные функции $\rho^0(\boldsymbol{x})$ и $s^0(\boldsymbol{x})$ произвольны, тогда как вектор–функция $\boldsymbol{h^0}(\boldsymbol{x})$ должна, с одной стороны, обращать в тождество четвёртое уравнение системы (1), а с другой — гарантировать, совместно с векторной функцией $\boldsymbol{v^0}(\boldsymbol{x})$, истинность граничных условий (2).

Считается, что все функции, характеризующие физические поля, которые задействованы в формулировке смешанной задачи (1)–(3), обладают достаточной степенью гладкости.

Важно заметить, что начально–краевая задача (1)–(3) является математической моделью плазменной установки, чья магнитная система обеспечивает идеальные условия удержания плазмы, непосредственно соприкасающейся с поверхностью кожуха. Рассмотрение данной задачи необходимо в качестве подготовительного этапа для исследования более общей, но и более реалистичной с физической точки зрения смешанной задачи, которая моделирует плазменную установку, где реализованы идеальные условия удержания плазмы, отделённой от кожуха, согласно требованиям термоизоляции, вакуумной прослойкой [187].

При помощи несложных вычислений может быть продемонстрировано, что на решениях начально–краевой задачи (1)–(3) имеет место сохранение интеграла энергии

$$E_1 \equiv K_1 + \Pi_1 = \mathrm{const} \tag{I.4}$$

$$2K_1 \equiv \int\limits_{\tau} \rho v_i v_i d\tau,\ \Pi_1 \equiv \int\limits_{\tau} \left[\rho e(\rho,\ s) + \frac{1}{8\pi} h_i h_i\right] d\tau,\ d\tau \equiv dx_1 dx_2 dx_3$$

Точные стационарные решения смешанной задачи (1)–(3)

$$\boldsymbol{v} = 0,\ \rho = \rho_0\left(\boldsymbol{x}\right),\ p = p_0\left(\boldsymbol{x}\right),\ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h_0}\left(\boldsymbol{x}\right),\ s = s_0\left(\boldsymbol{x}\right) \qquad \text{(I.5)}$$

которые отвечают состояниям МГД равновесия (покоя) невязкой сжимаемой среды с бесконечной проводимостью, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{4\pi} h_{0k} \left(\frac{\partial h_{0i}}{\partial x_k} - \frac{\partial h_{0k}}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial p_0}{\partial x_i},\ \frac{\partial h_{0k}}{\partial x_k} = 0 \qquad \text{(I.6)}$$

$$e = e_0\left(\rho_0,\ s_0\right),\ p_0 = \rho_0^2 \frac{\partial e}{\partial \rho}\left(\rho_0,\ s_0\right)$$

в области τ и условию

$$h_{0i} n_i = 0 \qquad \text{(I.7)}$$

на её границе $\partial\tau$.

Цель дальнейшего изучения заключается в том, чтобы показать неустойчивость состояний равновесия (покоя) (5)–(7) относительно малых пространственных возмущений.

ПОСТАНОВКА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ. Для достижения указанной выше цели проводится линеаризация начально–краевой задачи (1)–(3) около точных стационарных решений (5)–(7), в результате чего можно получить систему уравнений движения

$$\rho_0 \frac{\partial v'_i}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{h_{0k}}{4\pi}\left(\frac{\partial h'_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h'_k}{\partial x_i}\right) +$$

$$+ \frac{h'_k}{4\pi}\left(\frac{\partial h_{0i}}{\partial x_k} - \frac{\partial h_{0k}}{\partial x_i}\right),\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho_0 v'_k\right) = 0 \qquad \text{(I.8)}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + v'_k \frac{\partial s_0}{\partial x_k} = 0,\ \frac{\partial h'_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v'_i h_{0k} - v'_k h_{0i}\right),\ \frac{\partial h'_k}{\partial x_k} = 0$$

$$p' = c_0^2 \rho' + \rho_0^2 s' \frac{\partial^2 e}{\partial \rho \partial s} (\rho_0,\ s_0)\,,\ c_0^2 = \rho_0 \left(2 \frac{\partial e}{\partial \rho} (\rho_0,\ s_0) + \rho_0 \frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2} (\rho_0,\ s_0) \right)$$

определяющую эволюцию во времени малых трёхмерных возмущений полей скорости $\boldsymbol{v'}$, плотности ρ', энтропии s' и магнитного поля $\boldsymbol{h'}$ в области течения τ (здесь p' — малые пространственные возмущения поля давления, c_0 — скорость звука). Эту систему дополняют условия непротекания

$$v_i' n_i = 0,\ h_i' n_i = 0 \tag{I.9}$$

которые ставятся на поверхности $\partial \tau$, и начальные данные

$$\boldsymbol{v'} (\boldsymbol{x},\ 0) = \boldsymbol{v'^0} (\boldsymbol{x}) \tag{I.10}$$

$$\rho' (\boldsymbol{x},\ 0) = \rho'^0 (\boldsymbol{x})\,,\ \boldsymbol{h'} (\boldsymbol{x},\ 0) = \boldsymbol{h'^0} (\boldsymbol{x})\,,\ s' (\boldsymbol{x},\ 0) = s'^0 (\boldsymbol{x})$$

причём на вектор–функции $\boldsymbol{v'^0} (\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{h'^0} (\boldsymbol{x})$ налагаются ограничения, аналогичные принятым ранее для векторных функций $\boldsymbol{v^0} (\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{h^0} (\boldsymbol{x})$ из (3). Ниже штрихи у величин, которые обозначают поля возмущений, опускаются.

Неустойчивость всякого состояния МГД равновесия (покоя) (5)–(7) по отношению к малым трёхмерным возмущениям (8)–(10) может быть продемонстрирована в том и только в том случае, когда удастся обнаружить хотя бы одно возмущение, нарастающее со временем не медленнее, чем экспоненциально.

Исходя из этого, можно сузить область поиска такого возмущения. Далее рассматривается подкласс движений, в котором возмущения энтропии жидких частиц (лагранжевы возмущения поля энтропии) равны нулю. Иными словами, предполагается, что энтропия каждой жидкой частицы при возмущениях не меняется, возмущения представляют собой исключительно смещения жидких частиц из их равновесных положений.

Проще всего данные возмущения могут быть описаны посредством так называемого поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}\,(\boldsymbol{x},\, t) = (\xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3)$ [24].

ЛАГРАНЖЕВЫ СМЕЩЕНИЯ. Поле лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ вводится с помощью анализа связей лагранжевых $\boldsymbol{X}$ и эйлеровых $\boldsymbol{x}$ координат для невозмущённого (основного) и возмущённого движений.

Пусть основное (невозмущённое) движение жидких частиц характеризуется вектор–функциями

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{X},\, t)\,,\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{X},\, 0)\,,\ \boldsymbol{v_0} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{X},\, t)}{\partial t} \tag{I.11}$$

где $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{v_0}\,(\boldsymbol{x})$ — поле скорости установившегося течения жидкости, соответствующего невозмущённому (основному) движению (11) жидких частиц. После наложения возмущений течение жидкости будет описываться другими векторными функциями, но тех же независимых переменных $\boldsymbol{X}$, t:

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^*\,(\boldsymbol{X},\, t)\,,\ \boldsymbol{v}^* \equiv \frac{\partial \boldsymbol{x}^*\,(\boldsymbol{X},\, t)}{\partial t} \tag{I.12}$$

(здесь $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}^*\,(\boldsymbol{x}^*,\, t)$ — поле скорости возмущённого течения жидкости, которое отвечает возмущённому же движению жидких частиц). Зависимость вектор–функций $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^*$ от одной и той же лагранжевой координаты $\boldsymbol{X}$ отражает существование связи между жидкими частицами в движениях (11) и (12).

Поле лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ определяется посредством соотношения

$$\boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{X},\, t\right) \equiv \boldsymbol{x}^{*}\left(\boldsymbol{X},\, t\right) - \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{X},\, t\right)$$

Применяя обратную к векторной функции $\boldsymbol{x}$ (11) вектор–функцию $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x},\, t\right)$, можно получить равенство

$$\boldsymbol{x}^{*}\left(\boldsymbol{x},\, t\right) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{x},\, t\right)$$

означающее, что жидкая частица, которая в стационарном течении жидкости обладала бы в фиксированный момент времени эйлеровой координатой $\boldsymbol{x}$, имеет в возмущённом течении (в тот же момент) координату $\boldsymbol{x}^{*}$.

Из определения поля скорости $\boldsymbol{v}^{*}$ (12) вытекает, что

$$D_1\left[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{x},\, t\right)\right] = \boldsymbol{v}^{*}\left(\boldsymbol{x}^{*},\, t\right),\; D_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_{0k}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$D_1\boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{x},\, t\right) = \boldsymbol{v}^{*}\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi},\, t\right) - \boldsymbol{v_0}\left(\boldsymbol{x}\right) \equiv \delta\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{x},\, t\right)$$

где $\delta\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{x},\, t\right)$ — это лагранжево приращение поля скорости, то есть разность скоростей одной и той же жидкой частицы в возмущённом и основном (невозмущённом) движениях. Эйлерово возмущение поля скорости (его приращение в данной точке $\boldsymbol{x}$) обозначается через $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{x},\, t\right) \equiv \boldsymbol{v}^{*}\left(\boldsymbol{x},\, t\right) - \boldsymbol{v_0}\left(\boldsymbol{x}\right)$$

В линейном приближении справедливо соотношение

$$\delta\boldsymbol{v} = D_1\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{v} + \left(\boldsymbol{\xi}\nabla\right)\boldsymbol{v_0}$$

Это соотношение может быть переписано в следующем окончательном виде:

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial t} = v_i + \left\{\boldsymbol{v_0},\, \boldsymbol{\xi}\right\}_i \equiv v_i + \xi_k\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} - v_{0k}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} \tag{I.13}$$

(здесь при помощи фигурных скобок $\{\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}\}$ обозначена скобка Пуассона векторных полей $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ [56, 67, 76]).

Пусть теперь $Q\left(\boldsymbol{x}^{*},\ t\right)$ — некая характеристика среды, определённая на возмущённом движении (12), тогда как $Q_0\left(\boldsymbol{x}\right)$ — та же самая характеристика, но на невозмущённом (основном) движении (11). Разность

$$\delta Q \equiv Q\left(\boldsymbol{x}^{*},\ t\right) - Q_0\left(\boldsymbol{x}\right)$$

называется лагранжевым возмущением величины Q, а разность

$$q \equiv Q\left(\boldsymbol{x},\ t\right) - Q_0\left(\boldsymbol{x}\right)$$

— её эйлеровым возмущением. Если возмущения малы, то в первом порядке выполняется равенство

$$\delta Q = q + \xi_k \frac{\partial Q}{\partial x_k}$$

В случае, когда характеристика Q сохраняется в любой из жидких частиц, и возмущения представляют собой смещения жидких частиц, тогда $\delta Q = 0$, и

$$q = -\,\xi_k \frac{\partial Q}{\partial x_k}$$

ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (8)–(10) ПОСРЕДСТВОМ ПОЛЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ СМЕЩЕНИЙ. Возвращаясь к исследованию начально–краевой задачи (8)–(10), нетрудно увидеть, что для состояний равновесия (покоя) (5)–(7) поле лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ (13) будет описываться соотношением

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = v_i \tag{I.14}$$

С помощью поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ (14) смешанную задачу (8)–(10) можно записать в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{h_{0k}}{4\pi}\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i}\right) +$$

$$+\frac{h_k}{4\pi}\left(\frac{\partial h_{0i}}{\partial x_k} - \frac{\partial h_{0k}}{\partial x_i}\right),\ \rho = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho_0 \xi_k\right) \qquad \text{(I.15)}$$

$$h_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\xi_i h_{0k} - \xi_k h_{0i}\right),\ s = -\xi_k \frac{\partial s_0}{\partial x_k} \text{ в } \tau;\ \xi_i n_i = 0,\ h_i n_i = 0 \text{ на } \partial\tau$$

$$\boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{x},\ 0\right) = \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}}\left(\boldsymbol{x}\right),\ \boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{x},\ 0\right) = \boldsymbol{v}^{\mathbf{0}}\left(\boldsymbol{x}\right)$$

На решениях начально–краевой задачи (14), (15) остаётся неизменным линейный аналог интеграла энергии

$$E \equiv K + \Pi = \text{const};\ 2K \equiv \int\limits_{\tau} \rho_0 v_i v_i d\tau \qquad \text{(I.16)}$$

$$2\Pi \equiv \int\limits_{\tau} \left(-p\frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} + \frac{h_i}{4\pi}\left[h_i - \xi_k\left(\frac{\partial h_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial h_{0i}}{\partial x_k}\right)\right]\right) d\tau$$

Несложно показать, что вторая вариация функционала Π_1 (4), если её переписать в подходящих обозначениях, совпадает по форме с интегралом Π, а его первая вариация равна нулю на состояниях МГД равновесия (покоя) (5) в силу условий (6), (7).

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА И ЕЁ ОБРАЩЕНИЕ. Если для всех допустимых полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ (14) истинно неравенство $\Pi \geq 0$, которое соответствует достижению функционалом Π_1 своего минимума на точных стационарных решениях (5)–(7) смешанной задачи (1)–(3), то из независимости интеграла E (16) от времени вытекает устойчивость состояний равновесия (покоя) (5)–(7) относительно малых пространственных возмущений (14), (15). Данный результат является, по сути, одной из разновидностей теоремы Лагранжа [10, 16, 25] об устойчивости равновесия механической системы при наличии в нём минимума потенциальной энергии.

Ниже будет установлено обращение теоремы Лагранжа, то есть продемонстрирована неустойчивость состояний МГД равновесия (покоя) (5)–(7) по отношению к малым трёхмерным возмущениям при условии, что функционал Π_1 (4) не достигает на них своего минимального значения. В терминах поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ это означает, что существует начальное поле лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}*}(\boldsymbol{x})$ (15), обладающее следующим важным свойством:

$$\Pi(0) < 0, \text{ если } \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}*}(\boldsymbol{x}) \tag{I.17}$$

Естественно, что для иных начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x})$ неравенство (17) может смениться на противоположное. Другими словами, состояния равновесия (покоя) (5)–(7) представляют собой бесконечномерный аналог «седловой» точки интеграла Π_1.

ФУНКЦИОНАЛ ЛЯПУНОВА. В духе работ [85, 120, 127], вводится интеграл

$$M \equiv \int\limits_{\tau} \rho_0 \xi_i \xi_i d\tau \tag{I.18}$$

двукратное дифференцирование которого по времени и дальнейшие преобразования с использованием соотношений (14)–(16) способствуют получению уравнения

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = 4(K - \Pi) = 8K - 4E$$

называемого вириальным равенством [24]. Умножая, в свою очередь, данное равенство на произвольную постоянную величину λ и вычитая произведение из соотношения (16), можно вывести уравнение

$$\frac{dE_\lambda}{dt} = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda K_\lambda;\ E_\lambda \equiv K_\lambda + \Pi_\lambda \tag{I.19}$$

$$2\Pi_\lambda \equiv 2\Pi + \lambda^2 M,\ 2K_\lambda \equiv 2K - \lambda\frac{dM}{dt} + \lambda^2 M = \int\limits_\tau \rho_0 \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} - \lambda \boldsymbol{\xi}\right)^2 d\tau \geq 0$$

Если положить $\lambda > 0$, то из соотношения (19), согласно неотрицательности функционала K_λ, будет вытекать дифференциальное неравенство

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq 2\lambda E_\lambda$$

Интегрирование этого неравенства позволяет установить основное для последующего изучения соотношение

$$E_\lambda(t) \leq E_\lambda(0)\exp(2\lambda t) \tag{I.20}$$

Необходимо отметить, что неравенство (20) справедливо как для всяких решений начально–краевой задачи (14), (15), так и для любых положительных значений постоянной величины λ. Кроме того, при получении данного неравенства не потребовалось налагать никаких ограничений на знак функционала Π (16).

Поскольку именно для интеграла E_λ удалось вывести соотношение (20), то это обстоятельство и даёт возможность рассматривать его ниже в качестве функционала Ляпунова [16, 22].

ОЦЕНКИ СВЕРХУ И СНИЗУ. Путём задания надлежащим образом начальных данных для полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ и возмущений поля скорости $\boldsymbol{v}$ (14), (15) и посредством неравенства (20) могут быть построены двусторонние экспоненциальные оценки роста малых пространственных возмущений состояний МГД равновесия (покоя) (5)–(7), а также найдена точная формула для вычисления скорости нарастания наиболее быстро растущих возмущений.

В самом деле, пусть начальное поле лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}}$ таково, что для него имеет место условие (17). Принимая во внимание, что поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ и возмущений поля скорости $\boldsymbol{v}$ задаются в начальный момент времени независимо друг от друга, в качестве последних можно взять функции $\boldsymbol{v}^{\mathbf{0}}$ такие, чтобы они удовлетворяли соотношению $K(0) \leq |\Pi(0)|$. В этом случае величина $E_\lambda(0)$, в силу своего определения (19), будет не чем иным, как полиномом второй степени от λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (18) при λ^2 и свободным членом $E(0) \leq 0$ (16):

$$E_\lambda(0) \equiv E(0) - \frac{\lambda}{2}\frac{dM}{dt}(0) + \lambda^2 M(0) \tag{I.21}$$

Пусть $\lambda > 0$, тогда из связи (21) вытекает, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda_1 \equiv B + \sqrt{C} \tag{I.22}$$

$$B \equiv \frac{1}{4M(0)}\frac{dM}{dt}(0),\; C \equiv B^2 - \frac{E(0)}{M(0)}$$

выполняется неравенство

$$E_\lambda(0) < 0 \tag{I.23}$$

Соотношения (20), (23) показывают, что решения смешанной задачи (14), (15), (17) могут нарастать во времени не медленнее, чем экспоненциально.

Если $\lambda = \Lambda_1 - \delta$ (со всяким δ из интервала $]0,\, \Lambda_1[$), то неравенство (20) предстанет в виде

$$E_{\Lambda_1-\delta}(t) \leq E_{\Lambda_1-\delta}(0) \exp\left[2\left(\Lambda_1 - \delta\right) t\right] \;\; \left(E_{\Lambda_1-\delta}(0) < 0\right) \tag{I.24}$$

Опираясь на определения интегралов E_λ, K_λ и Π_λ (19), нетрудно вывести соотношение $E_\lambda(t) \geq \Pi(t)$, которое позволяет придать неравенству (24) форму

$$\Pi(t) \leq E_{\Lambda_1-\delta}(0) \exp\left[2\left(\Lambda_1-\delta\right)t\right] \tag{I.25}$$

При помощи введения в исследование функционала

$$J(t) \equiv \int\limits_\tau \left\{\rho^2 + s^2 + \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\right)^2 + h_i h_i + \xi_i \xi_i\right\} d\tau \tag{I.26}$$

соотношение (25) преобразуется к более содержательному неравенству

$$J(t) \geq \left|c E_{\Lambda_1-\delta}(0)\right| \exp\left[2\left(\Lambda_1-\delta\right)t\right] \tag{I.27}$$

(здесь c — известная постоянная). На основании анализа соотношения (27) можно заключить, что параметр $\Lambda_1 - \delta$ (22), (24) оценивает инкременты решений начально–краевой задачи (14), (15), (17) снизу.

Оценка (27) может быть значительно улучшена, если начальные возмущения поля скорости $\boldsymbol{v}^{\mathbf{0}}$ (15) связать с начальным полем лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}*}$ (15), (17) следующим равенством

$$\boldsymbol{v}^{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}*}(\boldsymbol{x}) \tag{I.28}$$

Действительно, в случае, когда верно соотношение (28), из определений (19) интегралов E_λ, K_λ и Π_λ вытекает, что

$$K_\lambda(0) = 0, \;\; E_\lambda(0) = \Pi_\lambda(0) \tag{I.29}$$

Вновь считая $\lambda > 0$, посредством равенств (21), (29) несложно убедиться, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda \equiv \sqrt{-\frac{2\Pi(0)}{M(0)}} \tag{I.30}$$

истинно неравенство $\Pi_\lambda(0) < 0$. Если теперь $\lambda = \Lambda - \delta_1$ (с любым δ_1 из интервала $]0,\ \Lambda[$), то с учётом связей (29) соотношение (20) можно привести к неравенству

$$E_{\Lambda-\delta_1}(t) \le \Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) \exp\left[2\left(\Lambda - \delta_1\right) t\right] \ \ (\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) < 0) \qquad \text{(I.31)}$$

С помощью соотношений (26) и (31) в итоге может быть получено неравенство

$$J(t) \ge |c_1 \Pi_{\Lambda-\delta_1}(0)| \exp\left[2\left(\Lambda - \delta_1\right) t\right] \qquad \text{(I.32)}$$

где c_1 — известная постоянная величина. Настоящее неравенство свидетельствует о том, что параметр $\Lambda - \delta_1$ (30), (31) оценивает снизу инкременты решений смешанной задачи (14), (15), (17), (28).

Сопоставление оценок (27) и (32) демонстрирует, что решения начально–краевой задачи (14), (15), чьи начальные данные удовлетворяют условиям (17), (28), растут быстрее всех остальных возмущений.

Более того, можно показать, что малые трёхмерные возмущения (14), (15) с начальными данными (17), (28) служат самыми опасными, так как наибыстрейшее нарастание решений смешанной задачи (14), (15), (17), (28) наблюдается при

$$\Lambda^+ \equiv \sup_{\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}*}(\boldsymbol{x})} \Lambda \qquad \text{(I.33)}$$

Для этого нужно сконструировать оценку, дающую ограничение сверху на рост малых пространственных возмущений (14), (15), (17), (28) состояний равновесия (покоя) (5)–(7). Настоящая цель может быть достигнута, если в качестве параметра λ выбрать такое положительное число, которое по величине было бы больше, чем Λ^+. Тогда для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}}$ (15)

будет справедливо соотношение $\Pi_\lambda(0) > 0$. Следовательно, функционал E_λ (19) тоже будет положительно определён для всех допустимых начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi^0}$ и возмущений поля скорости $\boldsymbol{v^0}$ (15). Этот факт означает, что при $\lambda = \Lambda^+ + \epsilon$ ($\epsilon > 0$) из основного неравенства (20) вытекает соотношение

$$E_{\Lambda^+ + \epsilon}(t) \leq E_{\Lambda^+ + \epsilon}(0) \exp\left[2\left(\Lambda^+ + \epsilon\right)t\right]$$

Данное соотношение посредством неравенства $\Pi_{\Lambda^+}(t) \geq 0$ можно переписать в следующем наглядном и окончательном виде:

$$2K_{\Lambda^+ + \epsilon}(t) + \epsilon\left(2\Lambda^+ + \epsilon\right)M(t) \leq 2E_{\Lambda^+ + \epsilon}(0) \exp\left[2\left(\Lambda^+ + \epsilon\right)t\right] \qquad \text{(I.34)}$$

При помощи соотношения (34) нетрудно увидеть, что параметр $\Lambda^+ + \epsilon$ (30), (33) оценивает инкременты решений начально–краевой задачи (14), (15), (17), (28) сверху.

Сравнение неравенств (32) и (34) позволяет сделать вывод, что величина Λ^+ оценивает скорость нарастания решений смешанной задачи (14), (15), (17), (28) как снизу, так и сверху:

$$\Lambda^+ - \delta_1 \leq \omega_* \leq \Lambda^+ + \epsilon \qquad \text{(I.35)}$$

Оценка (35) демонстрирует, что наиболее быстро растут те решения начально–краевой задачи (14), (15), (17), (28), чей инкремент $\omega_* = \Lambda^+$ (33).

Итак, если выполнено условие (17), то, вычислив значение величины Λ^+ по формулам (30), (33), несложно ответить на вопрос: за какое характерное время малые трёхмерные возмущения (14), (15), (17), (28) разрушат состояния равновесия (покоя) (5)–(7) идеальной сжимаемой бесконечной по проводимости среды в магнитном поле?

СОПОСТАВЛЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ДРУГИХ АВТОРОВ. Переходя к сравнению результатов, установленных в первой главе настоящего курса лекций, с известными результатами, которые получены иными авторами, стоит, прежде всего, сказать о том, что линейная задача устойчивости состояний МГД равновесия (покоя) невязкой сжимаемой идеально проводящей среды с частным уравнением состояния в виде адиабаты Пуассона изучалась ранее в работе [77]. Главный недостаток обнаруженных в этой публикации достаточных условий удержания рассматриваемой среды в магнитной ловушке заключается в том, что при построении соответствующего функционала Ляпунова были применены первые интегралы спиральности, приведшие, по сути, к неявному исключению из исследования возмущений, которые обладают нулевой спиральностью, но, тем не менее, уменьшают эффективную потенциальную энергию. Результаты данной главы свободны от указанного недостатка.

Далее, другим важным обстоятельством, заслуживающим особого внимания, является то, что изложенная выше методика конструирования двусторонних экспоненциальных оценок нарастания малых пространственных возмущений может быть использована и при изучении линейной задачи устойчивости состояний равновесия (покоя) безграничной идеальной сжимаемой среды с бесконечной проводимостью в периодическом по пространству магнитном поле [62, 188–191].

В этом случае под областью течения τ должно понимать некоторый конечный объём рассматриваемой среды, а под поверхностью $\partial\tau$

данной области — его границу. Естественно, что на такой $\partial\tau$ условия непротекания (2) уже не будут автоматически выполняться, поэтому надо следить за тем, чтобы поверхностные функционалы, вычисляемые по границе выделенного объёма среды, обращались в нуль.

Следует заметить, что линейная задача устойчивости состояний МГД равновесия (покоя) бесконечной невязкой сжимаемой идеально проводящей среды исследовалась прежде в работах [62, 188–191]. Так, автор статей [188–190] установил, что изучаемые состояния равновесия (покоя) абсолютно неустойчивы относительно крупномасштабных малых трёхмерных возмущений. В то же время автор работы [62] получил противоположный результат — об абсолютной устойчивости рассматриваемых состояний МГД равновесия (покоя) по отношению ко всевозможным малым пространственным возмущениям. На ошибочность последнего результата указывалось в статье [191], однако представленный в ней пример начального поля лагранжевых смещений, для которого вторая вариация магнитного поля становится отрицательной, нельзя признать доказательным, поскольку данное начальное поле противоречит принятому автором работы [191] требованию соленоидальности.

С целью проверки правильности перечисленных здесь результатов иных авторов ниже строится пример состояний равновесия (покоя) (5), (6) безграничной идеальной сжимаемой среды с бесконечной проводимостью в пространственно–периодическом магнитном поле и начальных полей лагранжевых смещений (15), (17), чьё развитие во времени на линейной стадии будет протекать в согласии со сконструированными экспоненциальными оценками снизу (27) и сверху (34) роста малых трёхмерных возмущений (14), (15), (17) [135].

Необходимо отметить, что этот пример имеет чисто иллюстративный характер, и к нему ни в коем разе не нужно относиться как к строгому доказательству неустойчивости состояний МГД равновесия (покоя) бесконечной невязкой сжимаемой идеально проводящей среды, так как все результаты первой главы настоящего курса лекций установлены в предположении наличия реального сосуда τ с неподвижной твёрдой неограниченной по проводимости поверхностью $\partial\tau$, а в предлагаемом далее примере вместо такого сосуда будет фигурировать некая ячейка, умозрительно вырезанная из бесконечного пространства, которое целиком заполнено исследуемой средой. Следовательно, данный пример стоит воспринимать, скорее, как побудительный мотив к осуществлению в будущем более тщательного изучения устойчивости рассматриваемых состояний равновесия (покоя), чем выполнявшееся раньше [62, 188–191].

Итак, пусть идеальная сжимаемая среда с неограниченной проводимостью, наполняющая бесконечное пространство, покоится в пространственно–периодическом магнитном поле

$$\boldsymbol{h_0}(\boldsymbol{x}) = A\,(\cos\alpha x_3 + \sin\alpha x_2,\ \cos\alpha x_1 + \sin\alpha x_3,$$

$$\cos\alpha x_2 + \sin\alpha x_1) \tag{I.36}$$

где A и α — произвольные положительные постоянные, первая из которых служит амплитудой поля $\boldsymbol{h_0}$, а вторая — его обратным пространственным масштабом [62, 188–191]. Магнитное поле $\boldsymbol{h_0}(\boldsymbol{x})$ (36)

является частным случаем периодического по пространству магнитного поля, именуемого бессиловым полем Бельтрами [62, 191].

Подставив выражение (36) в систему уравнений (6), несложно получить, что при этом первое её уравнение сведётся к равенству $p_0 = \mathrm{const}$, тогда как второе превратится в тождество. Значит, в равновесии (покое) исследуемая среда без ограничения общности может полагаться однородной, то есть

$$\rho = \rho_0 = \mathrm{const},\ s = s_0 = \mathrm{const},\ p = p_0 = \mathrm{const} \qquad \text{(I.37)}$$

Для того чтобы вычленить требуемую ячейку с невязкой сжимаемой идеально проводящей средой, в бесконечном пространстве необходимо фиксировать некоторую точку в качестве начала отсчёта декартовой системы координат. Затем в данной системе координат геометрически выделяется конечный объём среды в форме прямоугольного параллелепипеда:

$$\tau = \left\{(x_1,\ x_2,\ x_3):\ -\frac{\pi}{2\alpha} < x_1 < \frac{\pi}{2\alpha},\ -\frac{\pi}{2\beta} < x_2 < \frac{\pi}{2\beta},\right.$$
$$\left. 0 < x_3 < \frac{\pi}{\alpha}\right\} \qquad \text{(I.38)}$$

(здесь β — некая положительная постоянная величина).

Важно подчеркнуть, что на поверхности

$$\partial\tau = \left\{(x_1,\ x_2,\ x_3):\ x_1 = -\frac{\pi}{2\alpha},\ x_1 = \frac{\pi}{2\alpha},\ x_2 = -\frac{\pi}{2\beta},\right.$$
$$\left. x_2 = \frac{\pi}{2\beta},\ x_3 = 0,\ x_3 = \frac{\pi}{\alpha}\right\} \qquad \text{(I.39)}$$

прямоугольного параллелепипеда τ (38) стационарное магнитное поле $\boldsymbol{h_0}$ (36) не удовлетворяет граничному условию (7). Этот факт будет учтён ниже при построении начальных возмущений, обеспечивающих истинность неравенства (17).

Оказывается, что всем предъявляемым к начальным малым трёхмерным возмущениям (14), (15), (17) требованиям отвечает поле лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},\, t)$, которое при $t = 0$ принимает вид

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{0}*}(\boldsymbol{x}) = a\,(\sin\beta x_2,\ 0,\ 0) \tag{I.40}$$

где a — произвольная положительная постоянная.

В самом деле, интегралы

$$I \equiv \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\tau}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{0i}\xi_k^{0*}h_{0k} - \xi_i^{0*}h_{0k}h_{0k}\right)d\tau \tag{I.41}$$

$$I_1 \equiv \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\tau}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[h_{0k}\left(\xi_k^{0*}h_i^0 - \xi_i^{0*}h_k^0\right)\right]d\tau$$

(здесь $\boldsymbol{h}^{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}) = \left(h_1^0,\ h_2^0,\ h_3^0\right)$ — начальное возмущение магнитного поля $\boldsymbol{h}_{\mathbf{0}}$ такое, что $h_1^0 = \beta Aa\,(\cos\alpha x_1 + \sin\alpha x_3)\cos\beta x_2,\ h_2^0 = \alpha Aa\sin\alpha x_1 \times$ $\times\ \sin\beta x_2,\ h_3^0 = -\,\alpha Aa\cos\alpha x_1\sin\beta x_2$), присутствующие соответственно в первой и второй вариациях функционала эффективной потенциальной энергии Π_1 (4), которые вычисляются в окрестности точных стационарных решений (5)–(7) смешанной задачи (1)–(3), становятся в данном случае равными нулю.

Так, посредством соотношений (36), (38)–(40) интеграл I может быть преобразован к форме

$$I = \frac{A^2 a}{4\pi}\left(I^1 + I^2 + I^3 + I^4 + I^5\right)$$

где

$$I^1 \equiv \beta\int\limits_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha}\ \int\limits_{-\pi/2\beta}^{\pi/2\beta}\ \int\limits_{0}^{\pi/\alpha}\left[\cos\alpha x_1\cos\beta x_2\cos\alpha x_3\right]dx_1dx_2dx_3$$

$$I^2 \equiv \alpha \int\limits_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} \int\limits_{-\pi/2\beta}^{\pi/2\beta} \int\limits_{0}^{\pi/\alpha} [\sin \alpha x_1 \sin \beta x_2 \sin \alpha x_3] \, dx_1 dx_2 dx_3$$

$$I^3 \equiv \beta \int\limits_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} \int\limits_{-\pi/2\beta}^{\pi/2\beta} \int\limits_{0}^{\pi/\alpha} [(\cos \alpha x_1 + \sin \alpha x_3) \sin \alpha x_2 \cos \beta x_2] \, dx_1 dx_2 dx_3$$

$$I^4 \equiv -\alpha \int\limits_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} \int\limits_{-\pi/2\beta}^{\pi/2\beta} \int\limits_{0}^{\pi/\alpha} [\cos \alpha x_1 \cos \alpha x_2 \sin \beta x_2] \, dx_1 dx_2 dx_3$$

$$I^5 \equiv \beta \int\limits_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} \int\limits_{-\pi/2\beta}^{\pi/2\beta} \int\limits_{0}^{\pi/\alpha} [\cos \beta x_2 \sin \alpha x_3 \cos \alpha x_3] \, dx_1 dx_2 dx_3$$

Отсюда немедленно вытекает, что функционалы I^2, I^3 и I^4 равны нулю, поскольку содержат в себе нечётные функции аргумента x_2, интегрирование по которому ведётся на интервале, симметричном по отношению к началу координат.

Более того, прямые расчёты позволяют показать равенство нулю и функционалов I^1, I^5 тоже. Действительно,

$$I^1 = \frac{\sin \alpha x_1}{\alpha^2} \bigg|_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} \sin \beta x_2 \bigg|_{-\pi/2\beta}^{\pi/2\beta} \sin \alpha x_3 \bigg|_{0}^{\pi/\alpha} = \frac{4}{\alpha^2} (\sin \pi - 0) = 0$$

$$I^5 = -\frac{x_1}{4\alpha} \bigg|_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} \sin \beta x_2 \bigg|_{-\pi/2\beta}^{\pi/2\beta} \cos 2\alpha x_3 \bigg|_{0}^{\pi/\alpha} = -\frac{\pi}{2\alpha^2} (\cos 2\pi - 1) = 0$$

В итоге, интеграл I (41), как и ожидалось, равен нулю.

Аналогично можно продемонстрировать, что, в свою очередь, и функционал I_1 (41), который с помощью связей (36), (38)–(40) может быть записан в виде

$$I_1 = \frac{\alpha\beta}{4\pi} A^2 a^2 \int\limits_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} \int\limits_{-\pi/2\beta}^{\pi/2\beta} \int\limits_{0}^{\pi/\alpha} [(\sin \alpha x_2 + \cos \alpha x_3) \sin \alpha x_1 \times$$

$$\times \sin\beta x_2 \cos\beta x_2]\, dx_1 dx_2 dx_3$$

обращается в нуль, так как включает в себя интеграл с симметричными пределами от нечётной функции независимой переменной x_1.

Тем самым найдено, что для точных решений (36), (37) стационарных уравнений (6) первая вариация функционала эффективной потенциальной энергии Π_1 равна нулю, а вторая вариация совпадает с интегралом Π (16), обладающим теперь формой

$$\Pi(0) = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\tau} h_i^0 \left(h_i^0 - \xi_k^{0*}\left[\frac{\partial h_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial h_{0i}}{\partial x_k}\right]\right) d\tau$$

или, после замены $\boldsymbol{h_0}$, $\boldsymbol{\xi^{0*}}$ и $\boldsymbol{h^0}$ отвечающими им выражениями,

$$\Pi(0) = \frac{A^2 a^2}{8\pi}\int\limits_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha}\int\limits_{-\pi/2\beta}^{\pi/2\beta}\int\limits_{0}^{\pi/\alpha}\Big[\beta^2\left(\cos\alpha x_1 + \sin\alpha x_3\right)^2\cos^2\beta x_2 -$$

$$-\,\alpha^2\left(\sin\alpha x_1\cos\alpha x_2 + \cos\alpha x_1\sin\alpha x_3\right)\sin^2\beta x_2\Big]\, dx_1 dx_2 dx_3$$

Посредством непродолжительных преобразований последний функционал можно упростить так, что он предстанет в виде

$$\Pi(0) = \frac{A^2 a^2}{16\beta\alpha^2}\left[\left(\pi^2 + 8\right)\beta^2 - 4\alpha^2\right]$$

который даёт все основания прийти к заключению о справедливости неравенства (17) тогда и лишь тогда, когда

$$\alpha > \frac{\beta}{2}\sqrt{\pi^2 + 8} \qquad \text{(I.42)}$$

Существенно, что поля $\boldsymbol{h_0}$, $\boldsymbol{\xi^{0*}}$ и $\boldsymbol{h^0}$ имеют нужную степень гладкости не только внутри прямоугольного параллелепипеда τ (38) и на его поверхности $\partial\tau$ (39), но и во внешнем относительно изучаемого параллелепипеда безграничном пространстве.

Итак, конструирование анонсированного выше иллюстративного примера состояний МГД равновесия (покоя) и начальных полей малых трёхмерных возмущений завершено. Из него, в частности, следует, что, в силу соотношения (42), состояния равновесия (покоя) бесконечной идеальной сжимаемой неограниченной по проводимости среды в пространственно–периодическом магнитном поле, судя по всему, абсолютно неустойчивы по отношению к крупномасштабным малым трёхмерным возмущениям, локально удовлетворяющим условию (17) обращения теоремы Лагранжа, как то и утверждалось автором статей [188–190].

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЛАВЫ I

Целью первой главы настоящего курса лекций служит рассмотрение линейной задачи неустойчивости состояний МГД равновесия (покоя) (5)–(7) невязкой сжимаемой идеально проводящей среды.

Прямым методом Ляпунова показано, что эти состояния равновесия (покоя) абсолютно неустойчивы относительно малых пространственных возмущений (14), (15), (17), которые уменьшают эффективную потенциальную энергию (4), представляющую собой сумму внутренней энергии среды и энергии магнитного поля. Построены априорные двусторонние экспоненциальные оценки (27), (32), (34) нарастания малых трёхмерных возмущений (14), (15), (17), (28), причём инкременты экспонент, которые присутствуют в настоящих оценках, вычисляются при помощи соотношений (22), (30), (33) по параметрам состояний МГД равновесия (покоя) (5)–(7) и начальным данным (15), (17), (28) исследуемых малых пространственных возмущений. Описан подкласс

(14), (15), (17), (28) наиболее быстро растущих малых трёхмерных возмущений и сконструирована точная формула (33) для определения скорости их нарастания.

Выполнено сопоставление обнаруженных в первой главе курса лекций результатов с результатами, установленными ранее авторами публикаций [62, 77, 188–191].

Указано на ошибочность достаточных условий линейной устойчивости, которые получены авторами статьи [77] в процессе изучения задачи устойчивости состояний равновесия (покоя) находящейся в магнитном поле идеальной сжимаемой среды с бесконечной проводимостью и частным уравнением состояния в виде адиабаты Пуассона посредством применения первых интегралов спиральности.

Построен пример бессиловых состояний МГД равновесия (покоя) (36)–(39) безграничной невязкой сжимаемой бесконечной по проводимости среды и начальных полей лагранжевых смещений (40), (42), чья эволюция на линейном этапе будет проистекать согласно сконструированным априорным экспоненциальным оценкам снизу (27) и сверху (34) роста малых пространственных возмущений (14), (15), (17). При этом данный пример полностью подтверждает вывод автора работ [188–190] о неустойчивости состояний равновесия (покоя) (36), (37) по отношению к крупномасштабным малым трёхмерным возмущениям в случае, когда локально истинно условие (17) обращения теоремы Лагранжа. Что же касается результата автора статьи [62] об абсолютной устойчивости бессиловых состояний МГД равновесия (покоя) (36), (37) относительно малых пространственных возмущений, то построенный пример наглядно демонстрирует его ложность. Об этом обстоятельстве говорилось и в работе [191], но, к сожалению, допущенный в ней просчёт с соленоидальностью начального поля лагранжевых смещений свёл на нет всю критику результата статьи [62].

Глава II. ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ПРИЛОЖЕНИИ К ЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ВРАЩАТЕЛЬНО–СИММЕТРИЧНЫХ И ВИНТОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В данной главе речь пойдёт о результатах по устойчивости стационарных вращательно–симметричных и винтовых МГД течений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости.

Прямым методом Ляпунова получаются необходимые и достаточные условия устойчивости этих течений по отношению к вращательно–симметричным и винтовым малым возмущениям соответственно. Если настоящие условия линейной устойчивости нарушаются, то конструируются априорные нижние и верхние экспоненциальные оценки нарастания малых возмущений, причём для одних оценок инкременты содержащихся в них экспонент вычисляются по параметрам установившихся течений и начальным данным рассматриваемых возмущений, тогда как для других являются произвольными положительными постоянными. Выводятся достаточные условия практической линейной неустойчивости. Выделяются подклассы самых быстро растущих малых возмущений и получаются точные формулы, позволяющие определять скорость их нарастания. Строятся примеры стационарных течений и начальных малых возмущений, которые иллюстрируют выведенные результаты.

Детальная сводка результатов этой главы размещена в её конце. Материал настоящей главы опубликован в работах [135–138].

§1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ВРАЩАТЕЛЬНО–СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В данном параграфе по линейному приближению исследуется задача устойчивости стационарных вращательно–симметричных МГД течений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости [135, 136]. Прямым методом Ляпунова устанавливается необходимое и достаточное условие устойчивости этих течений относительно малых возмущений того же типа симметрии, представляющее собой обобщение на магнитную гидродинамику известного критерия Релея [5, 53, 62] о «центробежной» устойчивости вращающихся потоков. Конструируются априорные двусторонние экспоненциальные оценки роста изучаемых возмущений. Описывается подкласс наиболее быстро нарастающих малых вращательно–симметричных возмущений и получается точная формула для вычисления скорости их роста. Строится иллюстративный пример установившихся течений и начальных данных рассматриваемых возмущений.

ТОЧНАЯ ЗАДАЧА. Исследуются трёхмерные движения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью, которая целиком заполняет область τ с покоящейся непроницаемой твёрдой идеально проводящей границей $\partial\tau$, в магнитном поле. Уравнения, характеризующие эти движения, берутся в виде [192]

$$\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} p - \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{h} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{h}) \tag{II.1.1}$$
$$\boldsymbol{h}_t = \mathrm{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{h}),\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0,\ \mathrm{div}\boldsymbol{h} = 0$$

где $\boldsymbol{u} = (u,\ v,\ w)$ — поле скорости, $\boldsymbol{h} = (h_1,\ h_2,\ h_3)$ — магнитное поле, p — поле давления, t — время, $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ — декартовы координаты. Повсюду в первом параграфе второй главы курса лекций индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные. На поверхности $\partial\tau$ ставятся условия непротекания

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{n} = 0,\ \boldsymbol{h}\boldsymbol{n} = 0 \tag{II.1.2}$$

(здесь $\boldsymbol{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3)$ — единичная внешняя нормаль к границе $\partial\tau$). Начальные данные для соотношений (1.1), (1.2) задаются в форме

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\ 0) = \boldsymbol{u_0}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\ 0) = \boldsymbol{h_0}(\boldsymbol{x}) \tag{II.1.3}$$

при этом вектор–функции $\boldsymbol{u_0}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{h_0}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяют соответственно третьему и четвёртому уравнениям системы (1.1) в области течения τ, а также условиям (1.2) на её поверхности $\partial\tau$. Предполагается, что все используемые в соотношениях (1.1)–(1.3) функции обладают требуемой степенью гладкости.

Далее изучается устойчивость стационарных вращательно–симметричных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью в тангенциальном магнитном поле по отношению к малым возмущениям той же симметрии.

В цилиндрической системе координат r, φ, z уравнения (1.1) могут быть переписаны в виде [66, 90]

$$Du = -\,p^*_r + \rho_1 g_1 + \rho_2 g_2 \tag{II.1.4}$$

$$Dw = -\,p^*_z,\ D\rho_1 = 0,\ D\rho_2 = 0,\ u_r + \frac{u}{r} + w_z = 0;\ p^* \equiv p + \frac{h_2^2}{8\pi}$$

$$\rho_1 \equiv (rv)^2,\ g_1 \equiv \frac{1}{r^3},\ \rho_2 \equiv \frac{h_2^2}{4\pi r^2},\ g_2 \equiv -\,r,\ D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Вводится дополнительная скалярная функция $q(r,\ z,\ t)$, значения которой сохраняются в каждой жидкой частице [90]

$$Dq = 0 \tag{II.1.5}$$

В качестве данной функции q можно рассматривать, к примеру, одну из лагранжевых координат жидких частиц.

Для определённости ниже полагается, что движения исследуемой жидкости происходят в двусвязной области τ, чья поверхность $\partial\tau$ имеет нужную симметрию, то есть описывается функцией двух независимых переменных. Это предположение позволяет записать граничные условия (1.2) в форме

$$u\,(s_\alpha)_r + w\,(s_\alpha)_z = 0,\ s_\alpha(r,\ z) = 0 \tag{II.1.6}$$

где второе из соотношений (1.6) является уравнением поверхности $\partial\tau$, а значения индекса $\alpha = 1,\ 2$ отвечают её внутренней и внешней составляющим.

Начальные данные для соотношений (1.4), (1.5) могут быть взяты в виде

$$u(r,\ z,\ 0) = u_0(r,\ z),\ w(r,\ z,\ 0) = w_0(r,\ z) \tag{II.1.7}$$

$$\rho_1(r,\, z,\, 0) = \rho_{10}(r,\, z),\ \rho_2(r,\, z,\, 0) = \rho_{20}(r,\, z),\ q(r,\, z,\, 0) = q_0(r,\, z)$$

Стоит заметить, что принятая выше гипотеза о наличии у магнитного поля $\boldsymbol{h}$ только углового компонента h_2 всецело согласуется с системой уравнений (1.4): в самом деле, если в начальный момент времени задать радиальную h_1 и осевую h_3 составляющие магнитного поля $\boldsymbol{h}$ нулевыми, то они таковыми останутся и во всякий последующий момент времени.

На решениях начально–краевой задачи (1.4)–(1.7) сохраняются полная энергия E_1 и интеграл движения I, выражающийся через произвольную функцию Φ аргумента q:

$$E_1 \equiv T_1 + \Pi_1 + \Pi_2 = \mathrm{const} \tag{II.1.8}$$

$$2T_1 \equiv \int\limits_\tau \left(u^2 + w^2\right) r dr dz,\ \Pi_1 \equiv \int\limits_\tau \rho_1 U_1 r dr dz,\ U_1(r) \equiv \frac{1}{2r^2} + C_1$$

$$\Pi_2 \equiv \int\limits_\tau \rho_2 U_2 r dr dz,\ U_2(r) \equiv \frac{r^2}{2} + C_2;\ I \equiv \int\limits_\tau \Phi(q) r dr dz = \mathrm{const}$$

Здесь C_1 и C_2 — это значения скалярных функций U_1 и U_2 либо на внешнем, либо на внутреннем компонентах границы $\partial\tau$.

Смешанная задача (1.4)–(1.7) обладает точными стационарными решениями в форме

$$u = w = 0,\ \rho_1 = \rho_1^0(r),\ \rho_2 = \rho_2^0(r) \tag{II.1.9}$$

$$p^* = P^*(r),\ q = Q(r);\ \frac{dP^*}{dr} = \rho_1^0 g_1 + \rho_2^0 g_2$$

где поле $Q(r)$ представляет собой некую функцию радиуса r.

В случае, когда $dQ/dr \neq 0$ в области течения τ [193], из соотношений (1.8), (1.9) вытекают связи

$$\rho_1^0 = \rho_1^0(Q),\ \rho_2^0 = \rho_2^0(Q),\ U_1 = U_1(Q),\ U_2 = U_2(Q)$$

$$Q \in \left(Q^-,\, Q^+\right);\; Q^- \equiv \min Q(r),\; Q^+ \equiv \max Q(r),\; r \in \tau$$

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА. Линеаризация начально–краевой задачи (1.4)–(1.7) в окрестности точных стационарных решений (1.9) даёт

$$u'_t = -\,p^{*\prime}_r + \rho'_1 g_1 + \rho'_2 g_2 \tag{II.1.10}$$

$$w'_t = -\,p^{*\prime}_z,\; \rho'_{1t} + u'\frac{d\rho_1^0}{dr} = 0,\; \rho'_{2t} + u'\frac{d\rho_2^0}{dr} = 0,\; q'_t + u'\frac{dQ}{dr} = 0$$

$$u'_r + \frac{u'}{r} + w'_z = 0 \text{ в } \tau;\; u'\left(s_\alpha\right)_r + w'\left(s_\alpha\right)_z = 0 \text{ на } \partial\tau:\; s_\alpha(r,\, z) = 0$$

$$u'(r,\, z,\, 0) = u'_0(r,\, z),\; w'(r,\, z,\, 0) = w'_0(r,\, z),\; \rho'_1(r,\, z,\, 0) = \rho'_{10}(r,\, z)$$

$$\rho'_2(r,\, z,\, 0) = \rho'_{20}(r,\, z),\; q'(r,\, z,\, 0) = q'_0(r,\, z)$$

(здесь u', w', ρ'_1, ρ'_2, $p^{*\prime}$, q' — малые возмущения поля скорости $\boldsymbol{u}$, магнитного поля $\boldsymbol{h}$, поля давления p и дополнительного скалярного поля q). Далее штрихи у полей возмущений, которые отличают их от решений точной смешанной задачи (1.4)–(1.7), опускаются.

Для решений начально–краевой задачи (1.10) справедлив линейный аналог функционала полной энергии

$$E \equiv T + \Pi = \mathrm{const} \tag{II.1.11}$$

$$2T \equiv \int\limits_\tau \left(u^2 + w^2\right) r dr dz$$

$$2\Pi \equiv -\int\limits_\tau \left[U'_1(Q)\rho_1^{0\prime}(Q) + U'_2(Q)\rho_2^{0\prime}(Q)\right] q^2 r dr dz$$

где штрихом сверху обозначается производная той или иной функции по её аргументу.

Если везде в области течения τ выполняется условие

$$0 \leq -\left[U'_1(Q)\rho_1^{0\prime}(Q) + U'_2(Q)\rho_2^{0\prime}(Q)\right] < +\infty \tag{II.1.12}$$

то из равенства $E(t) = E(0)$ (1.11) следует устойчивость точных стационарных решений (1.9) относительно малых возмущений (1.10) [90].

ЛАГРАНЖЕВЫ СМЕЩЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛ ЛЯПУНОВА. Ниже изучение концентрируется на рассмотрении более узкого класса движений, чьим характерным свойством служит то, что в процессе этих движений лагранжевы возмущения дополнительного скалярного поля q (1.5), (1.10) всё время равны нулю. Проще всего данный класс описывается с помощью поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}\,(r,\ z,\ t) = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ (I.13) такого, что $\boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{u}$ [24]. В итоге, смешанная задача (1.10) перепишется в виде

$$\xi_{1tt} = -\,p_r^* + \rho_1 g_1 + \rho_2 g_2 \qquad \text{(II.1.13)}$$

$$\xi_{3tt} = -\,p_z^*,\ \rho_1 = -\,\xi_1 \rho_1^{0\prime}(r),\ \rho_2 = -\,\xi_1 \rho_2^{0\prime}(r),\ q = -\,\xi_1 Q'(r)$$

$$\xi_{1r} + \frac{\xi_1}{r} + \xi_{3z} = 0 \text{ в } \tau;\ \xi_1\,(s_\alpha)_r + \xi_3\,(s_\alpha)_z = 0 \text{ на } \partial\tau:\ s_\alpha(r,\ z) = 0$$

$$\boldsymbol{\xi}\,(r,\ z,\ 0) = \boldsymbol{\xi_0}\,(r,\ z)\,,\ \boldsymbol{u}\,(r,\ z,\ 0) = \boldsymbol{u_0}\,(r,\ z)$$

Линейный аналог E (1.11) интеграла полной энергии сохраняется и на решениях начально–краевой задачи (1.13) тоже, причём функционал T остаётся прежним, а интеграл Π принимает форму

$$2\Pi = -\int\limits_\tau \left[U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right]\xi_1^2 r dr dz \qquad \text{(II.1.14)}$$

Теперь в исследование вводится вспомогательный функционал

$$M \equiv \int\limits_\tau \left(\xi_1^2 + \xi_3^2\right) r dr dz \qquad \text{(II.1.15)}$$

Дважды дифференцируя интеграл M по времени, а затем осуществляя ряд преобразований с применением соотношений (1.11), (1.13), (1.14), можно получить уравнение

$$M''(t) = 4(T - \Pi) = 8T - 4E$$

называемое вириальным равенством [24]. Умножая далее это равенство на некоторый постоянный множитель λ и вычитая результат из соотношения (1.11), нетрудно прийти к уравнению

$$E'_\lambda(t) = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda T_\lambda \tag{II.1.16}$$

$$E_\lambda \equiv T_\lambda + \Pi_\lambda,\ 2\Pi_\lambda \equiv 2\Pi + \lambda^2 M$$

$$2T_\lambda \equiv 2T - \lambda M'(t) + \lambda^2 M = \int\limits_\tau \left[(\xi_{1t} - \lambda\xi)^2 + (\xi_{3t} - \lambda\xi_3)^2 \right] rdrdz$$

Пусть $\lambda > 0$, тогда из соотношения (1.16), в силу неотрицательности функционала T_λ, вытекает дифференциальное неравенство $E'_\lambda(t) \leq \leq 2\lambda E_\lambda$, чьё интегрирование даёт

$$E_\lambda(t) \leq E_\lambda(0)\exp(2\lambda t) \tag{II.1.17}$$

Соотношение (1.17) верно как для любых решений смешанной задачи (1.13), так и для всяких положительных значений параметра λ. Кроме того, при выводе неравенства (1.17) удалось обойтись без каких бы то ни было ограничений на знак функционала П.

Поскольку соотношение (1.17), посредством которого ниже будут конструироваться априорные экспоненциальные оценки нарастания изучаемых малых вращательно–симметричных возмущений (1.13) и сверху, и снизу, установлено конкретно для интеграла E_λ, то этот факт и позволяет рассматривать его далее в качестве функционала Ляпунова [16, 22].

Итак, ниже будет продемонстрирована неустойчивость точных стационарных решений (1.9) смешанной задачи (1.4)–(1.7) в случае, если условие (1.12) не выполняется, то есть в ситуации, когда где–либо в пределах области τ имеет место неравенство

$$U_1'(Q)\rho_1^{0\prime}(Q) + U_2'(Q)\rho_2^{0\prime}(Q) > 0 \tag{II.1.18}$$

Также будут построены априорные верхняя и нижние экспоненциальные оценки роста исследуемых возмущений и предъявлен пример установившихся вращательно–симметричных течений и начальных данных для малых возмущений той же симметрии, иллюстрирующий полученные результаты.

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ. Пусть истинно условие (1.18). Это означает, что могут быть подобраны такие начальные поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi_0}$ (1.13), для которых $\Pi(0) < 0$ (1.14). В качестве же начальных возмущений поля скорости берутся векторные функции $\boldsymbol{u_0}$ (1.13), гарантирующие справедливость неравенства $T(0) \le |\Pi(0)|$.

Из последних двух соотношений следует, что, согласно своему определению (1.16), интеграл $E_\lambda(0)$ представляет собой полином второй степени от λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (1.15) при λ^2 и свободным членом $E(0) \le 0$ (1.11):

$$E_\lambda(0) \equiv E(0) - (\lambda/2)\, M'(0) + \lambda^2 M(0) \tag{II.1.19}$$

Считая $\lambda > 0$, при помощи равенства (1.19) можно показать, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda_1 \equiv B + \sqrt{C};\ B \equiv \frac{M'(0)}{4M(0)},\ C \equiv B^2 - \frac{E(0)}{M(0)} \tag{II.1.20}$$

верно соотношение

$$E_\lambda(0) < 0 \tag{II.1.21}$$

Из неравенств (1.17), (1.21) вытекает, что решения начально–краевой задачи (1.13) нарастают со временем не медленнее, чем экспоненциально.

Если $\lambda = \Lambda_1 - \delta$ (с любым δ из интервала $]0,\ \Lambda_1[$), то соотношение (1.17) примет вид

$$E_{\Lambda_1-\delta}(t) \leq E_{\Lambda_1-\delta}(0)\exp\left[2\left(\Lambda_1-\delta\right)t\right]\ \left(E_{\Lambda_1-\delta}(0) < 0\right) \tag{II.1.22}$$

Пользуясь определениями функционалов T_λ и Π_λ (1.16), несложно установить, что

$$E_\lambda(t) \equiv T_\lambda(t) + \Pi_\lambda(t) \geq -\frac{1}{2}\int\limits_\tau \left[U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right]\xi_1^2 r dr dz$$

откуда, с учётом неравенства (1.22), следует оценка

$$\int\limits_\tau \left[U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right]\xi_1^2 r dr dz\ \geq$$

$$\geq\ 2\left|E_{\Lambda_1-\delta}(0)\right|\exp\left[2\left(\Lambda_1-\delta\right)t\right] \tag{II.1.23}$$

Соотношение (1.23) демонстрирует, что параметр $\Lambda_1 - \delta$ (1.20), (1.22) оценивает инкременты решений смешанной задачи (1.13) снизу.

Оценка (1.23) может быть заметно усилена, если сосредоточиться на изучении подкласса решений начально–краевой задачи (1.13), для которого начальные возмущения $\boldsymbol{u_0}(r,\ z)$ поля скорости и начальные же поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi_0}(r,\ z)$ связаны друг с другом соотношением $\boldsymbol{u_0}(r,\ z) = \lambda\boldsymbol{\xi_0}(r,\ z)$. Тогда из системы равенств (1.16) вытекает, что

$$T_\lambda(0) = 0,\ E_\lambda(0) = \Pi_\lambda(0) \tag{II.1.24}$$

Пусть условие (1.18) по–прежнему выполнено. В таком случае, опять выбирая $\lambda > 0$, а начальные поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi_0}$ (1.13) удовлетворяющими неравенству $\Pi(0) < 0$, посредством соотношений (1.16) нетрудно получить, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda \equiv \sqrt{-\frac{2\Pi(0)}{M(0)}} \qquad \text{(II.1.25)}$$

истинно неравенство $\Pi_\lambda(0) < 0$. Предполагая $\lambda = \Lambda - \delta_1$ (со всяким δ_1 из интервала $]0,\ \Lambda[$) и принимая во внимание соотношения (1.24), неравенство (1.17) можно записать в форме

$$E_{\Lambda-\delta_1}(t) \leq \Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) \exp\left[2\left(\Lambda-\delta_1\right)t\right) \ \left(\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) < 0\right) \qquad \text{(II.1.26)}$$

Отсюда с необходимостью следует оценка

$$\int\limits_\tau \left[U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right]\xi_1^2 r dr dz \ \geq$$
$$\geq\ 2\left|\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0)\right| \exp\left[2\left(\Lambda-\delta_1\right)t\right] \qquad \text{(II.1.27)}$$

свидетельствующая о том, что параметр $\Lambda - \delta_1$ (1.25), (1.26) оценивает снизу инкременты решений смешанной задачи (1.13), (1.24).

Сопоставление неравенств (1.23) и (1.27) говорит о том, что решения начально–краевой задачи (1.13), начальные данные для которых отвечают условию (1.24), растут быстрее.

Далее показывается, что возмущения из подкласса (1.24) — самые опасные в том смысле, что наискорейшее нарастание решений смешанной задачи (1.13) наблюдается при

$$\Lambda^+ \equiv \sup_{\boldsymbol{\xi_0}(r,\,z)} \Lambda \qquad \text{(II.1.28)}$$

Действительно, пусть справедливо неравенство $\lambda > \Lambda^+$ (1.28). Тогда для всех допустимых начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi_0}$

(1.13) верно соотношение $\Pi_\lambda(0) > 0$. Значит, интеграл E_λ (1.16) тоже положительно определён для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi_0}$ и начальных же возмущений поля скорости $\boldsymbol{u_0}$ (1.13).

Таким образом, при $\lambda = \Lambda^+ + \epsilon$ ($\epsilon > 0$) из базового неравенства (1.17) вытекает оценка

$$E_{\Lambda^+ + \epsilon}(t) \leq E_{\Lambda^+ + \epsilon}(0) \exp\left[2\left(\Lambda^+ + \epsilon\right)t\right] \qquad \text{(II.1.29)}$$

позволяющая увидеть, что параметр $\Lambda^+ + \epsilon$ (1.28), (1.29) оценивает инкременты решений начально–краевой задачи (1.13) сверху.

Сравнение соотношений (1.27) и (1.29) даёт возможность заключить, что параметр Λ^+ оценивает скорость ω_* роста решений смешанной задачи (1.13), (1.24) как снизу, так и сверху:

$$\Lambda^+ - \delta_1 \leq \omega_* \leq \Lambda^+ + \epsilon \qquad \text{(II.1.30)}$$

Двойное неравенство (1.30) демонстрирует, что наиболее быстро нарастают те решения начально–краевой задачи (1.13), у которых инкрементом служит величина Λ^+ (1.28).

В итоге, если условие (1.18) выполнено, то, вычислив значение параметра Λ^+ по формулам (1.25), (1.28), несложно ответить на вопрос, за какое характерное время «испортятся» установившиеся вращательно–симметричные МГД течения (1.9)?

ПРИМЕР. Рассматриваются стационарные вращательно–симметричные течения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в магнитном поле:

$$\boldsymbol{u^0} = \left(0,\ v^0,\ 0\right),\ \boldsymbol{h^0} = \left(0,\ h_2^0,\ 0\right);\ v^0 \equiv \frac{c_1}{r},\ h_2^0 \equiv c_2 r\sqrt{\ln r} \qquad \text{(II.1.31)}$$

(здесь c_1 и c_2 — произвольные положительные постоянные величины). Полагается, что жидкость целиком наполняет двусвязный осесимметричный сосуд

$$\tau \equiv \{(r,\, z):\ r_1 < r < r_2,\ 0 < z < z_1\} \tag{II.1.32}$$

где r_1, r_2 и z_1 — некие положительные постоянные.

Если в качестве функции Q (1.9) взять просто координату r, то, как показывают прямые расчёты, условие (1.18) будет истинно для установившихся течений (1.31) всюду в сосуде τ (1.32).

В этом случае стационарные течения (1.31) окажутся неустойчивыми, например, по отношению к полям лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ (1.13) и возмущениям $\boldsymbol{u}$ (1.10) поля скорости, обладающим в начальный момент времени $t = 0$ следующим видом

$$\boldsymbol{\xi_0} = \left(\frac{\psi_{1z}}{r},\ 0,\ -\frac{\psi_{1r}}{r}\right) \tag{II.1.33}$$

$$\boldsymbol{u_0} = \left(\frac{\psi_{2z}}{r},\ 0,\ -\frac{\psi_{2r}}{r}\right);\ \psi_1 \equiv \sin^2\left(\frac{2\pi r}{r_1}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi r}{r_2}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi z}{z_1}\right)$$

$$\psi_2 \equiv \sin^3\left(\frac{2\pi r}{r_1}\right)\sin^3\left(\frac{2\pi r}{r_2}\right)\sin^3\left(\frac{2\pi z}{z_1}\right)$$

Нетрудно убедиться, что вектор–функции $\boldsymbol{u_0}$ и $\boldsymbol{\xi_0}$ (1.33) являются бездивергентными внутри сосуда τ (1.32), а также удовлетворяют условиям (1.10) и (1.13) соответственно на его поверхности

$$\partial\tau \equiv \{(r,\, z):\ r = r_1,\ r = r_2,\ z = 0,\ z = z_1\}$$

В результате, для установившихся течений (1.31) с помощью соотношений (1.33) могут быть выписаны нижние (1.23), (1.27) и верхняя

(1.29) оценки скорости роста малых вращательно–симметричных возмущений (1.10), (1.13), (1.24), а по формулам (1.25), (1.28) определена величина инкремента Λ^+ самых быстро нарастающих возмущений.

РЯД ЗАВЕРШАЮЩИХ ЗАМЕЧАНИЙ:

а) наложенное в пункте «ЛАГРАНЖЕВЫ СМЕЩЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛ ЛЯПУНОВА» ограничение на допустимые малые возмущения никак не влияет на общность полученных в данном параграфе результатов; дело в том, что для демонстрации неустойчивости достаточно указать хотя бы одно растущее возмущение; именно это и было сделано для выделенного класса движений (1.13);

б) если условие (1.18) переписать в виде

$$[Q'(r)]^{-2}\left[U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r)+U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right]>0 \qquad \text{(II.1.34)}$$

то сразу же можно прийти к выводу, что при выполнении неравенства (1.34) стационарные вращательно–симметричные МГД течения (1.9) будут неустойчивы по линейному приближению вне зависимости от выбора дополнительного скалярного поля q (1.5); данное заключение подтверждается также и тем, что в выражение для интеграла Π (1.14) функция Q (1.9) вообще не входит;

в) если предположить, что $\boldsymbol{h}\equiv 0$, $Q\equiv r$, то из соотношения (1.12) будет вытекать критерий Релея [5, 53, 62] о «центробежной» устойчивости вращающихся потоков относительно малых вращательно–симметричных возмущений; следовательно, установленное в процессе настоящего исследования необходимое и достаточное условие (1.12) линейной устойчивости стационарных вращательно–симметричных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости в магнитном поле представляет собой обобщение этого критерия на модель одножидкостной бездиссипативной магнитной гидродинамики.

§2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ВИНТОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В настоящем параграфе изучается по линейному приближению задача устойчивости стационарных винтовых МГД течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью [135, 137, 138]. Прямым методом Ляпунова получается необходимое и достаточное условие устойчивости данных течений по отношению к малым возмущениям того же типа симметрии. Для одного частного класса рассматриваемых установившихся течений конструируются априорные двусторонние экспоненциальные оценки нарастания малых винтовых возмущений, при этом инкременты экспонент, которые фигурируют в настоящих оценках, вычисляются по параметрам стационарных течений и начальным данным исследуемых возмущений. Обособляется подкласс наиболее быстро растущих малых винтовых возмущений и обнаруживается точная формула для определения скорости их нарастания. Строится пример установившихся винтовых МГД течений и начальных малых возмущений той же симметрии, чьё развитие на линейной стадии будет происходить согласно выведенным оценкам. Для неустойчивых стационарных винтовых течений общего вида получаются достаточные условия практической линейной неустойчивости и конструируется априорная экспоненциальная оценка снизу роста малых винтовых же возмущений, причём инкремент содержащейся в ней экспоненты служит произвольным по своей величине положительным параметром.

ПОСТАНОВКА ТОЧНОЙ ЗАДАЧИ. В цилиндрической системе координат r, φ, z изучаются винтовые движения однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости в магнитном поле $\boldsymbol{h} = (0,\, h_2,\, h_3)$. Для описания этих движений удобно применить винтовую координату $\mu \equiv a\varphi - bz$ (здесь a — любое целое число, а b — всякое вещественное). Тогда поле скорости $\boldsymbol{u} = (u,\, v,\, w)$, поле давления p и магнитное поле $\boldsymbol{h}$ будут являться функциями от трёх независимых переменных: координат r, μ и времени t. В таком случае уравнения (1.1) пространственных МГД движений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью могут быть с использованием обозначений [66, 90] преобразованы к форме

$$Du - K\beta\gamma - \frac{(a\gamma)^2}{rR^2} = -\,p_r^* + \rho_1 g_1 - \rho_2 r \qquad \text{(II.2.1)}$$

$$D\rho_1 = 0,\ D\left(\frac{r\gamma}{R}\right) + K\beta r u = -\,p_\mu^*,\ D\rho_2 = 0,\ Dh_3 = 0,\ u_r + \frac{u}{r} + \frac{\gamma_\mu}{r} = 0$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\gamma}{r}\frac{\partial}{\partial \mu},\ \gamma \equiv av - brw,\ \beta \equiv aw + brv,\ R \equiv a^2 + b^2 r^2$$

$$K \equiv \frac{2ab}{R^2},\ p^* \equiv p + \frac{h_2^2 + h_3^2}{8\pi},\ \rho_1 \equiv \beta^2,\ g_1 \equiv \frac{b^2 r}{R^2},\ \rho_2 \equiv \frac{h_2^2}{4\pi r^2}$$

где под индексами из независимых переменных, как и раньше, подразумеваются соответствующие частные производные.

Стоит отметить, что при выводе системы соотношений (2.1) учитывалась связь

$$\frac{ah_2}{r} - bh_3 = 0 \tag{II.2.2}$$

(здесь h_2 и h_3 — угловая и осевая составляющие магнитного поля $\boldsymbol{h}$). Данная связь вытекает из соотношения

$$D\left(\frac{ah_2}{r} - bh_3\right) = 0 \tag{II.2.3}$$

которое, в свою очередь, следует из трёхмерного уравнения «вмороженности» магнитных силовых линий в перемещающееся вещество жидкости [192] при наличии винтовой симметрии движения и отсутствии у магнитного поля $\boldsymbol{h}$ радиального компонента h_1. Действительно, из соотношения (2.3) видно, что если исходные угловую h_2 и осевую h_3 составляющие магнитного поля $\boldsymbol{h}$ задать так, чтобы при $t = 0$ было справедливо условие (2.2), то оно останется истинным и во все дальнейшие моменты времени.

Важным свойством соотношений (2.1) служит сохранение значений функций ρ_1, ρ_2 и h_3 в жидких частицах. Исходя из этого, в духе статьи [90], логично включить в рассмотрение дополнительное скалярное поле $q(r,\ \mu,\ t)$, чьи значения тоже будут сохраняться в каждой жидкой частице

$$Dq = 0 \tag{II.2.4}$$

В качестве данного поля q можно применить, к примеру, одну из лагранжевых координат жидких частиц.

Ниже будет исследоваться расширенная система уравнений движения (2.1), (2.2), (2.4).

Полагается, что изучаемая жидкость целиком заполняет область τ с покоящейся непроницаемой твёрдой бесконечной по проводимости поверхностью $\partial\tau$. Это означает, что в процессе движения ни сама жидкость, ни находящееся в ней магнитное поле не проникают за пределы области течения τ. Поскольку для движений жидкости характерна винтовая симметрия, граница $\partial\tau$ области также должна иметь данную симметрию, то есть описываться функциями двух независимых переменных в форме (α — номер того или иного компонента поверхности $\partial\tau$):

$$s_\alpha(r,\ \mu) = 0;\ \alpha = 1,\ 2 \tag{II.2.5}$$

Последние два соотношения позволяют представить граничные условия для уравнений (2.1) в виде

$$u\,(s_\alpha)_r + \frac{\gamma}{r}\,(s_\alpha)_\mu = 0;\ \alpha = 1,\ 2 \tag{II.2.6}$$

Начальные данные для соотношений (2.1), (2.4) при $t = 0$ берутся в форме

$$u = u_0(r,\ \mu),\ \gamma = \gamma_0(r,\ \mu),\ \rho_1 = \rho_{10}(r,\ \mu) \tag{II.2.7}$$

$$\rho_2 = \rho_{20}(r,\ \mu),\ h_3 = h_{30}(r,\ \mu),\ q = q_0(r,\ \mu)$$

при этом функции $u_0(r,\ \mu)$ и $\gamma_0(r,\ \mu)$ подбираются таким образом, чтобы внутри области течения τ превращалось в тождество шестое уравнение системы (2.1), а на её поверхности $\partial\tau$ было верно условие (2.6). Кроме того, между функциями $\rho_{20}(r,\ \mu)$ и $h_{30}(r,\ \mu)$ существует связь через соотношение (2.2).

На решениях смешанной задачи (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7) остаются неизменными функционал энергии E_1 и интеграл движения I, который определяется посредством произвольной функции $\Phi(q)$:

$$E_1 \equiv T_1 + \Pi_1 + \Pi_2 = \text{const} \tag{II.2.8}$$

$$2T_1 \equiv \int\limits_\tau \left(\frac{\gamma^2}{R} + u^2\right) d\tau,\ \Pi_i \equiv \int\limits_\tau \rho_i U_i d\tau,\ i = 1,\ 2,\ d\tau \equiv r dr d\mu$$

$$U_1(r) \equiv \frac{1}{2R} + C_1,\ U_2(r) \equiv \frac{r^2}{2} + C_2;\ I \equiv \int\limits_\tau \Phi(q) d\tau = \text{const}$$

где C_1 и C_2 — постоянные величины, являющиеся значениями функций U_1 и U_2 на какой–либо из составляющих границы $\partial\tau$ (2.5) области течения соответственно.

Начально–краевая задача (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7) обладает точными стационарными решениями вида

$$u = \gamma = 0,\ \rho_1 = \rho_1^0(r) \tag{II.2.9}$$

$$\rho_2 = \rho_2^0(r),\ h_3 = h_3^0(r),\ q = Q(r),\ p^* = P^*(r);\ \frac{dP^*}{dr} = \rho_1^0 g_1 - \rho_2^0 r$$

(здесь поля $h_3^0(r)$ и $Q(r)$ суть некие функции аргумента r; поле же $h_2^0(r)$ вычисляется по выбранному полю $h_3^0(r)$ при помощи связи (2.2)).

Если полю Q характерно то свойство, что $dQ/dr \neq 0$ повсюду в области τ [193], тогда из соотношений (2.8), (2.9) вытекает

$$\rho_1^0 = \rho_1^0(Q),\ \rho_2^0 = \rho_2^0(Q),\ U_1 = U_1(Q),\ U_2 = U_2(Q)$$

$$Q \in \left(Q^-,\ Q^+\right);\ Q^- \equiv \min Q(r),\ Q^+ \equiv \max Q(r),\ r \in \tau$$

ПОСТАНОВКА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ. Далее смешанная задача (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7) линеаризуется около точных стационарных решений (2.9)

$$u'_t - K\beta^0\gamma' = -p_r^{*\prime} + \rho'_1 g_1 - \rho'_2 r \tag{II.2.10}$$

$$\frac{r\gamma_t'}{R} + K\beta^0 r u' = -p_\mu^{*\prime},\ \rho_{1t}' + u'\frac{d\rho_1^0}{dr} = 0,\ \rho_{2t}' + u'\frac{d\rho_2^0}{dr} = 0$$

$$h_{3t}' + u'\frac{dh_3^0}{dr} = 0,\ q_t' + u'\frac{dQ}{dr} = 0,\ u_r' + \frac{u'}{r} + \frac{\gamma_\mu'}{r} = 0,\ \frac{ah_2'}{r} = bh_3'$$

где $\beta^0 \equiv aW + brV$ ($aV = brW$; $V = V(r)$ или $W = W(r)$ — произвольная функция радиуса r).

Система уравнений (2.10) описывает пространственно–временную эволюцию малых возмущений полей скорости $\boldsymbol{u'}$, модифицированного давления $p^{*\prime}$, магнитного поля $\boldsymbol{h'}$ и дополнительного скалярного поля q' в пределах области течения τ. К настоящей системе добавляются условие непротекания жидкости через поверхность $\partial\tau$, а также начальные данные для возмущений

$$u'\,(s_\alpha)_r + \frac{\gamma'}{r}\,(s_\alpha)_\mu = 0 \qquad \text{(II.2.11)}$$

$$s_\alpha(r,\,\mu) = 0;\ \alpha = 1,\,2;\ t = 0:\ u' = u_0'(r,\,\mu),\ \gamma' = \gamma_0'(r,\,\mu)$$

$$\rho_1' = \rho_{10}'(r,\,\mu),\ \rho_2' = \rho_{20}'(r,\,\mu),\ h_3' = h_{30}'(r,\,\mu),\ q' = q_0'(r,\,\mu)$$

Для решений начально–краевой задачи (2.10), (2.11) имеет место сохранение линейного аналога E функционала энергии E_1

$$E \equiv T + \Pi = \mathrm{const} \qquad \text{(II.2.12)}$$

$$2T \equiv \int\limits_\tau \left(\frac{\gamma'^2}{R} + u'^2\right) d\tau,\ 2\Pi \equiv -\int\limits_\tau \left\{\left[\frac{dU_1}{dQ}\frac{d\rho_1^0}{dQ} + \frac{dU_2}{dQ}\frac{d\rho_2^0}{dQ}\right] q'^2\right\} d\tau$$

Если во всей области τ выполняется двойное неравенство

$$0 \le -\frac{dU_1}{dQ}\frac{d\rho_1^0}{dQ} - \frac{dU_2}{dQ}\frac{d\rho_2^0}{dQ} < +\infty \qquad \text{(II.2.13)}$$

то из независимости интеграла E (2.12) от времени следует устойчивость установившихся течений (2.9) относительно малых винтовых возмущений (2.10), (2.11) [90].

ЧАСТНЫЙ КЛАСС ТОЧНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ (2.9). Ниже для подкласса

$$u = \gamma = 0,\ v = V(r) = CrR \tag{II.2.14}$$

$$w = W(r) = \frac{a}{b}CR,\ \rho_1 = \rho_1^0(r) = \left(\frac{C}{b}\right)^2 R^4,\ \rho_2 = \rho_2^0(r),\ h_3 = h_3^0(r)$$

$$q = Q(r),\ p^* = P^*(r);\ \frac{dP^*}{dr} = \left(\frac{C}{b}\right)^2 R^4 g_1 - \rho_2^0 r$$

(здесь C — некая постоянная) точных стационарных решений (2.9) смешанной задачи (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7) будет продемонстрировано, что условие (2.13) линейной устойчивости служит не только достаточным, но и необходимым.

С этой целью линеаризованная начально–краевая задача (2.10), (2.11) переписывается в форме, которая отвечает точным стационарным решениям (2.14), а именно

$$u_t' - 2aC\gamma' = -p_r^{*\prime} + \rho_1' g_1 - \rho_2' r \tag{II.2.15}$$

$$\frac{r\gamma_t'}{R} + 2aCru' = -p_\mu^{*\prime},\ \rho_{1t}' + 8rC^2R^3u' = 0,\ \rho_{2t}' + u'\frac{d\rho_2^0}{dr} = 0$$

$$h_{3t}' + u'\frac{dh_3^0}{dr} = 0,\ q_t' + u'\frac{dQ}{dr} = 0,\ u_r' + \frac{u'}{r} + \frac{\gamma_\mu'}{r} = 0,\ \frac{ah_2'}{r} = bh_3' \text{ в } \tau$$

$$u'\left(s_\alpha\right)_r + \frac{\gamma'}{r}\left(s_\alpha\right)_\mu = 0 \text{ на } \partial\tau:\ s_\alpha(r,\ \mu) = 0;\ \alpha = 1,\ 2$$

$$t = 0:\ u' = u_0'(r,\ \mu),\ \gamma' = \gamma_0'(r,\ \mu),\ \rho_1' = \rho_{10}'(r,\ \mu)$$

$$\rho_2' = \rho_{20}'(r,\ \mu),\ h_3' = h_{30}'(r,\ \mu),\ q' = q_0'(r,\ \mu)$$

Далее штрихи у полей возмущений, отличающие их от полных решений смешанной задачи (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7), опускаются ради упрощения записи математических соотношений.

ФУНКЦИОНАЛ ЛЯПУНОВА. Пусть условие (2.13) нарушается. В таком случае ниже будет показана неустойчивость любого из установившихся течений (2.14). Данный результат может быть получен посредством отыскания среди малых винтовых возмущений (2.15) хотя бы одного возмущения, которое нарастало бы со временем не медленнее, чем экспоненциально. Поэтому далее рассматриваются движения жидкости, чьим характерным свойством является равенство нулю лагранжевых возмущений дополнительного скалярного поля q (2.4), (2.15). Другими словами, данные возмущения представляют собой отклонения жидких частиц от соответствующих линий тока стационарных течений (2.14) и проще всего описываются с помощью поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}(r,\, \mu,\, t) = (\xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3)$ (I.13) [24]:

$$u = \xi_{1t},\ \gamma = \zeta_t;\ \zeta \equiv a\xi_2 - br\xi_3 \qquad \text{(II.2.16)}$$

$$r\xi_1 = -\,\psi_\mu,\ \zeta = \psi_r;\ \psi = \psi(r,\, \mu,\, t)$$

Принимая во внимание соотношения (2.16), начально–краевую задачу (2.15) можно привести к виду

$$\frac{\psi_{\mu tt}}{r} + 2aC\psi_{rtt} = p_r^* - \rho_1 g_1 + \rho_2 r \qquad \text{(II.2.17)}$$

$$\frac{r}{R}\psi_{rtt} - 2aC\psi_{\mu tt} = -\,p_\mu^*,\ \rho_1 = 8C^2R^3\psi_\mu,\ \rho_2 = \frac{\psi_\mu}{r}\rho_2^{0\prime}(r)$$

$$h_3 = \frac{\psi_\mu}{r}h_3^{0\prime}(r),\ q = \frac{\psi_\mu}{r}Q'(r),\ \frac{ah_2}{r} = bh_3,\ (r,\, \mu) \in \tau$$

$$(s_\alpha)_r\,\psi_\mu = (s_\alpha)_\mu\,\psi_r,\ (r,\, \mu) \in \partial\tau:\ s_\alpha(r,\, \mu) = 0;\ \alpha = 1,\, 2$$

$$t = 0:\ \psi_r = (\psi_r)_0\,(r,\, \mu),\ \psi_{rt} = (\psi_{rt})_0\,(r,\, \mu)$$

$$\psi_\mu = (\psi_\mu)_0\,(r,\, \mu),\ \psi_{\mu t} = (\psi_{\mu t})_0\,(r,\, \mu)$$

где штрихом сверху обозначена производная той либо иной функции по её аргументу.

Линейный аналог E (2.12) интеграла энергии E_1 (2.8) остаётся неизменным и на решениях смешанной задачи (2.16), (2.17) тоже, однако форма его записи будет несколько другой:

$$E \equiv T + \Pi = \mathrm{const} \tag{II.2.18}$$

$$2T \equiv \int\limits_{\tau} \left(\frac{\psi_{rt}^2}{R} + \frac{\psi_{\mu t}^2}{r^2} \right) d\tau$$

$$2\Pi \equiv - \int\limits_{\tau} \left\{ \left[8rC^2R^3U_1'(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r) \right] \frac{\psi_\mu^2}{r^2} \right\} d\tau$$

Ниже в исследовании будет использоваться вспомогательный интеграл [118, 136]

$$M \equiv \int\limits_{\tau} \left\{ \frac{\psi_\mu^2}{r^2} + \frac{\psi_r^2}{R} \right\} d\tau \tag{II.2.19}$$

двукратное дифференцирование которого по времени и последующие преобразования с применением соотношений (2.16)–(2.18) позволяют прийти к равенству $M''(t) = 4(T - \Pi) = 8T - 4E$ [136]. Умножая теперь это равенство на произвольный постоянный множитель λ и вычитая результат из соотношения (2.18), нетрудно построить уравнение

$$E_\lambda'(t) = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda T_\lambda \tag{II.2.20}$$

$$E_\lambda \equiv T_\lambda + \Pi_\lambda, \; 2\Pi_\lambda \equiv 2\Pi + \lambda^2 M$$

$$2T_\lambda \equiv 2T - \lambda M'(t) + \lambda^2 M = \int\limits_{\tau} \left[\left(\frac{\psi_{\mu t} - \lambda\psi_\mu}{r} \right)^2 + \frac{(\psi_{rt} - \lambda\psi_r)^2}{R} \right] d\tau$$

Предполагается, что $\lambda > 0$. Тогда из соотношения (2.20), благодаря неотрицательности функционала T_λ, вытекает дифференциальное неравенство $E'_\lambda(t) \le 2\lambda E_\lambda$, чьё интегрирование даёт возможность установить соотношение

$$E_\lambda(t) \le E_\lambda(0)\exp(2\lambda t) \qquad \text{(II.2.21)}$$

Неравенство (2.21) справедливо как для всяких решений начально–краевой задачи (2.16), (2.17), так и для любых положительных значений постоянной величины λ. Существенно, что при выводе настоящего неравенства оказалось не нужным налагать какие бы то ни было ограничения на знак функционала Π (2.18).

Поскольку далее для конструирования верхней и нижних априорных экспоненциальных оценок роста изучаемых малых винтовых возмущений (2.16), (2.17) будет использоваться конкретно соотношение (2.21), то это обстоятельство и позволяет рассматривать ниже интеграл E_λ (2.20) в качестве функционала Ляпунова [16, 22, 136].

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ. Путём подбора надлежащих начальных данных для полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ и возмущений поля скорости $\boldsymbol{u}$, которые вычисляются по наперёд заданным функциям $(\psi_r)_0$, $(\psi_{rt})_0$, $(\psi_\mu)_0$ и $(\psi_{\mu t})_0$ (2.16), (2.17), и посредством неравенства (2.21) могут быть построены априорные экспоненциальные оценки сверху и снизу нарастания малых винтовых возмущений стационарных течений (2.14), а также получена точная формула для определения скорости роста самых быстро нарастающих возмущений.

Именно, пусть установившиеся винтовые МГД течения (2.14) таковы, что в какой–то части области течения τ условие (2.13) перестаёт быть истинным. Это означает, что можно выбрать начальные поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi_0}$ (2.16), (2.17) удовлетворяющими неравенству $\Pi(0) < 0$. Так как поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ и возмущения поля скорости $\boldsymbol{u}$ (2.16), (2.17) в начальный момент времени $t = 0$ задаются независимо друг от друга, то в качестве последних могут быть взяты такие векторные функции $\boldsymbol{u_0}$, чтобы было верно соотношение $T(0) \leq |\Pi(0)|$.

В этом случае интеграл $E_\lambda(0)$, как то следует из равенств (2.20), служит полиномом второй степени от λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (2.19) при λ^2 и свободным членом $E(0) \leq 0$ (2.18):

$$E_\lambda(0) \equiv E(0) - \frac{\lambda}{2}M'(0) + \lambda^2 M(0) \qquad \text{(II.2.22)}$$

Если $\lambda > 0$, то из соотношения (2.22) вытекает неравенство $E_\lambda(0) < < 0$ на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda_1 \equiv B_1 + \sqrt{B_2};\ B_1 \equiv \frac{M'(0)}{4M(0)},\ B_2 \equiv B_1^2 - \frac{E(0)}{M(0)} \qquad \text{(II.2.23)}$$

Соотношения (2.21) и $E_\lambda(0) < 0$ говорят о том, что решения смешанной задачи (2.16), (2.17) растут со временем не медленнее, чем экспоненциально.

Пусть $\lambda = \Lambda_1 - \delta$ (со всяким δ из промежутка $]0,\ \Lambda_1[$). Тогда неравенство (2.21) перепишется в виде

$$E_{\Lambda_1-\delta}(t) \leq E_{\Lambda_1-\delta}(0) \exp\left[2\left(\Lambda_1 - \delta\right)t\right]\ \left(E_{\Lambda_1-\delta}(0) < 0\right) \qquad \text{(II.2.24)}$$

Обращаясь теперь к определениям функционалов E_λ, T_λ и Π_λ (2.20), следует заметить, что

$$E_\lambda(t) \geq \Pi(t) \qquad \text{(II.2.25)}$$

Настоящее соотношение, наряду со связями (2.18), позволяет представить неравенство (2.24) в форме

$$-\Pi(t) \geq |E_{\Lambda_1-\delta}(0)| \exp\left[2\left(\Lambda_1 - \delta\right)t\right] \qquad \text{(II.2.26)}$$

Соотношение (2.26) демонстрирует, что параметр $\Lambda_1 - \delta$ (2.23), (2.24) оценивает инкременты решений начально–краевой задачи (2.16), (2.17) снизу.

Оценку (2.26) можно серьёзно улучшить, если начальные данные (2.17) подчинить требованиям

$$(\psi_{rt})_0 = \lambda\,(\psi_r)_0\,,\;(\psi_{\mu t})_0 = \lambda\,(\psi_\mu)_0 \qquad \text{(II.2.27)}$$

Конкретно, пусть выполняются условия (2.27). В этом случае соотношения (2.20) помогают сделать заключение, что $T_\lambda(0) = 0$, $E_\lambda(0) = \Pi_\lambda(0)$. Вместе со связями (2.20), (2.22) настоящие равенства (при условии выбора параметра λ положительным, а начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi_0}$ (2.16), (2.17) обеспечивающими справедливость соотношения $\Pi(0) < 0$) способствуют получению того результата, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda \equiv \sqrt{-\frac{2\Pi(0)}{M(0)}} \qquad \text{(II.2.28)}$$

истинно неравенство $\Pi_\lambda(0) < 0$. Отсюда вытекает, что, считая параметр λ равным $\Lambda - \delta_1$ (с любым δ_1 из промежутка $]0,\,\Lambda[$), несложно преобразовать соотношение (2.21) к виду

$$E_{\Lambda-\delta_1}(t) \leq \Pi_{\Lambda-\delta_1}(0)\exp\left[2\left(\Lambda - \delta_1\right)t\right]\;\left(\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) < 0\right) \qquad \text{(II.2.29)}$$

Соотношение (2.29) может быть приведено к следующей окончательной форме

$$-\,\Pi(t) \geq \left|\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0)\right|\exp\left[2\left(\Lambda - \delta_1\right)t\right] \qquad \text{(II.2.30)}$$

если проделать необходимые выкладки при учёте связей (2.18) и (2.25).

Неравенство (2.30) свидетельствует о том, что параметр $\Lambda - \delta_1$ (2.28), (2.29) является величиной, ограничивающей снизу значения инкрементов решений смешанной задачи (2.16), (2.17), (2.27).

Из сопоставления оценок (2.26) и (2.30) вытекает, что решения начально–краевой задачи (2.16), (2.17), начальные данные которых отвечают условиям (2.27), нарастают быстрее всех остальных её решений. При этом можно показать, что наиболее быстро растущими решениями смешанной задачи (2.16), (2.17), (2.27) будут те, чьи инкременты вычисляются по формуле

$$\Lambda^{+} \equiv \sup_{\boldsymbol{\xi_0}(r,\,\mu)} \Lambda \tag{II.2.31}$$

В самом деле, пусть верно неравенство $\lambda > \Lambda^{+}$. Тогда для всех допустимых начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi_0}$ (2.16), (2.17) будет удовлетворяться соотношение $\Pi_\lambda(0) > 0$. Данный факт означает, что интеграл E_λ (2.20) тоже будет положительно определён для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi_0}$ и возмущений поля скорости $\boldsymbol{u_0}$ (2.16), (2.17).

Следовательно, при $\lambda = \Lambda^{+} + \epsilon$ (здесь $\epsilon > 0$) из неравенства (2.21) вытекает

$$E_{\Lambda^{+}+\epsilon}(t) \leq E_{\Lambda^{+}+\epsilon}(0) \exp\left[2\left(\Lambda^{+} + \epsilon\right)t\right] \tag{II.2.32}$$

Это соотношение говорит о том, что параметр $\Lambda^{+} + \epsilon$ (2.31), (2.32) оценивает инкременты решений начально–краевой задачи (2.16), (2.17) сверху.

Из сравнения неравенств (2.30) и (2.32) следует, что параметр Λ^{+} (2.31) даёт оценку скорости ω_* нарастания решений смешанной задачи

(2.16), (2.17), (2.27) как снизу, так и сверху:

$$\Lambda^+ - \delta_1 \leq \omega_* \leq \Lambda^+ + \epsilon \tag{II.2.33}$$

Соотношение (2.33) демонстрирует, что наиболее быстро растут те решения начально–краевой задачи (2.16), (2.17), инкремент Λ^+ которых определяется формулами (2.28), (2.31).

Таким образом, если условие (2.13) не выполняется, то после вычисления значения скорости ω_* нарастания самых быстро растущих решений смешанной задачи (2.16), (2.17), (2.27) посредством соотношений (2.28), (2.31), (2.33) может быть найден ответ на вопрос: за какое характерное время малые винтовые возмущения (2.15) приведут стационарные винтовые же МГД течения (2.14) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью к разрушению?

ПРИМЕР. Исследуются установившиеся винтовые течения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости, обладающей идеальной проводимостью, в магнитном поле на конечном по длине участке канала с сечением в виде кольца:

$$\boldsymbol{u}^{\mathbf{0}} = \Big(0,\ CrR,\ \frac{a}{b}CR\Big) \tag{II.2.34}$$

$$\boldsymbol{h}^{\mathbf{0}} = \Big(0,\ 6CrR,\ 6\frac{a}{b}CR\Big)$$

$$\tau \equiv \{(r,\ \mu):\ 0 < r_1 < r < r_2,\ 0 < \mu_1 < \mu < \mu_2\}$$

$$\partial\tau \equiv \{(r,\ \mu):\ r = r_1,\ r = r_2,\ \mu = \mu_1,\ \mu = \mu_2\}$$

где r_1, r_2, μ_1 и μ_2 — известные постоянные величины.

Прямой проверкой можно убедиться в том, что для стационарных течений (2.34) условие (2.13) справедливо везде в области τ.

Изучаются начальные возмущения в форме

$$\xi_{10} = -\frac{\psi_{1\mu}}{r},\ \zeta_0 = \psi_{1r} \tag{II.2.35}$$

$$\psi_1 \equiv A\sin^2\left(\frac{2\pi r}{r_1}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi r}{r_2}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi\mu}{\mu_1}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi\mu}{\mu_2}\right)$$

$$u_0 = -\frac{\psi_{2\mu}}{r},\ \gamma_0 = \psi_{2r}$$

$$\psi_2 \equiv B\sin^3\left(\frac{2\pi r}{r_1}\right)\sin^3\left(\frac{2\pi r}{r_2}\right)\sin^3\left(\frac{2\pi\mu}{\mu_1}\right)\sin^3\left(\frac{2\pi\mu}{\mu_2}\right)$$

(здесь A и B — некие постоянные).

Непосредственные расчёты показывают, что малые винтовые возмущения (2.15)–(2.17) с начальными данными (2.35) соответствуют всем принятым ранее требованиям как внутри области течения τ, так и на её границе $\partial\tau$, то есть установившиеся течения (2.34) будут неустойчивы. Поэтому данные возмущения будут эволюционировать во времени согласно оценкам (2.26), (2.30) и (2.32), а их максимальная скорость роста ω_* будет определяться формулами (2.28), (2.31) и (2.33).

Итак, прямым методом Ляпунова получено, что двойное неравенство (2.13) служит необходимым и достаточным условием линейной устойчивости для подкласса (2.14) стационарных винтовых МГД течений (2.9) однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости по отношению к малым винтовым же возмущениям (2.15)–(2.17). Установившиеся течения из этого подкласса устроены следующим образом: радиальные компоненты поля скорости и магнитного поля равны нулю; осевая составляющая магнитного поля представляет собой произвольную функцию радиуса, а осевой компонент поля скорости — квадратичную; угловые составляющие поля скорости и магнитного поля вычисляются по соответствующим осевым компонентам и также являются функциями радиуса. На поля же возмущений никаких дополнительных ограничений не налагается.

АПРИОРНАЯ НИЖНЯЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА. Дальнейшее рассмотрение вновь концентрируется на точных стационарных решениях (2.9) начально–краевой задачи (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7) и их устойчивости относительно малых винтовых возмущений (2.10), (2.11).

Ниже будет продемонстрировано, что соотношение (2.13) служит и необходимым, и достаточным условием линейной устойчивости по отношению к малым винтовым возмущениям (2.10), (2.11) не только для частного класса (2.14), но и для всех установившихся винтовых же МГД течений (2.9) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в целом. Более того, для неустойчивых стационарных течений (2.9) будут получены достаточные условия практической линейной неустойчивости и сконструирована априорная экспоненциальная оценка снизу нарастания исследуемых малых возмущений.

Как и раньше, данные результаты могут быть установлены при помощи изучения таких движений жидкости, которым свойственно то, что лагранжевы возмущения дополнительного скалярного поля q (2.4), (2.10), (2.11) всё время остаются по своей величине равными нулю. Однако, теперь эти движения удобнее описывать посредством поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}(r,\ \mu,\ t) = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ (I.13) [24] вида

$$u = \xi_{1t},\ \gamma = \zeta_t;\ \zeta \equiv a\xi_2 - br\xi_3 \tag{II.2.36}$$

Исходя из соотношений (2.36), смешанную задачу (2.10), (2.11) можно представить в форме

$$\xi_{1tt} - K\beta^0\zeta_t = -\,p_r^* + \rho_1 g_1 - \rho_2 r \tag{II.2.37}$$

$$\frac{r\zeta_{tt}}{R} + K\beta^0 r\xi_{1t} = -\,p_\mu^*,\ \rho_1 = -\,\xi_1\rho_1^{0\prime}(r),\ \rho_2 = -\,\xi_1\rho_2^{0\prime}(r)$$

$$h_3 = -\,\xi_1 h_3^{0\prime}(r),\ q = -\,\xi_1 Q'(r), \xi_{1r} + \frac{\xi_1}{r} + \frac{\zeta_\mu}{r} = 0,\ \frac{ah_2}{r} = bh_3 \text{ в } \tau$$

$$\xi_1\left(s_\alpha\right)_r + \frac{\zeta}{r}\left(s_\alpha\right)_\mu = 0 \text{ на } \partial\tau:\ s_\alpha(r,\ \mu) = 0;\ \alpha = 1,\ 2$$

$$t = 0:\ \xi_1 = \xi_{10}\left(r,\ \mu\right),\ \xi_{1t} = \left(\xi_{1t}\right)_0\left(r,\ \mu\right)$$

$$\zeta = \zeta_0\left(r,\ \mu\right),\ \zeta_t = \left(\zeta_t\right)_0\left(r,\ \mu\right)$$

Линейный аналог E (2.12) функционала энергии E_1 (2.8) и вспомогательный интеграл M (2.19) примут в данном случае вид

$$E \equiv T + \Pi = \mathrm{const} \tag{II.2.38}$$

$$2T \equiv \int\limits_\tau \left(\frac{\zeta_t^2}{R} + \xi_{1t}^2\right) d\tau,\ 2\Pi \equiv -\int\limits_\tau \left\{\left[U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right]\xi_1^2\right\} d\tau$$

$$M \equiv \int\limits_\tau \left(\frac{\zeta^2}{R} + \xi_1^2\right) d\tau$$

Далее функционал M (2.38) дважды дифференцируется по аргументу t с применением связей (2.36)–(2.38):

$$M'(t) = 2\int\limits_\tau \left\{\xi_1\xi_{1t} + \frac{\zeta}{R}\zeta_t\right\} d\tau \tag{II.2.39}$$

$$M''(t) = 4(T - \Pi) + 2\int\limits_\tau K\beta^0\left(\xi_1\zeta_t - \zeta\xi_{1t}\right) d\tau$$

После этого посредством соотношений (2.38), (2.39) составляется равенство

$$M''(t) - 2\nu M'(t) + 2\nu^2 M = \int\limits_\tau \left\{2\left(\xi_{1t} - \nu\xi_1\right)^2 + \frac{2}{R}\left(\zeta_t - \nu\zeta\right)^2 + \right.$$

$$+ 2\left[U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right]\xi_1^2 + \left(\xi_1 + K\beta^0\zeta_t\right)^2 - \xi_1^2 - K^2\beta^{02}\zeta_t^2 +$$

$$+ \left(\xi_{1t} - K\beta^0\zeta\right)^2 - \xi_{1t}^2 - K^2\beta^{02}\zeta^2\Big\}\, d\tau$$

где ν — некая положительная постоянная. Если условие (2.13) нарушается, то, отбрасывая неотрицательные слагаемые, вводя обозначения

$$\alpha_1 \equiv \max_{r\in\tau}\left\{1,\ \frac{4a^2b^2}{R^3}\beta^{02}\right\}$$

$$\alpha_2 \equiv \max_{r\in\tau}\left\{\frac{1}{2}\left|U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right|\right\}$$

и полагая $E(t) \equiv E(0) \leq 0$ (2.38), последнее равенство несложно трансформировать в цепочку неравенств

$$M''(t) - 2\nu M'(t) + 2\nu^2 M \geq -\int\limits_\tau \left\{\xi_1^2 + K^2\beta^{02}\zeta_t^2 + \xi_{1t}^2 + K^2\beta^{02}\zeta^2\right\} d\tau \ \geq$$

$$\geq -\,\alpha_1\left(M + 2T\right) = -\,\alpha_1\left[M + 2E(0) - 2\Pi\right] \geq -\,\alpha_1\left(1 + 2\alpha_2\right)M$$

Окончательно отсюда вытекает принципиальное для последующего рассмотрения соотношение

$$M''(t) - 2\nu M'(t) + 2\left(\nu^2 + \kappa\right)M \geq 0 \qquad \text{(II.2.40)}$$

(здесь $\kappa \equiv (\alpha_1/2) + \alpha_1\alpha_2$).

Оказывается, если дифференциальное неравенство (2.40) дополнить условиями [194]

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right) > 0;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ... \qquad \text{(II.2.41)}$$

$$M'\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right) \geq 2\left(\nu + \frac{\kappa}{\nu}\right)M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right)$$

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right) \equiv M(0)\exp\left(\frac{\pi n\nu}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right)$$

$$M'\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) \equiv M'(0)\exp\left(\frac{\pi n \nu}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$
$$M(0) > 0,\ M'(0) \geq 2\left(\nu + \frac{\kappa}{\nu}\right) M(0)$$

то из него с необходимостью будет вытекать искомая априорная нижняя экспоненциальная оценка роста малых винтовых возмущений (2.36), (2.37) в виде

$$M(t) \geq A_1 \exp(\nu t) \tag{II.2.42}$$

где A_1 — известная положительная постоянная величина.

Действительно, соотношение (2.42) может быть формально проинтегрировано на полуинтервалах

$$t \in \left[\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}},\ \frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right);\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{II.2.43}$$

для чего нужно сделать несколько замен функционала M (2.38), а именно

$$1)\ M_1(t) \equiv \exp(-\nu t) M(t):\ M_1''(t) + \left(\nu^2 + 2\kappa\right) M_1 \geq 0$$
$$2)\ M_2(t) \equiv \frac{M_1(t)}{\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)}$$
$$\left[M_2'(t)\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right]'(t) - \sqrt{\nu^2+2\kappa}\, M_2'(t)\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right) \geq 0$$
$$3)\ M_3(t) \equiv M_2'(t)\cos^2\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right):\ M_3'(t) \geq 0$$

Интегрирование последнего неравенства и осуществление обратных замен дают возможность прийти к соотношению

$$M(t) \geq \left[A_{1n}\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right) + A_{2n}\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right] \times$$
$$\times \exp(\nu t) \tag{II.2.44}$$

(здесь A_{1n} и A_{2n} — произвольные постоянные).

Опираясь на нестрогость неравенства (2.44), постоянные величины A_{1n} и A_{2n} $(n = 0, 1, 2, ...)$ нетрудно связать со значениями функционала M и его производной $M'(t)$ в моменты времени $t = 2\pi n/\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}$. Таким образом, соотношение (2.44) может быть записано в следующем окончательном виде:

$$M(t) \geq f(t) \tag{II.2.45}$$

где

$$f(t) \equiv \left\{ M\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) \cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right) + \frac{1}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}} \times \right.$$
$$\left. \times \left[M'\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) - \nu M\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\right] \sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right\} \times$$
$$\times \exp\left(\nu t - \frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

Для того чтобы обосновать процедуру интегрирования неравенства (2.40) на промежутках (2.43), приведшую в итоге к априорной экспоненциальной оценке снизу (2.45), требуется посчитать производную первого порядка функции f по её аргументу t:

$$f'(t) = \left[M'\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) \cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right) + \left\{ \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}} \times \right.\right.$$
$$\times \left[M'\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) - \nu M\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\right] - \sqrt{\nu^2+2\kappa} \times$$
$$\left.\left. \times M\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\right\} \sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left(\nu t - \frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) \tag{II.2.46}$$

Учитывая соотношения (2.45) и (2.46), можно заключить, что функция $f(t)$ будет положительной и строго возрастающей на полуинтервалах (2.43) в том и лишь в том случае, когда имеют место неравенства [195]

$$M\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) > 0 \tag{II.2.47}$$

$$M'\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) \geq 2\left(\nu+\frac{\kappa}{\nu}\right) M\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

Эти неравенства как раз и являются необходимыми гарантиями правомерности изложенной выше процедуры интегрирования соотношения (2.40).

Поскольку промежутки (2.43) взаимно не пересекаются, значения функционала M и его первой производной $M'(t)$ на их левых концах могут задаваться любыми. В частности, эти значения можно взять в форме

$$M\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) \equiv M(0)\exp\left(\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$
$$M'\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) \equiv M'(0)\exp\left(\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

Тогда неравенства (2.47) будут истинны в том и только в том случае, если

$$M(0)>0,\ M'(0)\geq 2\left(\nu+\frac{\kappa}{\nu}\right)M(0)$$

а функция $f(t)$ предстанет в виде

$$f(t)=\left[M(0)\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\left\{M'(0)-\nu M(0)\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right]\exp\left(\nu t\right)$$

Подобные рассуждения могут быть проведены и тогда, когда соотношение (2.40) надо будет интегрировать на всех остальных полуинтервалах времени. Принимая во внимание данное обстоятельство, ниже результаты интегрирования дифференциального неравенства (2.40) на оставшихся временных промежутках сообщаются в форме иллюстрирующих выкладок, без излишних подробностей:

$$\text{а) } t\in\left[\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}},\ \frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

$$1)\ M_1(t) \equiv \exp(-\nu t) M(t):\ \ M_1''(t) + \left(\nu^2 + 2\kappa\right) M_1 \geq 0$$

$$2)\ M_2(t) \equiv \frac{M_1(t)}{\cos\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right)}$$

$$\left[M_2'(t) \cos\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right)\right]'(t) - \sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\, M_2'(t) \sin\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right) \geq 0$$

$$3)\ M_3(t) \equiv M_2'(t) \cos^2\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right):\ \ M_3'(t) \leq 0$$

$$4)\ M(t) \geq \left[A_{3n} \sin\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right) + A_{4n} \cos\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right)\right] \times$$

$$\times\ \exp(\nu t);\ A_{3n},\ A_{4n} - \text{const}$$

$$5)\ M(t) \geq f_1(t)$$

$$f_1(t) \equiv \left\{M\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right) \sin\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right) - \frac{1}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} \times\right.$$

$$\times \left[M'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right) - \nu \times\right.$$

$$\left.\left.\times M\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right)\right] \cos\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right)\right\} \times$$

$$\times\ \exp\left(\nu t - \frac{\pi\nu}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} - \frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right)$$

$$f_1'(t) = \left[M'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right) \sin\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right) -\right.$$

$$- \left\{\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} \left[M'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right) - \nu \times\right.\right.$$

$$\left.\times M\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right)\right] - \sqrt{\nu^2 + 2\kappa} \times$$

$$\left.\left.\times M\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right)\right\} \cos\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right)\right] \times$$

$$\times\ \exp\left(\nu t - \frac{\pi\nu}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} - \frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right)$$

$$6)\ M\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}}\right) > 0$$

$$M'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\geq 2\left(\nu+\frac{\kappa}{\nu}\right)\times$$

$$\times M\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$7)\ M\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\equiv M(0)\times$$

$$\times\ \exp\left(\frac{\pi\nu}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$M'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\equiv M'(0)\times$$

$$\times\ \exp\left(\frac{\pi\nu}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$M(0)>0,\ M'(0)\geq 2\left(\nu+\frac{\kappa}{\nu}\right)M(0)$$

$$f_1(t)=\left[M(0)\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)-\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\left\{M'(0)-\nu M(0)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\ \cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right]\exp(\nu t)$$

$$\text{б})\ t\in\left[\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}},\ \frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$1)\ M_1(t)\equiv\exp(-\nu t)M(t):\ M_1''(t)+\left(\nu^2+2\kappa\right)M_1\geq 0$$

$$2)\ M_2(t)\equiv\frac{M_1(t)}{\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)}$$

$$\left[M_2'(t)\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right]'(t)-\sqrt{\nu^2+2\kappa}\,M_2'(t)\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\geq 0$$

$$3)\ M_3(t)\equiv M_2'(t)\cos^2\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right):\ M_3'(t)\leq 0$$

$$4)\ M(t)\geq\left[A_{5n}\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)+A_{6n}\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right]\times$$

$$\times\ \exp(\nu t);\ A_{5n},\ A_{6n}\text{ — const}$$

$$5)\ M(t)\geq f_2(t)$$

$$f_2(t) \equiv -\left\{M\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\left[M'\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)-\nu\times\right.$$

$$\left.\left.\times M\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\right]\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right\}\times$$

$$\times\ \exp\left(\nu t-\frac{\pi\nu}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}-\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$f_2'(t) = -\left[M'\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)+\right.$$

$$+\left\{\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\left[M'\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)-\nu\times\right.\right.$$

$$\left.\times M\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\right]-\sqrt{\nu^2+2\kappa}\times$$

$$\left.\left.\times M\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\right\}\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right]\times$$

$$\times\ \exp\left(\nu t-\frac{\pi\nu}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}-\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$6)\ M\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)>0$$

$$M'\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\geq 2\left(\nu+\frac{\kappa}{\nu}\right)\times$$

$$\times M\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$7)\ M\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\equiv M(0)\times$$

$$\times\ \exp\left(\frac{\pi\nu}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$M'\left(\frac{\pi}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\equiv M'(0)\times$$

$$\times\ \exp\left(\frac{\pi\nu}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$M(0)>0,\ M'(0)\geq 2\left(\nu+\frac{\kappa}{\nu}\right)M(0)$$

$$f_2(t) = -\left[M(0)\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right) + \frac{1}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\left\{M'(0) - \nu M(0)\right\} \times\right.$$

$$\left.\times\,\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right]\exp(\nu t)$$

$$\text{в) } t \in \left[\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}},\ \frac{2\pi(n+1)}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$1)\ M_1(t) \equiv \exp(-\nu t)M(t):\ M_1''(t) + \left(\nu^2+2\kappa\right)M_1 \geq 0$$

$$2)\ M_2(t) \equiv \frac{M_1(t)}{\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)}$$

$$\left[M_2'(t)\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right]'(t) - \sqrt{\nu^2+2\kappa}\,M_2'(t)\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right) \geq 0$$

$$3)\ M_3(t) \equiv M_2'(t)\cos^2\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right):\ M_3'(t) \geq 0$$

$$4)\ M(t) \geq \left[A_{7n}\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right) + A_{8n}\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right] \times$$

$$\times\ \exp(\nu t);\ A_{7n},\ A_{8n} - \text{const}$$

$$5)\ M(t) \geq f_3(t)$$

$$f_3(t) \equiv \left\{-M\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right) +\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\left[M'\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) - \nu\,\times\right.$$

$$\left.\left.\times\,M\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\right]\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right\} \times$$

$$\times\,\exp\left(\nu t - \frac{3\pi\nu}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}} - \frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$f_3'(t) = \left[-M'\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right) +\right.$$

$$+\left\{\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\left[M'\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right) - \nu\,\times\right.\right.$$

$$\left.\times\,M\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}} + \frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\right] - \sqrt{\nu^2+2\kappa}\,\times$$

$$\times M\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\Bigg\}\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\Bigg] \times$$

$$\times\ \exp\left(\nu t-\frac{3\pi\nu}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}-\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$6)\ M\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)>0$$

$$M'\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\geq 2\left(\nu+\frac{\kappa}{\nu}\right)\times$$

$$\times M\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$7)\ M\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\equiv M(0)\times$$

$$\times\ \exp\left(\frac{3\pi\nu}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$M'\left(\frac{3\pi}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)\equiv M'(0)\times$$

$$\times\ \exp\left(\frac{3\pi\nu}{2\sqrt{\nu^2+2\kappa}}+\frac{2\pi\nu n}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\right)$$

$$M(0)>0,\ M'(0)\geq 2\left(\nu+\frac{\kappa}{\nu}\right)M(0)$$

$$f_3(t)=\left[-M(0)\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\left\{M'(0)-\nu M(0)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\ \cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\right]\exp(\nu t)$$

Если проанализировать финальные выражения для функций $f(t)$, $f_k(t)$ ($k=1,\,2,\,3$), то несложно увидеть, что графиками этих функций на соответствующих полуинтервалах времени будут служить кривые, которые лежат поперёк полуполосы, экспоненциально быстро уходящей на бесконечность, причём их левые концы размещаются на нижней границе данной полуполосы

$$g(t)\equiv M(0)\exp(\nu t)$$

а правые примыкают к её верхней границе

$$g_2(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\nu^2+2\kappa}}\left[M'(0)-\nu M(0)\right]\exp(\nu t)$$

Этот анализ геометрических характеристик функций $f(t)$, $f_k(t)$ $(k=1,2,3)$ позволяет сделать совершенно определённый вывод о том, что функционал M (2.38) не может нарастать со временем медленнее, чем экспоненциально. Тем самым показано, что, как и ожидалось, при выполнении условий (2.41) из соотношения (2.40) действительно вытекает искомая априорная нижняя экспоненциальная оценка (2.42).

Здесь стоит отдельно остановиться на связи осуществлённой процедуры поинтервального интегрирования дифференциального неравенства (2.40) со свойствами решений линеаризованной начально–краевой задачи (2.36), (2.37). Настоящая связь заключается в том, что для соотношения (2.40) удалось путём выбора начальных условий специального вида (см. третье и четвёртое выражения в системе соотношений (2.41)) на левых концах исследуемых промежутков времени указать единые начальные данные (см. последнюю пару неравенств из системы соотношений (2.41)) для малых винтовых возмущений (2.36), (2.37) точных стационарных решений (2.9) смешанной задачи (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7), которые обеспечивают справедливость условий положительности и строгого возрастания функций $f(t)$, $f_k(t)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ (см. первые два неравенства в системе соотношений (2.41)) на всех изучаемых временных полуинтервалах. Следовательно, согласно определению неустойчивого по Ляпунову решения системы дифференциальных уравнений [196], продемонстрирована принципиальная возможность возникновения и дальнейшего развития во времени неограниченно растущих малых винтовых возмущений (2.36), (2.37) точных стационарных решений (2.9) начально–краевой задачи (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7) тогда, когда условие (2.13) не удовлетворяется, а два первых неравенства из системы соотношений (2.41), наоборот, удовлетворяются.

Итак, показано, что двойное неравенство (2.13) представляет собой необходимое и достаточное условие линейной устойчивости, в то время как первые два неравенства в системе соотношений (2.41) — достаточные условия практической линейной неустойчивости установившихся винтовых течений (2.9) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в магнитном поле относительно малых винтовых же возмущений (2.10), (2.11), (2.36), (2.37), (2.41). При этом оценка (2.42) наглядно свидетельствует о том, что малые винтовые возмущения (2.36), (2.37) с начальными данными (2.41) стационарных винтовых же МГД течений (2.9) однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости на самом деле могут нарастать со временем не медленнее, чем экспоненциально, в случае, если условие (2.13) не выполняется, а два первых неравенства из системы соотношений (2.41), напротив, выполняются. Кстати, для экспоненциально растущих во времени малых винтовых возмущений (2.10), (2.11), (2.36), (2.37), (2.41) счётные наборы связей (2.41) удовлетворяются тождественно.

Ясно, что, в согласии с более ранними результатами иных авторов [9, 14–16], если есть теоретическая неустойчивость (на полубесконечных промежутках времени), то практическая неустойчивость (на конечных временных интервалах) в то же самое время может быть, а может и не быть. Тем не менее, как оказалось, достаточные условия (2.41) практической линейной неустойчивости можно получить лишь тогда, когда не выполняется необходимое и достаточное условие (2.13) теоретической линейной устойчивости. Интересно также и то, что обнаруженные тут критерий теоретической линейной устойчивости и достаточные условия практической линейной неустойчивости носят конструктивный характер, поскольку их истинность может быть проверена как в физических, так и в численных экспериментах.

В завершение, целесообразно обратить особое внимание на тот факт, что именно интеграл M (2.38) и является функционалом Ляпунова, нарастающим со временем в силу уравнений смешанных задач (2.10), (2.11) и (2.36), (2.37). Отличительной чертой этого роста служит существенный произвол, который сохранился за положительной постоянной ν в показателе экспоненты из правой части неравенства (2.42). Он, помимо прочего, даёт возможность интерпретировать всякое решение начально–краевой задачи (2.36), (2.37), (2.41), нарастающее во времени согласно выведенной априорной экспоненциальной оценке снизу (2.42), в качестве аналога примера некорректности по Адамару [197].

Наконец, детально описанная выше процедура интегрирования соотношения (2.40) зримо демонстрирует, что сведения о начальных условиях (2.41) растущих малых винтовых возмущений (2.36), (2.37) могут быть извлечены и при рассмотрении системы кусочно–непрерывных функций $f(t)$, $f_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$.

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЛАВЫ II

Вторая глава настоящего курса лекций посвящена исследованию линейных задач устойчивости установившихся вращательно–симметричных (1.9) и винтовых (2.9) течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью в магнитном поле.

В первом параграфе этой главы прямым методом Ляпунова получено необходимое и достаточное условие (1.12) устойчивости изучаемых стационарных вращательно–симметричных МГД течений по отношению к малым возмущениям (1.10) того же типа симметрии, которое представляет собой обобщение на магнитную гидродинамику известного критерия Релея о «центробежной» устойчивости вращающихся потоков [5, 53, 62]. Если же данное условие линейной устойчивости нарушается, то строятся априорные двусторонние экспоненциальные оценки (1.23), (1.27) и (1.29) нарастания малых вращательно–симметричных возмущений (1.13), (1.18), (1.24), причём инкременты экспонент, присутствующих в этих оценках, вычисляются с помощью соотношений (1.20), (1.25) и (1.28) по параметрам установившихся вращательно–симметричных течений (1.9) и начальным данным (1.13), (1.24) рассматриваемых малых возмущений той же симметрии. Охарактеризован подкласс (1.13), (1.18), (1.24), (1.28), (1.30) наиболее быстро растущих малых вращательно–симметричных возмущений и сконструирована точная формула (1.28) для определения скорости (1.30) их нарастания. Приведён пример стационарных вращательно–симметричных МГД течений (1.31), (1.32) и начальных условий (1.33) на исследуемые малые возмущения того же типа симметрии, который иллюстрирует установленные в первом параграфе результаты.

Во втором параграфе настоящей главы прямым же методом Ляпунова найдено необходимое и достаточное условие (2.13) устойчивости изучаемых установившихся винтовых течений относительно малых возмущений (2.10), (2.11) той же симметрии. Для одного частного класса (2.14) неустойчивых стационарных винтовых МГД течений построены априорные верхняя и нижние экспоненциальные оценки (2.26), (2.30), (2.32) роста малых винтовых же возмущений (2.16), (2.17), (2.27), при этом инкременты фигурирующих в настоящих оценках экспонент вычисляются посредством соотношений (2.23), (2.28), (2.31) по параметрам рассматриваемых установившихся винтовых течений и начальным данным (2.17), (2.27) исследуемых малых возмущений того же типа симметрии. Описан подкласс (2.16), (2.17), (2.27), (2.31), (2.33) самых быстро нарастающих малых винтовых возмущений и выведена точная формула (2.31) для определения скорости (2.33) их роста. Сконструирован пример стационарных винтовых МГД течений (2.34) и начальных малых возмущений (2.35) той же симметрии, чья эволюция на линейном этапе будет происходить в соответствии с построенными оценками (2.26), (2.30) и (2.32). Для неустойчивых же установившихся винтовых течений (2.9) общего вида обнаружены достаточные условия (2.41) практической линейной неустойчивости и априорная экспоненциальная оценка снизу (2.42) нарастания малых возмущений (2.36), (2.37), (2.41) того же типа симметрии, причём инкремент экспоненты, содержащейся в этой оценке, является произвольным по своей величине положительным параметром.

Глава III. ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СДВИГОВЫХ СТРУЙНЫХ МГД ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ И СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В настоящей главе повествуется о результатах по устойчивости/неустойчивости установившихся осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной поверхностью как в азимутальном, так и в полоидальном магнитных полях.

Прямым (или вторым) методом Ляпунова находятся либо достаточные или необходимые и достаточные условия устойчивости, либо достаточные условия неустойчивости данных течений по отношению к малым осесимметричным же длинноволновым возмущениям. Для тех из изучаемых стационарных осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений, которые оказались неустойчивыми, выводятся достаточные условия практической линейной неустойчивости, а также конструируются априорные верхние и нижние экспоненциальные оценки, говорящие о возможном росте со временем рассматриваемых малых возмущений, при этом присутствующие в одних оценках инкременты экспонент вычисляются по параметрам исследуемых установившихся течений и начальным данным малых осесимметричных длинноволновых возмущений, а в других служат произвольными положительными постоянными. Обособляются подклассы быстрее всего нарастающих малых возмущений и получаются точные формулы для определения скорости их роста. Строятся примеры стационарных осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений и наложенных на них малых длинноволновых возмущений той же симметрии, которые развиваются на линейной стадии в согласии со сконструированными оценками.

Подробная сводка установленных в настоящей главе результатов приведена в её конце. Материал этой главы содержится в публикациях [139–144].

§1. УСТОЙЧИВОСТЬ УСТАНОВИВШИХСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СДВИГОВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ И СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В АЗИМУТАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ПРЯМО ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ЗАВИСЯЩЕМ ОТ РАДИАЛЬНОЙ КООРДИНАТЫ

В данном параграфе изучается линейная задача устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной границей в азимутальном магнитном поле, которое прямо пропорционально радиусу [139, 141, 142]. Вторым (или прямым) методом Ляпунова обнаруживается необходимое и достаточное условие устойчивости одного частного класса этих течений относительно малых осесимметричных же длинноволновых возмущений специального вида. Демонстрируется, что в случае, когда данное условие устойчивости не выполняется, тогда рассматриваемые установившиеся осесимметричные сдвиговые струйные МГД течения оказываются неустойчивыми по отношению к исследуемым малым возмущениям. Строятся априорные двусторонние экспоненциальные оценки нарастания малых осесимметричных длинноволновых возмущений, причём инкременты фигурирующих в настоящих оценках экспонент вычисляются по параметрам изучаемых стационарных течений и начальным данным рассматриваемых возмущений. Характеризуется подкласс наиболее быстро растущих малых осесимметричных длинноволновых возмущений и выводится точная формула для определения скорости их нарастания. Конструируется пример установившихся осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений и начальных малых длинноволновых возмущений того же типа симметрии, чья эволюция на линейном этапе будет происходить в соответствии с построенными оценками. Для стационарных осесимметричных сдвиговых струйных течений общего вида получаются достаточные условия практической линейной неустойчивости и конструируется априорная экспоненциальная оценка снизу роста малых осесимметричных же длинноволновых возмущений, при этом инкремент присутствующей в ней экспоненты представляет собой произвольную положительную постоянную величину. Приводится пример установившихся осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений и наложенных на них малых длинноволновых возмущений той же симметрии, которые иллюстрируют выведенные результаты.

ФОРМУЛИРОВКА ТОЧНОЙ ЗАДАЧИ. Исследуется бесконечно длинная цилиндрическая струя однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью, располагающаяся в открытом бесконечном пространстве. Считается, что в вещество струи «вморожено» азимутальное магнитное поле, а по её свободной поверхности течёт продольный постоянный электрический ток, который создаёт в окружающем изучаемую струю неограниченном пространстве квазистационарное азимутальное же магнитное поле. Кроме того, предполагается, что рассматриваемые МГД течения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью осесимметричны, причём азимутальный компонент её поля скорости тождественно равен нулю. Наконец, полагается, что действие сил поверхностного натяжения на свободной границе проводящей струи может не учитываться.

В силу принятых предположений система уравнений одножидкостной бездиссипативной магнитной гидродинамики [192] запишется в виде

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial r^*}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial z^*}\right)+$$
$$+\frac{H_2^2}{4\pi r^*}=-\frac{\partial P_*}{\partial r^*},\ \rho\left(\frac{\partial v_3}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial v_3}{\partial r^*}+\right. \tag{III.1.1}$$
$$\left.+v_3\frac{\partial v_3}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial P_*}{\partial z^*},\ \frac{\partial H_2}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial H_2}{\partial r^*}+v_3\frac{\partial H_2}{\partial z^*}-\frac{v_1 H_2}{r^*}=0$$
$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial\left(v_1 r^*\right)}{\partial r^*}+\frac{\partial v_3}{\partial z^*}=0$$

где $\rho\equiv\mathrm{const}$ — поле плотности; v_1, v_3 — радиальная и осевая составляющие поля скорости; H_2 — азимутальный компонент магнитного поля внутри исследуемой струи; $P_*\equiv P+H_2^2/(8\pi)$ — модифицированное поле давления; P — поле давления; t^* — время; r^*, z^* — цилиндрические координаты; π — известная постоянная. Считается, что ось z^* цилиндрической системы координат совпадает с осью симметрии проводящей струи.

Азимутальная составляющая H_2^* магнитного поля снаружи изучаемой струи, в пренебрежении током смещения, определяется формулой

$$H_2^* = \frac{2J}{cr^*} \tag{III.1.2}$$

(здесь $J \equiv \mathrm{const}$ — значение поверхностного продольного постоянного электрического тока, а c — скорость света).

На оси симметрии проводящей струи и её свободной границе ставятся следующие краевые условия:

$$v_1 = 0 \tag{III.1.3}$$

$$\left|\frac{H_2}{r^*}\right| < +\infty \ \left(r^* = 0\right); \ P_* = \frac{H_2^{*2}}{8\pi}$$

$$v_1 = \frac{\partial r_1}{\partial t^*} + v_3 \frac{\partial r_1}{\partial z^*} \ \left(r^* = r_1\left(t^*, \ z^*\right)\right)$$

Начальные данные для первых трёх соотношений системы (1.1) и последнего из граничных условий (1.3) задаются в виде

$$v_1\left(0, \ r^*, \ z^*\right) = v_{10}\left(r^*, \ z^*\right) \tag{III.1.4}$$

$$v_3\left(0, \ r^*, \ z^*\right) = v_{30}\left(r^*, \ z^*\right), \ H_2\left(0, \ r^*, \ z^*\right) = H_{20}\left(r^*, \ z^*\right)$$

$$r_1\left(0, \ z^*\right) = r_{10}\left(z^*\right)$$

при этом от функций v_{10}, v_{30}, H_{20} и r_{10} требуется, чтобы они не противоречили четвёртому уравнению системы (1.1) и первым трём из соотношений (1.3).

Далее в смешанной задаче (1.1)–(1.4) осуществляется переход к длинноволновому приближению, предваряемый процедурой обезразмеривания. В качестве обезразмеривающих параметров выбираются: L — характерный пространственный масштаб изменения гидродинамических и магнитных полей вдоль координатной оси z^*, v_0 — характерная скорость жидкости, и r_0 — характерный радиус рассматриваемой струи. При помощи данных параметров строятся безразмерные величины t, η, z, q, w, p_*, h и κ таким образом, что оказываются справедливыми связи

$$t^* = \frac{tL}{v_0},\ r^{*2} = \eta L^2\delta^2,\ z^* = zL,\ 2v_1 r^* = qv_0 L\delta^2$$

$$v_3 = wv_0,\ P_* = p_*\rho v_0^2,\ H_2 = \frac{hr^*\sqrt{4\pi\rho v_0^2}}{L\delta},\ H_2^* r^* = \kappa\sqrt{4\pi\rho v_0^2}\,L\delta$$

где $\delta \equiv r_0/L \ll 1$ — безразмерный характерный радиус проводящей струи.

В результате выполнения процедуры обезразмеривания с использованием перечисленных выше связей система уравнений (1.1) перепишется в виде

$$\begin{gathered}\frac{\delta^2}{2}\left(q_t + qq_\eta - \frac{q^2}{2\eta} + wq_z\right) + \\ + \eta h^2 = -\,2\eta p_{*\eta},\ w_t + qw_\eta + \\ + ww_z = -\,p_{*z},\ h_t + qh_\eta + wh_z = 0,\ q_\eta + w_z = 0\end{gathered} \tag{III.1.5}$$

(здесь и ниже по третьей главе настоящего курса лекций индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные). Наряду с этим, при учёте соотношения (1.2), краевые условия (1.3) трансформируются к виду

$$q = 0 \tag{III.1.6}$$

$$|h| < +\infty \ (\eta = 0)\,;\ p_* = \frac{\kappa^2}{2\eta_1},\ q = \eta_{1t} + w\eta_{1z} \ (\eta = \eta_1\,(t,\ z))$$

где

$$\kappa \equiv \frac{J}{cr_0\sqrt{\pi\rho v_0^2}} = \mathrm{const}$$

Наконец, начальные данные (1.4) предстанут в форме

$$q\,(0,\ \eta,\ z) = q_0\,(\eta,\ z) \tag{III.1.7}$$

$$w\,(0,\ \eta,\ z) = w_0\,(\eta,\ z)\,,\ h\,(0,\ \eta,\ z) = h_0\,(\eta,\ z)$$

$$\eta_1\,(0,\ z) = \eta_{10}\,(z)$$

Если теперь в первом уравнении системы (1.5) опустить слагаемые, которые пропорциональны сомножителю δ^2, а из соотношений (1.7) убрать выражение для функции $q\,(0,\ \eta,\ z)$, то начально–краевая задача (1.5)–(1.7) сразу же сведётся к виду, отвечающему длинноволновому приближению.

Однако, эту длинноволновую модификацию смешанной задачи (1.5)–(1.7) ни в коей мере нельзя признать окончательной, поскольку её можно ещё сильнее упростить за счёт замены эйлеровых независимых переменных $(t,\ z,\ \eta)$ на смешанные эйлерово–лагранжевы независимые переменные $(t',\ z',\ \nu)$ [151], которая производится, по аналогии с работой [139], по формулам

$$t = t',\ z = z',\ \eta = R\,(t',\ z',\ \nu)\,;\ \nu \in [0,\ 1]$$

Здесь принимается, что функция R удовлетворяет уравнению

$$q = R_{t'} + wR_{z'} \tag{III.1.8}$$

и граничным условиям

$$R\,(t',\ z',\ 0) = 0,\ R\,(t',\ z',\ 1) = \eta_1\,(t',\ z') \tag{III.1.9}$$

Суть данной замены независимых переменных состоит в том, что посредством лагранжевой переменной ν могут быть пронумерованы траектории движения жидких частиц в струе. Кроме того, из определения функции R (1.8), (1.9) вытекает, что краевые условия (1.6) выполняются для функции q автоматически. Наконец (и это, несомненно, самое главное), неизвестная свободная поверхность проводящей струи $\eta = \eta_1$ перейдёт, благодаря осуществляемой замене независимых переменных, в известную фиксированную границу $\nu = 1$.

Итак, в новых смешанных эйлерово–лагранжевых независимых переменных (после пренебрежения слагаемыми, содержащими сомножитель δ^2) система соотношений (1.5) запишется в виде

$$R_\nu h^2 = -\,2p_{*\nu} \qquad \text{(III.1.10)}$$

$$R_\nu \left(w_t + w w_z\right) = -\,R_\nu p_{*z} + R_z p_{*\nu}$$

$$h_t + w h_z = 0,\ q_\nu + R_\nu w_z - R_z w_\nu = 0$$

где, ради удобства изложения последующих формул, штрихи с переменных t' и z' сняты. Данные уравнения дополняются начальными условиями вида

$$w\left(0,\ z,\ \nu\right) = w_0\left(z,\ \nu\right) \qquad \text{(III.1.11)}$$

$$h\left(0,\ z,\ \nu\right) = h_0\left(z,\ \nu\right),\ R\left(0,\ z,\ \nu\right) = R_0\left(z,\ \nu\right)$$

Здесь функция $R_0\left(z,\ \nu\right)$ предполагается, исходя из требования взаимной однозначности произведённой замены независимых переменных, монотонно возрастающей по аргументу ν.

Далее, с целью придания системе (1.10) более наглядной формы, сначала выполняется интегрирование по переменной ν первого её соотношения в пределах от ν до единицы, а потом с помощью краевых условий (1.6) из него исключается безразмерное модифицированное поле давления p_* и подставляется во второе уравнение той же системы соотношений, что позволяет получить связь

$$w_t + ww_z = \frac{\kappa^2 R_{1z}}{2R_1^2} - \frac{\left(h_1^2 R_1\right)_z}{2} + \frac{\left(h^2\right)_z R}{2} + \\ + \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\nu}^{1} R\left(h^2\right)_{\nu_1} d\nu_1\right)_z \tag{III.1.12}$$

где через ν_1 обозначена независимая переменная ν (с тем, чтобы её можно было отличить от переменной ν на нижнем пределе функционала из правой части соотношения (1.12)), а через h_1 и R_1 — значения функций h и R на свободной поверхности струи $\nu = 1$ соответственно, причём, согласно второму граничному условию системы (1.9), $R_1(t,\ z) \equiv \eta_1(t,\ z)$.

Помимо этого функция q заменяется в последнем из уравнений (1.10) отвечающим ей выражением (1.8), так что данное уравнение преобразуется к виду

$$R_{\nu t} + \left(wR_\nu\right)_z = 0 \tag{III.1.13}$$

Ниже полагается, что азимутальный компонент магнитного поля внутри проводящей струи прямо пропорционален радиальной координате: $h \equiv h_1 = \mathrm{const}$ [139, 141]. Это допущение приводит, с одной стороны, к обращению в тождество третьего соотношения системы (1.10), а с другой — к заметному упрощению уравнения (1.12), которое теперь может быть переписано в форме

$$w_t + ww_z = \left[\left(\frac{\kappa}{R_1}\right)^2 - h_1^2\right]\frac{R_{1z}}{2} \tag{III.1.14}$$

Начальными же условиями для соотношений (1.13), (1.14) будут являться связи (1.11), если в них оставить данные только для функций R и w, то есть

$$R\,(0,\ z,\ \nu) = R_0\,(z,\ \nu)\,,\ w\,(0,\ z,\ \nu) = w_0\,(z,\ \nu) \qquad \text{(III.1.15)}$$

Стоит заметить, что уравнения, подобные соотношениям (1.13), (1.14), можно вывести и в том случае, когда R считается монотонно убывающей по аргументу ν функцией. При этом разница по сравнению с написанным выше будет заключаться лишь в том, что роль свободной поверхности исследуемой струи станет играть прямая $\nu = 0$, в то время как роль её оси симметрии — прямая $\nu = 1$.

Начально–краевая задача (1.13)–(1.15) обладает интегралом полной энергии вида

$$E_1 \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_0^1 w^2 R_\nu d\nu + \kappa^2 \ln R_1 + \frac{h_1^2}{2}R_1^2\right)dz = \mathrm{const} \qquad \text{(III.1.16)}$$

в предположении, что решения данной задачи либо периодичны вдоль оси z, либо локализованы на ней.

Нетрудно показать, что у смешанной задачи (1.13)–(1.15) имеется ещё один интеграл движения. Для этого уравнение (1.14) нужно продифференцировать по независимой переменной ν, что даст соотношение

$$w_{\nu t} + (w w_z)_\nu = 0 \qquad \text{(III.1.17)}$$

Далее, из уравнений (1.13) и (1.17) вытекает важная связь

$$C_t + w C_z = 0 \qquad \text{(III.1.18)}$$

(здесь $C \equiv R_\nu / w_\nu$), применение которой совместно с соотношением (1.17) как раз и позволяет продемонстрировать, что именно функционал

$$I \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} w_\nu F(C) d\nu dz \qquad \text{(III.1.19)}$$

где $F(C)$ — некая функция своего аргумента, и служит искомым добавочным интегралом движения [89, 139, 141, 142].

Точные стационарные решения начально–краевой задачи (1.13)–(1.15) могут быть представлены в форме

$$w = w^0(\nu),\ R = R^0(\nu),\ R_1 = R_1^0 \equiv 1 \qquad \text{(III.1.20)}$$

Здесь w^0 — произвольная, а R^0 — монотонно возрастающая функции независимой переменной ν; установившийся радиус проводящей струи взят равным её характерному радиусу r_0. Несложно удостовериться, что функции w^0, R^0 и R_1^0 (1.20) удовлетворяют уравнениям (1.13), (1.14) тождественно.

Цель последующего изучения состоит в том, чтобы выяснить, при выполнении каких условий стационарные течения (1.20) будут устойчивыми по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $w'(t,\ z,\ \nu)$, $R'(t,\ z,\ \nu)$ и $R_1'(t,\ z)$.

УСТОЙЧИВОСТЬ УСТАНОВИВШИХСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СДВИГОВЫХ СТРУЙНЫХ МГД ТЕЧЕНИЙ (1.20) ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ. Для достижения данной цели производится линеаризация смешанной задачи (1.13)–(1.15), а также соотношений (1.17) и (1.18) в окрестности точных стационарных решений (1.20), приводящая к начально–краевой задаче вида

$$w'_t + w^0 w'_z = \frac{\kappa^2 - h_1^2}{2} R'_{1z} \qquad \text{(III.1.21)}$$

$$C'_t + w^0 C'_z = 0,\ R'_{\nu t} + w^0 R'_{\nu z} + \frac{dR^0}{d\nu} w'_z = 0$$

$$w'_{\nu t} + \frac{dw^0}{d\nu} w'_z + w^0 w'_{z\nu} = 0;\ C' \equiv \left(\frac{dw^0}{d\nu}\right)^{-1} \left[R'_\nu - C^0 w'_\nu\right]$$

$$C^0 \equiv \frac{dR^0}{d\nu} \left(\frac{dw^0}{d\nu}\right)^{-1};\ w'(0,\ z,\ \nu) = w'_0(z,\ \nu),\ R'(0,\ z,\ \nu) = R'_0(z,\ \nu)$$

на решениях которой с течением времени сохраняется функционал

$$E \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2} \frac{dR^0}{d\nu} w'^2 + w^0 w' R'_\nu + \frac{1}{2} \frac{dw^0}{d\nu} \frac{d^2 F}{dC^2} \left(C^0\right) C'^2\right] d\nu dz +$$

$$+ \frac{h_1^2 - \kappa^2}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_1'^2 dz = \text{const} \qquad \text{(III.1.22)}$$

Можно проверить, что первая вариация δJ_1 интеграла $J_1 \equiv E_1 + + I = \text{const}$ (1.16), (1.19) обращается в нуль на установившихся течениях (1.20), если функции w^0, R^0 и F превращают в тождество уравнение

$$\frac{dF}{dC} \left(C^0\right) = - \frac{w^{02}}{2}$$

а его вторая вариация $\delta^2 J_1$, записанная в подходящих обозначениях, совпадает по форме с функционалом E.

Точные стационарные решения (1.20) смешанной задачи (1.13)–(1.15) будут устойчивы относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.21) тогда и только тогда, когда интеграл E (1.22) является знакоопределённым.

Для того чтобы установить, обладает ли функционал E свойством знакоопределённости, его удобно переписать в виде

$$E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} (B\mathbf{u},\, \mathbf{u})\, d\nu dz;\;\; \mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} w' \\ R'_\nu \\ C' \\ R'_1 \end{pmatrix} \tag{III.1.23}$$

где $B \equiv ||b_{ik}||$ — квадратная матрица размером 4×4 с отличными от нуля элементами

$$b_{11} = \frac{1}{2}\frac{dR^0}{d\nu},\;\; b_{12} = b_{21} = \frac{w^0}{2}$$

$$b_{24} = b_{42} = \frac{h_1^2 - \kappa^2}{8},\;\; b_{33} = \frac{1}{2}\frac{dw^0}{d\nu}\frac{d^2F}{dC^2}\left(C^0\right)$$

В соответствии с критерием Сильвестра [198], подынтегральное выражение функционала E (1.23) будет положительно (отрицательно) определённым в том и лишь в том случае, если главные миноры матрицы B будут положительны (будут иметь знак $(-1)^m$) (здесь m — порядок того или иного главного минора).

Нетрудно сделать вывод, что главные миноры матрицы B не обладают требуемой знакоопределённостью. Так, для положительной определённости подынтегрального выражения функционала E должны быть, в частности, истинны неравенства

$$\frac{dR^0}{d\nu} > 0,\; -w^{02} > 0$$

Ясно, что второе из этих неравенств невыполнимо в принципе. В то же время для отрицательной определённости данного подынтегрального выражения необходима, помимо прочего, справедливость соотношений

$$\frac{dR^0}{d\nu} < 0,\; -w^{02} > 0$$

что, по причине характера монотонности функции R^0 и уже указывавшейся выше ложности второго неравенства, опять–таки неосуществимо.

В итоге, в силу критерия Сильвестра, ни положительной, ни отрицательной определённости у функционала E (1.23) нет. Это, в свою очередь, означает, что достаточные условия устойчивости точных стационарных решений (1.20) начально–краевой задачи (1.13)–(1.15) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $w'(t,\ z,\ \nu)$, $R'(t,\ z,\ \nu)$ и $R_1'(t,\ z)$, которые понимаются тут как условия знакоопределённости энергетического, вообще говоря, интеграла движения E, отсутствуют.

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО ПОДКЛАССА УСТАНОВИВШИХСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СДВИГОВЫХ СТРУЙНЫХ МГД ТЕЧЕНИЙ (1.20) ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ И СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ. Ниже прямым методом Ляпунова [16, 22] будет получено необходимое и достаточное условие устойчивости частного класса стационарных течений (1.20), описываемого соотношением

$$\frac{d}{d\nu}\left(w^0 C^0\right) \le 0 \tag{III.1.24}$$

относительно тех из малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.21), что в каждой жидкой частице оставляют неизменными значения функции $C^0(\nu)$, а также удовлетворяют ряду ограничений на оси симметрии рассматриваемой струи и её свободной поверхности.

Для того чтобы показать неустойчивость какого–нибудь точного стационарного решения (1.20), (1.24) смешанной задачи (1.13)–(1.15) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $w'(t,\ z,\ \nu)$, $R'(t,\ z,\ \nu)$ и $R'_1(t,\ z)$ (1.21), надо суметь выделить среди данных возмущений хотя бы одно, но зато, как минимум, экспоненциально быстро нарастающее по времени.

С этой целью далее исследуется подкласс осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной границей в азимутальном магнитном поле, который характеризуется тем свойством, что для принадлежащих ему течений малые возмущения $C'(t,\ z,\ \nu)$ (1.21) равны нулю. Другими словами, полагается, что в любой жидкой частице значение функции C^0 (1.21), (1.24) при возмущениях не меняется, а потому настоящие возмущения служат отклонениями траекторий движения жидких частиц от соответствующих линий тока установившихся течений (1.20), (1.24).

С физической точки зрения предъявленное выше к малым возмущениям требование основывается на том, что циркуляция скорости по всякому жидкому контуру в осевой плоскости, заданная в начальный момент времени, будет сохраняться и в процессе развития возмущений, так как, согласно начально–краевой задаче (1.13)–(1.15), в жидких частицах не изменяются значения функции C (1.18).

Эффективнее всего эти возмущения могут быть введены посредством поля лагранжевых смещений $\xi = \xi(t,\ z,\ \nu)$ (I.13) [24], которое определяется уравнением

$$\xi_t = w' - w^0 \xi_z \tag{III.1.25}$$

При помощи соотношения (1.25) смешанную задачу (1.21) можно записать в форме

$$w'_t + w^0 w'_z = \frac{1}{2}\left(\kappa^2 - h_1^2\right) R'_{1z} \tag{III.1.26}$$

$$R'_\nu = -\frac{dR^0}{d\nu}\xi_z,\ w'_\nu = -\frac{dw^0}{d\nu}\xi_z,\ R'_\nu = C^0 w'_\nu$$

$$\xi(0,\ z,\ \nu) = \xi_0(z,\ \nu),\ w'(0,\ z,\ \nu) = w'_0(z,\ \nu)$$

Прямыми вычислениями несложно продемонстрировать, что тогда функционал E (1.22) может быть представлен в виде

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_0^1 \frac{d}{d\nu}\left(R^0 - w^0 C^0\right) w'^2 d\nu + \frac{h_1^2 - \kappa^2}{2} R_1'^2\right] dz \tag{III.1.27}$$

и будет служить интегралом движения для начально–краевой задачи (1.25), (1.26), если имеют место равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(w^0 C^0 w'^2\right)\Big|_{\nu=1} dz = $$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(w^0 C^0 w'^2\right)\Big|_{\nu=0} dz \tag{III.1.28}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(w^0 C^0 w'\right)\Big|_{\nu=1} R'_{1z}\right] dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(w^0 C^0 w'\right)\Big|_{\nu=0} R'_{1z}\right] dz$$

Важно отметить, что соотношения (1.28) связаны между собой: в случае, когда одно из них истинно, второе верно автоматически. Кроме того, поскольку функция $w'(t,\ z,\ \nu)$ (1.25), (1.26), будучи функцией независимой переменной ν, обладает неким произволом на оси симметрии $\nu = 0$ проводящей струи и её свободной поверхности $\nu = 1$, данные равенства можно интерпретировать как дополнительные краевые условия смешанной задачи (1.25), (1.26).

Анализ выражения для функционала E (1.27) показывает, что если справедливо неравенство

$$h_1^2 \geq \kappa^2 \tag{III.1.29}$$

то, с учётом свойств монотонности функции R^0 и независимости интеграла E от времени, из него будет вытекать устойчивость точных стационарных решений (1.20), (1.24) начально–краевой задачи (1.13)–(1.15) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.26), (1.28).

Пусть неравенство (1.29) нарушено, так что выполняется соотношение

$$h_1^2 < \kappa^2 \tag{III.1.30}$$

Тогда, оказывается, может быть продемонстрирована неустойчивость установившихся течений (1.20), (1.24) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (1.25), (1.26), (1.28).

В самом деле, дважды дифференцируя по независимой переменной t вспомогательный функционал

$$M \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} \frac{dR^0}{d\nu} \xi^2 d\nu dz \tag{III.1.31}$$

и используя связи (1.25)–(1.28), нетрудно прийти к небезызвестному вириальному равенству [24, 135–137]

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = 4(T - \Pi) \tag{III.1.32}$$

$$T \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} \frac{dR^0}{d\nu} w'^2 d\nu dz, \ \Pi \equiv \frac{h_1^2 - \kappa^2}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_1'^2 dz$$

Если умножить это равенство на некую постоянную λ и принять во внимание соотношение

$$E \equiv T + T_1 + \Pi = \text{const} \tag{III.1.33}$$

$$T_1 \equiv -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{d}{d\nu}\left(w^0 C^0\right) w'^2\right] d\nu dz \geq 0$$

то можно вывести главное для последующего изложения уравнение

$$\frac{dE_\lambda}{dt} = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda T_\lambda - 2\lambda T_1 \tag{III.1.34}$$

$$E_\lambda \equiv \Pi_\lambda + T_\lambda,\ 2\Pi_\lambda \equiv 2\left(\Pi + T_1\right) + \lambda^2 M$$

$$2T_\lambda \equiv 2T - \lambda\frac{dM}{dt} + \lambda^2 M = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dR^0}{d\nu}\left(w' - \lambda\xi\right)^2 d\nu dz \geq 0$$

В силу неотрицательности интегралов T_1 (1.33) и T_λ, при $\lambda > 0$ из соотношения (1.34) вытекает дифференциальное неравенство

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq 2\lambda E_\lambda$$

интегрируя которое несложно получить важную оценку

$$E_\lambda(t) \leq E_\lambda(0)\exp(2\lambda t) \tag{III.1.35}$$

Соотношение (1.35) истинно и для любых решений смешанной задачи (1.25), (1.26), (1.28), и для произвольных положительных значений постоянной величины λ. Более того, в ходе отыскания данного неравенства не потребовалось налагать никаких ограничений на знак функционала Π (1.32).

Соотношение (1.35) позволяет заключить, что к интегралу E_λ должно относиться ниже как к функционалу Ляпунова [16, 22, 24, 135], так как далее посредством этого соотношения будут сконструированы верхняя и нижние априорные экспоненциальные оценки роста малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi(t,\, z,\, \nu)$ (1.25), (1.26), (1.28), причём среди последних будут выделены и описаны наиболее быстро нарастающие малые возмущения.

Руководствуясь соотношением (1.30), путём подбора надлежащих начальных поля лагранжевых смещений $\xi_0(z,\ \nu)$ и возмущений поля скорости $w_0'(z,\, \nu)$ (1.26) нетрудно гарантировать справедливость неравенств: $\Pi(0) < 0$, $T(0) + T_1(0) \le |\Pi(0)|$. В результате, интеграл $E_\lambda(0)$, что следует из его определения (1.34), предстанет полиномом второй степени по параметру λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (1.31) при λ^2 и свободным членом $E(0) \le 0$ (1.27):

$$E_\lambda(0) \equiv E(0) - \frac{\lambda}{2}\frac{dM}{dt}(0) + \lambda^2 M(0) \qquad \text{(III.1.36)}$$

В случае, если значения величины λ берутся из интервала

$$0 < \lambda < \Lambda \equiv A_1 + \sqrt{A_2} \qquad \text{(III.1.37)}$$

$$A_1 \equiv [4M(0)]^{-1}\frac{dM}{dt}(0),\ A_2 \equiv A_1^2 - \frac{E(0)}{M(0)}$$

соотношение (1.36) даёт оценку: $E_\lambda(0) < 0$. Эта оценка и неравенство (1.35) свидетельствуют о том, что малые осесимметричные длинноволновые возмущения (1.25), (1.26), (1.28) растут по времени не медленнее, чем экспоненциально.

При условии, что $\lambda = \Lambda - \delta_1$ (со всяким параметром δ_1 из промежутка $]0,\ \Lambda[$), соотношению (1.35) может быть придана форма

$$E_{\Lambda-\delta_1}(t) \le E_{\Lambda-\delta_1}(0) \exp\left[2\left(\Lambda - \delta_1\right)t\right]\ \left(E_{\Lambda-\delta_1}(0) < 0\right) \qquad \text{(III.1.38)}$$

Поскольку, согласно выражению (1.34) для функционала E_λ, выполняется неравенство $E_\lambda(t) \ge \Pi(t)$, соотношение (1.38) можно переписать в виде

$$-\Pi(t) \geq |E_{\Lambda-\delta_1}(0)| \exp\left[2\left(\Lambda-\delta_1\right)t\right]$$

или, окончательно,

$$\left(\kappa^2-h_1^2\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_1'^2 dz \geq 4\left|E_{\Lambda-\delta_1}(0)\right| \exp\left[2\left(\Lambda-\delta_1\right)t\right] \qquad \text{(III.1.39)}$$

Неравенство (1.39) показывает, что величина $\Lambda-\delta_1$ (1.37), (1.38) является границей снизу для значений инкрементов малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi(t,\, z,\, \nu)$ (1.25), (1.26), (1.28).

Оценка (1.39) может быть существенно улучшена, если начальные поле лагранжевых смещений $\xi_0(z,\, \nu)$ и возмущения поля скорости $w_0'(z,\, \nu)$ (1.26) подчинить добавочному требованию

$$w_0'(z,\, \nu) = \lambda\xi_0(z,\, \nu) \qquad \text{(III.1.40)}$$

Действительно, тогда из соотношений (1.34), (1.36) будет вытекать, что $T_\lambda(0)=0$, $E_\lambda(0)=\Pi_\lambda(0)$. В свою очередь, эти равенства помогают убедиться, что на интервале

$$0<\lambda<\Lambda_1 \equiv \sqrt{-\frac{2\Pi(0)}{M(0)+A_3}} \qquad \text{(III.1.41)}$$

$$A_3 \equiv -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1} \frac{d}{d\nu}\left(w^0C^0\right)\xi_0^2 d\nu dz$$

верна оценка $\Pi_\lambda(0)<0$. Отсюда следует, что, считая $\lambda=\Lambda_1-\delta_2$ (с любым параметром δ_2 из промежутка $]0,\, \Lambda_1[$), можно преобразовать неравенство (1.35) к форме

$$E_{\Lambda_1-\delta_2}(t) \leq \Pi_{\Lambda_1-\delta_2}(0)\exp\left[2\left(\Lambda_1-\delta_2\right)t\right] \;\; \left(\Pi_{\Lambda_1-\delta_2}(0)<0\right) \qquad \text{(III.1.42)}$$

Если проделать выкладки, аналогичные приведённым выше в процессе обоснования оценки (1.39), то неравенство (1.42) может быть записано в виде

$$-\Pi(t) \geq |\Pi_{\Lambda_1-\delta_2}(0)| \exp\left[2\left(\Lambda_1-\delta_2\right)t\right]$$

либо, в конечном итоге,

$$\left(\kappa^2-h_1^2\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_1'^2 dz \geq 4\left|\Pi_{\Lambda_1-\delta_2}(0)\right| \exp\left[2\left(\Lambda_1-\delta_2\right)t\right] \qquad \text{(III.1.43)}$$

В силу соотношения (1.43), величина $\Lambda_1-\delta_2$ (1.41), (1.42) представляет собой нижнюю оценку для значений инкрементов малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.26), (1.28), (1.40).

Сопоставление неравенств (1.39) и (1.43) друг с другом позволяет говорить о том, что малые осесимметричные длинноволновые возмущения $\xi(t,\, z,\, \nu)$ (1.25), (1.26), (1.28), начальные данные которых удовлетворяют ограничению (1.40), нарастают быстрее всех остальных возмущений изучаемого частного класса, а самые быстро растущие среди них те, чьи инкременты, как будет продемонстрировано далее, вычисляются по формуле

$$\Lambda_1^+ \equiv \sup\nolimits_{\xi_0(z,\,\nu)}\Lambda_1 \qquad \text{(III.1.44)}$$

Конкретно, пусть $\lambda > \Lambda_1^+$. В этом случае для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\xi_0(z,\, \nu)$ (1.26) будет истинно соотношение $\Pi_\lambda(0) > 0$. Значит, интеграл $E_\lambda(0)$ (1.34), (1.36) также будет положительно определён для всех допустимых начальных полей лагранжевых смещений $\xi_0(z,\, \nu)$ и возмущений поля скорости $w_0'(z,\, \nu)$ (1.26).

В результате, при $\lambda = \Lambda_1^+ + \delta_3$, где $\delta_3 > 0$ — параметр, из неравенства (1.35) вытекает оценка

$$E_{\Lambda_1^+ + \delta_3}(t) \le E_{\Lambda_1^+ + \delta_3}(0) \exp\left[2\left(\Lambda_1^+ + \delta_3\right)t\right] \tag{III.1.45}$$

Согласно настоящей оценке, величина $\Lambda_1^+ + \delta_3$ служит границей сверху для значений инкрементов малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.26), (1.28).

Сравнение неравенств (1.43) и (1.45) даёт возможность сделать вывод: параметр Λ_1^+ (1.41), (1.44) оценивает скорость нарастания ω малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi(t,\, z,\, \nu)$ (1.25), (1.26), (1.28) как снизу, так и сверху, то есть

$$\Lambda_1^+ - \delta_2 \le \omega \le \Lambda_1^+ + \delta_3 \tag{III.1.46}$$

При этом соотношение (1.46) показывает, что наиболее быстро растут те малые осесимметричные длинноволновые возмущения (1.25), (1.26), (1.28), инкременты которых близки по величине к значению параметра Λ_1^+.

Таким образом, если условие (1.30) справедливо, то, определив посредством связей (1.41), (1.44) значение величины Λ_1^+, оценивающей скорость нарастания ω (1.46) быстрее всего растущих малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi(t,\, z,\, \nu)$ (1.25), (1.26), (1.28), (1.40), несложно ответить на вопрос, за какие характерные времена малые осесимметричные длинноволновые возмущения (1.25), (1.26), (1.28) будут вызывать разрушение стационарных осесимметричных же сдвиговых струйных течений (1.20), (1.24) однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной поверхностью в прямо пропорциональном радиальной координате азимутальном магнитном поле?

Ниже строится пример установившихся течений (1.20), (1.24) и налагаемых на них начальных малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi_0(z,\ \nu)$ (1.25), (1.26), (1.28), которые, в принципе, будут эволюционировать со временем в соответствии с полученными оценками (1.39), (1.45). Данный пример не преследует своей целью сопоставление с рассматриваемым физическим феноменом, а является иллюстрацией к выполненному выше аналитическому исследованию.

Итак, изучаются стационарные осесимметричные сдвиговые струйные МГД течения

$$w^0(\nu) = C_1 \exp\left(-\, C_2 \nu\right),\ R^0(\nu) = \nu,\ R_1^0 = 1 \tag{III.1.47}$$

(здесь $C_1,\ C_2$ — некие положительные постоянные) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в области, представляющей собой неограниченную полосу вида

$$[(z,\ \nu):\ -\infty < z < +\infty,\ 0 \leq \nu \leq 1] \tag{III.1.48}$$

Эти течения, в чём нетрудно удостовериться, служат типичными элементами подкласса (1.24) установившихся течений (1.20).

Если неравенство (1.30) истинно, то стационарные течения (1.47), (1.48) будут неустойчивы, например, относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi(t,\ z,\ \nu)$ (1.25), (1.26), (1.28), для которых начальное поле лагранжевых смещений $\xi_0(z,\ \nu)$ задаётся в форме

$$\xi_0(z,\ \nu) = (2\nu - 1) \exp\left(C_2 \nu\right) \sin \frac{2\pi z}{l} \tag{III.1.49}$$

где l — произвольная положительная постоянная величина. С точки зрения физики настоящие возмущения есть периодические (с длиной волны l) флуктуации свободной границы рассматриваемой струи и осевой скорости текущей внутри неё жидкости.

В самом деле, применяя определение функции $R_1(t,\ z)$ (1.9), (1.12) и уравнения (1.26), несложно получить соотношения

$$R'_{0\nu}(z,\ \nu) = -\frac{2\pi}{l}(2\nu-1)\exp\left(C_2\nu\right)\cos\frac{2\pi z}{l}$$

$$R'_1(0,z) \equiv \int\limits_0^1 R'_{0\nu}(z,\nu)d\nu = -\frac{2\pi}{lC_2}\left[\left(1-\frac{2}{C_2}\right)\exp C_2 + \frac{2}{C_2}+1\right]\cos\frac{2\pi z}{l}$$

$$w'_{0\nu}(z,\ \nu) = \frac{2\pi C_1 C_2}{l}(2\nu-1)\cos\frac{2\pi z}{l}$$

$$w'_0(z,\ \nu) = \int\limits_0^{\nu} w'_{0\nu_1}(z,\ \nu_1)d\nu_1 = \frac{2\pi C_1 C_2 \nu}{l}(\nu-1)\cos\frac{2\pi z}{l}$$

Стоит заметить, что, так как здесь

$$w'_0(z,\ 0) = 0,\ w'_0(z,\ 1) = 0 \tag{III.1.50}$$

краевые условия (1.28) удовлетворяются тождественно, а потому они согласованы при $t=0$ с начальными данными (1.26), (1.50).

Учитывая периодичность поля $\xi_0(z,\ \nu)$ (1.49) по независимой переменной z и выражения (1.32), (1.33) для функционалов T, T_1 и Π, можно вычислить значения последних в начальный момент времени:

$$T(0) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}w_0'^2(z,\ \nu)d\nu dz = \frac{\pi^2 C_1^2 C_2^2}{30l}$$

$$T_1(0) \equiv -\frac{1}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^1 \frac{d}{d\nu}\left(w^0 C^0\right) w_0'^2(z,\ \nu)d\nu dz = 0$$

$$\Pi(0) \equiv \frac{h_1^2-\kappa^2}{4}\int\limits_0^l R_1'^2(0,\ z)dz = \frac{\pi^2\left(h_1^2-\kappa^2\right)}{2lC_2^2}\left[\left(1-\frac{2}{C_2}\right)\exp C_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{C_2} + 1\right]^2$$

Отсюда вытекает, что неравенство $\Pi(0) < 0$ безусловно справедливо. Соотношение же $T(0) + T_1(0) \leq |\Pi(0)|$ будет выполнено, если постоянные C_1 и C_2 выбраны должным образом. К примеру,

$$0 < C_1 \leq (3-e)\sqrt{15\left(\kappa^2-h_1^2\right)},\ C_2 = 1$$

где e — известная константа.

В итоге, для установившихся течений (1.47), (1.48) в явном виде могут быть выписаны оценки снизу (1.39) и сверху (1.45) (причём вторая — с параметром Λ_1 вместо Λ_1^+), характеризующие процесс нарастания малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.26), (1.28), (1.49), что как раз и свидетельствует о неустойчивости этих течений. Важно отметить, что здесь скорость роста ω (1.46) малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi(t,\ z,\ \nu)$ (1.25), (1.26), (1.28), (1.49) оценивает и снизу, и сверху величина Λ_1 (1.41), а не Λ_1^+ (1.44).

Наконец, наиболее быстро нарастающими малыми осесимметричными длинноволновыми возмущениями стационарных течений (1.47), (1.48) будут те, у которых, в силу уравнений (1.26) и равенства (1.40), начальное поле лагранжевых смещений $\xi_0(z,\nu)$ имеет форму $f\left(w^0-\lambda z\right)$, где от функции f требуется, чтобы она была периодичной по координате z. Тогда о свойствах роста данных возмущений можно будет судить, опираясь на оценки снизу (1.43) и сверху (1.45), а их скорость нарастания ω (1.46) может быть обнаружена с помощью параметра Λ_1^+ (1.41), (1.44).

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ УСТАНОВИВШИХСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СДВИГОВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ (1.20) ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ И СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В АЗИМУТАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. Далее посредством прямого же метода Ляпунова будет продемонстрировано, что неравенство (1.30) представляет собой достаточное условие неустойчивости точных стационарных решений (1.20) начально–краевой задачи (1.13)–(1.15) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $w'(t,\ z,\ \nu)$, $R'(t,\ z,\ \nu)$ и $R_1'(t,\ z)$ (1.21), при этом растущее (как минимум, экспоненциально) во времени возмущение будет искаться среди элементов частного класса (1.25), (1.26) последних. Тем самым установившиеся течения (1.20) считаются ниже свободными от ограничения (1.24), а малые возмущения (1.25), (1.26) — от требований (1.28).

Согласно принятым здесь предположениям, интеграл E (1.22), сохраняющийся, естественно, не только на решениях смешанной задачи (1.21), но и на решениях начально–краевой задачи (1.25), (1.26) тоже, оставит за собой вид (1.33) с тем лишь исключением, что символом T_1 теперь будет обозначаться иной функционал:

$$T_1 \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1} w^0 w' R_\nu' d\nu dz \tag{III.1.51}$$

(существенно, что интеграл T_1 в форме (1.51) уже не является знакоопределённым). Вириальное равенство (1.32) и основное уравнение (1.34) в данном случае также останутся в силе (второе, правда, — с точностью до вида функционала T_1).

Учитывая указанные выше обстоятельства и полагая, что условие (1.30) верно, из соотношения (1.34) можно извлечь оригинальное дифференциальное неравенство

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda\frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M \geq 0 \tag{III.1.52}$$

где λ — некая положительная постоянная. Это неравенство может быть дополнено условиями [194], при наличии которых из него с необходимостью будет следовать нижняя априорная экспоненциальная оценка

$$M(t) \geq C_3 \exp(\lambda t) \tag{III.1.53}$$

(здесь C_3 — известная положительная постоянная величина).

Действительно, соотношение (1.52) можно формально проинтегрировать на полуинтервалах $2\pi n/\lambda \leq t < \pi/(2\lambda) + 2\pi n/\lambda$ ($n = 0, 1, 2, ...$), для чего нужно произвести несколько замен функционала M:

$$1)\ M_1(t) \equiv \exp(-\lambda t)M(t):\ \frac{d^2M_1}{dt^2} + \lambda^2 M_1 \geq 0$$

$$2)\ M_2(t) \equiv \frac{M_1(t)}{\cos(\lambda t)}:\ \frac{d}{dt}\left[\frac{dM_2}{dt}\cos(\lambda t)\right] - \lambda\frac{dM_2}{dt}\sin(\lambda t) \geq 0$$

$$3)\ M_3(t) \equiv \frac{dM_2}{dt}\cos^2(\lambda t):\ \frac{dM_3}{dt} \geq 0$$

Интегрирование последнего неравенства и выполнение обратных замен позволяют прийти к соотношению

$$M(t) \geq [C_{1n}\cos(\lambda t) + C_{2n}\sin(\lambda t)]\exp(\lambda t) \tag{III.1.54}$$

где C_{1n} и C_{2n} — произвольные постоянные.

Принимая во внимание нестрогость неравенства (1.54), постоянные величины C_{1n} и C_{2n} нетрудно связать со значениями функционала M (1.31) и его первой производной dM/dt в моменты времени $t = 2\pi n/\lambda$, $n = 0, 1, 2, ...$. Таким образом, соотношение (1.54) окончательно может быть представлено в виде

$$M(t) \geq g(t) \tag{III.1.55}$$

$$g(t) \equiv \left[M\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\cos(\lambda t) + \left[\frac{1}{\lambda}\frac{dM}{dt}\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right) - M\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\right]\sin(\lambda t)\right] \times$$
$$\times \exp(\lambda t - 2\pi n)$$

Для того чтобы обосновать процедуру интегрирования неравенства (1.52) на промежутках $2\pi n/\lambda \leq t < \pi/(2\lambda) + 2\pi n/\lambda$ ($n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$), приведшую в результате к оценке снизу (1.55), требуется вычислить производную первого порядка функции g по её аргументу t:

$$\frac{dg}{dt} = \left[\frac{dM}{dt}\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\cos(\lambda t) + \left[\frac{dM}{dt}\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right) - 2\lambda M\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\right]\sin(\lambda t)\right] \times$$
$$\times \exp(\lambda t - 2\pi n) \tag{III.1.56}$$

Если учесть соотношения (1.55) и (1.56), то можно сделать заключение, что функция $g(t)$ будет положительной и строго возрастающей на полуинтервалах $2\pi n/\lambda \leq t < \pi/(2\lambda) + 2\pi n/\lambda$ ($n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$) [195], когда истинны неравенства

$$M\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right) > 0,\ \frac{dM}{dt}\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right) \geq 2\lambda M\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right) \tag{III.1.57}$$

Данные неравенства как раз и обеспечивают правомерность описанной выше процедуры интегрирования соотношения (1.52).

Поскольку промежутки $2\pi n/\lambda \leq t < \pi/(2\lambda)+2\pi n/\lambda$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ взаимно не пересекаются, значения функционала M и его первой производной dM/dt на левых концах этих промежутков могут задаваться любыми. В частности, их можно взять в форме

$$M\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right) \equiv M(0)\exp(2\pi n),\ \frac{dM}{dt}\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0)\exp(2\pi n)$$

Тогда неравенства (1.57) удовлетворятся тождественно в случае, если

$$M(0) > 0,\ \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\lambda M(0)$$

а функция g (1.55) предстанет в виде

$$g(t) = \left[M(0)\cos(\lambda t) + \left[\frac{1}{\lambda}\frac{dM}{dt}(0) - M(0)\right]\sin(\lambda t)\right]\exp(\lambda t)$$

Схожие рассуждения могут быть проведены и тогда, когда соотношение (1.52) надо будет проинтегрировать на всех остальных полуинтервалах времени. Принимая во внимание данный факт, далее итоги интегрирования неравенства (1.52) на оставшихся временных промежутках излагаются в форме иллюстрирующих выкладок, без каких бы то ни было комментариев:

$$\text{a) } t \in \left[\frac{\pi}{2\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda},\ \frac{\pi}{\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

$$1)\ M_1(t) \equiv \exp(-\lambda t)M(t):\ \frac{d^2M_1}{dt^2} + \lambda^2 M_1 \geq 0$$

$$2)\ M_2(t) \equiv \frac{M_1(t)}{\cos(\lambda t)}:\ \frac{d}{dt}\left[\frac{dM_2}{dt}\cos(\lambda t)\right] - \lambda\frac{dM_2}{dt}\sin(\lambda t) \geq 0$$

$$3)\ M_3(t) \equiv \frac{dM_2}{dt}\cos^2(\lambda t):\ \frac{dM_3}{dt} \leq 0$$

$$4)\ M(t) \geq [C_{3n}\cos(\lambda t) + C_{4n}\sin(\lambda t)]\exp(\lambda t);\ C_{3n},\ C_{4n} - \text{const}$$

$$5)\ M(t) \geq g_1(t)$$

$$g_1(t) \equiv \left[M\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\sin(\lambda t) - \left[\frac{1}{\lambda}\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - M\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\right]\cos(\lambda t)\right]\exp\left(\lambda t - \frac{\pi}{2} - 2\pi n\right)$$

$$\frac{dg_1}{dt} = \left[\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\sin(\lambda t) - \left[\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\lambda M\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\right]\cos(\lambda t)\right]\exp\left(\lambda t - \frac{\pi}{2} - 2\pi n\right)$$

$$6)\ M\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right) > 0,\ \frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right) \geq 2\lambda M\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)$$

$$7)\ M\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right) \equiv M(0)\exp\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0)\exp\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$$

$$M(0) > 0,\ \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\lambda M(0)$$

$$g_1(t) = \left[M(0)\sin(\lambda t) - \left[\frac{1}{\lambda}\frac{dM}{dt}(0) - M(0)\right]\cos(\lambda t)\right]\exp(\lambda t)$$

$$б)\ t \in \left[\frac{\pi}{\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda},\ \frac{3\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

$$1)\ M_1(t) \equiv \exp(-\lambda t)M(t):\ \frac{d^2M_1}{dt^2} + \lambda^2 M_1 \geq 0$$

$$2)\ M_2(t) \equiv \frac{M_1(t)}{\cos(\lambda t)}:\ \frac{d}{dt}\left[\frac{dM_2}{dt}\cos(\lambda t)\right] - \lambda\frac{dM_2}{dt}\sin(\lambda t) \geq 0$$

$$3)\ M_3(t) \equiv \frac{dM_2}{dt}\cos^2(\lambda t):\ \frac{dM_3}{dt} \leq 0$$

$$4)\ M(t) \geq [C_{5n}\cos(\lambda t) + C_{6n}\sin(\lambda t)]\exp(\lambda t);\ C_{5n},\ C_{6n} \text{ — const}$$

$$5)\ M(t) \geq g_2(t)$$

$$g_2(t) \equiv -\left[M\left(\frac{\pi}{\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\cos(\lambda t) + \left[\frac{1}{\lambda}\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi}{\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - M\left(\frac{\pi}{\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\right]\sin(\lambda t)\right]\exp\left(\lambda t - \pi - 2\pi n\right)$$

$$\frac{dg_2}{dt} = -\left[\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right)\cos(\lambda t) + \left[\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\lambda M\left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right)\right]\sin(\lambda t)\right]\exp\left(\lambda t - \pi - 2\pi n\right)$$

$$6)\ M\left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right) > 0,\ \frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right) \geq 2\lambda M\left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right)$$

$$7)\ M\left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right) \equiv M(0)\exp\left(\pi + 2\pi n\right)$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0)\exp\left(\pi + 2\pi n\right)$$

$$M(0) > 0,\ \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\lambda M(0)$$

$$g_2(t) = -\left[M(0)\cos(\lambda t) + \left[\frac{1}{\lambda}\frac{dM}{dt}(0) - M(0)\right]\sin(\lambda t)\right]\exp(\lambda t)$$

в) $t \in \left[\frac{3\pi}{2\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda},\ \frac{2\pi(n+1)}{\lambda}\right),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$1)\ M_1(t) \equiv \exp(-\lambda t)M(t):\ \frac{d^2M_1}{dt^2} + \lambda^2 M_1 \geq 0$$

$$2)\ M_2(t) \equiv \frac{M_1(t)}{\cos(\lambda t)}:\ \frac{d}{dt}\left[\frac{dM_2}{dt}\cos(\lambda t)\right] - \lambda\frac{dM_2}{dt}\sin(\lambda t) \geq 0$$

$$3)\ M_3(t) \equiv \frac{dM_2}{dt}\cos^2(\lambda t):\ \frac{dM_3}{dt} \geq 0$$

$$4)\ M(t) \geq \left[C_{7n}\cos(\lambda t) + C_{8n}\sin(\lambda t)\right]\exp(\lambda t);\ C_{7n},\ C_{8n} \text{ — const}$$

$$5)\ M(t) \geq g_3(t)$$

$$g_3(t) \equiv \left[- M\left(\frac{3\pi}{2\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right)\sin(\lambda t) + \left[\frac{1}{\lambda}\frac{dM}{dt}\left(\frac{3\pi}{2\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - M\left(\frac{3\pi}{2\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right)\right]\cos(\lambda t)\right]\exp\left(\lambda t - \frac{3\pi}{2} - 2\pi n\right)$$

$$\frac{dg_3}{dt} = \left[- \frac{dM}{dt}\left(\frac{3\pi}{2\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right)\sin(\lambda t) + \left[\frac{dM}{dt}\left(\frac{3\pi}{2\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\lambda M\left(\frac{3\pi}{2\lambda} + \frac{2\pi n}{\lambda}\right)\right]\cos(\lambda t)\right]\exp\left(\lambda t - \frac{3\pi}{2} - 2\pi n\right)$$

$$6)\ M\left(\frac{3\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)>0,\ \frac{dM}{dt}\left(\frac{3\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\geq 2\lambda M\left(\frac{3\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)$$

$$7)\ M\left(\frac{3\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\equiv M(0)\exp\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{3\pi}{2\lambda}+\frac{2\pi n}{\lambda}\right)\equiv \frac{dM}{dt}(0)\exp\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$$

$$M(0)>0,\ \frac{dM}{dt}(0)\geq 2\lambda M(0)$$

$$g_3(t)=\left[-M(0)\sin(\lambda t)+\left[\frac{1}{\lambda}\frac{dM}{dt}(0)-M(0)\right]\cos(\lambda t)\right]\exp(\lambda t)$$

Анализ финальных выражений для функций $g(t)$, $g_i(t)$ ($i = 1,\ 2,\ 3$) позволяет увидеть, что графиками этих функций на соответствующих полуинтервалах времени будут являться кривые, которые лежат поперёк полуполосы, экспоненциально быстро уходящей на бесконечность, причём их левые концы помещаются на нижней границе данной полуполосы

$$f_1(t)\equiv M(0)\exp(\lambda t)$$

а правые примыкают к её верхней границе

$$f_2(t)\equiv\left[\frac{1}{\lambda}\frac{dM}{dt}(0)-M(0)\right]\exp(\lambda t)$$

Исключение составляет только тот случай, когда $dM/dt(0) = 2\lambda \times \times M(0)$. Тогда экспоненциальная полуполоса вырождается в линию, которая отвечает её бывшей границе снизу $f_1(t)$, так что кривые, служащие графиками функций $g(t)$, $g_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) на соответствующих временных промежутках, станут опираться сверху на эту линию обоими своими концами.

Обнаруженные геометрические свойства функций $g(t)$, $g_i(t)$ ($i = 1,\ 2,\ 3$) дают возможность прийти к совершенно определённому выводу о том, что функционал M (1.31) нарастает со временем не медленнее, чем экспоненциально. Тем самым показано, что при наличии условий

$$M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) > 0 \qquad \text{(III.1.58)}$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \geq 2\lambda M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv M(0)\exp\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ \frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0)\exp\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

из соотношения (1.52) действительно вытекает нижняя априорная экспоненциальная оценка (1.53).

Следовательно, неравенство (1.53) говорит о том, что среди малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.26) с начальными данными

$$M(0) > 0,\ \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\lambda M(0) \qquad \text{(III.1.59)}$$

точных стационарных решений (1.20) смешанной задачи (1.13)–(1.15) могут быть и растущие во времени, как минимум, экспоненциально. При этом, что принципиально важно, для экспоненциально нарастающих со временем малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.26), (1.59) счётный набор условий (1.58) выполняется автоматически.

В качестве характерной черты указанного роста нельзя не отметить отсутствие всяких ограничений на величину положительного параметра λ в показателе экспоненты, которая содержится в оценке (1.53). Данное обстоятельство позволяет истолковать эту неустойчивость как своего рода «прорыв» мелкомасштабных возмущений, убранных, казалось бы, ранее из рассмотрения при помощи перехода к длинноволновому приближению, в область исследуемых крупномасштабных движений жидкости.

Из сопоставления соотношения (1.53) и неравенства (1.35) однозначно вытекает, что роль функционала Ляпунова играет здесь именно интеграл M (1.31) и ничто другое.

Итак, продемонстрировано, что соотношение (1.30) в самом деле служит достаточным условием неустойчивости, а первые два неравенства в системе соотношений (1.58) — достаточными условиями практической линейной неустойчивости установившихся течений (1.20) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.21), (1.25), (1.26), (1.59).

Более того, описанный выше процесс получения оценки снизу (1.53) весомо свидетельствует в пользу того, что неравенство (1.29) представляет собой необходимое и достаточное условие устойчивости по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (1.25), (1.26), (1.28) как для точных стационарных решений (1.20), (1.24) начально–краевой задачи (1.13)–(1.15), так и для установившихся течений (1.20),

$$\frac{d}{d\nu}\left(R^0 - w^0 C^0\right) \geq 0$$

Наконец, детально изложенная процедура интегрирования соотношения (1.52) наглядно показывает, что сведения о начальных данных нарастающих малых возмущений можно добывать и при осуществлении изучения системы кусочно–непрерывных функций $g(t)$, $g_i(t)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Далее конструируется иллюстративный пример точных стационарных решений (1.20) смешанной задачи (1.13)–(1.15) и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.26), (1.59), которые, если справедливо соотношение (1.30), развиваются во времени в согласии с найденной экспоненциальной оценкой снизу (1.53).

Конкретно, рассматриваются установившиеся осесимметричные сдвиговые струйные МГД течения однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной поверхностью

$$w^0(\nu) = b - \nu,\ R^0(\nu) = \nu,\ R_1^0 = 1 \qquad \text{(III.1.60)}$$

где $b > 1$ — константа, в бесконечной полосе (1.48). Понятно, что эти течения принадлежат классу стационарных течений (1.20).

В случае, когда верно неравенство (1.30), установившиеся течения (1.60), (1.48) будут неустойчивыми относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi(t,\ z,\ \nu)$ (1.25), (1.26) вида

$$\xi(t,\ z,\ \nu) = \frac{\alpha\exp(\sigma\beta t)}{\left[\sigma^2 + \left(\frac{1}{2} - \nu\right)^2\right]^2}\left(\left[\sigma^2 - \left(\frac{1}{2} - \nu\right)^2\right][\cos(\gamma\beta t)\cos(\beta z) - \right.$$
$$- \sin(\gamma\beta t)\sin(\beta z)] + 2\sigma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)[\cos(\gamma\beta t)\sin(\beta z) + \sin(\gamma\beta t)\times$$
$$\left.\times \cos(\beta z)]\right) \qquad \text{(III.1.61)}$$

Здесь α — произвольная, а β — положительная постоянные, тогда как

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{\kappa^2 - h_1^2}{2} - \frac{1}{4}},\ \gamma \equiv \frac{1}{2} - b$$

Действительно, непосредственной подстановкой несложно убедиться, что функция $\xi(t,\ z,\ \nu)$ (1.61) на самом деле является решением начально–краевой задачи (1.25), (1.26), а также удовлетворяет соотношениям (1.32), (1.33) (с функционалом T_1 в форме (1.51)), (1.53) и (1.59). Кроме того, она может быть интерпретирована в качестве примера Адамара [197], поскольку константа β в показателе экспоненты из правой части выражения (1.61) сохраняет за собой некую неопределённость.

§2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СДВИГОВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ И СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В АЗИМУТАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕМ ИЗ СЕБЯ НАПЕРЁД ЗАДАННУЮ ФУНКЦИЮ РАДИУСА

В настоящем параграфе исследуется линейная задача неустойчивости установившихся осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной границей в азимутальном магнитном поле, которое служит произвольной функцией радиальной координаты [142, 144]. Прямым методом Ляпунова обнаруживаются достаточные условия неустойчивости этих течений по отношению к малым осесимметричным же длинноволновым возмущениям. Если данные условия неустойчивости истинны, то выводятся достаточные условия практической линейной неустойчивости и строится априорная нижняя экспоненциальная оценка, говорящая о том, что изучаемые малые осесимметричные длинноволновые возмущения обладают возможностью расти со временем не медленнее, чем экспоненциально, причём фигурирующий в этой оценке инкремент экспоненты является некой положительной постоянной величиной. Также конструируется иллюстративный аналитический пример интересующих стационарных течений и наложенных на них малых возмущений, которые ведут себя во времени согласно построенной оценке снизу.

ПОСТАНОВКА ТОЧНОЙ ЗАДАЧИ. Далее смешанная задача, образованная третьим уравнением системы (1.10) и соотношениями (1.11)–(1.13), рассматривается в более общей формулировке, когда h представляет собой произвольную функцию независимой переменной ν: $h = h(\nu)$ [142, 144]. Данный факт означает, что в процессе течения жидкости обезразмеренное отношение азимутального компонента магнитного поля в исследуемой струе к радиусу есть величина, значения которой неизменны на каждой траектории движения жидких частиц. Важно, что настоящее ограничение не вступает в противоречие с третьим уравнением из системы (1.10), так как если при $t = 0$ выбрать $h = h_0(\nu)$, то в соответствии с этим уравнением такой вид зависимости функции h от аргумента ν не претерпит никаких изменений и во все последующие моменты времени $t > 0$.

В результате, начально–краевая задача, включающая в себя третье соотношение системы (1.10), а также связи (1.11)–(1.13), может быть переформулирована в виде

$$w_t + ww_z = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\kappa}{R_1}\right)^2 - h_1^2\right] R_{1z} +$$

$$+\int\limits_{\nu}^{1}\left[hR_z\frac{dh}{d\nu_1}\right]d\nu_1,\ R_{\nu t} + (wR_\nu)_z = 0 \qquad \text{(III.2.1)}$$

$$w(0,\ z,\ \nu) = w_0(z,\ \nu),\ R(0,\ z,\ \nu) = R_0(z,\ \nu)$$

Нетрудно продемонстрировать, что функционал

$$E_1 \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{0}^{1} \left(w^2 + h^2 R\right) R_\nu d\nu + \kappa^2 \ln R_1 \right) dz \qquad \text{(III.2.2)}$$

служит интегралом полной энергии данной задачи, а функционал

$$I \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} w_\nu F_1(h) d\nu dz \qquad \text{(III.2.3)}$$

где $F_1(h)$ — некая функция азимутальной составляющей h магнитного поля внутри изучаемой струи, является её дополнительным интегралом движения [89, 139, 141].

Функции w^0, R^0 и R_1^0 (1.20) представляют собой точные стационарные решения смешанной задачи (2.1). Несложно проверить, что эти функции действительно обращают в тождества два первых уравнения из соотношений начально–краевой задачи (2.1).

ПОСТАНОВКА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ. Цель дальнейшего рассмотрения состоит в том, чтобы узнать, устойчивы ли стационарные решения (1.20) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $w'(t,\ z,\ \nu)$, $R'(t,\ z,\ \nu)$ и $R_1'(t,\ z)$, эволюция которых характеризуется смешанной задачей в форме

$$w_t' + w^0 w_z' = \frac{\kappa^2 - h_1^2}{2} R_{1z}' +$$

$$+ \int\limits_{\nu}^{1} \left[h R_z' \frac{dh}{d\nu_1} \right] d\nu_1,\ R_{\nu t}' + w^0 R_{\nu z}' + \qquad \text{(III.2.4)}$$

$$+ \frac{dR^0}{d\nu} w_z' = 0;\ w'(0,\ z,\ \nu) = w_0'(z,\ \nu),\ R'(0,\ z,\ \nu) = R_0'(z,\ \nu)$$

По аналогии с предыдущим параграфом, данная задача получена путём линеаризации начально–краевой задачи (2.1) около своих точных решений (1.20).

Как показывают непосредственные вычисления, функционал вида

$$E \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{dR^0}{d\nu}w'^2 + 2w^0 w' R'_\nu + h^2 R' R'_\nu\right]d\nu - \right.$$

$$\left. - \frac{\kappa^2}{2}R_1'^2\right)dz \qquad \text{(III.2.5)}$$

есть интеграл движения для смешанной задачи (2.4). Кроме того, можно удостовериться, что первая вариация δJ_1 функционала $J_1 \equiv E_1 + I$ (2.2), (2.3) зануляется на стационарных решениях (1.20) тогда, когда функции w^0, R^0, h и F_1 связаны между собой равенствами

$$w^0\frac{dw^0}{d\nu} + hR^0\frac{dh}{d\nu} = 0,\ w^0\frac{dR^0}{d\nu} = \frac{dF_1}{dh}\frac{dh}{d\nu} \qquad \text{(III.2.6)}$$

При этом вторая вариация $\delta^2 J_1$ данного интеграла, переписанная в подходящих обозначениях, совпадает по форме с функционалом E (2.5).

Точные стационарные решения (1.20), (2.6) начально–краевой задачи (2.1) будут устойчивы по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (2.4) в том и лишь в том случае, если интеграл E знакоопределён.

Для того чтобы выяснить, имеет ли функционал E (2.5) свойство знакоопределённости, его удобно записать в виде (1.23) с вектором

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} w' \\ R' \\ R'_\nu \\ R'_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.2.7)}$$

и ненулевыми элементами

$$b_{11} = \frac{dR^0}{d\nu},\ b_{13} = b_{31} = w^0,\ b_{23} = b_{32} = \frac{h^2}{2},\ b_{34} = b_{43} = -\frac{\kappa^2}{4} \qquad \text{(III.2.8)}$$

квадратной матрицы B четвёртого порядка.

Нетрудно сделать заключение, что главные миноры матрицы B не обладают той знакоопределённостью, которая требуется в силу критерия Сильвестра [198]. В самом деле, вычисление всего только первых двух её главных миноров помогает установить, что

$$\Delta_1 = \frac{dR^0}{d\nu} > 0,\ \Delta_2 = 0$$

Отсюда вытекает, что равенство нулю главного минора Δ_2 матрицы B исключает, согласно критерию Сильвестра, знакоопределённость интеграла E (1.23), (2.7), (2.8).

Следовательно, достаточные условия устойчивости точных стационарных решений (1.20), (2.6) смешанной задачи (2.1) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $w'(t,\, z,\, \nu)$, $R'(t,\, z,\, \nu)$ и $R_1'(t,\, z)$ (2.4), трактуемые как условия знакоопределённости энергетического по своей природе функционала E (2.5), отсутствуют.

АПРИОРНАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ НИЖНЯЯ ОЦЕНКА НАРАСТАНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. Далее прямым методом Ляпунова [16, 22] будут получены достаточные условия неустойчивости стационарных решений (1.20), (2.6) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (2.4), а также сконструирована оценка снизу, которая демонстрирует, что эти возмущения могут расти со временем не медленнее, чем экспоненциально.

Как и в первом параграфе настоящей главы, тут вновь исследуется подкласс осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной поверхностью в наперёд заданном азимутальном магнитном поле, характеризующийся тем свойством, что для него малые осесимметричные длинноволновые возмущения $w'(t,\ z,\ \nu)$, $R'(t,\ z,\ \nu)$ и $R_1'(t, z)$ (2.4) служат отклонениями траекторий движения жидких частиц от соответствующих линий тока установившихся течений (1.20), (2.6). Наиболее наглядно эти возмущения можно описать посредством поля лагранжевых смещений $\xi = \xi(t, z, \nu)$ (I.13) [24], которое вводится с помощью соотношения (1.25).

Опираясь на уравнение (1.25), начально–краевую задачу (2.4) несложно переписать в форме

$$w_t' + w^0 w_z' = \frac{\kappa^2 - h_1^2}{2} R_{1z}' +$$
$$+ \int\limits_{\nu}^{1} \left[h R_z' \frac{dh}{d\nu_1} \right] d\nu_1,\ R_\nu' = -\frac{dR^0}{d\nu} \xi_z \tag{III.2.9}$$
$$\xi(0,\ z,\ \nu) = \xi_0(z,\ \nu),\ w'(0,\ z,\ \nu) = w_0'(z,\ \nu)$$

Прямыми расчётами может быть показано, что аналогом интеграла полной энергии смешанной задачи (1.25), (2.9) является функционал E (2.5) и ничто иное.

В интересах последующего изложения разумно использовать интеграл

$$\Pi \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} \left[h^2 R' R_\nu' \right] d\nu dz - \frac{\kappa^2}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_1'^2 dz \tag{III.2.10}$$

что даёт возможность, например, представить функционал E (2.5) в виде

$$E \equiv T + \Pi + T_1 = \text{const} \tag{III.2.11}$$

(здесь величины T и T_1 берутся из соотношений (1.32) и (1.51) соответственно).

Двукратное дифференцирование интеграла M (1.31) по независимой переменной t и выполнение ряда преобразований получившегося в итоге функционала с применением связей (1.25), (2.9), (2.10) приводят к уже возникавшему раньше вириальному равенству [24, 135–137] в форме

$$\frac{d^2M}{dt^2} = 4(T - \Pi)$$

Умножая теперь это равенство на произвольную постоянную λ и учитывая выражение (2.11), удаётся вывести ключевое уравнение вида (1.34) с интегралами M, T, T_1 и Π в форме (1.31), (1.32), (1.51) и (2.10).

Если справедливы неравенства $\lambda > 0$ и

$$h\frac{dh}{d\nu} > 0,\ h_1^2 < \kappa^2 \tag{III.2.12}$$

то из ключевого уравнения (1.34), в чём нетрудно убедиться, будет вытекать оригинальное дифференциальное соотношение (1.52), а значит, как продемонстрировано выше, — нижняя априорная экспоненциальная оценка (1.53).

Наличие настоящей оценки снизу свидетельствует о том, что малые осесимметричные длинноволновые возмущения $\xi(t,\, z,\, \nu)$ (1.25), (1.59), (2.9) точных стационарных решений (1.20), (2.6) начально–краевой задачи (2.1) действительно могут нарастать во времени не медленнее, чем экспоненциально, поэтому соотношения (2.12) служат искомыми достаточными условиями линейной неустойчивости, а два первых неравенства в системе соотношений (1.58) — желаемыми достаточными условиями практической линейной неустойчивости.

Ниже строится иллюстративный аналитический пример точных стационарных решений (1.20), (2.6) смешанной задачи (2.1) и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.59), (2.9), растущих со временем при выполнении достаточных условий линейной неустойчивости (1.58), (2.12) в согласии со сконструированной априорной экспоненциальной оценкой снизу (1.53).

ПРИМЕР. Рассматриваются установившиеся осесимметричные сдвиговые струйные течения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости со свободной границей и бесконечной проводимостью в азимутальном магнитном поле, которое является наперёд заданной функцией радиальной координаты, вида

$$w^0(\nu) = a - \nu^2,\ R^0(\nu) = \nu,\ R_1^0 = 1 \qquad \text{(III.2.13)}$$

где $a > 1$ — постоянная величина. Несложно проверить, что эти течения представляют собой типичные элементы подкласса (2.12) стационарных течений (1.20), (2.6).

Принимая во внимание соотношения (1.25), (2.6) и (2.13), первому уравнению из системы связей (2.9) нетрудно придать форму

$$\xi_{tt} + 2\left(a - \nu^2\right)\xi_{tz} + \left(a - \nu^2\right)^2\xi_{zz} = \frac{\kappa^2 - h_1^2}{2}R'_{1z} +$$

$$+ 2\int\limits_{\nu}^{1}\left(a - \nu_1^2\right)R'_z d\nu_1 \qquad \text{(III.2.14)}$$

Дальше ищутся решения соотношения (2.14) в виде

$$\xi(t,\ z,\ \nu) = u(\nu)\exp(\alpha t + i\beta z) \qquad \text{(III.2.15)}$$

$$R'(t,\ z,\ \nu) = v(\nu)\exp(\alpha t + i\beta z)$$

причём, в силу второго уравнения системы связей (2.9), функции $u(\nu)$ и $v(\nu)$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{dv}{d\nu} = -i\beta u \tag{III.2.16}$$

Здесь i — мнимая единица, $\alpha \equiv \alpha_1 + i\alpha_2$ — некая комплексная, а β, α_1, α_2 — произвольные вещественные постоянные.

Подстановка выражений (2.15) в уравнение (2.14) с учётом связи (2.16) и дифференцирование последнего по независимой переменной ν приводят, после некоторых алгебраических преобразований, к промежуточному соотношению в форме

$$\frac{d^2v}{d\nu^2} - \frac{4i\beta\nu}{\alpha + i\beta\left(a - \nu^2\right)}\frac{dv}{d\nu} + \frac{2\beta^2\left(a - \nu^2\right)}{\left[\alpha + i\beta\left(a - \nu^2\right)\right]^2}v = 0$$

В свою очередь, в этом соотношении сначала производится замена искомой функции [199]

$$s(\nu) = v(\nu)\left[\alpha + i\beta\left(a - \nu^2\right)\right] \tag{III.2.17}$$

а потом — одновременная замена и независимой переменной, и искомой функции [200]

$$x = \int \frac{d\nu}{i\beta\left(\nu^2 - a\right) - \alpha},\ y(x) = \frac{s(\nu)}{\sqrt{i\beta\left(\nu^2 - a\right) - \alpha}} \tag{III.2.18}$$

В результате, оно предстанет в виде уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + i\beta\left(\alpha - i\beta a\right)y = 0$$

чьим общим решением служит выражение

$$\begin{gathered} y(x) = C_1 \exp\left[x\sqrt{-i\beta\left(\alpha - i\beta a\right)}\right] + \\ + C_2 \exp\left[-x\sqrt{-i\beta\left(\alpha - i\beta a\right)}\right] \end{gathered} \tag{III.2.19}$$

где C_1 и C_2 — некие постоянные величины (все присутствующие в пункте «ПРИМЕР» функции комплексного переменного понимаются в смысле своих главных ветвей).

Осуществляя теперь в соотношении (2.19) обратные замены (2.17), (2.18), вычисляя функции $\xi(t,\, z,\, \nu)$, $R'(t,\, z,\, \nu)$ (2.15), (2.16) и подставляя их в уравнение (2.14), несложно определить значения постоянных C_1 и C_2, для которых соотношение (2.14) будет превращаться в тождество при произвольных постоянных величинах α и β. Отсюда следует, что среди решений (2.15)–(2.19) начально–краевой задачи (1.25), (1.59), (2.6), (2.9), (2.12), (2.13) есть целое семейство решений, нарастающих во времени экспоненциально ($\alpha_1 > 0$). Естественно, для данных растущих решений выполняются как неравенства (1.52), (1.53), так и счётный набор связей (1.58).

Значит, построение иллюстративного аналитического примера точных стационарных решений (1.20), (2.6) смешанной задачи (2.1) и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.59), (2.9), которые нарастают со временем при наличии найденных в излагаемом параграфе достаточных условий линейной практической (см. на первые два соотношения в системе связей (1.58)) и теоретической (2.12) неустойчивости согласно сконструированной нижней априорной экспоненциальной оценке (1.53), завершено.

§3. УСТОЙЧИВОСТЬ УСТАНОВИВШИХСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СДВИГОВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ

ПОВЕРХНОСТЬЮ И НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ В ПОЛОИДАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В настоящем параграфе изучается линейная задача устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости со свободной границей и идеальной проводимостью [140, 142, 143]. Предполагается, что исследуемая струя имеет бесконечную длину, по её поверхности течёт продольный постоянный электрический ток, а размещается она вдоль оси цилиндрической оболочки с неограниченной проводимостью, так что между её свободной поверхностью и внутренней стороной оболочки находится вакуумная прослойка. Вторым (или прямым) методом Ляпунова получается необходимое и достаточное условие устойчивости этих течений относительно специальных малых осесимметричных длинноволновых возмущений. Когда данное условие устойчивости нарушается, строятся априорные верхняя и нижняя экспоненциальные оценки роста малых возмущений, при этом инкременты содержащихся в них экспонент вычисляются по параметрам рассматриваемых установившихся течений и начальным данным для возмущений. Конструируется пример стационарного осесимметричного сдвигового струйного МГД течения и налагаемых на него начальных малых осесимметричных же длинноволновых возмущений, чьё развитие во времени и пространстве на линейной стадии будет происходить в согласии с построенными оценками. Кроме того, посредством прямого метода Ляпунова обнаруживаются достаточные условия устойчивости установившихся осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной границей в полоидальном магнитном поле по отношению к произвольным малым длинноволновым возмущениям того же типа симметрии. В свою очередь, эти условия устойчивости частично обращаются, выводятся достаточные условия практической линейной неустойчивости и конструируется априорная же экспоненциальная оценка снизу нарастания изучаемых малых осесимметричных длинноволновых возмущений, обладающая той характерной чертой, что присутствующий в ней инкремент экспоненты является некой положительной постоянной величиной. Наконец, строится иллюстративный аналитический пример исследуемых стационарных течений и наложенных на них общих малых осесимметричных же длинноволновых возмущений, которые ведут себя со временем согласно сконструированной нижней оценке.

ФОРМУЛИРОВКА ТОЧНОЙ ЗАДАЧИ. Рассматривается жидкая бесконечная по проводимости струя неограниченной длины в магнитном поле. Считается, что по свободной поверхности данной струи течёт продольный постоянный электрический ток J. Более того, полагается, что изучаемая струя помещается вдоль оси идеальной по проводимости цилиндрической оболочки радиуса r_*, нигде не соприкасаясь с последней благодаря существованию между ними вакуумного зазора. Вводится цилиндрическая система координат $(r^*,\ \varphi,\ z^*)$ так, чтобы её ось z^* совпадала с осью симметрии исследуемой струи. Наряду с уже использовавшимися в первых двух параграфах третьей главы курса лекций, применяются и новые обозначения: H_1, H_3 — радиальный и осевой компоненты магнитного поля в пределах струи; H_1^*, H_3^* — то-же радиальная и осевая составляющие магнитного поля, но снаружи проводящей струи. Считается, что при движениях жидкости в струе $v_2 \equiv 0$, $H_2 \equiv 0$ (здесь v_2 — азимутальный компонент поля скорости). Кроме того, предполагается, что сами эти движения осесимметричны, а жидкость — невязкая, несжимаемая и однородная по плотности. Наконец, действие сил поверхностного натяжения на свободной границе проводящей струи целиком и полностью игнорируется.

В согласии с вышеперечисленными допущениями, уравнения одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики [186, 192] предстанут в виде:

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial r^*}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial P_*}{\partial r^*}+\frac{H_1}{4\pi}\frac{\partial H_1}{\partial r^*}+ \\ +\frac{H_3}{4\pi}\frac{\partial H_1}{\partial z^*},\ \rho\left(\frac{\partial v_3}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial v_3}{\partial r^*}+\right. \\ \left.+v_3\frac{\partial v_3}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial P_*}{\partial z^*}+\frac{H_1}{4\pi}\frac{\partial H_3}{\partial r^*}+\frac{H_3}{4\pi}\frac{\partial H_3}{\partial z^*} \\ \frac{1}{r^*}\frac{\partial\left(v_1 r^*\right)}{\partial r^*}+\frac{\partial v_3}{\partial z^*}=0,\ \frac{\partial\left(Ar^*\right)}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial\left(Ar^*\right)}{\partial r^*}+v_3\frac{\partial\left(Ar^*\right)}{\partial z^*}=0 \\ P_*\equiv P+\frac{H_1^2+H_3^2}{8\pi},\ H_1\equiv-\frac{\partial A}{\partial z^*},\ H_3\equiv\frac{1}{r^*}\frac{\partial\left(Ar^*\right)}{\partial r^*} \tag{III.3.1}$$

где A — азимутальная составляющая векторного потенциала магнитного поля в рассматриваемой струе.

Если пренебречь током смещения, то соотношения для компонентов магнитного поля в вакуумной прослойке между внутренней поверхностью цилиндрической оболочки и свободной границей струи [201] запишутся в форме:

$$\frac{\partial H_2^*}{\partial z^*}=0,\ \frac{\partial H_1^*}{\partial z^*}-\frac{\partial H_3^*}{\partial r^*}=0 \tag{III.3.2}$$

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial\left(H_2^* r^*\right)}{\partial r^*}=0,\ \frac{1}{r^*}\frac{\partial\left(H_1^* r^*\right)}{\partial r^*}+\frac{\partial H_3^*}{\partial z^*}=0$$

Принимаются следующие краевые условия: а) на оси симметрии проводящей струи (при $r^*=0$)

$$v_1=0,\ H_1=0 \tag{III.3.3}$$

б) на её свободной поверхности (при $r^*=r_1\left(t^*,\ z^*\right)$)

$$P_*=\frac{H_1^{*2}+H_2^{*2}+H_3^{*2}}{8\pi} \tag{III.3.4}$$

$$v_1=\frac{\partial r_1}{\partial t^*}+v_3\frac{\partial r_1}{\partial z^*},\ H_1-H_3\frac{\partial r_1}{\partial z^*}=0$$

$$H_1^*-H_3^*\frac{\partial r_1}{\partial z^*}=0$$

в) на внутренней границе цилиндрической оболочки (при $r^*=r_*$)

$$H_1^*=0 \tag{III.3.5}$$

Начальные данные для системы уравнений (3.1) и второго из соотношений (3.4) выбираются в виде

$$v_1\left(0,\ r^*,\ z^*\right)=v_{10}\left(r^*,\ z^*\right) \tag{III.3.6}$$

$$v_3\left(0,\ r^*,\ z^*\right)=v_{30}\left(r^*,\ z^*\right),\ A\left(0,\ r^*,\ z^*\right)=A_0\left(r^*,\ z^*\right)$$

$$r_1\left(0,\ z^*\right)=r_{10}\left(z^*\right)$$

при этом от функций v_{10}, v_{30}, A_0 и r_{10} требуется, чтобы они не противоречили третьему уравнению системы (3.1), условиям (3.3), а также первой, третьей и четвёртой связям из системы соотношений (3.4).

Далее в смешанной задаче (3.1)–(3.6) выполняется переход к длинноволновому приближению, предваряемый процедурой обезразмеривания, причём в качестве обезразмеривающих параметров берутся, как и в первом параграфе настоящей главы, величины L, v_0 и r_0. При помощи данных параметров строятся безразмерные величины t, η, z, q, w, p_*, h, H, a, h^*, κ и H^*, так что имеют место выражения

$$t^* = \frac{tL}{v_0},\ r^{*2} = \eta L^2\delta^2,\ z^* = zL \tag{III.3.7}$$

$$2v_1 r^* = qv_0 L\delta^2,\ v_3 = wv_0,\ P_* = p_*\rho v_0^2$$

$$H_1 r^* = hv_0\sqrt{\pi\rho}L\delta^2,\ H_3 = 2Hv_0\sqrt{\pi\rho},\ Ar^* = av_0\sqrt{\pi\rho}L^2\delta^2$$

$$H_1^* r^* = h^* v_0\sqrt{\pi\rho}L\delta^2,\ H_2^* r^* = 2\kappa v_0\sqrt{\pi\rho}L\delta,\ H_3^* = 2H^* v_0\sqrt{\pi\rho}$$

(здесь $\delta \equiv r_0/L \ll 1$ — безразмерный характерный радиус изучаемой струи).

Результатом проведения процедуры обезразмеривания начально–краевой задачи (3.1)–(3.6) с использованием связей (3.7) становится, прежде всего, система уравнений

$$\left[q_t + qq_\eta - \frac{q^2}{2\eta} + wq_z\right]\delta^2 = -\,4\eta p_{*\eta} +$$

$$+\left[hh_\eta - \frac{h^2}{2\eta} + Hh_z\right]\delta^2 \tag{III.3.8}$$

$$w_t + qw_\eta + ww_z = -\,p_{*z} + hH_\eta +$$

$$+\,HH_z,\ q_\eta + w_z = 0,\ a_t + qa_\eta + wa_z = 0;\ h \equiv -\,a_z,\ H \equiv a_\eta$$

которая вытекает из системы (3.1). В свою очередь, система соотношений (3.2) преобразуется к форме:

$$h_z^*\delta^2 - 4\eta H_\eta^* = 0,\ H_z^* + h_\eta^* = 0,\ \kappa = \mathrm{const} \tag{III.3.9}$$

Помимо этого, принимая во внимание последнее равенство системы (3.9), краевые условия (3.3)–(3.5) можно представить в виде

$$q = 0,\ h = 0\ (\eta = 0) \tag{III.3.10}$$

$$q = \eta_{1t} + w\eta_{1z},\ p_* = \frac{1}{2}\left[\frac{(h^*\delta)^2}{4\eta_1} + \frac{\kappa^2}{\eta_1} + H^{*2}\right]\ (\eta = \eta_1(t,\ z))$$

$$h - H\eta_{1z} = 0,\ h^* - H^*\eta_{1z} = 0\ (\eta = \eta_1(t,\ z))$$

$$h^* = 0\ (\eta = \eta_*)$$

где функция $\eta_1(t,\ z)$ описывает изменение формы свободной поверхности струи с течением времени, а значение η_* отвечает радиусу окружающей её цилиндрической оболочки. Наконец, начальные данные (3.6) примут вид:

$$q(0,\ \eta,\ z) = q_0(\eta,\ z) \tag{III.3.11}$$

$$w(0,\ \eta,\ z) = w_0(\eta,\ z)\,,\ a(0,\ \eta,\ z) = a_0(\eta,\ z)$$

$$\eta_1(0,\ z) = \eta_{10}(z)$$

Отсюда немедленно следует, что если в соотношениях смешанной задачи (3.8)–(3.11) устранить слагаемые, пропорциональные сомножителю δ^2, и выражение для функции $q(0,\ \eta,\ z)$, то, тем самым, ей будет придана форма, которая как раз и соответствует длинноволновому приближению.

Примечательно, что длинноволновая модификация системы уравнений (3.9) будет обладать решением, обращающим в тождества шестое и седьмое краевые условия системы (3.10):

$$h^*(t,\ \eta,\ z) = (\eta_* - \eta)\,H^*_z,\ H^*(t,\ z) = \frac{\Phi}{\eta_* - \eta_1}$$

Здесь $\Phi = \Phi(t)$ — произвольная функция времени, которая по своему физическому смыслу служит безразмерным осевым потоком магнитного поля через вакуумный зазор между свободной границей проводящей струи и внутренней поверхностью цилиндрической оболочки.

Ниже считается, что осевой поток магнитного поля через вакуумную прослойку между струёй и оболочкой фиксирован, то есть $\Phi(t) \equiv \equiv \Phi_0 = \text{const}$. Эта гипотеза подразумевает отсутствие каких–либо внешних относительно исследуемой механической системы источников, вызывающих изменение величины данного потока во времени, и всецело подтверждается соотношениями, которые получаются из начально–краевой задачи (3.8)–(3.11) как итог осуществления длинноволнового приближения. Таким образом, четвёртое равенство системы краевых условий (3.10) превратится в связь

$$p_* = \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa^2}{\eta_1} + \frac{\Phi_0^2}{(\eta_* - \eta_1)^2}\right] \ (\eta = \eta_1(t,\ z)) \tag{III.3.12}$$

Дальнейшее рассмотрение длинноволновой версии смешанной задачи (3.8)–(3.11) может быть ощутимо упрощено, если произвести в ней замену эйлеровых независимых переменных $(t,\ \eta,\ z)$ на эйлерово–лагранжевы $(t',\ z',\ \nu)$, определяемую соотношениями (1.8), (1.9) [139, 140, 151].

Действительно, пренебрегая слагаемыми, которые содержат сомножитель δ^2, и опуская штрихи у переменных t' и z', систему уравнений (3.8), посредством новых смешанных эйлерово–лагранжевых независимых переменных, можно переписать в виде

$$p_{*\nu} = 0,\ R_\nu\left(w_t + w w_z\right) = \tag{III.3.13}$$

$$= -R_\nu p_{*z} + hH_\nu + R_\nu H H_z - H R_z H_\nu$$

$$q_\nu + R_\nu w_z - R_z w_\nu = 0,\ a_t + w a_z = 0$$

$$h \equiv -a_z + \frac{a_\nu R_z}{R_\nu},\ H \equiv \frac{a_\nu}{R_\nu}$$

Граничными условиями для соотношений (3.13) будут равенство (3.12) и связь

$$a_z = 0 \ (\nu = 0,\ 1) \tag{III.3.14}$$

вытекающая из второго и пятого выражений (3.10), а также двух последних соотношений системы уравнений (3.13). К соотношениям (1.8), (1.9), (3.12)–(3.14) добавляются начальные данные в форме

$$w(0,\ z,\ \nu) = w_0(z,\ \nu) \tag{III.3.15}$$

$$R(0,\ z,\ \nu) = R_0(z,\ \nu),\ a(0,\ z,\ \nu) = a_0(z,\ \nu)$$

где функция $R_0(z,\ \nu)$, по аналогии с первыми двумя параграфами третьей главы настоящего курса лекций, полагается монотонно возрастающей по аргументу ν.

Последующее изучение начально–краевой задачи (1.8), (1.9), (3.12)–(3.15) выполняется в предположении, что величина a является известной функцией переменной ν, а именно: $a = a_*(\nu)$. Это означает, что обезразмеренное произведение азимутальной составляющей векторного потенциала магнитного поля на радиальную координату остаётся в процессе движений жидкости постоянным на каждой линии $\nu = \text{const}$. Существенно, что данное ограничение не вступает в противоречие с четвёртым из уравнений (3.13), поскольку если в начальный момент времени $t = 0$ положить $a_0 \equiv a_*(\nu)$, то в силу этого уравнения такой вид зависимости величины a от независимой переменной ν не претерпит никаких изменений и во все дальнейшие моменты времени $t > 0$. Более того, для функции a в форме $a_*(\nu)$ краевое условие (3.14) удовлетворяется тождественно.

В целях придать смешанной задаче (1.8), (1.9), (3.12)–(3.15) максимально наглядный вид, с помощью соотношения (3.12) и первого уравнения системы (3.13) устанавливается связь

$$p_{*z} = \left[-\frac{\kappa^2}{2\eta_1^2} + \frac{\Phi_0^2}{(\eta_* - \eta_1)^3} \right] \eta_{1z} \qquad \text{(III.3.16)}$$

Заменяя теперь в системе соотношений (3.13) частную производную p_{*z} её выражением (3.16), а функцию q — её представлением (1.8) и учитывая сделанное выше допущение о форме функциональной зависимости величины a от переменной ν, начально–краевую задачу (1.8), (1.9), (3.12)–(3.15) несложно окончательно записать в виде

$$w_t + ww_z = \left[\frac{\kappa^2}{2R_1^2} - \frac{\Phi_0^2}{(R_* - R_1)^3} \right] R_{1z} -$$

$$- \frac{R_{\nu z}}{R_\nu^3} \left(\frac{da_*}{d\nu} \right)^2 \qquad \text{(III.3.17)}$$

$$R_{\nu t} + (wR_\nu)_z = 0;\; h \equiv \frac{R_z}{R_\nu} \frac{da_*}{d\nu}$$

$$H \equiv \frac{1}{R_\nu} \frac{da_*}{d\nu};\; w(0,\, z,\, \nu) = w_0(z,\, \nu),\; R(0,\, z,\, \nu) = R_0(z,\, \nu)$$

Здесь, как и ранее в настоящей главе, R_1 служит значением функции R на свободной поверхности проводящей струи, для которого, согласно второму из равенств (1.9), имеет место связь $R_1(t,\, z) \equiv \eta_1(t,\, z)$, а вот обозначение R_* для радиуса цилиндрической оболочки, охватывающей исследуемую струю, введено вместо η_* ради единообразия последующего изложения.

Смешанная задача (3.17) обладает интегралом энергии в форме

$$E_1 \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_0^1 \left[w^2 R_\nu + \frac{1}{R_\nu} \left(\frac{da_*}{d\nu} \right)^2 \right] d\nu + \kappa^2 \ln R_1 + \right.$$

$$+ \frac{\Phi_0^2}{R_* - R_1}\Bigg) dz = \mathrm{const} \tag{III.3.18}$$

при тех же условиях на поведение её решений как функций независимой переменной z, что и в первых двух параграфах третьей главы курса лекций. Кроме того, нетрудно продемонстрировать, что функционал

$$I \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} w_\nu F_2\left(a_*\right) d\nu dz \tag{III.3.19}$$

где F_2 — некая функция своего аргумента, является ещё одним интегралом движения начально–краевой задачи (3.17) [89, 139, 140, 141].

Смешанная задача (3.17) имеет точные стационарные решения в виде

$$w = w^0(\nu) \tag{III.3.20}$$

$$R = R^0(\nu),\ R_1 = R_1^0 \equiv 1$$

$$h = h^0 \equiv 0,\ H = H^0(\nu) \equiv \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1} \frac{da_*}{d\nu}$$

Здесь w^0 — произвольная, а R^0 — монотонно возрастающая функции переменной ν; на роль радиуса невозмущённой проводящей струи вновь, как и в первом параграфе данной главы, выбирается характерный радиус r_0 (3.7).

Дальнейшее рассмотрение нацелено на обнаружение достаточных условий линейной устойчивости стационарных решений (3.20) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $w'(t,\ z,\ \nu)$ и $R'(t,\ z,\ \nu)$.

ПОСТАНОВКА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ. Эта цель может быть достигнута путём линеаризации начально–краевой задачи

(3.17) в окрестности точных стационарных решений (3.20). В результате, возникнет смешанная задача

$$w'_t + w^0 w'_z = \left[\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3}\right] R'_{1z} -$$

$$- \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-3} \left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 R'_{\nu z} \qquad \text{(III.3.21)}$$

$$R'_{\nu t} + w^0 R'_{\nu z} + \frac{dR^0}{d\nu} w'_z = 0; \; R'_1(t,\, z) \equiv R'(t,\, z,\, 1)$$

$$h' \equiv \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1} \frac{da_*}{d\nu} R'_z, \; H' \equiv - \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2} \frac{da_*}{d\nu} R'_\nu$$

$$w'(0,\, z,\, \nu) = w'_0(z,\, \nu), \; R'(0,\, z,\, \nu) = R'_0(z,\, \nu)$$

На решениях данной начально–краевой задачи с течением времени сохраняется функционал

$$E \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_0^1 \left[\frac{dR^0}{d\nu} w'^2 + 2 w^0 R'_\nu w' + \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-3} \left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 R'^2_\nu\right] d\nu + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - \frac{\kappa^2}{2}\right] R'^2_1 \right) dz \qquad \text{(III.3.22)}$$

Несложно удостовериться, что первая вариация δJ_1 интеграла $J_1 \equiv E_1 + I$ (3.18), (3.19) становится равной нулю на стационарных решениях (3.20), когда функции w^0, R^0, a_* и F_2 обращают в тождества уравнения

$$w^0 \frac{dR^0}{d\nu} = \frac{dF_2}{da_*} \frac{da_*}{d\nu} \qquad \text{(III.3.23)}$$

$$\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1} \frac{da_*}{d\nu} \frac{d}{d\nu} \left[\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1} \frac{da_*}{d\nu}\right] = w^0 \frac{dw^0}{d\nu}$$

При этом вторая вариация $\delta^2 J_1$ функционала J_1, если её выписать в надлежащих обозначениях, совпадёт по форме с интегралом E (3.22).

Точные стационарные решения (3.20), (3.23) смешанной задачи (3.17) будут устойчивы относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.21) тогда и только тогда, когда функционал E представляет собой знакоопределённую величину.

Для того чтобы установить, обладает ли интеграл E (3.22) желаемой знакоопределённостью, его удобно переписать в виде (1.23) с вектором $\mathbf{u}$ и ненулевыми элементами b_{ik} квадратной матрицы B третьего порядка в форме

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} w' \\ R'_\nu \\ R'_1 \end{pmatrix} \tag{III.3.24}$$

$$b_{11} = \frac{dR^0}{d\nu},\ b_{12} = b_{21} = w^0$$

$$b_{22} = \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-3} \left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2,\ b_{23} = b_{32} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - \frac{\kappa^2}{2}\right]$$

Нетрудно прийти к выводу, что в силу критерия Сильвестра [198] у главных миноров матрицы B нет нужной знакоопределённости. В самом деле, непосредственное вычисление настоящих миноров даёт соотношения

$$\Delta_1 = \frac{dR^0}{d\nu} > 0,\ \Delta_2 = \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2} \left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 - w^{02}$$

$$\Delta_3 = -\frac{1}{4}\left[\frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - \frac{\kappa^2}{2}\right]^2 \frac{dR^0}{d\nu} < 0$$

Сопоставление друг с другом знаков главных миноров Δ_1 и Δ_3 позволяет однозначно констатировать, что, согласно критерию Сильвестра, функционал E (1.23), (3.24) не имеет свойства знакоопределённости.

Однако, если применить метод выделения полных квадратов [202], то интеграл E (3.22) можно преобразовать к виду

$$E = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{0}^{1} \frac{dR^0}{d\nu} \left[\left(w' + w^0 \left[\frac{dR^0}{d\nu} \right]^{-1} R'_\nu \right)^2 + \left(\frac{dR^0}{d\nu} \right)^{-4} \left(\left[\frac{da_*}{d\nu} \right]^2 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - w^{02} \left[\frac{dR^0}{d\nu} \right]^2 \right) R'^2_\nu \right] d\nu + \left[\frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - \frac{\kappa^2}{2} \right] R'^2_1 \right) dz \qquad \text{(III.3.25)}$$

из которого сразу же вытекает, что функционал E (3.25) будет неотрицателен в том и лишь в том случае, когда справедливы неравенства

$$\left(\frac{da_*}{d\nu} \right)^2 \geq w^{02} \left(\frac{dR^0}{d\nu} \right)^2, \; \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} \geq \frac{\kappa^2}{2} \qquad \text{(III.3.26)}$$

В итоге, соотношения (3.26) как раз и служат искомыми достаточными условиями линейной устойчивости точных стационарных решений (3.20), (3.23) начально–краевой задачи (3.17) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $w'(t,\ z,\ \nu)$ и $R'(t,\ z,\ \nu)$ (3.21), понимаемыми в качестве условий знакоопределённости энергетического по своей сути интеграла E (3.22), (3.25).

ФОРМУЛИРОВКА СПЕЦИАЛЬНОЙ ТОЧНОЙ ЗАДАЧИ. Ниже изучение сосредоточивается на обращении достаточных условий (3.26) линейной устойчивости стационарных решений (3.20), (3.23) смешанной задачи (3.17) в таком частном классе движений жидкости, что

$$R(t,\ z,\ \nu) \equiv R_1(t,\ z) R^0(\nu) \qquad \text{(III.3.27)}$$

Эта связь разрешает привести второе из уравнений начально–краевой задачи (3.17) к виду

$$R_{1t} + (wR_1)_z = 0 \qquad \text{(III.3.28)}$$

Если теперь продифференцировать соотношение (3.28) по независимой переменной ν, то получится уравнение

$$u_{z\nu} = 0;\ u \equiv wR_1 \tag{III.3.29}$$

которое является условием совместности для подкласса (3.27) движений жидкости.

Подстановка функций R (3.27) и u (3.29) в первое, третье и четвёртое соотношения смешанной задачи (3.17), а также в уравнение (3.28) даёт возможность записать их в форме

$$u_t + \left(\frac{u^2}{R_1}\right)_z = \left[\frac{\kappa^2}{2R_1} - \frac{\Phi_0^2 R_1}{(R_* - R_1)^3} - \left(\frac{dR^0}{d\nu}R_1\right)^{-2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2\right] R_{1z},\ R_{1t} + u_z = 0 \tag{III.3.30}$$

$$h = \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1} \frac{R^0 R_{1z}}{R_1}\frac{da_*}{d\nu},\ H = \left(\frac{dR^0}{d\nu}R_1\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}$$

Дифференцируя, в свою очередь, первое из соотношений (3.30) сначала по переменной ν, затем по независимой переменной z и, наконец, опять по переменной ν, несложно извлечь второе условие совместности для движений жидкости вида (3.27):

$$\left[\left(\frac{da_*}{d\nu}\frac{d}{d\nu}\left[\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}\right]\right)^{-1}\frac{dR^0}{d\nu}\left(\frac{u^2}{R_1}\right)_{zz\nu}\right]_\nu = 0 \tag{III.3.31}$$

Уравнения (3.29)–(3.31) могут быть дополнены следующими начальными условиями:

$$u(0,\ z,\ \nu) = u_0(z,\ \nu),\ R_1(0,\ z) = R_{10}(z) \tag{III.3.32}$$

В результате, сформулирована начально–краевая задача (3.29)–(3.32), описывающая в длинноволновом приближении специальный класс (3.27), (3.29), (3.31) неустановившихся осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной границей.

Интегралы E_1 (3.18) и I (3.19) будут сохраняться во времени и на решениях смешанной задачи (3.29)–(3.32) тоже, но вид их, в силу введённых выше определений функций R (3.27) и u (3.29), станет несколько иным:

$$E_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{R_1} \frac{dR^0}{d\nu} \left(u^2 + \left[\frac{dR^0}{d\nu} \right]^{-2} \left[\frac{da_*}{d\nu} \right]^2 \right) \right] d\nu + \right.$$

$$\left. + \kappa^2 \ln R_1 + \frac{\Phi_0^2}{R_* - R_1} \right) dz \qquad \text{(III.3.33)}$$

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 \frac{u_\nu}{R_1} F_2\left(a_*\right) d\nu dz$$

Точные стационарные решения начально–краевой задачи (3.29)–(3.32) представляют собой функции

$$u = w^0(\nu),\ R_1 = R_1^0 \equiv 1 \qquad \text{(III.3.34)}$$

$$h = h^0 \equiv 0,\ H = H^0(\nu) \equiv \left(\frac{dR^0}{d\nu} \right)^{-1} \frac{da_*}{d\nu}$$

Цель дальнейшего исследования заключается в том, чтобы найти достаточные условия линейной устойчивости стационарных решений (3.34) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $u'(t,\, z,\, \nu)$ и $R_1'(t,\, z)$. Ясно, что эти условия устойчивости будут одновременно служить и достаточными условиями линейной устойчивости точных стационарных решений (3.20) смешанной задачи (3.17) по отношению к тем же возмущениям.

ФОРМУЛИРОВКА СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ. Для того чтобы реализовать данную цель, осуществляется линеаризация начально–краевой задачи (3.29)–(3.32) около стационарных решений (3.34). Её итогом является смешанная задача, которая выписывается ниже:

$$u'_t + 2w^0 u'_z = \left[\frac{\kappa^2}{2} + w^{02} - \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2\right] R'_{1z} \tag{III.3.35}$$

$$R'_{1t} + u'_z = 0;\ u'_{z\nu} = 0$$

$$\frac{d}{d\nu}\left[w^0 - \left(\frac{dR^0}{d\nu}\frac{dw^0}{d\nu}\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}\frac{d}{d\nu}\left(\left[\frac{dR^0}{d\nu}\right]^{-1}\frac{da_*}{d\nu}\right)\right] = 0$$

$$h' = \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}R^0 R'_{1z},\ H' = -\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}R'_1$$

$$u'(0,\ z,\ \nu) = u'_0(z,\ \nu),\ R'_1(0,\ z) = R'_{10}(z)$$

Эта задача обладает сохраняющимся с течением времени функционалом в виде

$$E_2 \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \left(\frac{dR^0}{d\nu}\left[u'^2 + \left(\left[\frac{dR^0}{d\nu}\right]^{-2}\left[\frac{da_*}{d\nu}\right]^2 - \frac{\kappa^2}{2} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\Phi_0^2}{[R_* - 1]^3} - w^{02}\right) R'^2_1\right]\right) d\nu dz \tag{III.3.36}$$

Нетрудно проверить, что первая вариация δJ_1 интеграла $J_1 = E_1 + I$ (3.33) равна нулю на точных стационарных решениях (3.34), а его вторая вариация $\delta^2 J_1$, в подходящих обозначениях, идентична функционалу E_2, если истинны соотношения

$$w^0\frac{dR^0}{d\nu} = \frac{dF_2}{da_*}\frac{da_*}{d\nu},\ w^0(1)F_2\left[a_*(1)\right] = w^0(0)F_2\left[a_*(0)\right] \tag{III.3.37}$$

Стационарные решения (3.34), (3.37) начально–краевой задачи (3.29)–(3.32) (а значит, и точные стационарные решения (3.20), (3.23) смешанной задачи (3.17)) будут устойчивыми относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.35) тогда и только тогда, когда повсюду внутри струи

$$\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2-\frac{\kappa^2}{2}+\frac{\Phi_0^2}{\left(R_*-1\right)^3}-w^{02}\geq 0 \qquad \text{(III.3.38)}$$

поскольку данное соотношение, как это вытекает из выражения (3.36), обеспечивает, по крайней мере, неотрицательность интеграла E_2.

Следует подчеркнуть, что неравенство (3.38) и есть то достаточное условие линейной устойчивости стационарных решений (3.34), (3.37) (или (3.20), (3.23)), что требовалось отыскать.

ФУНКЦИОНАЛ ЛЯПУНОВА. Далее считается, что справедливость соотношения (3.38) нарушается хотя бы где–нибудь в пределах проводящей струи. В таком случае можно надеяться показать линейную неустойчивость точных стационарных решений (3.34), (3.37) начально–краевой задачи (3.29)–(3.32) (а вместе с ними, естественно, и стационарных решений (3.20), (3.23) смешанной задачи (3.17)) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $u'(t,z,\nu)$, $R_1'(t,z)$ (3.35). Если данной цели удастся достичь, то, тем самым, будет продемонстрировано, что условие (3.38) линейной устойчивости точных стационарных решений (3.34), (3.37) (либо (3.20), (3.23)) и достаточно, и необходимо. Кроме того, будет установлена частичная обратимость достаточных условий (3.26) линейной устойчивости стационарных решений (3.20), (3.23) начально–краевой задачи (3.17).

Для претворения задуманного в жизнь надо суметь выделить среди малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.35) всего лишь одно, но зато, как минимум, экспоненциально быстро растущее во времени возмущение. Наиболее эффективно этот план может быть выполнен тогда, когда рассмотрение концентрируется на малых возмущениях, представляющих собой отклонения траекторий движения жидких частиц от соответствующих линий тока установившихся течений (3.34), (3.37).

Данные возмущения можно охарактеризовать при помощи поля лагранжевых смещений $\xi = \xi(t,\, z,\, \nu)$ (I.13) [24], которое будет удовлетворять здесь уравнению

$$\xi_t = u' \tag{III.3.39}$$

гораздо нагляднее и доступнее, чем любыми другими средствами. Действительно, используя соотношение (3.39), несложно показать, что смешанная задача (3.35) может быть приведена к начально–краевой задаче, включающей в себя единственное эволюционное дифференциальное уравнение, то есть:

$$\begin{gathered}
\xi_{tt} + 2w^0\xi_{tz} = \left[\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 - \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\Phi_0^2}{(R_*-1)^3} - \right. \\
\left. - \, w^{02}\right]\xi_{zz},\ R_1' = -\,\xi_z;\ \xi_{z\nu} = 0 \qquad\qquad (\text{III.3.40}) \\
\frac{d}{d\nu}\left[w^0 - \left(\frac{dR^0}{d\nu}\frac{dw^0}{d\nu}\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}\frac{d}{d\nu}\left(\left[\frac{dR^0}{d\nu}\right]^{-1}\frac{da_*}{d\nu}\right)\right] = 0 \\
h' = -\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}R^0\xi_{zz},\ H' = \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}\xi_z \\
\xi(0,\, z,\, \nu) = \xi_0(z,\, \nu),\ \xi_t(0,\, z,\, \nu) = u'(0,\, z,\, \nu) = u_0'(z,\, \nu)
\end{gathered}$$

Понятно, что из–за наличия третьего соотношения в системе (3.40) смешанная задача (3.39), (3.40) переопределена. Кроме того, это соотношение говорит о том, что функция $\xi(t,\ z,\ \nu)$, служа решением начально–краевой задачи (3.39), (3.40), имеет форму

$$\xi(t,\ z,\ \nu) = f_3(t,\ z) + f_4(t,\ \nu) \qquad \text{(III.3.41)}$$

где $f_3(t,\ z)$ и $f_4(t,\ \nu)$ — некоторые функции своих аргументов, и никакую иную.

Значит, начальные условия $\xi_0(z,\nu)$ и $u_0'(z,\nu)$ для смешанной задачи (3.39), (3.40) должно задавать в виде

$$\xi_0(z,\ \nu) = f_5(z) + f_6(\nu),\ u_0'(z,\ \nu) = f_7(z) + f_8(\nu) \qquad \text{(III.3.42)}$$

(здесь f_5 и f_7 — произвольные функции независимой переменной z, а f_6 и f_8 — некоторые функции аргумента ν).

Исходя из этого, появляется ряд вопросов: обладает ли начально–краевая задача (3.39), (3.40) решениями в форме (3.41)? налагает ли переопределённость смешанной задачи (3.39), (3.40) какие–нибудь добавочные (помимо (3.42)) ограничения на выбор начальных возмущений $\xi_0(z,\ \nu)$, $u_0'(z,\ \nu)$?

Исчерпывающие ответы на поставленные вопросы можно дать, если переформулировать начально–краевую задачу (3.39), (3.40) в виде

$$R_{1tt}' + 2w^0 R_{1tz}' = \left[\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 - \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - \right.$$
$$\left. - w^{02}\right] R_{1zz}' \qquad \text{(III.3.43)}$$
$$\frac{d}{d\nu}\left[w^0 - \left(\frac{dR^0}{d\nu}\frac{dw^0}{d\nu}\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}\frac{d}{d\nu}\left(\left[\frac{dR^0}{d\nu}\right]^{-1}\frac{da_*}{d\nu}\right)\right] = 0$$
$$h' = \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}R^0 R_{1z}',\ H' = -\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1}\frac{da_*}{d\nu}R_1'$$

$$R_1'(0,\,z)=R_{10}'(z)\;\left(=-\frac{df_5}{dz}\right),\;R_{1t}'(0,\,z)=\left(R_{1t}'\right)_0(z)\;\left(=-\frac{df_7}{dz}\right)$$

Нетрудно заметить, что смешанная задача (3.43) содержит в себе всего только одно эволюционное дифференциальное уравнение для определения единственной же искомой функции $R_1'(t,\,z)$, причём, что очень важно, это уравнение однородно. Таким образом, начальные данные $R_{10}'(z)$ и $\left(R_{1t}'\right)_0(z)$ могут браться совершенно произвольными, без всяких ограничений.

В результате, если решение $R_1'(t,\,z)$ начально–краевой задачи (3.43) обнаружено, то с помощью второго из системы соотношений (3.40) можно вычислить функцию $\xi(t,\,z,\,\nu)$ как решение смешанной задачи (3.39), (3.40), которое всецело отвечает представлению (3.41).

Итак, опираясь на изложенные выше соображения, несложно сделать вывод, что у начально–краевой задачи (3.39), (3.40) могут быть решения в форме (3.41), при этом её переопределённость никакими дополнительными (за исключением (3.42)) ограничениями на начальные возмущения $\xi_0(z,\,\nu)$, $u_0'(z,\,\nu)$ не сопровождается.

Ниже, в интересах дальнейшего изучения, вводятся вспомогательные интегралы

$$T\equiv\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dR^0}{d\nu}\left(u'-\right.$$

$$\left.-\,w^0R_1'\right)^2d\nu dz \qquad \text{(III.3.44)}$$

$$\Pi\equiv\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dR^0}{d\nu}\left[\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2+\frac{\Phi_0^2}{\left(R_*-1\right)^3}-\frac{\kappa^2}{2}\right]R_1'^2d\nu dz$$

$$T_1\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dR^0}{d\nu}\left(u'-w^0R_1'\right)w^0R_1'd\nu dz,\;T_2\equiv\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dR^0}{d\nu}u'^2d\nu dz$$

$$
\Pi_1 \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dR^0}{d\nu}\left[\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2-\frac{\kappa^2}{2}+\frac{\Phi_0^2}{\left(R_*-1\right)^3}-\right.
$$

$$
\left.-\,w^{02}\right]R_1'^2 d\nu dz
$$

так что

$$
E_2 \equiv T+\Pi+T_1 \equiv T_2+\Pi_1=\mathrm{const} \qquad \text{(III.3.45)}
$$

Двукратное дифференцирование функционала M (1.31) по времени и осуществление преобразований получившегося в итоге интеграла с применением связей (3.35), (3.39), (3.40) и (3.44) позволяют прийти к ключевому уравнению [136, 137, 139–141]

$$
\frac{d^2M}{dt^2}=4(T-\Pi)
$$

называемому в мировой научной литературе вириальным равенством [24]. Умножая теперь данное равенство на некоторую постоянную λ, учитывая соотношение (3.45) и используя уравнение

$$
\frac{dT_1}{dt}=0
$$

непосредственно вытекающее из смешанных задач (3.35) и (3.39), (3.40), можно вывести важное соотношение

$$
\frac{dE_\lambda}{dt}=2\lambda E_\lambda-4\lambda T_\lambda \qquad \text{(III.3.46)}
$$

где

$$
E_\lambda \equiv \Pi_\lambda+T_\lambda,\ 2\Pi_\lambda \equiv 2\Pi+\lambda^2 M
$$

$$
2T_\lambda \equiv 2T+\lambda^2M-\lambda\frac{dM}{dt}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dR^0}{d\nu}\left(u'-w^0R_1'-\lambda\xi\right)^2 d\nu dz \geq 0
$$

Если взять постоянную величину λ строго положительной, то уравнение (3.46) может быть сведено, благодаря неотрицательности функционала T_λ, к дифференциальному неравенству

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leq 2\lambda E_\lambda$$

после интегрирования которого опять, как и в первом параграфе третьей главы настоящего курса лекций, возникнет базовая оценка

$$E_\lambda(t) \leq E_\lambda(0)\exp(2\lambda t) \qquad \text{(III.3.47)}$$

Эта оценка также справедлива и для любых решений начально–краевой задачи (3.39), (3.40), и для произвольных положительных значений постоянной λ. Более того (что весьма существенно), при её получении тоже не появилось необходимости налагать какие–нибудь ограничения на знак функционала П. Наконец, она также даёт возможность заключить, что интеграл E_λ может восприниматься ниже в качестве функционала Ляпунова [16, 22, 139–141].

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ. Во многом повторяя соответствующие рассуждения первого параграфа третьей главы курса лекций, можно сконструировать априорные двусторонние экспоненциальные оценки нарастания малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.39)–(3.42) стационарных решений (3.34), (3.37) смешанной задачи (3.29)–(3.32) при помощи основного интегрального неравенства (3.47) и путём надлежащего подбора функций $\xi_0(z,\ \nu)$, $u_0'(z,\ \nu)$ в условиях, когда или всюду внутри струи, или лишь в некоторой её части верно соотношение

$$\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 - \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\Phi_0^2}{(R_*-1)^3} - w^{02} < 0 \qquad \text{(III.3.48)}$$

по причине чего они, без всяких добавочных комментариев, выписываются далее сразу в законченном виде:

а) оценка снизу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dR^0}{d\nu}\left[\frac{\kappa^2}{2}-\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2-\frac{\Phi_0^2}{\left(R_*-1\right)^3}+w^{02}\right]R_1'^2 d\nu dz\ \geq$$

$$\geq\ 2\left|E_{\Lambda-\delta_1}(0)\right|\exp\left[2\left(\Lambda-\delta_1\right)t\right] \qquad \text{(III.3.49)}$$

$$\lambda\equiv\Lambda-\delta_1,\ \delta_1\in\,]0,\ \Lambda[\,,\ E_{\Lambda-\delta_1}(0)<0$$

$$\Lambda\equiv\frac{1}{4M(0)}\frac{dM}{dt}(0)+\sqrt{\left[\frac{1}{4M(0)}\frac{dM}{dt}(0)\right]^2-\frac{E_2(0)-T_1(0)}{M(0)}}$$

$$\Pi_1(0)<0,\ T_2(0)\leq\left|\Pi_1(0)\right|,\ T_2(0)-T_1(0)\leq\left|\Pi_1(0)\right|$$

б) оценка сверху

$$E_{\Lambda^++\delta_2}(t)\leq E_{\Lambda^++\delta_2}(0)\times$$

$$\times\ \exp\left[2\left(\Lambda^++\delta_2\right)t\right] \qquad \text{(III.3.50)}$$

$$\lambda\equiv\Lambda^++\delta_2,\ \delta_2>0,\ \Lambda^+\equiv\sup\nolimits_{\xi_0(z,\,\nu),\,u_0'(z,\,\nu)}\Lambda$$

$$E_{\Lambda^++\delta_2}(0)>0,\ \Pi_1(0)<0,\ T_2(0)\leq\left|\Pi_1(0)\right|,\ T_2(0)-T_1(0)\leq\left|\Pi_1(0)\right|$$

Из сопоставления неравенств (3.49) и (3.50) следует, что параметр Λ^+ оценивает скорость роста ω малых возмущений (3.39)–(3.42) как снизу, так и сверху, а именно:

$$\Lambda^+-\delta_1\leq\omega\leq\Lambda^++\delta_2 \qquad \text{(III.3.51)}$$

Это соотношение свидетельствует о том, что быстрее всех будут нарастать те малые осесимметричные длинноволновые возмущения (3.39)–(3.42), чьи инкременты близки по значению к величине Λ^+.

Таким образом, если истинно неравенство (3.48), то после вычисления посредством выражений (3.49) и (3.50) значения параметра Λ^+, характеризующего скорость роста ω (3.51) самых быстро нарастающих из малых возмущений (3.39)–(3.42), может быть дан ответ на вопрос: за какое время малые осесимметричные длинноволновые возмущения (3.39)–(3.42) будут приводить установившиеся осесимметричные же сдвиговые струйные течения (3.34), (3.37) (либо, что эквивалентно, (3.20), (3.23)) идеальной бесконечной по проводимости несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в полоидальном магнитном поле к разрушению?

Стоит отметить, что наличие оценок (3.49), (3.50) как раз и служит доказательством того, что условие (3.38) линейной устойчивости точных стационарных решений (3.34), (3.37) (или (3.20), (3.23)) одновременно представляет собой и достаточное, и необходимое. Кроме того, это условие является частичным обращением достаточных условий (3.26) линейной устойчивости стационарных решений (3.20), (3.23) начально–краевой задачи (3.17).

ПРИМЕРЫ. Ниже строятся примеры установившихся течений (3.20), (3.34) и их начальных малых возмущений (3.40), (3.42), которые иллюстрируют изложенные в данном параграфе результаты.

Итак, исследуется стационарное осесимметричное сдвиговое струйное МГД течение

$$w^0(\nu) = 2 - \nu,\ R^0(\nu) = \nu,\ R^0_1 = 1 \qquad \text{(III.3.52)}$$

$$h^0 = 0,\ \kappa = 2,\ a_*(\nu) = \frac{\nu^2}{2} + 2\nu + 1$$

$$H^0(\nu) = \nu + 2,\ \Phi_0 = \sqrt{2},\ R_* = 2$$

невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости в области, служащей неограниченной полосой (1.48). Ясно, что это течение — типичный представитель стационарных решений (3.20), (3.23) смешанной задачи (3.17) (а значит, и точных стационарных решений (3.34), (3.37) начально–краевой задачи (3.29)–(3.32)).

Для течения (3.52), (1.48) функция $F_2(a_*)$ (3.19) должна удовлетворять связям (3.37), которые предстают здесь в форме

$$\frac{dF_2}{d\nu} = 2 - \nu,\ 2F_2(0) = F_2(1)$$

откуда вытекает, что

$$F_2(\nu) = -\frac{\nu^2}{2} + 2\nu + \frac{3}{2}$$

Далее, установившееся течение (3.52), (1.48) таково, что для него оказывается справедливым неравенство (3.38). Действительно, прямые расчёты демонстрируют, что

$$\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 - \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - w^{02} = 8\nu \geq 0$$

на всём отрезке (1.48) изменения независимой переменной ν.

Данное обстоятельство говорит о том, что стационарное осесимметричное сдвиговое струйное МГД течение (3.52), (1.48) будет устойчиво по линейному приближению относительно малых осесимметричных же длинноволновых возмущений (3.35) и, тем более, (3.39)–(3.42).

Ниже рассматривается установившееся осесимметричное сдвиговое струйное течение

$$w^0(\nu) = 4 - \nu,\ R^0(\nu) = \nu,\ R_1^0 = 1 \qquad \text{(III.3.53)}$$

$$h^0 = 0,\ a_*(\nu) = \frac{\nu + 1}{2}\sqrt{\nu^2 + 2\nu + 2} +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left(\nu+1+\sqrt{\nu^2+2\nu+2}\right)+1,\ H^0(\nu)=\sqrt{\nu^2+2\nu+2}$$

$$\kappa=8,\ \Phi_0=4,\ R_*=3$$

идеальной бесконечной по проводимости несжимаемой жидкости с полоидальным магнитным полем в пределах той же самой неограниченной полосы (1.48).

Это решение тоже является одним из представителей стационарных решений (3.20), (3.23) (а вместе с ними, естественно, и точных стационарных решений (3.34), (3.37)), причём функция $F_2(a_*)$ для него принимает вид

$$F_2(\nu)=-\frac{\nu^2}{2}+4\nu+\frac{21}{2}$$

что позволяет ей обращать в тождества соотношения

$$\frac{dF_2}{d\nu}=4-\nu,\ 4F_2(0)=3F_2(1)$$

следующие из связей (3.37).

Кроме того, для установившегося течения (3.53), (1.48) верно неравенство (3.48). Действительно, непосредственные вычисления показывают, что

$$\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2-\frac{\kappa^2}{2}+\frac{\Phi_0^2}{(R_*-1)^3}-w^{02}=2(5\nu-22)<0$$

при любых значениях переменной ν на отрезке [0, 1].

В итоге, стационарное осесимметричное сдвиговое струйное МГД течение (3.53), (1.48) будет неустойчиво, например, по отношению к малым осесимметричным же длинноволновым возмущениям (3.39)–(3.42) с начальными данными $\xi_0(z,\ \nu)$ и $u_0'(z,\ \nu)$ в форме

$$\xi_0(z,\ \nu)=\sin\frac{2\pi z}{l_1}+\nu,\ u_0'(z,\ \nu)=0 \qquad \text{(III.3.54)}$$

где l_1 — произвольная положительная постоянная.

В самом деле, применяя соотношения (3.40), (3.44), (3.45) и (3.49), а также учитывая периодичность функции $\xi_0(z, \nu)$ (3.54) по независимой переменной z, нетрудно установить, что

$$\Pi_1(0) = \frac{4\pi^2}{l_1^2} \int\limits_0^{l_1} \int\limits_0^1 \left[(5\nu - 22) \cos^2 \frac{2\pi z}{l_1} \right] d\nu dz \; = $$

$$= \, -\frac{39\pi^2}{l_1} < 0 \qquad \text{(III.3.55)}$$

$$T_2(0) + \Pi_1(0) = \Pi_1(0) = -\frac{39\pi^2}{l_1} < 0, \; T_2(0) - T_1(0) + \Pi_1(0) = \frac{4\pi^2}{l_1^2} \times$$

$$\times \int\limits_0^{l_1} \int\limits_0^1 \left[\left(\nu^2 - 3\nu - 6 \right) \cos^2 \frac{2\pi z}{l_1} \right] d\nu dz = -\frac{86\pi^2}{3l_1} < 0$$

В результате, из выражений (3.55) вытекает истинность трёх последних неравенств (3.49). Это, в свою очередь, даёт возможность прийти к выводу, что стационарное течение (3.53), (1.48) действительно неустойчиво относительно малых возмущений (3.39)–(3.42), (3.54). Настоящие возмущения будут развиваться во времени согласно оценкам (3.49) и (3.50) (только во второй нужно вместо параметра Λ^+ подставить величину Λ (3.49)), тогда как их скорость роста ω (3.51) будет определяться с помощью параметра Λ.

ЕЩЁ ОДНА АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА. Дальнейшее изучение вновь сосредоточивается на линейной устойчивости точных стационарных решений (3.20), (3.23) смешанной задачи (3.17) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (3.21).

Ниже будет продемонстрировано, что достаточные условия (3.26) линейной устойчивости установившихся течений (3.20), (3.23) относительно малых возмущений (3.21) могут быть частично обращены. Более того, для неустойчивых стационарных течений (3.20), (3.23) будут выведены достаточные условия практической линейной неустойчивости и сконструирована априорная нижняя экспоненциальная оценка нарастания исследуемых возмущений.

Как и прежде, эти результаты можно получить посредством рассмотрения таких возмущённых движений жидкости, которые служат отклонениями траекторий движения жидких частиц от соответствующих линий тока установившихся течений (3.20), (3.23) и описываются полем лагранжевых смещений $\xi = \xi(t,\ z,\ \nu)$ (I.13) [24] вида

$$\xi_t = w' - w^0 \xi_z \tag{III.3.56}$$

При помощи уравнения (3.56) начально–краевой задаче (3.21) может быть придана форма

$$w'_t + w^0 w'_z = \left[\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3}\right] R'_{1z} + \\ + \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-2} \left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 \xi_{zz} \tag{III.3.57}$$

$$R'_\nu = -\frac{dR^0}{d\nu}\xi_z,\ h' = \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1} \frac{da_*}{d\nu} R'_z,\ H' = \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-1} \frac{da_*}{d\nu}\xi_z$$
$$\xi(0,\ z,\ \nu) = \xi_0(z,\ \nu),\ w'(0,\ z,\ \nu) = w'_0(z,\ \nu)$$

Далее функционал M (1.31) дважды дифференцируется по аргументу t с использованием соотношений смешанной задачи (3.56), (3.57):

$$\frac{dM}{dt} = 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 \frac{dR^0}{d\nu} \xi w' d\nu dz \tag{III.3.58}$$

$$\frac{d^2M}{dt^2} = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \left[\frac{dR^0}{d\nu}w'^2 - \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-3}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 R'^2_\nu\right] d\nu dz +$$

$$+ 2\left[\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3}\right]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R'^2_1 dz$$

После этого посредством связей (1.31), (3.58) составляется равенство вида

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda\frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}\left(w' - \lambda\xi\right)^2 d\nu dz -$$

$$-2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-3}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 R'^2_\nu d\nu dz - 2\left[\frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - \frac{\kappa^2}{2}\right]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R'^2_1 dz$$

(λ — некая положительная постоянная).

В свою очередь, последнее равенство несложно трансформировать в следующую цепочку соотношений:

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda\frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M \geq -2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-3}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 R'^2_\nu d\nu dz -$$

$$-2\left[\frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - \frac{\kappa^2}{2}\right]\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 R'_1 R'_\nu d\nu dz \geq -2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \left[\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-3} \times\right.$$

$$\left.\times \left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 R'^2_\nu\right] d\nu dz - \left[\frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - \frac{\kappa^2}{2}\right]\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \left(R'^2_1 + R'^2_\nu\right) d\nu dz =$$

$$= \left[\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3}\right]\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R'^2_1 dz + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \left[\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} -\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-3}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2\right] R'^2_\nu d\nu dz$$

Если
$$\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\Phi_0^2}{(R_* - 1)^3} - 2\left(\frac{dR^0}{d\nu}\right)^{-3}\left(\frac{da_*}{d\nu}\right)^2 > 0 \tag{III.3.59}$$
то данную цепочку можно оборвать и получить в итоге принципиальное для дальнейшего изучения дифференциальное неравенство вида
$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda\frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M \geq 0 \tag{III.3.60}$$

Проведя процедуру интегрирования соотношения (3.60) (кстати, полностью идентичную процедуре интегрирования, выполненной ранее для неравенства (1.52), а потому здесь не воспроизводящуюся), нетрудно найти счётный набор условий
$$M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) > 0 \tag{III.3.61}$$
$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \geq 2\lambda M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$$
$$M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv M(0)\exp\left(\frac{\pi n}{2}\right), \frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0)\exp\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$
при которых из этого соотношения с необходимостью будет вытекать априорная экспоненциальная оценка снизу
$$M(t) \geq C_4 \exp(\lambda t) \tag{III.3.62}$$
где C_4 — известная положительная постоянная величина.

Следовательно, условия (3.61) и неравенство (3.62) свидетельствуют о том, что среди малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.56), (3.57) с начальными данными в форме
$$M(0) > 0,\ \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\lambda M(0) \tag{III.3.63}$$
точных стационарных решений (3.20), (3.23) начально–краевой задачи (3.17) могут быть и растущие со временем не медленнее, чем экспо-

ненциально. При этом, как и раньше, для экспоненциально нарастающих во времени малых возмущений (3.56), (3.57), (3.63) счётный набор условий (3.61) удовлетворяется тождественно и автоматически.

Таким образом, показано, что соотношение (3.59) является достаточным условием линейной неустойчивости установившихся течений (3.20), (3.23) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (3.21), (3.56), (3.57), (3.63). Кроме того, данное соотношение, как и ожидалось, представляет собой частичное обращение достаточных условий (3.26) линейной устойчивости стационарных течений (3.20), (3.23) относительно малых возмущений (3.21).

Наконец, важно заметить, что неравенства в счётном наборе условий (3.61), обеспечивающем вытекание априорной экспоненциальной нижней оценки (3.62) из дифференциального неравенства (3.60), допускают истолкование в качестве совокупности достаточных условий практической линейной неустойчивости [14, 15] применительно к проведению физических экспериментов, выполнению численных расчётов, осуществлению технологических процессов и т. п.

Так, например, если требуется численно решить смешанную задачу (3.56), (3.57) на временном отрезке $[0,\, T_*]$ ($T_* > 0$), то путём выбора внутри этого отрезка нескольких реперных точек вида $t_k = \pi k/2\lambda$ ($k = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$) и обнаружения в них истинности либо ложности неравенств из счётного набора условий (3.61) может быть соответственно определено, имеют или нет решения начально–краевой задачи (3.56), (3.57) тенденцию, как минимум, к экспоненциальному росту по времени.

Аналогично можно предложить и алгоритм экспериментальной проверки неравенств в счётном наборе условий (3.61). Следовательно, возникают основания надеяться на овладение осознанным управлением природными явлениями, целевым совершенствованием промышленных технологий и т. п.

Дальше строится иллюстративный аналитический пример точных стационарных решений (3.20), (3.23) смешанной задачи (3.17) и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.56), (3.57), (3.63), которые эволюционируют со временем в согласии со сконструированной априорной экспоненциальной оценкой снизу (3.62).

ЕЩЁ ОДИН ПРИМЕР. Исследуются установившиеся осесимметричные сдвиговые струйные МГД течения однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости со свободной поверхностью в форме

$$w^0(\nu) = b - \nu,\ R^0(\nu) = \nu \tag{III.3.64}$$

$$R_1^0 = 1,\ h^0 = 0,\ H^0(\nu) = b - \nu$$

(здесь $b > 1$ — произвольная постоянная). Несложно убедиться, что данные течения служат типичными представителями класса стационарных течений (3.20), (3.23).

В случае, когда справедливо неравенство (3.59), установившиеся течения (3.64) будут неустойчивы по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $\xi(t,\ z,\ \nu)$ (3.56), (3.57), (3.63) в виде

$$\xi(t,\ z,\ \nu) = \frac{B_1}{\alpha + i\alpha_1} \times$$

$$\times \frac{\exp\left(\alpha t + i\left[\alpha_1 t + \beta z\right]\right)}{\alpha + i\left[\alpha_1 + 2\beta\left(b - \nu\right)\right]} \tag{III.3.65}$$

$$G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) \equiv \ln \frac{\alpha_1 - i\alpha + 2\beta\left(b - 1\right)}{\alpha_1 - i\alpha + 2\beta b} - \frac{2\left(\alpha_1 - i\alpha\right)}{\beta B_2} = 0$$

$$B_2 \equiv \frac{\kappa^2}{2} - \frac{\Phi_0^2}{\left(R_* - 1\right)^3}$$

где B_1, α, α_1 и β — вещественные постоянные величины, i — мнимая единица; фигурирующий во втором из настоящих равенств натуральный логарифм комплексного переменного $\alpha_1 - i\alpha$ понимается в смысле главной своей ветви.

К сожалению, дисперсионное соотношение $G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) = 0$ (3.65) таково, что его корни не могут быть найдены в явной форме аналитическими методами, поэтому ничего не остаётся, как пытаться графически демонстрировать, что при выполнении неравенства (3.59) данное дисперсионное соотношение действительно обладает корнями, отвечающими экспоненциально нарастающим малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (3.56), (3.57), (3.63) в виде нормальных волн (3.65).

Суть графического рассмотрения дисперсионного соотношения $G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) = 0$ (3.65) на наличие у него корней, которые соответствуют экспоненциально растущим малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (3.56), (3.57), (3.63) в форме нормальных волн (3.65), состоит в том, что сначала оно переписывается в виде $G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) = \mathrm{Re}G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) + i\mathrm{Im}G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) = 0$. Затем на комплексной плоскости $(\alpha,\, \alpha_1)$ рисуются кривые $\mathrm{Re}G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) = 0$ и $\mathrm{Im}G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) = 0$. Если в итоге у настоящих кривых отыщутся точки пересечения с координатами $(\alpha > 0,\ \alpha_1)$, то они–то и будут сигнализировать, что дисперсионное соотношение $G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) = 0$ на самом деле имеет корни, отвечающие экспоненциально нарастающим малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (3.56), (3.57), (3.63) в форме нормальных волн (3.65). При этом координаты $(\alpha,\ \alpha_1)$ точек пересечения изучаемых кривых $\mathrm{Re}G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) = 0$ и $\mathrm{Im}G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) = 0$ в числовом выражении находятся с использованием координатной сетки посредством соответствующего её масштабирования.

Далее приводятся результаты графического исследования дисперсионного соотношения $G\left(\alpha_1 - i\alpha\right) = 0$ (3.65) на обладание им корнями, которые отвечают экспоненциально растущим малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (3.56), (3.57), (3.63) в виде нормальных волн (3.65), для пяти характерных наборов определяющих параметров β, b и B_2 в форме

$$1)\ \beta = 1,\ b = 2,\ B_2 = 10$$

$$\alpha \approx 2,752,\ \alpha_1 \approx -1,454 \tag{III.3.66}$$

$$2)\ \beta = 1,\ b = 2,\ B_2 = 5$$

$$\alpha \approx 1,645,\ \alpha_1 \approx -1,405 \tag{III.3.67}$$

$$3)\ \beta = 1,\ b = 2,\ B_2 \approx 1,9$$

$$\alpha \equiv 0,\ \alpha_1 \neq 0 \tag{III.3.68}$$

$$4)\ \beta = 1,\ b = 2,\ B_2 = 1$$

$$\alpha \equiv 0,\ \alpha_1 \neq 0 \tag{III.3.69}$$

$$5)\ \beta = 1,\ b = 2,\ B_2 = -10$$

$$\alpha \equiv 0,\ \alpha_1 \neq 0 \tag{III.3.70}$$

Принципиально, что данные корни дисперсионного соотношения $G(\alpha_1 - i\alpha) = 0$ не служат особыми точками присутствующих в нём функций комплексного переменного $\alpha_1 - i\alpha$.

Анализируя сведения (3.66)–(3.70), имеет смысл, прежде всего, отметить, что функции $\xi(t,\ z,\ \nu)$ (3.65)–(3.70) действительно представляют собой решения начально–краевой задачи (3.56), (3.57). Более того, тогда, когда истинно неравенство (3.59), функция $\xi(t,\ z,\ \nu)$ (3.65), (3.66) удовлетворяет соотношениям (3.60)–(3.63), то есть как раз и является тем искомым малым осесимметричным длинноволновым возмущением, что нарастает во времени экспоненциально быстро и делает стационарные течения (3.20), (3.23), (3.64) неустойчивыми.

Касательно функций $\xi(t,\ z,\ \nu)$ (3.65), (3.70): они иллюстрируют тот факт, что если верны достаточные условия (3.26) линейной устойчивости установившихся течений (3.20), (3.23) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.21), то у смешанных задач (3.21) и (3.56), (3.57) экспоненциально растущие решения отсутствуют.

Наконец, функции $\xi(t,\ z,\ \nu)$ (3.65), (3.67)–(3.69) описывают тот случай, когда достаточные условия линейной устойчивости (3.26) уже нарушены, а достаточное условие линейной неустойчивости (3.59) ещё не выполняется. В самом деле, при фиксированных значениях ряда определяющих параметров (например, β и b) численными расчётами можно показать, что в этой промежуточной ситуации существует чёткая граница, отделяющая область устойчивости стационарных течений (3.20), (3.23), (3.64) от области их неустойчивости. Конкретно, по мере нарастания величины параметра B_2 вплоть до значения 1,9 (см. данные (3.68), (3.69)) у начально–краевой задачи (3.56), (3.57) не возникает экспоненциально растущих решений, хотя достаточные условия (3.26) линейной устойчивости этого и не запрещают. Однако, тогда, когда величина параметра B_2 переваливает через значение 1,9, у смешанной задачи (3.56), (3.57) сразу же появляется экспоненциально нарастающее решение (см. данные (3.67)), причём несмотря на то, что достаточное условие (3.59) линейной неустойчивости по–прежнему нарушено. Отсюда, кстати, вытекает, что наличие таких функций $\xi\,(t,\ z,\ \nu)$, как функция (3.65), (3.67), само по себе однозначно говорит за то, что предпринятые выше усилия для полного обращения достаточных условий линейной устойчивости (3.26) точных стационарных решений (3.20), (3.23) начально–краевой задачи (3.17) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $w'\,(t,\ z,\ \nu)$ и $R'\,(t,\ z,\ \nu)$ (3.21) должны быть продолжены.

Следовательно, построение иллюстративного аналитического примера (3.64)–(3.70) точных стационарных решений (3.20), (3.23) смешанной задачи (3.17) и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.56), (3.57), (3.63), которые развиваются со временем согласно сконструированной априорной экспоненциальной нижней оценке (3.62), завершено.

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЛАВЫ III

Цель третьей главы настоящего курса лекций заключается в рассмотрении линейных задач устойчивости установившихся осесимметричных сдвиговых струйных течений (1.20), (3.20) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной поверхностью в азимутальном и полоидальном магнитных полях.

В первом параграфе этой главы изучается линейная задача устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений (1.20) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью и свободной поверхностью в случае, когда азимутальное магнитное поле прямо пропорционально зависит от радиальной координаты. Прямым методом Ляпунова обнаружено необходимое и достаточное условие (1.29) устойчивости подкласса (1.24) данных течений относительно малых осесимметричных же длинноволновых возмущений (1.25), (1.26) специального вида (1.28). Продемонстрировано, что если условие устойчивости (1.29) не выполняется, то исследуемые установившиеся течения (1.20) оказываются неустойчивыми к этим возмущениям. Построены априорные двусторонние экспоненциальные оценки (1.39), (1.43) и (1.45) роста малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.26), (1.28), так что инкременты фигурирующих в настоящих оценках экспонент вычисляются с помощью соотношений (1.37), (1.41) и (1.44) по параметрам стационарных осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений (1.20) и начальным данным (1.26), (1.40) рассматриваемых малых длинноволновых возмущений той же симметрии. Охарактеризованы самые быстро нарастающие малые осесимметричные длинноволновые возмущения (1.25), (1.26), (1.28), (1.40) и выведена точная формула (1.44) для определения скорости (1.46) их роста.

Сконструирован пример установившихся осесимметричных сдвиговых струйных течений (1.47), (1.48) в азимутальном магнитном поле, прямо пропорциональном радиусу, и начальных малых длинноволновых возмущений (1.25), (1.26), (1.28), (1.49) того же типа симметрии, эволюция которых на линейном этапе будет происходить в согласии с построенными оценками (1.39) и (1.45). Для стационарных осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений (1.20) общего вида получены достаточные условия (см. на неравенства из системы соотношений (1.58)) практической линейной неустойчивости и сконструирована априорная экспоненциальная нижняя оценка (1.53) нарастания малых осесимметричных же длинноволновых возмущений (1.25), (1.26), при этом инкремент присутствующей в ней экспоненты служит произвольной положительной постоянной. Примечательно, что оценка (1.53) всего лишь одним только своим существованием позволяет утверждать: неравенство (1.29) представляет собой необходимое и достаточное условие устойчивости по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (1.25), (1.26), (1.28) как для частного класса (1.24) установившихся течений (1.20), так и для их же, но более широкого подкласса

$$\frac{d}{d\nu}\left(R^0 - w^0 C^0\right) \geq 0$$

Приведён пример стационарных осесимметричных сдвиговых струйных течений (1.60) в прямо пропорциональном радиальной координате азимутальном магнитном поле и наложенных на данные течения малых длинноволновых возмущений (1.61) той же симметрии, иллюстрирующий построенную оценку (1.53).

Во втором параграфе третьей главы настоящего курса лекций изучается линейная задача неустойчивости установившихся осесимметричных сдвиговых струйных МГД течений (1.20), (2.6) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной границей тогда, когда азимутальное магнитное поле является некой функцией радиуса. Прямым методом Ляпунова найдены достаточные условия (2.12) неустойчивости этих течений относительно малых осесимметричных же длинноволновых возмущений (1.25), (1.59), (2.9). В случае, если данные условия неустойчивости истинны, получены достаточные условия (см. на неравенства в системе соотношений (1.58)) практической линейной неустойчивости и сконструирована априорная экспоненциальная оценка (1.53) снизу, которая говорит о том, что исследуемые малые осесимметричные длинноволновые возмущения (1.25), (1.59), (2.9) имеют возможность расти во времени, как минимум, экспоненциально, причём содержащийся в этой оценке инкремент экспоненты служит произвольной положительной постоянной величиной. Построен иллюстративный аналитический пример точных стационарных решений (1.20), (2.6) начально–краевой задачи (2.1) и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений (1.25), (1.59), (2.9), развивающихся со временем при наличии достаточных условий линейной практической (см. на неравенства из системы соотношений (1.58)) и теоретической (2.12) неустойчивости согласно сконструированной оценке (1.53).

Наконец, в третьем параграфе данной главы рассматривается линейная задача устойчивости установившихся осесимметричных сдвиговых струйных течений (3.20), (3.23) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной поверхностью в полоидальном магнитном поле. При этом предполагалось, что изучаемая струя обладает неограниченной длиной, по её поверхности течёт продольный постоянный электрический ток, а размещается она вдоль оси цилиндрической оболочки с бесконечной же проводимостью, так что между её свободной границей и внутренней стороной оболочки находится вакуумная прослойка. Прямым методом Ляпунова выведено необходимое и достаточное условие (3.38) устойчивости данных течений по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (3.21) в форме (3.35). Когда это условие устойчивости нарушается, построены априорные верхняя и нижняя экспоненциальные оценки (3.49), (3.50) нарастания исследуемых малых возмущений (3.21), (3.35), (3.39)–(3.42), причём инкременты фигурирующих в них экспонент вычисляются по параметрам рассматриваемых стационарных течений и начальным данным для возмущений. Сконструирован пример установившегося осесимметричного сдвигового струйного МГД течения (3.53), (1.48) и налагаемых на него начальных малых длинноволновых возмущений (3.39)–(3.42), (3.54) того же типа симметрии, чья эволюция во времени и пространстве на линейной стадии будет происходить в согласии с построенными оценками (3.49) и (3.50). Кроме того, посредством прямого же метода Ляпунова обнаружены достаточные условия (3.26) устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых струйных течений (3.20), (3.23) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и неограниченной проводимостью в полоидальном магнитном поле относительно малых длинноволновых возмущений (3.21) той же симметрии и общего вида. В свою очередь, эти условия устойчивости частично обращены (см. неравенство (3.59)), получены достаточные условия (см. на неравенства в системе соотношений (3.61)) практической линейной неустойчивости и сконструирована априорная же экспоненциальная оценка (3.62) снизу роста изучаемых малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.21), (3.56), (3.57), (3.63), которой свойственна та характерная черта, что присутствующий в ней инкремент экспоненты представляет собой некую положительную постоянную. Построен иллюстративный аналитический пример (3.64)–(3.70) точных стационарных решений (3.20), (3.23) смешанной задачи (3.17) и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.56), (3.57), (3.63), развивающихся со временем согласно сконструированной оценке (3.62).

Глава IV. ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ПРИЛОЖЕНИИ К ЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ОТСУТСТВИЕ ВНЕШНИХ МАССОВЫХ СИЛ

Данная глава посвящается изложению результатов по устойчивости и/либо неустойчивости стационарных плоско–параллельных сдвиговых и каких угодно допустимых трёхмерных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости при отсутствии внешних массовых сил.

Вторым (или прямым) методом Ляпунова демонстрируется, что эти течения абсолютно неустойчивы по отношению к малым плоским и пространственным возмущениям соответственно, тогда как состояния равновесия (покоя) данной жидкости — напротив, абсолютно устойчивы. При этом в случае установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений показывается, что все известные достаточные условия устойчивости (Релея, Фьортофта и Арнольда) данных течений относительно малых плоских возмущений являются также и необходимыми. Выводятся достаточные условия практической линейной неустойчивости и строятся априорные нижние оценки, которые свидетельствуют о том, что исследуемые малые возмущения неустойчивых стационарных течений могут нарастать во времени не медленнее, чем экспоненциально. Конструируются иллюстративные аналитические примеры установившихся течений и наложенных на них малых возмущений, растущих со временем в согласии с построенными оценками.

Детальная сводка результатов этой главы помещена в её конце. Материал данной главы опубликован в работах [145–147].

§1. К УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ПЛОСКО–ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В этом параграфе рассматривается линейная задача устойчивости установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными пластинами, когда внешние массовые силы отсутствуют [145]. Прямым методом Ляпунова получается, что данные течения абсолютно неустойчивы по отношению к малым плоским возмущениям, а вот состояния равновесия (покоя) этой жидкости — наоборот, абсолютно устойчивы. Тем самым демонстрируется, что условия устойчивости [52, 54, 55, 203] стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в прослойке между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными неограниченными поверхностями относительно малых плоских возмущений в отсутствие внешних массовых сил служат и достаточными, и необходимыми. Выводятся достаточные условия практической линейной неустойчивости и конструируется априорная оценка снизу, которая говорит о возможном (как минимум, экспоненциальном) нарастании во времени изучаемых малых возмущений, если данные условия устойчивости не действуют. Строится иллюстративный аналитический пример установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений и наложенных на них малых плоских возмущений, растущих со временем согласно сконструированной оценке.

ФОРМУЛИРОВКА ТОЧНОЙ ЗАДАЧИ. Исследуются плоские эволюционные течения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости, которая целиком заполняет пространство между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными стенками, при отсутствии внешних массовых сил.

Эти течения описываются нестационарными решениями начально–краевой задачи вида [4, 185]

$$Du = -\,p_x,\ Dv = -\,p_y,\ u_x + v_y = 0 \text{ в } \tau \tag{IV.1.1}$$

$$v = 0 \ \text{ на } \partial\tau$$

$$u(x,\,y,\,0) = u_0(x,\,y),\ v(x,\,y,\,0) = v_0(x,\,y)$$

Здесь $u\,(x,\,y,\,t)$, $v\,(x,\,y,\,t)$ — компоненты поля скорости жидкости; $p\,(x,\,y,\,t)$ — поле давления; $D \equiv \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$ — дифференциальный оператор; $x,\,y$ — декартовы координаты; $\tau \equiv \{(x,\,y) : -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < H\}$ — область течения жидкости; $\partial\tau \equiv \{(x,\,y) :\ -\infty < x < +\infty,\ y = 0,\ H\}$ — граница области течения; u_0, v_0 — начальные данные для составляющих поля скорости жидкости; t — время; H — ширина зазора между стенками. Индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные искомых функций. Считается, что начальные компоненты u_0 и v_0 поля скорости жидкости обращают в тождество третье соотношение смешанной задачи (1.1). Более того, полагается, что начальная составляющая v_0 удовлетворяет четвёртому равенству этой же задачи.

Начально–краевая задача (1.1) имеет функционал кинетической энергии в форме

$$E_1 \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \left(u^2 + v^2\right) dydx = \mathrm{const} \tag{IV.1.2}$$

тогда, когда её решения либо периодичны, либо локализованы вдоль оси абсцисс.

Несложно показать, что смешанная задача (1.1) обладает ещё одним сохраняющимся на её эволюционных решениях интегралом движения. В самом деле, если из первых двух соотношений данной задачи исключить поле давления p, то получится уравнение

$$D\omega = 0 \tag{IV.1.3}$$

(где $\omega(x,\ y,\ t) \equiv v_x - u_y$ — поле завихренности), позволяющее утверждать, что функционал

$$I \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \Phi(\omega) dydx \tag{IV.1.4}$$

(здесь $\Phi(\omega)$ — произвольная функция своего аргумента) будет оставаться неизменным на нестационарных решениях начально–краевой задачи (1.1), а потому и будет представлять собой желаемый интеграл движения настоящей смешанной задачи.

Начально–краевая задача (1.1) имеет точные стационарные решения вида

$$u = U(y),\ v = 0,\ p \equiv \mathrm{const} \tag{IV.1.5}$$

где U — некая функция независимой переменной y. Эти решения отвечают установившимся плоско–параллельным сдвиговым течениям однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в прослойке между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными плоскостями в отсутствие внешних массовых сил.

Цель дальнейшего рассмотрения состоит в том, чтобы выяснить, могут ли стационарные решения (1.5) быть устойчивыми по отношению к малым плоским возмущениям.

ПОСТАНОВКА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ. Для достижения указанной цели выполняется линеаризация смешанной задачи (1.1) и соотношения (1.3) в окрестности точных стационарных решений (1.5), которая даёт возможность прийти к начально–краевой задаче в форме

$$u'_t + Uu'_x + v'\frac{dU}{dy} = -\,p'_x \tag{IV.1.6}$$

$$v'_t + Uv'_x = -\,p'_y,\ u'_x + v'_y = 0$$

$$\omega'_t + U\omega'_x - v'\frac{d^2U}{dy^2} = 0 \text{ в } \tau;\ v' = 0 \text{ на } \partial\tau$$

$$u'(x,\, y,\, 0) = u'_0(x,\, y),\ v'(x,\, y,\, 0) = v'_0(x,\, y)$$

Здесь $u'(x,\, y,\, t)$, $v'(x,\, y,\, t)$, $p'(x,\, y,\, t)$ и $\omega'(x,\, y,\, t)$ — малые плоские возмущения полей скорости, давления и завихренности соответственно; u'_0, v'_0 — начальные компоненты возмущённого поля скорости жидкости. Предполагается, что функция v'_0, с одной стороны, превращает в тождество пятое равенство смешанной задачи (1.6), а с другой — вместе с функцией u'_0, удовлетворяет третьему соотношению этой же задачи.

Линейным аналогом функционала кинетической энергии для начально–краевой задачи (1.6) является интеграл вида

$$E \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \left[u'^2 + v'^2 + U \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)^{-1} \omega'^2 \right] dydx = \mathrm{const} \qquad \text{(IV.1.7)}$$

Нетрудно убедиться, что первая вариация δJ функционала $J \equiv \equiv E_1 + I$ (1.2), (1.4) зануляется на стационарных решениях (1.5) лишь в том случае, когда функции Φ и U связаны друг с другом уравнением

$$\left. \frac{d^2\Phi}{d\omega^2} \right|_{\omega = \Omega} = U \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)^{-1}$$

где $\Omega(y) \equiv -dU/dy$ — установившееся поле завихренности. В то же время вторая вариация $\delta^2 J$ интеграла J, переписанная в подходящих обозначениях, совпадает по форме с функционалом E (1.7).

На первый взгляд, точные стационарные решения (1.5) смешанной задачи (1.1) будут устойчивы относительно малых плоских возмущений (1.6) тогда и только тогда, когда везде в области τ течения жидкости справедливо неравенство [4, 55]

$$U \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)^{-1} \geq 0 \qquad \text{(IV.1.8)}$$

Действительно, всяким (в том числе и нарастающим по времени) решениям начально–краевой задачи (1.6) присуще свойство: $E = \mathrm{const}$. Однако, соотношения (1.7), (1.8) подталкивают к выводу, что если интеграл $E = \mathrm{const} \geq 0$, то, якобы, с необходимостью малые плоские возмущения u', v' и ω' будут, как функции независимой переменной t, ограниченными по абсолютной величине, а значит — никаких растущих со временем решений у смешанной задачи (1.6) быть не может.

Тем не менее, поскольку линейный аналог E (1.7) функционала кинетической энергии служит интегралом движения для начально–краевой задачи (1.6), которая включает в себя четвёртое уравнение, представляющее собой результат линеаризации около стационарных решений (1.5) соотношения (1.3) — следствия смешанной задачи (1.1), и малые плоские возмущения ω' поля завихренности, в согласии со своим определением (1.3), (1.6), функционально зависимы от малых плоских же возмущений u' и v' составляющих поля скорости жидкости, среди решений начально–краевой задачи (1.6) можно, вообще говоря, найти нарастающие во времени решения со свойством $E = \text{const}$ и при выполнении неравенства (1.8), что будет ниже наглядно и доказательно продемонстрировано при помощи построения иллюстративного аналитического примера. Отсюда вытекает, что соотношение (1.8) является достаточным условием устойчивости точных стационарных решений (1.5) смешанной задачи (1.1) по отношению не ко всем малым плоским возмущениям, а лишь к их подклассу (1.6), который характеризуется той отличительной чертой, что четвёртое уравнение в системе соотношений (1.6) служит, как бы, не следствием первых трёх её уравнений, а равноправным с ними соотношением.

Кстати, что касается частного класса точных стационарных решений (1.5) начально–краевой задачи (1.1) — состояний равновесия (покоя)

$$u = v \equiv 0, \; p \equiv \text{const} \qquad \text{(IV.1.9)}$$

однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости, то они абсолютно устойчивы, причём относительно любых малых плоских возмущений, поскольку в данном случае линейный аналог E (1.7) интеграла кинетической энергии преобразуется к виду

$$E = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \left(u'^2 + v'^2\right) dydx \geq 0$$

и сохраняется на эволюционных решениях смешанной задачи (1.6) без привлечения её четвёртого уравнения.

АПРИОРНАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СНИЗУ РОСТА МАЛЫХ ПЛОСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ. Далее прямым методом Ляпунова [16, 22] будет показано, что достаточное условие устойчивости (1.8) точных стационарных решений (1.5) начально–краевой задачи (1.1) по отношению к малым плоским возмущениям выделенного выше подкласса (1.6) представляет собой также и необходимое. Кроме того, будут выведены достаточные условия практической линейной неустойчивости и сконструирована априорная нижняя оценка, свидетельствующая, в свою очередь, о том, что изучаемые малые плоские возмущения могут нарастать по времени не медленнее, чем экспоненциально, тогда, когда или последние не принадлежат частному классу (1.6), или неравенство (1.8) нарушается где–либо в пределах области течения τ, так что там становится верным соотношение

$$U \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)^{-1} < 0 \qquad \text{(IV.1.10)}$$

Для того чтобы продемонстрировать неустойчивость некоторого стационарного решения (1.5) смешанной задачи (1.1) относительно малых плоских возмущений, нужно суметь выделить из них всего только одно, но зато, как минимум, экспоненциально быстро растущее со временем возмущение.

Принимая во внимание это обстоятельство, поиск требуемого возмущения осуществляется дальше в подклассе нестационарных плоских течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в пространстве между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями при отсутствии внешних массовых сил, обладающем той особенностью, что для него малые плоские возмущения являются отклонениями траекторий движения жидких частиц от соответствующих линий тока установившихся течений (1.5). Наиболее просто данные возмущения можно описать посредством поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}(x,\ y,\ t) = (\xi_1,\ \xi_2)$ (I.13) [24], которое определяется уравнениями

$$\xi_{1t} = u' - U\xi_{1x} + \xi_2 \frac{dU}{dy},\ \xi_{2t} = v' - U\xi_{2x} \tag{IV.1.11}$$

С помощью соотношений (1.11) начально–краевая задача (1.6) может быть переформулирована в виде

$$\xi_{1tt} + 2U\xi_{1tx} + U^2\xi_{1xx} = -p'_x \tag{IV.1.12}$$

$$\xi_{1x} + \xi_{2y} = 0,\ \xi_{2tt} + 2U\xi_{2tx} + U^2\xi_{2xx} = -p'_y$$
$$\omega' = \xi_2 \frac{d^2U}{dy^2} \text{ в } \tau;\ \xi_2 = 0 \text{ на } \partial\tau$$
$$\xi_1(x,\ y,\ 0) = \xi_{10}(x,\ y),\ \xi_{1t}(x,\ y,\ 0) = (\xi_{1t})_0\,(x,\ y)$$
$$\xi_2(x,\ y,\ 0) = \xi_{20}(x,\ y),\ \xi_{2t}(x,\ y,\ 0) = (\xi_{2t})_0\,(x,\ y)$$

(здесь ξ_{10} и ξ_{20} — начальные компоненты поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$, а $(\xi_{1t})_0$ и $(\xi_{2t})_0$ — начальные составляющие его частной производной первого порядка по времени). Считается, что функции ξ_{10} и ξ_{20} обращают в тождество второе уравнение из системы соотношений

(1.12). Кроме того, полагается, что функция ξ_{20} удовлетворяет пятому равенству той же системы. Наконец, важно, что после введения поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ (1.11) удаётся проинтегрировать четвёртое уравнение смешанной задачи (1.6), служащее линеаризованным в окрестности точных стационарных решений (1.5) соотношением (1.3) — следствием начально–краевой задачи (1.1), и получить аналитическую формулу для вычисления малых плоских возмущений ω' поля завихренности через компонент ξ_2 поля лагранжевых смещений и составляющую U установившегося поля скорости жидкости (см. четвёртое равенство системы связей (1.12)). Отсюда вытекает, что малые плоские возмущения (1.11), (1.12) не охватываются частным классом (1.6), так как для них четвёртое уравнение в системе соотношений (1.6) перестаёт быть эволюционным дифференциальным уравнением и превращается в квазистационарное алгебраическое соотношение с неявно фигурирующей в нём независимой переменной t.

Прямыми расчётами можно убедиться, что функционал E (1.7) в качестве линейного аналога интеграла кинетической энергии смешанной задачи (1.11), (1.12) трансформируется к виду

$$E \equiv T + T_1 = \mathrm{const} \tag{IV.1.13}$$

$$T \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \left[(\xi_{1t} + U\xi_{1x})^2 + (\xi_{2t} + U\xi_{2x})^2 \right] dydx \geq 0$$

$$T_1 \equiv - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} \left(\xi_2 \xi_{1t} \frac{dU}{dy} \right) dydx$$

Стоит специально отметить тот факт, что функционал E в форме (1.13) разрешает составляющим ξ_1, ξ_2 поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$

нарастать во времени, при этом вне зависимости от того, выполнено или нет достаточное условие линейной устойчивости (1.8). Значит, точные стационарные решения (1.5) начально–краевой задачи (1.1), судя по всему, абсолютно неустойчивы относительно малых плоских возмущений (1.11), (1.12), то есть независимо от того, истинно достаточное условие (1.8) линейной устойчивости либо нет. К слову, подкласс (1.9) стационарных решений (1.5) будет абсолютно устойчив и по отношению к малым плоским возмущениям (1.11), (1.12), потому что интеграл E (1.13) предстаёт для него в виде

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H}\left(\xi_{1t}^2 + \xi_{2t}^2\right) dydx = \text{const} \geq 0$$

В интересах нижеследующего изложения удобно вовлечь в исследование вспомогательный неотрицательный функционал [141]

$$M \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) dydx \qquad \text{(IV.1.14)}$$

Двукратное дифференцирование интеграла M по его аргументу t и осуществление ряда преобразований возникающего в итоге функционала с применением соотношений (1.11)–(1.13) позволяют выйти на так называемое вириальное равенство [24, 141] в форме

$$\frac{d^2M}{dt^2} = 4T$$

Умножая теперь данное равенство на произвольную постоянную величину λ, ещё раз учитывая выражение (1.13) для интеграла E, удаётся получить важное уравнение

$$\frac{dE_\lambda}{dt} = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda T_\lambda - 2\lambda T_1 \qquad \text{(IV.1.15)}$$

где

$$E_\lambda \equiv T_\lambda + \Pi_\lambda$$

$$2T_\lambda \equiv 2T - \lambda\frac{dM}{dt} + \lambda^2 M = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^H \Big[(\xi_{1t} + U\xi_{1x} - \lambda\xi_1)^2 + (\xi_{2t} + U\xi_{2x} -$$

$$- \lambda\xi_2)^2\Big]\, dydx \geq 0,\ 2\Pi_\lambda \equiv 2T_1 + \lambda^2 M$$

Если постоянную λ подчинить ограничению $\lambda > 0$, то, как несложно проверить, из соотношения (1.15) может быть извлечено оригинальное дифференциальное неравенство

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda\frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M \geq 0 \qquad \text{(IV.1.16)}$$

Оказывается, это неравенство, подобно дифференциальному неравенству (III.1.52), тоже можно дополнить условиями [194]

$$M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) > 0 \qquad \text{(IV.1.17)}$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \geq 2\lambda M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right);\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

$$M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv M(0)\exp\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ \frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0)\exp\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

согласно которым из него с необходимостью будет вытекать искомая априорная экспоненциальная оценка снизу

$$M(t) \geq C\exp(\lambda t) \qquad \text{(IV.1.18)}$$

(здесь C — известная положительная постоянная величина).

Следовательно, условия (1.17) и неравенство (1.18) говорят о том, что среди малых плоских возмущений (1.11), (1.12) с начальными данными в форме

$$M(0) > 0,\ \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\lambda M(0) \qquad \text{(IV.1.19)}$$

точных стационарных решений (1.5) смешанной задачи (1.1) могут быть и растущие со временем, причём не медленнее, чем экспоненциально. Принципиальное значение тут имеет то обстоятельство, что для экспоненциально нарастающих во времени малых плоских возмущений (1.11), (1.12), (1.19) счётный набор условий (1.17) удовлетворяется тождественно.

Наряду с этим соотношение (1.18) свидетельствует также и о том, что роль функционала Ляпунова играет в данном случае именно интеграл M (1.14) и ничто иное.

Наконец, неравенства из счётного набора условий (1.17) как раз и представляют собой желаемые достаточные условия практической линейной неустойчивости [14, 15].

В результате, продемонстрировано, что условие Арнольда (1.8) [55] устойчивости точных стационарных решений (1.5) начально–краевой задачи (1.1), отвечающих установившимся плоско–параллельным сдвиговым течениям однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными плоскостями в отсутствие внешних массовых сил, относительно малых плоских возмущений частного класса (1.6) на самом деле является и достаточным, и необходимым. Действительно, поскольку неравенство (1.18) не содержит никаких сведений о точных стационарных решениях (1.5) смешанной задачи (1.1), оно будет носить формальный характер, если всюду в области τ течения жидкости справедливо соотношение (1.8), а четвёртое выражение из начально–краевой задачи (1.6) служит эволюционным дифференциальным уравнением, так как тогда, в согласии со связью (1.7), у смешанной задачи (1.6) не будет решений, которые росли бы со временем, по крайней мере, экспоненциально. В случаях же, когда или неравенство (1.8) нарушено где–либо внутри области течения τ, так что там выполнено соотношение (1.10), или малые плоские возмущения не входят в подкласс (1.6), начально–краевые задачи (1.6) и (1.11), (1.12) могут обладать решениями, нарастающими во времени в строгом соответствии с априорной нижней экспоненциальной оценкой (1.18).

Далее, поскольку условие Арнольда (1.8) [4, 55] обобщает достаточное условие линейной устойчивости, которое обнаружено Фьортофтом [4, 54, 185, 203], а вместе эти условия включают в себя достаточное условие линейной устойчивости, открытое Релеем [4, 52, 185], неравенство (1.18) уже самим фактом своего существования приводит к автоматическому обращению и обоих последних достаточных условий устойчивости установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений (1.5) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в прослойке между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями при отсутствии внешних массовых сил по отношению к малым плоским возмущениям в виде нормальных волн, которые отвечают соответствующим добавочным требованиям к дифференциальному оператору уравнения Релея [4, 21, 52, 54, 185, 203–206].

Более того, в качестве ещё одной отличительной черты найденного роста малых плоских возмущений (1.11), (1.12), (1.19) нельзя не отметить тот произвол, что остался за положительной постоянной λ в показателе экспоненты из правой части соотношения (1.18). Он, кстати, даёт возможность полагать, что всякое решение смешанной задачи (1.11), (1.12), (1.19), нарастающее согласно оценке снизу (1.18), может быть интерпретировано как аналог примера некорректности по Адамару [197].

Дальше строится иллюстративный аналитический пример точных стационарных решений (1.5) начально–краевой задачи (1.1) и наложенных на них малых плоских возмущений (1.11), (1.12), (1.19), которые развиваются со временем в согласии со сконструированной априорной нижней экспоненциальной оценкой (1.18) вне зависимости от того, верны либо нет достаточные условия линейной устойчивости Релея [52], Фьортофта [54, 203] или Арнольда [55].

ПРИМЕР. Исследуются эволюционные решения смешанной задачи (1.11), (1.12) в виде

$$\xi_1\,(x,\ y,\ t) \equiv h_1(y)\exp\left(\alpha t + i\beta x\right) \tag{IV.1.20}$$

$$\xi_2\,(x,\ y,\ t) \equiv h_2(y)\exp\left(\alpha t + i\beta x\right),\ p'\,(x,\ y,\ t) \equiv h_3(y)\exp\left(\alpha t + i\beta x\right)$$

(здесь h_1, h_2 и h_3 — некие функции своего аргумента; i — мнимая единица; $\alpha \equiv \alpha_1 + i\alpha_2$ — произвольная комплексная, а β, α_1 и α_2 — некие вещественные постоянные величины).

Подстановка соотношений (1.20) в первые три уравнения и граничное условие системы (1.12) позволяет сделать заключение, что функции ξ_1, ξ_2 и p' в форме (1.20) на самом деле будут удовлетворять начально–краевой задаче (1.11), (1.12), если, в свою очередь, функции h_1, h_2 и h_3 будут представлять собой решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\alpha + i\beta U)^2 h_1 = -i\beta h_3 \tag{IV.1.21}$$

$$(\alpha + i\beta U)^2 h_2 = -\frac{dh_3}{dy},\ i\beta h_1 + \frac{dh_2}{dy} = 0$$

с граничными условиями

$$h_2 = 0 \text{ при } y = 0,\ H \tag{IV.1.22}$$

Путём исключения из системы (1.21) функций h_1 и h_3 можно получить одно определяющее уравнение для функции h_2 — уравнение Релея [4, 21, 52, 185]:

$$\frac{d^2 h_2}{dy^2} + \frac{2i\beta}{\alpha + i\beta U}\frac{dU}{dy}\frac{dh_2}{dy} - \beta^2 h_2 = 0 \tag{IV.1.23}$$

Замена искомой функции

$$h(y) \equiv (\alpha + i\beta U)\, h_2$$

помогает записать краевую задачу (1.22), (1.23) в следующем окончательном виде:

$$\frac{d^2 h}{dy^2} - \beta\left[\frac{i}{\alpha + i\beta U}\frac{d^2 U}{dy^2} + \beta\right] h = 0 \tag{IV.1.24}$$

$$h = 0 \text{ при } y = 0,\ H$$

Прежде, чем двигаться далее в построении анонсированного выше аналитического примера, целесообразно вспомнить о достаточных условиях линейной устойчивости, установленных Релеем и Фьортофтом методом интегральных соотношений в процессе рассмотрения краевой задачи (1.24) [52, 54, 203].

Повторяя рассуждения Релея и Фьортофта, обыкновенное дифференциальное уравнение (1.24) второго порядка должно умножить на комплексно–сопряжённую функцию h^*, а потом отделить в нём друг от друга мнимую и вещественную части:

$$\frac{\alpha_1\beta}{\alpha_1^2+(\alpha_2+\beta U)^2}\frac{d^2U}{dy^2}|h|^2 = \\ = \mathrm{Im}\left(\frac{d}{dy}\left[h^*\frac{dh}{dy}\right]\right) \tag{IV.1.25}$$

$$\left|\frac{dh}{dy}\right|^2+\beta^2|h|^2+\frac{\beta(\alpha_2+\beta U)}{\alpha_1^2+(\alpha_2+\beta U)^2}\frac{d^2U}{dy^2}|h|^2 = \mathrm{Re}\left(\frac{d}{dy}\left[h^*\frac{dh}{dy}\right]\right)$$

Интегрирование соотношений (1.25) по полному поперечному сечению пространства между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными плоскостями и принятие во внимание граничных условий (1.24) приводят к таким равенствам, как

$$\alpha_1\beta\int\limits_0^H\frac{|h|^2}{\alpha_1^2+(\alpha_2+\beta U)^2}\frac{d^2U}{dy^2}dy=0 \tag{IV.1.26}$$

$$\beta\int\limits_0^H\frac{\alpha_2+\beta U}{\alpha_1^2+(\alpha_2+\beta U)^2}\frac{d^2U}{dy^2}|h|^2dy=-\int\limits_0^H\left(\left|\frac{dh}{dy}\right|^2+\beta^2|h|^2\right)dy$$

из которых вытекает, что экспоненциально растущие решения (1.20) ($\alpha_1>0$) смешанной задачи (1.11), (1.12) могут превратить их в тождества тогда и только тогда, когда d^2U/dy^2 меняет знак в пределах области τ течения жидкости, и, при этом, хотя бы в одной точке последней имеет место неравенство

$$U\frac{d^2U}{dy^2}<0 \tag{IV.1.27}$$

Учитывая данные обстоятельства, Релей сформулировал теорему о том, что достаточным условием устойчивости стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными пластинами в отсутствие внешних массовых сил относительно малых плоских возмущений в виде нормальных волн является требование, чтобы профиль скорости $U(y)$ (1.5) не содержал точек перегиба [52], а Фьортофт — о том, что, помимо неизменности знака величины d^2U/dy^2, подобным условием устойчивости служит ещё и наличие постоянной K, обеспечивающей истинность соотношения [54, 203]

$$(U-K)\frac{d^2U}{dy^2} \geq 0$$

повсюду внутри области течения τ.

В действительности же для ограничения на знак производной d^2U/dy^2 и неравенства (1.27) напрашивается совершенно иная трактовка, чем та, которой их сопроводили Релей и Фьортофт, и вот почему.

Если сопоставить друг с другом соотношения (1.25) и (1.26), то можно убедиться, что первым, в отличие от вторых, для выполнения на экспоненциально нарастающих решениях (1.20) начально–краевой задачи (1.11), (1.12) не нужно существования каких бы то ни было дополнительных требований к профилю скорости $U(y)$. Это говорит о том, что в ходе интегрирования уравнений (1.25) по всему поперечному сечению прослойки между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями теряется эквивалентность преобразований за счёт зануления части слагаемых данных уравнений согласно граничным условиям (1.24). Следовательно, требование изменения величиной d^2U/dy^2 своего знака в пределах области τ течения жидкости и неравенство (1.27) — это условия, необходимые соотношениям (1.26) для обращения в тождества на экспоненциально растущих решениях (1.20) смешанной задачи (1.11), (1.12), но никоим образом не уравнениям (1.25). Напротив, в тех случаях, когда достаточные условия Релея и Фьортофта линейной устойчивости точных стационарных решений (1.5) начально–краевой задачи (1.1) справедливы, смешанная задача (1.11), (1.12) всё равно может обладать экспоненциально нарастающими решениями (1.20), потому что последние выпадают из сферы действия теорем Релея и Фьортофта об устойчивости [52, 54, 203].

Итак, теперь, после выяснения значения результатов Релея и Фьортофта, можно вновь вернуться к конструированию иллюстративного аналитического примера установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений (1.5) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в пространстве между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными стенками при отсутствии внешних массовых сил и наложенных на данные течения малых плоских возмущений (1.11), (1.12), (1.19), которые развиваются во времени в согласии с построенной априорной экспоненциальной оценкой снизу (1.18) вне связи с тем, верны достаточные условия линейной устойчивости Релея, Фьортофта либо Арнольда или нет.

Дальше изучается частный класс стационарных решений (1.5) начально–краевой задачи (1.1) в форме

$$u = U(y) \equiv a - b\exp(cy),\ v = 0,\ p \equiv \text{const} \qquad \text{(IV.1.28)}$$

где a, b и c — произвольные вещественные постоянные величины.

Посредством замен независимой переменной

$$\eta \equiv -i\beta b \exp(cy)$$

и искомой функции

$$w(\eta) \equiv h\eta^{-k},\ k \equiv \pm\frac{\beta}{c}$$

а также с учётом соотношений (1.28) обыкновенному дифференциальному уравнению (1.24) может быть придан вид

$$\eta(\eta+\alpha+i\beta a)\frac{d^2w}{d\eta^2}+(2k+1)(\eta+\alpha+i\beta a)\frac{dw}{d\eta}-w=0 \qquad \text{(IV.1.29)}$$

Если в соотношении (1.29) выполнить ещё одну замену независимой переменной

$$z \equiv -\frac{\eta}{\alpha+i\beta a}$$

то несложно увидеть, что оно предстанет в форме гипергеометрического уравнения Гаусса [200]

$$z(z-1)\frac{d^2w}{dz^2}+(2k+1)(z-1)\frac{dw}{dz}-w=0 \qquad \text{(IV.1.30)}$$

с определяющими параметрами α_0, β_0 и γ_0, описываемыми соотношениями

$$\alpha_0+\beta_0+1=\gamma_0 \qquad \text{(IV.1.31)}$$

$$\alpha_0\beta_0=-1,\ \alpha_0=\pm\frac{\beta}{c}\mp\sqrt{\left(\frac{\beta}{c}\right)^2+1}$$

$$\beta_0=\pm\frac{\beta}{c}\pm\sqrt{\left(\frac{\beta}{c}\right)^2+1},\ \gamma_0=1\pm\frac{2\beta}{c}$$

Общее решение уравнения (1.30), (1.31) имеет вид

$$w(z)=C_1w_1(z)+C_2w_2(z) \qquad \text{(IV.1.32)}$$

$$w_1(z) \equiv F\left(\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;\ z\right)$$

$$w_2(z) \equiv z^{1-\gamma_0} F\left(\alpha_0 - \gamma_0 + 1,\ \beta_0 - \gamma_0 + 1,\ 2 - \gamma_0;\ z\right)$$

при условии, что γ_0 — нецелое число (здесь C_1, C_2 — некие постоянные; $F\left(\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;\ z\right)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, которая для $|z| < 1$ определяется как сумма гипергеометрического ряда Гаусса

$$F\left(\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;\ z\right) \equiv 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha_0)_m (\beta_0)_m}{(\gamma_0)_m} \frac{z^m}{m!}$$

$$(\alpha_0)_m \equiv \alpha_0 \left(\alpha_0 + 1\right) \ldots \left(\alpha_0 + m - 1\right),\ \gamma_0 \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$$

а при $|z| \geq 1$ — в качестве его аналитического продолжения [207]).

Если $\gamma_0 = 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$, то частное решение $w_1(z)$ соотношения (1.30), (1.31) вырождается, так что его общее решение $w(z)$ (1.32) принимает форму

$$w(z) = w_2(z) \left[C_3 + C_4 \int \frac{\exp\left(-\int \frac{2k+1}{z} dz\right)}{w_2^2(z)} dz \right]$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные величины. Если же $\gamma_0 = 1$, 2, 3, ..., то, наоборот, вырождается частное решение $w_2(z)$ уравнения (1.30), (1.31), поэтому его общее решение $w(z)$ можно вычислить по формуле

$$w(z) = w_1(z) \left[C_5 + C_6 \int \frac{\exp\left(-\int \frac{2k+1}{z} dz\right)}{w_1^2(z)} dz \right]$$

(здесь C_5, C_6 — некие постоянные).

Примечательно, что исследование свойств общего решения $w(z)$ (1.32) соотношения (1.30), (1.31) может быть ощутимо упрощено, поскольку в данном случае для ряда конкретных значений параметров

α_0, β_0 и γ_0 функция $F\left(\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;\ z\right)$ выражается через полиномы Якоби и элементарные функции [200, 207]. Так, при

$$k \equiv \pm\frac{\beta}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - m\right);\ m = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

$$\alpha_0 = -\,m,\ \beta_0 = \frac{1}{m},\ \gamma_0 = 1 - m + \frac{1}{m}$$

частные решения гипергеометрического уравнения Гаусса (1.30), (1.31) будут представлять собой следующие функции:

$$w_1(z) = \sum_{l=0}^{m} \frac{\left(-\,m\right)_l \left(\beta_0\right)_l}{\left(\gamma_0\right)_l} \frac{z^l}{l!} \tag{IV.1.33}$$

$$w_1(z) = \frac{m!}{\left(\gamma_0\right)_m} P_m^{\left(\gamma_0 - 1,\,-\,1\right)}\left(1 - 2z\right)$$

$$w_1(z) = \frac{m! z^m}{\left(\gamma_0\right)_m} P_m^{\left(-\,m - \frac{1}{m},\,-\,1\right)}\left(1 - \frac{2}{z}\right)$$

$$w_1(z) = \frac{m!\left(1 - z\right)^m}{\left(\gamma_0\right)_m} P_m^{\left(\gamma_0 - 1,\,-\,m - \frac{1}{m}\right)}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

где $\left(\beta_0\right)_0 \equiv 1$, $P_m^{\left(\gamma_0 - 1,\,-\,1\right)}\left(1 - 2z\right)$ — полином Якоби. Кроме того, когда

$$\pm\frac{\beta}{c} = \frac{3}{4};\ \alpha_0 = -\frac{1}{2},\ \beta_0 = 2,\ \gamma_0 = \frac{5}{2}$$

тогда частным решением соотношения (1.30), (1.31) будет функция вида

$$w_1(z) = \frac{3}{16z}\left[\left(1 + 3z\right)\left(1 - z\right)\frac{\mathrm{Arth}\sqrt{z}}{\sqrt{z}} - 1 + 3z\right]$$

Для полного достижения целей настоящего параграфа достаточно рассмотреть первое из частных решений (1.33) при условии, что $m = 3$. В этом случае его можно записать в форме

$$w_1(z) = 1 + \frac{3z}{5} + \frac{6z^2}{5} - \frac{14z^3}{5}$$

и оно будет удовлетворять уравнению (1.30), (1.31) вида

$$z(z-1)\frac{d^2w}{dz^2}-\frac{5}{3}(z-1)\frac{dw}{dz}-w=0 \qquad \text{(IV.1.34)}$$

Общим же решением соотношения (1.34) будет являться такая функция, как

$$w(z)=\left(1+\frac{3z}{5}+\frac{6z^2}{5}-\frac{14z^3}{5}\right)\left(C_7+\frac{25C_8}{1458}\left[\frac{3z^{2/3}\left(5+5z-28z^2\right)}{14z^3-6z^2-3z-5}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2z^{1/3}}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(\frac{1+z^{1/3}+z^{2/3}}{\left[z^{1/3}-1\right]^2}\right)\right]\right)$$

(здесь C_7 и C_8 — произвольные постоянные величины).

Граничные условия (1.22) будут выполнены, если

$$w\left(z_0\right)=w\left(z_H\right)\equiv 0;\ z_0\equiv\frac{i\beta b}{\alpha_1+i\left(\alpha_2+\beta a\right)},\ z_H\equiv\frac{i\beta b\exp\left(cH\right)}{\alpha_1+i\left(\alpha_2+\beta a\right)}$$

Отсюда вытекает, что тогда должно быть истинно дисперсионное соотношение в форме

$$\left(14z_H^3-6z_H^2-3z_H-5\right)\left[3z_0^{2/3}\left(28z_0^2-5z_0-5\right)+\left(14z_0^3-6z_0^2-3z_0-\right.\right.$$
$$\left.\left.-5\right)\left(2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{1+2z_0^{1/3}}{\sqrt{3}}\right]-\ln\left[\frac{1+z_0^{1/3}+z_0^{2/3}}{\left(z_0^{1/3}-1\right)^2}\right]\right)\right]=\left(14z_0^3-\right.$$
$$\left.-6z_0^2-3z_0-5\right)\left[3z_H^{2/3}\left(28z_H^2-5z_H-5\right)+\left(14z_H^3-6z_H^2-3z_H-5\right)\times\right.$$
$$\times\left(2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{1+2z_H^{1/3}}{\sqrt{3}}\right]-\right.$$
$$\left.\left.-\ln\left[\frac{1+z_H^{1/3}+z_H^{2/3}}{\left(z_H^{1/3}-1\right)^2}\right]\right)\right] \qquad \text{(IV.1.35)}$$

К сожалению, данное дисперсионное соотношение не позволяет обнаружить свои корни в числовом выражении аналитическими методами, поэтому приходится графически изучать вопрос о том, обладает ли оно корнями и, если да, есть ли среди них отвечающие экспоненциально растущим малым плоским возмущениям (1.11), (1.12), (1.19) в виде нормальных волн (1.20).

Ниже приводятся результаты графического исследования дисперсионного соотношения (1.35) на наличие корней, соответствующих экспоненциально нарастающим малым плоским возмущениям (1.11), (1.12), (1.19) в форме нормальных волн (1.20), для трёх характерных наборов определяющих параметров a, b, c, H и β вида

$$1)\; a = 30,\; b = 1,\; c = 3,\; H = 1,\; \beta = -4$$

$$\alpha_1 \approx 0,015,\; \alpha_2 \approx 120 \qquad \text{(IV.1.36)}$$

$$2)\; a = 2,\; b = 1,\; c = 3,\; H = 1,\; \beta = -4$$

$$\alpha_1 \approx 0,015,\; \alpha_2 \approx 8 \qquad \text{(IV.1.37)}$$

$$3)\; a = -1,\; b = 1,\; c = 3,\; H = 1,\; \beta = -4$$

$$\alpha_1 \approx 0,015,\; \alpha_2 \approx -4 \qquad \text{(IV.1.38)}$$

Анализируя данные (1.36)–(1.38), следует, прежде всего, отметить тот факт, что профили скорости $U(y)$ (1.28), (1.36)–(1.38) установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений (1.5) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными плоскостями в отсутствие внешних массовых сил не имеют точек перегиба. Тем самым теорема Релея [52] об устойчивости справедлива для этих течений во всех трёх случаях.

Что касается достаточных условий Арнольда [55] и Фьортофта [54, 203] линейной устойчивости, то, с одной стороны, неравенства (1.8) и

$$U\frac{d^2U}{dy^2} \geq 0$$

нарушены для профиля скорости $U(y)$ (1.28) с параметрами a, b и c (1.36) везде внутри области течения τ, для профиля скорости $U(y)$ (1.28) с параметрами a, b и c (1.37) — в части области τ течения жидкости, однако для профиля скорости $U(y)$ (1.28) с параметрами a, b и c (1.38) данные неравенства, напротив, верны всюду в пределах области течения τ. С другой же стороны, для профилей скорости $U(y)$ (1.28), (1.36)–(1.38) всегда могут быть подобраны постоянные K и K_1 таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения

$$(U-K)\frac{d^2U}{dy^2} \geq 0,\ (U-K_1)\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)^{-1} \geq 0$$

Поэтому, согласно утверждениям Арнольда [55] и Фьортофта [54, 203] об устойчивости, установившиеся плоско–параллельные сдвиговые течения (1.5), (1.28), (1.36)–(1.38) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в прослойке между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными пластинами при отсутствии внешних массовых сил тоже должны быть устойчивыми по отношению к малым плоским возмущениям (1.11), (1.12), (1.19) в форме нормальных волн (1.20).

Тем не менее, данные (1.36)–(1.38) убедительно свидетельствуют в пользу того, что, несмотря на истинность достаточных условий линейной устойчивости Релея, Фьортофта и Арнольда, установившиеся плоско–параллельные сдвиговые течения (1.5), (1.28), (1.36)–(1.38) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в пространстве между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными неограниченными поверхностями в отсутствие внешних массовых сил всё–таки неустойчивы относительно малых плоских возмущений (1.11), (1.12), (1.19)–(1.24), (1.34)–(1.38).

В самом деле, графически найдено, что каждому из стационарных профилей скорости $U(y)$ (1.28), (1.36)–(1.38) отвечает, по крайней мере, одно экспоненциально растущее малое плоское возмущение (1.11), (1.12), (1.19) в виде нормальной волны (1.20)–(1.24), (1.34)–(1.38). Естественно, для этих возмущений выполняются равенство (1.13) (причём в нём $E = 0$), уравнение (1.15), неравенство (1.16) и соотношения (1.17).

Отсюда как раз и вытекает, что малые плоские возмущения (1.11), (1.12), (1.19) в форме нормальных волн (1.20)–(1.24), (1.34)–(1.38) действительно не попадают в сферу применимости теорем Релея, Фьортофта и Арнольда об устойчивости. Следовательно, если условия Релея, Фьортофта и Арнольда линейной устойчивости установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений (1.5), (1.28), (1.36)–(1.38) и справедливы для некоторых малых плоских возмущений (1.11), (1.12), (1.20)–(1.24), то уж никак не для возмущений (1.11), (1.12), (1.20)–(1.24), (1.34)–(1.38), что наглядно и показывает необходимый и достаточный характер данных условий устойчивости.

Таким образом, результаты этого параграфа последней главы курса лекций не противоречат известным утверждениям Релея, Фьортофта и Арнольда [52, 54, 55, 203] об устойчивости, а уточняют и дополняют область их использования.

В итоге, конструирование аналитического примера точных стационарных решений (1.5) смешанной задачи (1.1) и наложенных на них малых плоских возмущений (1.11), (1.12), (1.19), эволюционирующих со временем в соответствии с построенной априорной экспоненциальной оценкой снизу (1.18) вне зависимости от того, верны достаточные условия линейной устойчивости Релея, Фьортофта либо Арнольда или нет, завершено.

§2. К УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ТРЁХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В данном параграфе рассматривается линейная задача устойчивости стационарных пространственных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости, которая целиком заполняет некий объём с неподвижными твёрдыми непроницаемыми стенками, при отсутствии внешних массовых сил [146, 147]. Прямым методом Ляпунова демонстрируется, что эти течения абсолютно неустойчивы по отношению к малым трёхмерным возмущениям, тогда как состояния равновесия (покоя) данной жидкости — наоборот, абсолютно устойчивы. Кроме того, выводятся достаточные условия практической линейной неустойчивости и конструируются априорные нижние оценки, говорящие о том, что изучаемые возмущения, возможно, нарастают по времени не медленнее, чем экспоненциально. Наконец, строится иллюстративный аналитический пример установившихся пространственных течений и наложенных на них малых трёхмерных возмущений, которые растут во времени в согласии с одной из сконструированных оценок снизу.

ПОСТАНОВКА ТОЧНОЙ ЗАДАЧИ. Исследуются пространственные течения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости, целиком наполняющей сосуд τ с неподвижной твёрдой непроницаемой границей $\partial\tau$, в отсутствие внешних массовых сил. Эти течения описываются нестационарными решениями начально–краевой задачи вида [56, 67]

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{u} = -\,\nabla p \qquad \text{(IV.2.1)}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ в } \tau;\ \boldsymbol{u}\boldsymbol{n} = 0 \text{ на } \partial\tau$$

$$\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x},\,0) = \boldsymbol{u}_0\,(\boldsymbol{x})$$

где $\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x},\,t) = (u_1,\,u_2,\,u_3)$ — поле скорости, $p\,(\boldsymbol{x},\,t)$ — поле давления, $\boldsymbol{x} = (x_1,\,x_2,\,x_3)$ — декартовы координаты, $\boldsymbol{n} = (n_1,\,n_2,\,n_3)$ — нормаль к поверхности $\partial\tau$, t — время, $\boldsymbol{u}_0 = (u_{01},\,u_{02},\,u_{03})$ — начальное поле скорости жидкости. Предполагается, что функция $\boldsymbol{u}_0$ обращает в тождества второе и третье соотношения смешанной задачи (2.1).

Начально–краевая задача (2.1) обладает интегралом кинетической энергии в форме

$$E \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\tau} u_j u_j d\tau = \mathrm{const} \qquad \text{(IV.2.2)}$$

Здесь $d\tau \equiv dx_1 dx_2 dx_3$; по повторяющимся векторным и тензорным индексам из строчных латинских букв повсюду в настоящем параграфе осуществляется суммирование от единицы до трёх.

Если подействовать дифференциальным оператором rot на первое уравнение смешанной задачи (2.1), то нетрудно получить соотношение, которое характеризует развитие поля завихренности $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},\, t) = (\omega_1,$ $\omega_2,\, \omega_3) \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{u}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}) \qquad \text{(IV.2.3)}$$

Далее считается, что начально–краевая задача (2.1) и уравнение (2.3) имеют точные стационарные решения

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = (U_1,\, U_2,\, U_3)\,,\ p = P(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(IV.2.4)}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}) = (\Omega_1,\, \Omega_2,\, \Omega_3)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$(\boldsymbol{U}\nabla)\,\boldsymbol{U} = -\,\nabla P,\ \mathrm{div}\boldsymbol{U} = 0,\ \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{\Omega}) = 0 \qquad \text{(IV.2.5)}$$

внутри объёма τ и условию непротекания

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{(IV.2.6)}$$

на его границе $\partial\tau$. Данные решения как раз и отвечают тем установившимся пространственным течениям однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости, устойчивость которых относительно малых трёхмерных возмущений и будет ниже рассматриваться.

Итак, цель дальнейшего изучения заключается в том, чтобы показать абсолютную неустойчивость точных стационарных решений (2.4)–(2.6) смешанной задачи (2.1) по отношению к малым пространственным возмущениям.

ПОСТАНОВКА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ. Для достижения этой цели производится линеаризация начально–краевой задачи (2.1) и уравнения (2.3) около точных стационарных решений (2.4)–(2.6), приводящая к смешанной задаче вида

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + (\boldsymbol{u}'\nabla)\,\boldsymbol{U} + (\boldsymbol{U}\nabla)\,\boldsymbol{u}' = -\,\nabla p' \qquad \text{(IV.2.7)}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}' = 0,\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}'}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{\omega}'\right)\ \text{в}\ \tau$$

$$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{n} = 0\ \text{на}\ \partial\tau;\ \boldsymbol{u}'\left(\boldsymbol{x},\ 0\right) = \boldsymbol{u}'_0\left(\boldsymbol{x}\right)$$

где $\boldsymbol{u}'\left(\boldsymbol{x},\ t\right) = \left(u'_1,\ u'_2,\ u'_3\right)$, $p'\left(\boldsymbol{x},\ t\right)$ и $\boldsymbol{\omega}'\left(\boldsymbol{x},\ t\right) = \left(\omega'_1,\ \omega'_2,\ \omega'_3\right)$ — малые трёхмерные возмущения полей скорости, давления и завихренности соответственно; $\boldsymbol{u}'_0 = \left(u'_{01},\ u'_{02},\ u'_{03}\right)$ — начальное малое возмущение поля скорости жидкости, которое превращает в тождества второе и четвёртое соотношения начально–краевой задачи (2.7).

К сожалению, аналог интеграла кинетической энергии для смешанной задачи (2.7) всё ещё не обнаружен.

Тем не менее, данный аналог может быть построен, если решения начально–краевой задачи (2.7) дополнительно подчинить специальному требованию — условию «равнозавихренности» [56, 67]. Это требование служит, по сути, интегральной формой условия «вмороженности» вихревых линий в поле виртуальных перемещений жидких частиц и выражается в виде равенства циркуляций скорости по контурам, получающимся друг из друга при сохраняющем объём гладком отображении сосуда τ на себя.

Доступнее всего «равнозавихренные» малые возмущения (2.7) можно описать с помощью поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{x},\ t\right) = \left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)$ (I.13) [24]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \boldsymbol{u}' + \operatorname{rot}\left(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{\xi}\right) \tag{IV.2.8}$$

Принимая во внимание уравнение (2.8), смешанную задачу (2.7) несложно переформулировать в виде

$$\frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} + 2U_k \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_k \partial t} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(U_m \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m}\right) =$$

$$= -\frac{\partial p'}{\partial x_j} - \xi_k \frac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial x_j},\ \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{(IV.2.9)}$$

$$\omega'_j = \Omega_k \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} - \xi_k \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_k} \text{ в } \tau;\ \xi_j n_j = 0 \text{ на } \partial\tau$$

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},\,0) = \boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}(\boldsymbol{x},\,0) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right)_0 (\boldsymbol{x})$$

Здесь $\boldsymbol{\xi}_0 = (\xi_{01},\, \xi_{02},\, \xi_{03})$ — начальное поле лагранжевых смещений, а $(\partial\boldsymbol{\xi}/\partial t)_0$ — начальная частная производная первого порядка поля лагранжевых смещений по времени. Полагается, что для функций $\boldsymbol{\xi}_0$ и $(\partial\boldsymbol{\xi}/\partial t)_0$ выполняются второе, третье и четвёртое соотношения из системы (2.9).

Аналог интеграла кинетической энергии для начально–краевой задачи (2.8), (2.9) представляет собой функционал

$$E_1 \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{\tau} \left(u'_j u'_j + \omega'_j e_{jkm} U_k \xi_m\right) d\tau = \text{const} \qquad \text{(IV.2.10)}$$

где e_{jkm} — ковариантный псевдотензор третьего порядка веса -1 [208]. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что интеграл E_1 совпадает по форме со второй вариацией $\delta^2 E$ функционала E (2.2), которая вычисляется в окрестности точных стационарных решений (2.4)–(2.6) при наличии условия «равнозавихренности» и записывается в подходящих обозначениях [56, 67].

Учитывая вид интеграла E_1 (2.10), несложно сделать вывод, что среди точных стационарных решений (2.4)–(2.6) смешанной задачи (2.1) и уравнения (2.3) устойчивыми (и устойчивыми абсолютно!) относительно малых пространственных возмущений (2.8), (2.9) будут лишь решения, отвечающие состояниям равновесия (покоя) исследуемой жидкости, а именно

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \equiv 0,\ p = P(\boldsymbol{x}) \equiv \text{const},\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$$

Действительно, только в данном случае функционал E_1 становится неотрицательным

$$E_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau} u'_j u'_j d\tau = \text{const} \geq 0$$

что и подтверждает вышесказанное.

Во всех же остальных случаях интеграл E_1 (2.10) для произвольных «равнозавихренных» малых трёхмерных возмущений (2.8), (2.9) не является ни знакоопределённым, ни знакопостоянным, а потому точные стационарные решения (2.4)–(2.6) начально–краевой задачи (2.1), которые соответствуют установившимся пространственным течениям рассматриваемой жидкости, и могут оказаться абсолютно неустойчивыми по отношению к этим возмущениям.

Например, для состояний квазитвёрдого вращения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{x},\ p = P(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{\Omega}_1 \equiv \text{const} \quad \text{(IV.2.11)}$$

(здесь $P(\boldsymbol{x})$ — известная скалярная функция векторного аргумента) функционалу E_1 присуще важное свойство

$$\int\limits_{\tau} u'_j u'_j d\tau = \text{const} \geq 0,\ \int\limits_{\tau} \omega'_j e_{jkm} U_k \xi_m d\tau = \text{const} \quad \text{(IV.2.12)}$$

На первый взгляд, неотрицательность одного из интегралов (2.12) должна вроде бы обеспечивать абсолютную устойчивость состояний квазитвёрдого вращения (2.11) относительно малых трёхмерных возмущений (2.8), (2.9). Однако, данное наблюдение ошибочно, поскольку у другого интеграла системы соотношений (2.12) нет конкретного знака, что, в свою очередь, лишает и функционал E_1 как знакоопределённости, так и знакопостоянства.

Ниже интеграл E_1 (2.10) будет применяться в форме [133]

$$E_1 \equiv T + T_1 + \Pi = \mathrm{const} \tag{IV.2.13}$$

где

$$T \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\tau} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\boldsymbol{U}\nabla)\,\boldsymbol{\xi}\right]^2 d\tau \geq 0$$

$$T_1 \equiv -\int\limits_{\tau} \frac{\partial \xi_j}{\partial t}\xi_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} d\tau,\ \Pi \equiv -\frac{1}{2}\int\limits_{\tau} \xi_j \xi_k \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} d\tau$$

ФУНКЦИОНАЛ ЛЯПУНОВА. В интересах последующего изучения удобно ввести в исследование вспомогательный интеграл вида

$$M \equiv \int\limits_{\tau} \xi_j \xi_j d\tau \geq 0 \tag{IV.2.14}$$

Настоящий функционал служит объёмным интегралом по сосуду τ от квадрата расстояния ξ_j^2 между жидкими частицами возмущённого (2.8), (2.9) и установившегося (2.4)–(2.6) течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в фазовом пространстве решений линеаризованной смешанной задачи (2.7).

Если дважды продифференцировать функционал M (2.14) по независимой переменной t и выполнить ряд преобразований получившегося в результате интеграла с использованием связей (2.8), (2.9) и (2.13), то нетрудно прийти к вириальному равенству [24] в форме [133]

$$M'' = 4(T + \Pi) \tag{IV.2.15}$$

(везде далее во втором параграфе четвёртой главы курса лекций штрихом обозначается полная производная по времени).

Здесь уместно чуть более подробно остановиться на отдельных итогах неоднократно уже упоминавшейся выше работы [133].

Авторами этой работы для подкласса точных стационарных решений (2.4)–(2.6) начально–краевой задачи (2.1), характеризующегося соотношением

$$\xi_j \xi_k \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} \leq -\,\mu \xi_m^2 \tag{IV.2.16}$$

где μ — положительная постоянная величина, посредством равенства (2.15) сконструирована априорная оценка снизу

$$M(t) \geq M(0)\mathrm{e}^{-\,t\sqrt{2\mu}} + \left[M'(0) + M(0)\sqrt{2\mu}\right] \frac{\operatorname{sh} t\sqrt{2\mu}}{\sqrt{2\mu}}$$

Данная оценка свидетельствует о возможном (как минимум, экспоненциальном) нарастании со временем малых трёхмерных возмущений (2.8), (2.9) точных стационарных решений (2.4)–(2.6), (2.16) смешанной задачи (2.1), которые удовлетворяют начальным условиям вида

$$M(0) \geq 0,\ M'(0) > -\,M(0)\sqrt{2\mu}$$

а значит — об абсолютной неустойчивости установившихся пространственных течений (2.4)–(2.6), (2.16) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости по отношению к таким возмущениям.

В то же время для частного класса точных стационарных решений (2.4)–(2.6) начально–краевой задачи (2.1), описываемого неравенством

$$\xi_j \xi_k \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} \leq 0 \tag{IV.2.17}$$

авторы статьи [133] сумели построить только априорную нижнюю оценку, которая говорит всего лишь о том, что малые трёхмерные возмущения (2.8), (2.9) точных стационарных решений (2.4)–(2.6), (2.17) смешанной задачи (2.1) могут расти во времени не медленнее, чем линейно. По справедливому признанию самих авторов работы [133], это нарастание малых пространственных возмущений (2.8), (2.9) никоим образом нельзя воспринимать как реальную неустойчивость установившихся трёхмерных течений (2.4)–(2.6), (2.17) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости.

Что же касается оставшихся точных стационарных решений (2.4)–(2.6) начально–краевой задачи (2.1), то они в статье [133] не рассматривались вовсе.

Итак, учитывая результаты работы [133], цель дальнейшего изучения будет заключаться в том, чтобы сконструировать априорные экспоненциальные оценки снизу, свидетельствующие о возможном росте со временем малых пространственных возмущений (2.8), (2.9), для тех из точных стационарных решений (2.4)–(2.6) смешанной задачи (2.1), которые не входят в подкласс (2.16).

Преследуя данную цель, вириальное равенство (2.15) умножается на произвольную постоянную λ, после чего, принимая во внимание выражение (2.13) для функционала E_1, удаётся получить соотношение

$$E'_\lambda = 2\lambda \left(E_\lambda - 2T_\lambda - T_1 - 2\Pi\right) \qquad \text{(IV.2.18)}$$

Здесь

$$E_\lambda \equiv \Pi_\lambda + T_\lambda, \;\; 2\Pi_\lambda \equiv 2\left(\Pi + T_1\right) + \lambda^2 M$$

$$2T_\lambda \equiv 2T - \lambda M' + \lambda^2 M = \int\limits_\tau \left[\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\boldsymbol{U}\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\xi} - \lambda\boldsymbol{\xi}\right]^2 d\tau \geq 0$$

Пусть $\lambda > 0$, а точные стационарные решения (2.4)–(2.6) начально–

краевой задачи (2.1) отвечают условию (2.17). Тогда, в чём несложно удостовериться, из уравнения (2.18) можно извлечь ключевое дифференциальное неравенство [141, 146] в форме

$$M'' - 2\lambda M' + 2\lambda^2 M \geq 0 \tag{IV.2.19}$$

Именно,

$$E'_\lambda = 2\lambda\left(E_\lambda - 2T_\lambda - T_1 - 2\Pi\right) = 2\lambda\left(\Pi_\lambda - T_\lambda - T_1 - 2\Pi\right)$$

$$\left(\Pi + T_1 + \lambda^2 M + T - \frac{\lambda}{2}M'\right)' = \lambda^3 M - 2\lambda\left(T_\lambda + \Pi\right) \leq \lambda^3 M$$

$$\lambda^2 M' - \frac{\lambda}{2}M'' \leq \lambda^3 M$$

$$M'' - 2\lambda M' + 2\lambda^2 M \geq 0$$

что и надо было доказать.

Примечательно, что это неравенство может быть снабжено условиями [145, 194], при наличии которых из него с необходимостью будет вытекать априорная, экспоненциальная по времени, нижняя оценка вида

$$M(t) \geq C\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{IV.2.20}$$

где C — известная положительная постоянная величина.

Действительно, соотношение (2.19) можно формально проинтегрировать на полуинтервалах $t_n \leq t < \pi/2\lambda + t_n$ ($t_n \equiv 2\pi n/\lambda$; $n = 0, 1, 2, \ldots$), для чего нужно осуществить несколько последовательных замен искомого функционала M. Конкретно,

$$\text{а) } M_1(t) \equiv \mathrm{e}^{-\lambda t} M(t): \; M_1'' + \lambda^2 M_1 \geq 0$$

$$\text{б) } M_2(t) \equiv \frac{M_1(t)}{\cos\lambda t}: \; [M_2' \cos\lambda t]' - \lambda M_2' \sin\lambda t \geq 0$$

$$\text{в) } M_3(t) \equiv M_2' \cos^2 \lambda t: \ M_3' \geq 0$$

Интегрирование последнего неравенства и проведение обратных замен позволяют прийти к соотношению

$$M(t) \geq [C_{1n} \cos \lambda t + C_{2n} \sin \lambda t] \, \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{IV.2.21}$$

(здесь C_{1n} и C_{2n} — произвольные постоянные).

Учитывая нестрогость неравенства (2.21), постоянные величины C_{1n} и C_{2n} нетрудно связать со значениями функционала M (2.14) и его первой производной M' в моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, ...$). В итоге, соотношение (2.21) окончательно может быть выписано в виде

$$M(t) \geq f(t) \tag{IV.2.22}$$

$$f(t) \equiv \left[M\left(t_n\right) \cos \lambda t + \left[\frac{M'\left(t_n\right)}{\lambda} - M\left(t_n\right) \right] \sin \lambda t \right] \times$$
$$\times \, \mathrm{e}^{\lambda (t - t_n)}$$

Для того чтобы обосновать процедуру интегрирования неравенства (2.19) на промежутках $t_n \leq t < \pi/2\lambda + t_n$ ($n = 0, 1, 2, ...$), приведшую в результате к оценке снизу (2.22), требуется вычислить производную первого порядка функции f по её аргументу t:

$$f' = [M'\left(t_n\right) \cos \lambda t + [M'\left(t_n\right) - 2\lambda M\left(t_n\right)] \sin \lambda t] \, \mathrm{e}^{\lambda (t - t_n)} \tag{IV.2.23}$$

Если принять во внимание соотношения (2.22) и (2.23), то можно сделать вывод, что функция $f(t)$ будет положительной и строго возрастающей на полуинтервалах $t_n \leq t < \pi/2\lambda + t_n$ ($n = 0, 1, 2, ...$) [195] в случае, когда истинны неравенства

$$M\left(t_n\right) > 0, \ M'\left(t_n\right) \geq 2\lambda M\left(t_n\right) \tag{IV.2.24}$$

Данные неравенства как раз и являются необходимыми гарантиями правомерности представленной выше процедуры интегрирования соотношения (2.19).

Поскольку промежутки $t_n \leq t < \pi/2\lambda + t_n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$ взаимно не пересекаются, значения функционала M и его первой производной M' на левых концах этих промежутков могут задаваться какими угодно. В частности, их можно взять в форме

$$M\left(t_n\right) \equiv M(0)\mathrm{e}^{\lambda t_n},\ M'\left(t_n\right) \equiv M'(0)\mathrm{e}^{\lambda t_n}$$

Тогда неравенства (2.24) будут выполнены, если

$$M(0) > 0,\ M'(0) \geq 2\lambda M(0)$$

Функция же $f(t)$, в свою очередь, предстанет в виде

$$f(t) = \left[M(0)\cos\lambda t + \left[\frac{M'(0)}{\lambda} - M(0)\right]\sin\lambda t\right]\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Подобные рассуждения могут быть проведены и в тех случаях, когда соотношение (2.19) надо будет интегрировать на остальных временных полуинтервалах. Учитывая данный факт, ниже итоги интегрирования неравенства (2.19) на промежутках $t_{kn} \leq t < \pi/2\lambda + t_{kn}$ $(t_{kn} \equiv \pi k/2\lambda + 2\pi n/\lambda;\ k = 1,\ 2,\ 3;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$ приводятся в форме кратких иллюстрирующих выкладок, без подробных комментариев:

$$1)\ M_1(t) \equiv \mathrm{e}^{-\lambda t}M(t):\ M_1'' + \lambda^2 M_1 \geq 0$$

$$2)\ M_2(t) \equiv \frac{M_1(t)}{\cos\lambda t}:\ [M_2'\cos\lambda t]' - \lambda M_2'\sin\lambda t \geq 0$$

$$3)\ M_3(t) \equiv M_2'\cos^2\lambda t:\ M_3' \leq 0\ (k = 1,\ 2);\ M_3' \geq 0\ (k = 3)$$

$$4)\ M(t) \geq \left[C_{3n}\cos\lambda t + C_{4n}\sin\lambda t\right]\mathrm{e}^{\lambda t};\ C_{3n},\ C_{4n} - \mathrm{const}$$

$$5)\ M(t) \geq f_k(t)$$

$$\text{а) } f_1(t) \equiv \left[M\left(t_{1n}\right)\sin\lambda t - \left[\frac{M'\left(t_{1n}\right)}{\lambda} - M\left(t_{1n}\right)\right]\cos\lambda t\right] \mathrm{e}^{\lambda(t-t_{1n})}$$

$$f_1' = \left[M'\left(t_{1n}\right)\sin\lambda t - \left[M'\left(t_{1n}\right) - 2\lambda M\left(t_{1n}\right)\right]\cos\lambda t\right] \mathrm{e}^{\lambda(t-t_{1n})}$$

$$\text{б) } f_2(t) \equiv -\ \left[M\left(t_{2n}\right)\cos\lambda t + \left[\frac{M'\left(t_{2n}\right)}{\lambda} - M\left(t_{2n}\right)\right]\sin\lambda t\right] \mathrm{e}^{\lambda(t-t_{2n})}$$

$$f_2' = -\ \left[M'\left(t_{2n}\right)\cos\lambda t + \left[M'\left(t_{2n}\right) - 2\lambda M\left(t_{2n}\right)\right]\sin\lambda t\right] \mathrm{e}^{\lambda(t-t_{2n})}$$

$$\text{в) } f_3(t) \equiv \left[-\,M\left(t_{3n}\right)\sin\lambda t + \left[\frac{M'\left(t_{3n}\right)}{\lambda} - M\left(t_{3n}\right)\right]\cos\lambda t\right] \mathrm{e}^{\lambda(t-t_{3n})}$$

$$f_3' = \left[-\,M'\left(t_{3n}\right)\sin\lambda t + \left[M'\left(t_{3n}\right) - 2\lambda M\left(t_{3n}\right)\right]\cos\lambda t\right] \mathrm{e}^{\lambda(t-t_{3n})}$$

$$6)\ M\left(t_{kn}\right) > 0,\ M'\left(t_{kn}\right) \geq 2\lambda M\left(t_{kn}\right)$$

$$7)\ M\left(t_{kn}\right) \equiv M(0)\mathrm{e}^{\lambda t_{kn}},\ M'\left(t_{kn}\right) \equiv M'(0)\mathrm{e}^{\lambda t_{kn}}$$

$$M(0) > 0,\ M'(0) \geq 2\lambda M(0)$$

$$f_1(t) = \left[M(0)\sin\lambda t - \left[\frac{M'(0)}{\lambda} - M(0)\right]\cos\lambda t\right] \mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$f_2(t) = -\ \left[M(0)\cos\lambda t + \left[\frac{M'(0)}{\lambda} - M(0)\right]\sin\lambda t\right] \mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$f_3(t) = \left[-\,M(0)\sin\lambda t + \left[\frac{M'(0)}{\lambda} - M(0)\right]\cos\lambda t\right] \mathrm{e}^{\lambda t}$$

Если проанализировать финальные выражения для функций $f(t)$, $f_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$, то несложно увидеть, что графиками этих функций на соответствующих им полуинтервалах времени будут служить кривые, которые лежат поперёк полуполосы, образованной двумя нарастающими экспонентами, причём левые концы настоящих кривых опираются сверху на нижнюю границу данной полуполосы

$$g(t) \equiv M(0)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

а правые примыкают к её верхней границе

$$g_1(t) \equiv \left[\frac{M'(0)}{\lambda} - M(0)\right] \mathrm{e}^{\lambda t}$$

Исключение составляет только та ситуация, при которой

$$M'(0) = 2\lambda M(0)$$

Тогда исследуемая экспоненциальная полуполоса вырождается в линию, отвечающую своей нижней границе $g(t)$, так что все концы кривых, которые являются графиками функций $f(t)$, $f_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ на соответствующих им временных промежутках, будут находиться именно на этой линии, а не где–то ещё.

Осуществлённый анализ свойств графиков функций $f(t)$, $f_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ даёт возможность прийти к совершенно определённому заключению о том, что функционал M (2.14) не может расти со временем медленнее, чем экспоненциально. Тем самым продемонстрировано, что при выполнении условий в форме

$$M\left(\tau_n\right) > 0,\ M'\left(\tau_n\right) \geq 2\lambda M\left(\tau_n\right) \tag{IV.2.25}$$

$$M\left(\tau_n\right) \equiv M(0)\mathrm{e}^{\lambda\tau_n},\ M'\left(\tau_n\right) \equiv M'(0)\mathrm{e}^{\lambda\tau_n}$$

$$M(0) > 0,\ M'(0) \geq 2\lambda M(0)$$

(здесь $\tau_n \equiv \pi n/2\lambda$; $n = 0, 1, 2, ...$) из соотношения (2.19) действительно вытекает искомая априорная экспоненциальная оценка снизу (2.20).

Пусть, по–прежнему, $\lambda > 0$, но точные стационарные решения (2.4)–(2.6) смешанной задачи (2.1) принадлежат теперь частному классу вида

$$\xi_j \xi_k \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} > 0 \tag{IV.2.26}$$

В данном случае, принимая во внимание ограниченность объёма τ с рассматриваемой жидкостью и непрерывность как самой функции $P\left(\boldsymbol{x}\right)$, так и её производных вплоть до требуемого порядка включительно, можно оценить сверху левую часть последнего неравенства следующим образом:

$$\xi_j \xi_k \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} \leq \alpha \xi_m^2$$

где α — известная положительная постоянная.

Тогда, в чём нетрудно убедиться, из вириального равенства (2.15) и уравнения (2.18) будет вытекать соотношение [146], похожее на ключевое дифференциальное неравенство (2.19), то есть

$$M'' - 2\lambda M' + 2\left(\lambda^2 + \alpha\right) M \geq 0 \qquad \text{(IV.2.27)}$$

Ясно, что присутствие в левой части соотношения (2.27) постоянной величины α внесёт некоторые коррективы в процедуру его интегрирования по сравнению с аналогичной процедурой интегрирования неравенства (2.19). Однако, что важно, эти корректировки будут очень и очень незначительными (см. второй параграф второй же главы настоящего курса лекций).

Учитывая данное соображение, разумно полностью опустить описание процесса интегрирования соотношения (2.27), сформулировав лишь его окончательный результат: если справедливы условия

$$M\left(\tau_{1n}\right) > 0 \qquad \text{(IV.2.28)}$$

$$M'\left(\tau_{1n}\right) \geq 2\left(\lambda + \frac{\alpha}{\lambda}\right) M\left(\tau_{1n}\right);\ M\left(\tau_{1n}\right) \equiv M(0)\mathrm{e}^{\lambda \tau_{1n}}$$

$$M'\left(\tau_{1n}\right) \equiv M'(0)\mathrm{e}^{\lambda \tau_{1n}};\ M(0) > 0,\ M'(0) \geq 2\left(\lambda + \frac{\alpha}{\lambda}\right) M(0)$$

(здесь $\tau_{1n} \equiv \pi n/2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}$; $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), то из неравенства (2.27) также с необходимостью будет следовать априорная экспоненциальная нижняя оценка вида

$$M(t) \geq C_1 \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{IV.2.29}$$

где C_1 — известная положительная постоянная.

Наконец, пусть $\lambda > 0$, а точные стационарные решения (2.4)–(2.6) начально–краевой задачи (2.1) входят в подкласс, которому присуще то качество, что величина $\xi_j \xi_k \partial^2 P/\partial x_j \partial x_k$ не обладает каким–либо конкретным знаком. В этом случае, вновь принимая во внимание ограниченность сосуда τ и непрерывность функции $P\left(\boldsymbol{x}\right)$ вместе со своими производными вплоть до нужного порядка включительно, несложно оценить данную величину и сверху, и снизу. Именно,

$$-\beta \xi_m^2 \leq \xi_j \xi_k \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} \leq \beta \xi_m^2 \tag{IV.2.30}$$

(здесь β — известная положительная постоянная).

Тогда, как легко удостовериться, правая часть этого двойного неравенства и соотношения (2.15), (2.18) позволят получить ещё один образ ключевого дифференциального неравенства (2.19) [146], то есть

$$M'' - 2\lambda M' + 2\left(\lambda^2 + \beta\right) M \geq 0 \tag{IV.2.31}$$

Интегрируя последнее соотношение в духе неравенств (2.19), (2.27), нетрудно убедиться, что и из него при наличии условий

$$M\left(\tau_{2n}\right) > 0 \tag{IV.2.32}$$

$$M'\left(\tau_{2n}\right) \geq 2\left(\lambda + \frac{\beta}{\lambda}\right) M\left(\tau_{2n}\right);\ M\left(\tau_{2n}\right) \equiv M(0)\mathrm{e}^{\lambda \tau_{2n}}$$

$$M'\left(\tau_{2n}\right) \equiv M'(0)\mathrm{e}^{\lambda \tau_{2n}};\ M(0) > 0,\ M'(0) \geq 2\left(\lambda + \frac{\beta}{\lambda}\right) M(0)$$

где $\tau_{2n} \equiv \pi n/2\sqrt{\lambda^2 + 2\beta}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, с необходимостью вытекает априорная экспоненциальная нижняя оценка в форме

$$M(t) \geq C_2 \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{IV.2.33}$$

(здесь C_2 — известная положительная постоянная величина).

В данном месте стоит отдельно остановиться на связи выполненных процедур поинтервального интегрирования дифференциальных неравенств (2.19), (2.27) и (2.31) со свойствами решений линеаризованной смешанной задачи (2.8), (2.9). Эта связь заключается в том, что для каждого из соотношений (2.19), (2.27) и (2.31) удалось путём выбора начальных условий специального вида (см. третье и четвёртое выражения в системах соотношений (2.25), (2.28) и (2.32)) на левых концах изучаемых промежутков времени указать единые начальные данные (см. последнюю пару неравенств из систем соотношений (2.25), (2.28) и (2.32)) для малых трёхмерных возмущений (2.8), (2.9) частных классов (2.17), (2.26) и (2.30) точных стационарных решений (2.4)–(2.6) начально–краевой задачи (2.1) соответственно, обеспечивающие истинность условий положительности и строгого возрастания функций $f(t)$, $f_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ (см. первые два неравенства в системах соотношений (2.25), (2.28) и (2.32)) на всех исследуемых временных полуинтервалах. Тем самым, согласно определению неустойчивого по Ляпунову решения системы дифференциальных уравнений [196], продемонстрирована принципиальная возможность возникновения и последующего развития во времени неограниченно нарастающих малых пространственных возмущений (2.8), (2.9) точных стационарных решений (2.4)–(2.6) смешанной задачи (2.1).

Итак, соотношения (2.20), (2.29) и (2.33) однозначно говорят о том, что малые трёхмерные возмущения (2.8), (2.9) с начальными данными (2.25), или (2.28), или (2.32) установившихся пространственных течений (2.4)–(2.6), (2.17), (2.26), (2.30) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости могут расти со временем, по меньшей мере, экспоненциально. Поскольку эти соотношения построены без предъявления каких бы то ни было требований ограничительного характера к установившимся трёхмерным течениям (2.4)–(2.6), (2.17), (2.26), (2.30), то данное обстоятельство как раз и свидетельствует об абсолютной неустойчивости последних относительно малых пространственных возмущений (2.8), (2.9), (2.25), (2.28), (2.32). Кстати, для экспоненциально нарастающих во времени малых трёхмерных возмущений (2.8), (2.9), (2.25), (2.28), (2.32) счётные наборы условий (2.25), (2.28), (2.32) удовлетворяются тождественно.

Целесообразно обратить особое внимание на тот факт, что именно интеграл M (2.14) и представляет собой искомый функционал Ляпунова, который растёт со временем в силу уравнений начально–краевой задачи (2.8), (2.9). Отличительной чертой настоящего нарастания служит большой произвол, оставшийся за положительной постоянной λ в показателях экспонент из правых частей неравенств (2.20), (2.29) и (2.33). Он, к примеру, даёт возможность интерпретировать любое решение смешанной задачи (2.8), (2.9), (2.25), (2.28), (2.32), которое растёт во времени согласно найденным априорным экспоненциальным оценкам снизу (2.20), (2.29) либо (2.33), в качестве аналога примера некорректности по Адамару [197].

Кроме того, два первых неравенства в счётных наборах условий (2.25), (2.28) и (2.32) — это и есть желаемые достаточные условия практической линейной неустойчивости [14, 15].

Наконец, детально изложенная процедура интегрирования соотношения (2.19) наглядно демонстрирует, что сведения о начальных данных (2.25) (а значит, и о (2.28), (2.32) тоже) нарастающих малых пространственных возмущений (2.8), (2.9) могут быть извлечены и при рассмотрении системы кусочно–непрерывных функций $f(t)$, $f_k(t)$ $(k = 1, 2, 3)$.

Так как в первом параграфе настоящей главы курса лекций показано, что теория, разработанная выше для линейной задачи устойчивости стационарных трёхмерных течений (2.4)–(2.6) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в объёме τ с неподвижными твёрдыми непроницаемыми стенками $\partial\tau$ в отсутствие внешних массовых сил по отношению к малым пространственным возмущениям (2.8), (2.9), допускает распространение и на случай линейных задач устойчивости с незамкнутыми областями течения (в частности, на линейную задачу устойчивости установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в зазоре между двумя покоящимися твёрдыми непроницаемыми параллельными бесконечными поверхностями при отсутствии внешних массовых сил относительно малых плоских возмущений [145]), далее конструируется иллюстративный аналитический пример стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в прослойке между двумя неподвижными твёрдыми непроницаемыми параллельными плоскостями в отсутствие внешних массовых сил и наложенных на них малых трёхмерных возмущений, которые эволюционируют со временем в соответствии с построенной априорной экспоненциальной нижней оценкой (2.20).

При этом изучаемые малые пространственные возмущения предполагаются периодичными вдоль координатных осей, параллельных границам области исследуемых установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений, а интегралы E_1 (2.10), T, T_1 и Π (2.13), M (2.14), E_λ, Π_λ и T_λ (2.18) вычисляются по фиктивному объёму, который геометрически выделяется в зазоре между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями и является, из соображений простоты и удобства, прямоугольным параллелепипедом, чьи образующие рёбра представляют собой или периоды рассматриваемых малых трёхмерных возмущений, или расстояние между ограничивающими зазор поверхностями. Кстати, проницаемость данного прямоугольного параллелепипеда для интересующих стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений не наносит какого–либо вреда хорошим свойствам функционалов E_1 (2.10), T, T_1 и Π (2.13), M (2.14), E_λ, Π_λ и T_λ (2.18).

ПРИМЕР. Изучаются неустановившиеся пространственные течения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости, целиком заполняющей прослойку между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными плоскостями, при отсутствии внешних массовых сил.

Эти течения описываются нестационарными решениями начально–краевой задачи в форме [4, 185]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \qquad \text{(IV.2.34)}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \text{ в } \tau; \ u_2 = 0 \text{ на } \partial\tau$$

$$u_j\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0\right) = u_{0j}\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right)$$

где $\tau \equiv \{(x_1, x_2, x_3) : \ -\infty < x_1 < +\infty, \ 0 < x_2 < H, \ -\infty < x_3 < +\infty\}$ — зазор между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями, $\partial\tau \equiv \{(x_1,\ x_2,\ x_3) : \ -\infty < < x_1 < +\infty; \ x_2 = 0,\ H; \ -\infty < x_3 < +\infty\}$ — собственно неподвижные непроницаемые твёрдые параллельные неограниченные поверхности, H — ширина зазора между данными поверхностями. Считается, что функции u_{0j} превращают второе и третье соотношения этой задачи в тождества.

Смешанная задача (2.34) имеет точные стационарные решения вида

$$u_1 = U_1\left(x_2\right), \ u_2 = u_3 \equiv 0, \ p \equiv \text{const} \qquad \text{(IV.2.35)}$$

(здесь U_1 — некая функция независимой переменной x_2). Для данных решений, очевидно, выполняется неравенство (2.17), и они отвечают установившимся плоско–параллельным сдвиговым течениям однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в прослойке между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями в отсутствие внешних массовых сил.

Проводится линеаризация начально–краевой задачи (2.34) в окрестности точных стационарных решений (2.35), которая, в итоге, позволяет прийти к смешанной задаче в форме

$$\frac{\partial u_1'}{\partial t} + U_1 \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} + u_2' \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial p'}{\partial x_1} \tag{IV.2.36}$$

$$\frac{\partial u_2'}{\partial t} + U_1 \frac{\partial u_2'}{\partial x_1} = -\frac{\partial p'}{\partial x_2},\ \frac{\partial u_3'}{\partial t} + U_1 \frac{\partial u_3'}{\partial x_1} = -\frac{\partial p'}{\partial x_3},\ \frac{\partial u_k'}{\partial x_k} = 0 \text{ в } \tau$$

$$u_2' = 0 \text{ на } \partial\tau;\ u_j'\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0\right) = u_{0j}'\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right)$$

Полагается, что функции u_{0j}' обращают в тождества четвёртое и пятое соотношения этой задачи.

Дальше исследование концентрируется на «равнозавихренных» малых трёхмерных возмущениях

$$u_1' = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{dU_1}{dx_2}\xi_2 \tag{IV.2.37}$$

$$u_2' = \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1},\ u_3' = \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}$$

по причине чего начально–краевая задача (2.36) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} + 2U_1 \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t \partial x_1} +$$

$$+ U_1^2 \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial p'}{\partial x_j},\ \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} = 0 \text{ в } \tau \tag{IV.2.38}$$

$$\xi_2 = 0 \text{ на } \partial\tau;\ \xi_j\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0\right) = \xi_{0j}\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right)$$

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial t}\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0\right) = \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial t}\right)_0 \left(x_1,\ x_2,\ x_3\right)$$

где $\left(\partial\xi_j/\partial t\right)_0$ — начальные компоненты частной производной первого порядка поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ (2.8), (2.37) по времени. Предполагается, что функции ξ_{0j} удовлетворяют второму и третьему равенствам системы соотношений (2.38).

Рассматриваются решения смешанной задачи (2.37), (2.38) в форме

$$\xi_j\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t\right) \equiv h_j\left(x_2\right) \times$$

$$\times \exp\left[\sigma t + i\left(\kappa x_1 + \gamma x_3\right)\right] \qquad \text{(IV.2.39)}$$

$$p'\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t\right) \equiv h_4\left(x_2\right)\exp\left[\sigma t + i\left(\kappa x_1 + \gamma x_3\right)\right];\ j = 1,\ 2,\ 3$$

(здесь h_1, ..., h_4 — некие функции своего аргумента; $\sigma \equiv \sigma_1 + i\sigma_2$ — произвольная комплексная, а κ, γ, σ_1 и σ_2 — некоторые вещественные постоянные величины).

Важно отметить, что все результаты, полученные выше для решений начально–краевой задачи (2.8), (2.9), (2.25), с лёгкостью переносятся и на решения (2.39) смешанной задачи (2.37), (2.38), поскольку последним присуще свойство периодичности вдоль осей координат x_1 и x_3 [145].

Подстановка выражений (2.39) в первые два уравнения и краевое условие системы (2.38) даёт возможность сделать вывод, что если для функций h_1, ..., h_4 будет выполняться система алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\sigma + i\kappa U_1\right)^2 h_1 = -\,i\kappa h_4 \qquad \text{(IV.2.40)}$$

$$\left(\sigma + i\kappa U_1\right)^2 h_2 = -\,\frac{dh_4}{dx_2},\ \left(\sigma + i\kappa U_1\right)^2 h_3 = -\,i\gamma h_4$$

$$i\kappa h_1 + \frac{dh_2}{dx_2} + i\gamma h_3 = 0$$

с граничными условиями

$$h_2 = 0 \text{ при } x_2 = 0,\ H \qquad \text{(IV.2.41)}$$

то функции ξ_1, ξ_2, ξ_3 и p' вида (2.39) действительно будут служить решениями начально–краевой задачи (2.37), (2.38).

При помощи исключения из системы уравнений (2.40) функций h_1, h_3 и h_4 может быть установлено одно определяющее соотношение для функции h_2 — уравнение Релея [4, 19, 52, 185]:

$$\frac{d^2h_2}{dx_2^2}+\frac{2i\kappa}{\sigma+i\kappa U_1}\frac{dU_1}{dx_2}\frac{dh_2}{dx_2}-\left(\kappa^2+\gamma^2\right)h_2=0$$

Замена искомой функции $h\left(x_2\right)\equiv\left(\sigma+i\kappa U_1\right)h_2$ позволяет записать краевую задачу (2.40), (2.41) в нижеследующей окончательной форме:

$$\frac{d^2h}{dx_2^2}-\left[\frac{i\kappa}{\sigma+i\kappa U_1}\frac{d^2U_1}{dx_2^2}+\right.$$
$$\left.+\kappa^2+\gamma^2\right]h=0 \qquad \text{(IV.2.42)}$$

$$h=0 \text{ при } x_2=0,\ H$$

Стоит подчеркнуть, что при попытке обнаружить решения в виде нормальных волн у смешанной задачи (2.36) для них возникнет точно такая же задача на отыскание собственных значений и собственных функций, как и краевая задача (2.42). То есть нахождение решений в форме нормальных волн и для смешанной задачи (2.36), и для начально–краевой задачи (2.37), (2.38) сводится, в принципе, к разрешению одной и той же задачи — задачи (2.42) на отыскание собственных значений и собственных функций.

Прежде, чем двигаться далее в конструировании анонсированного выше аналитического примера, уместно вспомнить о достаточных условиях линейной устойчивости, которые ранее были обнаружены Релеем и Фьортофтом методом интегральных соотношений в ходе изучения краевой задачи (IV.1.25), оказывающейся идентичной задаче (2.42) на отыскание собственных значений и собственных функций, если $\gamma=0$ [52, 54], а также о теореме Сквайра, которая гласит, что в пространственном плоско–параллельном течении несжимаемой жидкости при наличии неустойчивости для каждой растущей трёхмерной нормальной волны существует ещё более быстро нарастающая двухмерная [185, 209].

Повторяя рассуждения Релея и Фьортофта, обыкновенное дифференциальное уравнение (2.42) второго порядка сначала нужно умножить на комплексно–сопряжённую функцию h^*, после чего отделить в нём друг от друга мнимую и вещественную части:

$$\frac{\sigma_1 \kappa}{\sigma_1^2 + (\sigma_2 + \kappa U_1)^2} \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} |h|^2 = \\ = \operatorname{Im}\left[\frac{d}{dx_2}\left(h^* \frac{dh}{dx_2}\right)\right] \tag{IV.2.43}$$

$$\left|\frac{dh}{dx_2}\right|^2 + \left(\kappa^2 + \gamma^2\right)|h|^2 + \frac{\kappa\left(\sigma_2 + \kappa U_1\right)}{\sigma_1^2 + (\sigma_2 + \kappa U_1)^2} \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} |h|^2 = \operatorname{Re}\left[\frac{d}{dx_2}\left(h^* \frac{dh}{dx_2}\right)\right]$$

Интегрирование соотношений (2.43) по поперечному сечению зазора между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями и учёт краевых условий (2.42) приводят к равенствам вида

$$\sigma_1 \kappa \int\limits_0^H \left[\frac{|h|^2}{\sigma_1^2 + (\sigma_2 + \kappa U_1)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{d^2 U_1}{dx_2^2}\right] dx_2 = 0 \tag{IV.2.44}$$

$$\kappa \int\limits_0^H \frac{\sigma_2 + \kappa U_1}{\sigma_1^2 + (\sigma_2 + \kappa U_1)^2} \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} |h|^2 dx_2 = -\int\limits_0^H \left[\left|\frac{dh}{dx_2}\right|^2 + \left(\kappa^2 + \gamma^2\right)|h|^2\right] dx_2$$

Согласно результатам Релея и Фьортофта, из настоящих равенств вытекает, что экспоненциально растущие решения (2.39) ($\sigma_1 > 0$) смешанной задачи (2.37), (2.38) смогут превратить их в тождества тогда и только тогда, когда производная d^2U_1/dx_2^2 меняет знак в пределах прослойки τ между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными неограниченными поверхностями, и, одновременно, хотя бы в одной точке последней удовлетворяется неравенство

$$U_1 \frac{d^2U_1}{dx_2^2} < 0 \qquad \text{(IV.2.45)}$$

Принимая во внимание данные обстоятельства и теорему Сквайра, можно сформулировать обобщённую теорему Релея о том, что достаточным условием устойчивости стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в зазоре между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями (внешние массовые силы не действуют) по отношению к малым пространственным возмущениям в виде нормальных волн является отсутствие точек перегиба в профиле скорости $U_1(x_2)$ (2.35) [52], а также обобщённую же теорему Фьортофта о том, что, наряду с неизменностью знака величины d^2U_1/dx_2^2, подобное условие устойчивости представляет собой требование наличия постоянной K, гарантирующей справедливость соотношения

$$(U_1 - K)\,\frac{d^2U_1}{dx_2^2} \geq 0 \qquad \text{(IV.2.46)}$$

всюду внутри прослойки τ между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными неограниченными поверхностями [54].

Однако, на самом деле, для знакопеременности производной d^2U_1/dx_2^2 и неравенства (2.45) напрашивается совершенно иная трактовка в сопоставлении с той, что была предложена Релеем и Фьортофтом.

Действительно, если сравнить друг с другом соотношения (2.43) и (2.44), то несложно удостовериться, что первым, в отличие от вторых, для выполнения на экспоненциально нарастающих решениях (2.39) начально–краевой задачи (2.37), (2.38) не надо каких бы то ни было добавочных ограничений на профиль скорости $U_1(x_2)$. Это свидетельствует о том, что в процессе интегрирования уравнений (2.43) по поперечному сечению зазора между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями теряется эквивалентность преобразований за счёт зануления части слагаемых данных уравнений в силу граничных условий (2.42). Иными словами, соотношения (2.44) служат прямым следствием уравнений (2.43), а вот обратное неверно — уравнения (2.43) прямым следствием соотношений (2.44) не являются. Значит, требование изменения величиной d^2U_1/dx_2^2 своего знака в пределах прослойки τ между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями и неравенство (2.45) суть условия, которые необходимы соотношениям (2.44) для обращения в тождества на экспоненциально растущих решениях (2.39) смешанной задачи (2.37), (2.38), но никоим образом не уравнениям (2.43).

Наконец, нетрудно убедиться, что отсутствие точек перегиба в профиле скорости $U_1(x_2)$ и истинность неравенства (2.46) не запрещают уравнению (2.42) обладать колеблющимися, а краевой задаче (2.42) — нетривиальными решениями [199]. Следовательно, смешанная задача (2.37), (2.38) может иметь экспоненциально нарастающие решения (2.39) и в том случае, когда справедливы достаточные условия Релея и Фьортофта линейной устойчивости точных стационарных решений (2.35) начально–краевой задачи (2.34), потому что эти растущие решения не подпадают под действие обобщённых теорем Релея и Фьортофта об устойчивости [4, 19, 52, 54, 185, 209].

Итак, теперь, после прояснения смысла результатов Релея и Фьортофта, можно вновь вернуться к построению иллюстративного аналитического примера установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений (2.17), (2.35) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными неограниченными поверхностями (при отсутствии внешних массовых сил) и наложенных на данные течения малых трёхмерных возмущений (2.37)–(2.39), (2.42), развивающихся во времени в соответствии со сконструированной априорной экспоненциальной оценкой снизу (2.20), причём вне зависимости от того, верны достаточные условия линейной устойчивости Релея или Фьортофта либо нет.

Ниже исследуется подкласс точных стационарных решений (2.35) смешанной задачи (2.34) в форме [145]

$$u_1 = U_1\left(x_2\right) \equiv a - b\mathrm{e}^{cx_2},\ u_2 = u_3 \equiv 0,\ p \equiv \mathrm{const} \qquad (\mathrm{IV}.2.47)$$

где a, b и c — произвольные вещественные постоянные величины.

Посредством замен независимой переменной $\eta \equiv -i\kappa b\mathrm{e}^{cx_2}$ и искомой функции $w(\eta) \equiv h/\eta^l$ ($l \equiv \pm\sqrt{\kappa^2+\gamma^2}/c$), а также с учётом соотношений (2.47) обыкновенному дифференциальному уравнению (2.42) может быть сообщён вид:

$$\eta\left[\eta+\sigma+i\kappa a\right]\frac{d^2w}{d\eta^2} + (2l+1)\left[\eta+\sigma+i\kappa a\right]\frac{dw}{d\eta} - w = 0 \qquad (\mathrm{IV}.2.48)$$

Если в соотношении (2.48) осуществить ещё одну замену независимой переменной $z \equiv -\eta/(\sigma + i\kappa a)$, то легко удостовериться, что оно предстанет в форме гипергеометрического уравнения Гаусса [200]

$$z(z-1)\frac{d^2w}{dz^2} + (2l+1)(z-1)\frac{dw}{dz} - w = 0 \qquad \text{(IV.2.49)}$$

с определяющими параметрами α_0, β_0 и γ_0, которые описываются соотношениями

$$\alpha_0 + \beta_0 + 1 = \gamma_0 \qquad \text{(IV.2.50)}$$

$$\alpha_0\beta_0 = -1; \ \gamma_0 = 1 \pm \frac{2}{c}\sqrt{\kappa^2 + \gamma^2}$$

$$\alpha_0 = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\kappa^2 + \gamma^2} \mp \sqrt{\frac{\kappa^2 + \gamma^2}{c^2} + 1}, \ \beta_0 = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\kappa^2 + \gamma^2} \pm \sqrt{\frac{\kappa^2 + \gamma^2}{c^2} + 1}$$

Общее решение уравнения (2.49), (2.50) можно выписать в виде

$$w(z) = C_3 w_1(z) + C_4 w_2(z) \qquad \text{(IV.2.51)}$$

$$w_1(z) \equiv F\left(\alpha_0, \ \beta_0, \ \gamma_0; \ z\right)$$

$$w_2(z) \equiv z^{1-\gamma_0} F\left(\alpha_0 - \gamma_0 + 1, \ \beta_0 - \gamma_0 + 1, \ 2 - \gamma_0; \ z\right)$$

при условии, что γ_0 — нецелое число (здесь C_3, C_4 — некие постоянные; $F\left(\alpha_0, \ \beta_0, \ \gamma_0; \ z\right)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, служащая для $|z| < 1$ суммой гипергеометрического ряда Гаусса

$$F\left(\alpha_0, \ \beta_0, \ \gamma_0; \ z\right) \equiv 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\alpha_0\right)_m \left(\beta_0\right)_m}{\left(\gamma_0\right)_m} \frac{z^m}{m!}$$

$$\left(\alpha_0\right)_m \equiv \alpha_0 \left(\alpha_0 + 1\right) \ldots \left(\alpha_0 + m - 1\right), \ \gamma_0 \neq 0, \ -1, \ -2, \ \ldots$$

а для $|z| \geq 1$ — его аналитическим продолжением [207]).

Тогда, когда $\gamma_0 = 0, -1, -2, \ldots$, частное решение $w_1(z)$ соотношения (2.49), (2.50) вырождается, так что общее решение $w(z)$ (2.51) примет форму

$$w(z) = w_2(z)\left[C_5 + C_6 \int \mathrm{e}^{-\int \frac{2l+1}{z}dz} w_2^{-2}(z)dz\right]$$

где C_5 и C_6 — произвольные постоянные величины. Если же $\gamma_0 =$ $= 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, то, напротив, вырождается частное решение $w_2(z)$ уравнения (2.49), (2.50), поэтому общее решение $w(z)$ будет вычисляться с помощью связи

$$w(z) = w_1(z)\left[C_7 + C_8 \int \mathrm{e}^{-\int \frac{2l+1}{z}dz} w_1^{-2}(z)dz\right]$$

(здесь C_7, C_8 — некие постоянные).

Удивительно, но рассмотрение поведения общего решения $w(z)$ (2.51) соотношения (2.49), (2.50) может быть кардинально упрощено, так как функция $F\left(\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;\ z\right)$ для ряда конкретных значений параметров α_0, β_0 и γ_0 обладает замечательным свойством выражаться через полиномы Якоби и элементарные функции [200, 207]. Так, при $l = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - m\right),\ m = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots;\ \alpha_0 = -m,\ \beta_0 = \frac{1}{m},\ \gamma_0 = 1 - m + \frac{1}{m}$ частными решениями гипергеометрического уравнения Гаусса (2.49), (2.50) будут являться следующие функции:

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(\alpha_0)_n\,(\beta_0)_n}{(\gamma_0)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{IV.2.52}$$

$$w_1(z) = \frac{m!}{(\gamma_0)_m} P_m^{(\gamma_0-1,\,-1)}(1-2z)$$

$$w_1(z) = \frac{m!z^m}{(\gamma_0)_m} P_m^{(\alpha_0-\beta_0,\,-1)}\left(1 - \frac{2}{z}\right)$$

$$w_1(z) = \frac{m!(1-z)^m}{(\gamma_0)_m} P_m^{(\gamma_0-1,\,\alpha_0-\beta_0)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

где $(\beta_0)_0 \equiv 1$; $P_m^{(\gamma_0-1,\,-1)}(1-2z)$ — полином Якоби. Кроме того, в случае, когда $l = 3/4$, $\alpha_0 = -1/2$, $\beta_0 = 2$, $\gamma_0 = 5/2$, тогда частное решение соотношения (2.49), (2.50) будет представлять собой функцию вида

$$w_1(z) = \frac{3}{16z}\left[(1+3z)(1-z)\frac{\operatorname{Arth}\sqrt{z}}{\sqrt{z}} - 1 + 3z\right]$$

Для того чтобы в полном объёме достичь заявленных в данном параграфе целей, достаточно изучить первое из частных решений (2.52) при условии, что $m = 3$. В этом случае его можно записать в форме

$$w_1(z) = 1 + \frac{3z}{5} + \frac{6z^2}{5} - \frac{14z^3}{5}$$

и оно будет обращать в тождество уравнение (2.49), (2.50) вида

$$z(z-1)\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{5}{3}(z-1)\frac{dw}{dz} - w = 0 \qquad \text{(IV.2.53)}$$

Общим же решением соотношения (2.53) будет служить такая функция, как

$$w(z) = \left(1 + \frac{3z}{5} + \frac{6z^2}{5} - \frac{14z^3}{5}\right)\left[C_9 + \frac{25C_{10}}{1458}\left(\frac{3z^{2/3}\left[5+5z-28z^2\right]}{14z^3-6z^2-3z-5} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2z^{1/3}}{\sqrt{3}} + \ln\frac{1+z^{1/3}+z^{2/3}}{\left(z^{1/3}-1\right)^2}\right)\right]$$

(здесь C_9 и C_{10} — произвольные постоянные величины).

Граничные условия (2.42) будут удовлетворены, если

$$w\left(z_0\right) = w\left(z_1\right) \equiv 0;\ z_0 \equiv \frac{i\kappa b}{\sigma + i\kappa a},\ z_1 \equiv \frac{i\kappa b \mathrm{e}^{cH}}{\sigma + i\kappa a}$$

Отсюда вытекает, что тогда должно быть выполнено дисперсионное соотношение в форме

$$G(\sigma) = 0 \qquad \text{(IV.2.54)}$$

где

$$G(\sigma) \equiv \left(14z_1^3 - 6z_1^2 - 3z_1 - 5\right)\left[3z_0^{2/3}\left(28z_0^2 - 5z_0 - 5\right) + \left(14z_0^3 - 6z_0^2 - \right.\right.$$

$$
-3z_0-5)\left(2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{1+2z_0^{1/3}}{\sqrt{3}}-\ln\frac{1+z_0^{1/3}+z_0^{2/3}}{\left(z_0^{1/3}-1\right)^2}\right)\Bigg]-\big(14z_0^3-
$$

$$
-6z_0^2-3z_0-5\big)\Big[3z_1^{2/3}\left(28z_1^2-5z_1-5\right)+\left(14z_1^3-6z_1^2-3z_1-5\right)\times
$$

$$
\times\left(2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{1+2z_1^{1/3}}{\sqrt{3}}-\ln\frac{1+z_1^{1/3}+z_1^{2/3}}{\left(z_1^{1/3}-1\right)^2}\right)\Bigg]
$$

(все фигурирующие здесь функции комплексного переменного $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ понимаются в смысле своих главных ветвей).

К сожалению, данное дисперсионное соотношение слишком сложно, чтобы его корни могли быть найдены в явном виде аналитическими методами, поэтому приходится графически исследовать вопрос о том, имеет ли соотношение (2.54) корни, которые отвечают экспоненциально нарастающим малым пространственным возмущениям (2.37), (2.38) в форме нормальных волн (2.39), (2.42).

Суть графического рассмотрения дисперсионного соотношения (2.54) на обладание им корнями, соответствующими экспоненциально растущим малым трёхмерным возмущениям (2.37), (2.38) в виде нормальных волн (2.39), (2.42), заключается в том, что сначала оно переписывается в форме $G(\sigma) = \mathrm{Re}G(\sigma) + i\,\mathrm{Im}G(\sigma) = 0$. Затем на комплексной плоскости $(\sigma_1,\, \sigma_2)$ рисуются кривые $\mathrm{Re}G(\sigma) = 0$ и $\mathrm{Im}G(\sigma) = 0$. Если в результате у данных кривых обнаружатся точки пересечения с координатами $(\sigma_1 > 0,\, \sigma_2)$, то они–то и будут сигнализировать, что соотношение (2.54) имеет корни, которые отвечают экспоненциально нарастающим малым пространственным возмущениям (2.37), (2.38) в виде нормальных волн (2.39), (2.42). При этом координаты $(\sigma_1,\ \sigma_2)$ точек пересечения изучаемых кривых $\mathrm{Re}G(\sigma) = 0$ и $\mathrm{Im}G(\sigma) = 0$ в числовом выражении находятся с применением координатной сетки путём соответствующего её масштабирования.

Далее приводятся итоги графического исследования дисперсионного соотношения (2.54) на обладание им корнями, отвечающими экспоненциально растущим малым трёхмерным возмущениям (2.37), (2.38) в форме нормальных волн (2.39), (2.42), для трёх характерных наборов определяющих параметров a, b, c, H, κ, γ и l вида

1) $a = 30\sqrt{2},\ b = 1,\ c = 3,\ H = 1,\ \kappa = 2\sqrt{2},\ \gamma = 2\sqrt{2},\ l = -\,4/3:$

$$\sigma_1 \approx 0,015,\ \sigma_2 \approx -\,120 \tag{IV.2.55}$$

2) $a = 2\sqrt{2},\ b = 1,\ c = 3,\ H = 1,\ \kappa = 2\sqrt{2},\ \gamma = 2\sqrt{2},\ l = -\,4/3:$

$$\sigma_1 \approx 0,015,\ \sigma_2 \approx -\,8 \tag{IV.2.56}$$

3) $a = -\sqrt{2},\ b = 1,\ c = 3,\ H = 1,\ \kappa = 2\sqrt{2},\ \gamma = 2\sqrt{2},\ l = -\,4/3:$

$$\sigma_1 \approx 0,015,\ \sigma_2 \approx 4 \tag{IV.2.57}$$

Важно, что настоящие корни соотношения (2.54) не совпадают ни с одной из особых точек присутствующих в нём функций комплексного переменного $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$.

Анализируя данные (2.55)–(2.57), стоит, прежде всего, отметить тот факт, что профили скорости $U_1\,(x_2)$ (2.47), (2.55)–(2.57) установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений (2.17), (2.35) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в прослойке между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями (в отсутствие внешних массовых сил) не имеют точек перегиба. Следовательно, обобщённая теорема Релея [52, 209] об устойчивости истинна для этих течений во всех трёх случаях.

Что же касается обобщённой теоремы Фьортофта [54, 209] об устойчивости, то, с одной стороны, неравенство (2.45) справедливо для профиля скорости $U_1(x_2)$ (2.47) с параметрами a, b и c (2.55) повсюду внутри зазора τ между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными неограниченными поверхностями, для профиля скорости $U_1(x_2)$ (2.47) с параметрами a, b и c (2.56) — в части данного зазора, однако для профиля скорости $U_1(x_2)$ (2.47) с параметрами a, b и c (2.57) это неравенство, наоборот, ложно везде в пределах прослойки τ между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями. С другой же стороны, для профилей скорости $U_1(x_2)$ (2.47), (2.55)–(2.57) всегда можно подобрать постоянную K таким образом, чтобы было верно соотношение (2.46). Исходя из вышеизложенного, может быть выдвинуто утверждение, что, согласно обобщённой теореме Фьортофта, стационарные плоско–параллельные сдвиговые течения (2.17), (2.35), (2.47), (2.55)–(2.57) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными неограниченными поверхностями (без внешних массовых сил) также должны быть устойчивыми относительно малых пространственных возмущений (2.37), (2.38) в форме нормальных волн (2.39), (2.42).

Тем не менее, результаты (2.55)–(2.57) чётко говорят о том, что, вопреки истинности обобщённых теорем Релея и Фьортофта [4, 19, 52, 54, 185, 209] об устойчивости, установившиеся плоско–параллельные сдвиговые течения (2.17), (2.35), (2.47), (2.55)–(2.57) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в прослойке между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями (при отсутствии внешних массовых сил) всё–таки неустойчивы по отношению к малым трёхмерным возмущениям (2.37), (2.38) в виде нормальных волн (2.39), (2.42), (2.55)–(2.57).

Действительно, графически обнаружено, что всякому из стационарных профилей скорости $U_1(x_2)$ (2.47), (2.55)–(2.57) соответствует, по крайней мере, одно экспоненциально нарастающее малое пространственное возмущение (2.37), (2.38) в форме нормальных волн (2.39), (2.42), (2.55)–(2.57). Естественно, данные возмущения удовлетворяют неравенствам (2.19), (2.20) и счётному набору условий (2.25).

Отсюда как раз и вытекает, что действие обобщённых теорем Релея и Фьортофта об устойчивости на самом деле не распространяется на малые трёхмерные возмущения (2.37), (2.38) в виде нормальных волн (2.39), (2.42), (2.55)–(2.57). Следовательно, если условия Релея и Фьортофта линейной устойчивости установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений (2.17), (2.35), (2.47), (2.55)–(2.57) и выполнены для неких малых пространственных возмущений (2.37), (2.38), то уж никак не для возмущений (2.37)–(2.39), (2.42), (2.55)–(2.57), что однозначно и указывает на необходимый и достаточный характер этих условий устойчивости.

Таким образом, результаты данного параграфа последней главы курса лекций ничуть не противоречат известным утверждениям Релея и Фьортофта [4, 19, 52, 54, 185, 209] об устойчивости, а только уточняют и дополняют их область использования.

В итоге, построение иллюстративного аналитического примера стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений (2.17), (2.35) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными неограниченными поверхностями в отсутствие внешних массовых сил и наложенных на эти течения малых трёхмерных возмущений (2.37)–(2.39), (2.42), которые эволюционируют со временем в согласии со сконструированной априорной экспоненциальной оценкой снизу (2.20) независимо от того, справедливы условия линейной устойчивости Релея и Фьортофта или нет, завершено.

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЛАВЫ IV

Четвёртая глава данного курса лекций нацелена на рассмотрение линейных задач устойчивости установившихся плоско–параллельных сдвиговых (1.5) и любых допустимых пространственных (2.4)–(2.6) течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости при отсутствии внешних массовых сил.

В первом параграфе этой главы изучается линейная задача устойчивости стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений (1.5) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в прослойке между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными пластинами в отсутствие внешних массовых сил. Прямым методом Ляпунова установлено, что данные течения абсолютно неустойчивы относительно малых плоских возмущений (1.6), (1.11), (1.12), (1.19), а вот состояния равновесия (покоя) (1.9) этой жидкости — напротив, абсолютно устойчивы. Таким образом, продемонстрировано, что условия устойчивости Релея [52], Фьортофта [54, 203] и Арнольда [55] стационарных плоско–параллельных сдвиговых течений (1.5) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в зазоре между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными неограниченными поверхностями при отсутствии внешних массовых сил по отношению к малым плоским возмущениям (1.6), (1.11), (1.12), (1.20)–(1.27) представляют собой и достаточные, и необходимые. Выведены достаточные условия практической линейной неустойчивости (см. неравенства из счётного набора условий (1.17)) и построена априорная нижняя оценка (1.18), свидетельствующая о возможном (как минимум, экспоненциальном) росте во времени исследуемых малых возмущений тогда, когда данные условия устойчивости не действуют. Сконструирован иллюстративный аналитический пример установившихся плоско–параллельных сдвиговых течений (1.5), (1.28), (1.36)–(1.38) и наложенных на них малых плоских возмущений (1.11), (1.12), (1.19)–(1.24), (1.34)–(1.38), которые нарастают со временем в соответствии с построенной априорной экспоненциальной оценкой снизу.

Во втором параграфе настоящей главы рассматривается линейная задача устойчивости стационарных трёхмерных течений (2.4)–(2.6) однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости, целиком наполняющей некий объём с покоящимися твёрдыми непроницаемыми стенками, в отсутствие внешних массовых сил. Прямым же методом Ляпунова показано, что эти течения абсолютно неустойчивы относительно малых пространственных возмущений (2.8), (2.9), в то время как состояния равновесия (покоя) данной жидкости — наоборот, абсолютно устойчивы. Кроме того, получены достаточные условия практической линейной неустойчивости (см. два первых неравенства в счётных наборах условий (2.25), (2.28), (2.32)) и сконструированы априорные нижние оценки (2.20), (2.29), (2.33), которые говорят о том, что изучаемые возмущения (2.8), (2.9), (2.25), (2.28), (2.32) могут расти со временем не медленнее, чем экспоненциально. Наконец, построен иллюстративный аналитический пример установившихся трёхмерных сдвиговых течений (2.17), (2.35), (2.47) однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в прослойке между двумя неподвижными непроницаемыми твёрдыми параллельными плоскостями без внешних массовых сил и наложенных на эти течения малых пространственных возмущений (2.37), (2.38) в форме нормальных волн (2.39), (2.42), (2.55)–(2.57), развивающихся во времени согласно сконструированной априорной экспоненциальной оценке снизу (2.20) вне зависимости от того, верны условия линейной устойчивости Релея [52, 209] и Фьортофта [54, 209] либо ложны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в данном курсе лекций продемонстрированы как усовершенствованные известные, так и оригинальные способы построения функционалов Ляпунова, которые обладают свойством нарастать со временем в силу тех или иных начально–краевых задач, чьи решения описывают эволюцию малых возмущений исследуемых состояний равновесия (покоя) либо стационарных течений жидкостей и газов.

Содержание этих способов конструирования растущих во времени функционалов Ляпунова заключается в построении априорных нижних (в отдельных случаях — двусторонних) экспоненциальных оценок и доказательстве существования начальных данных для нарастающих со временем малых возмущений.

Это позволяет применять настоящие способы конструирования растущих во времени функционалов Ляпунова для того, чтобы алгоритмически или показывать абсолютную неустойчивость, или выводить достаточные условия неустойчивости, или обращать достаточные условия устойчивости рассматриваемых состояний равновесия (покоя) либо установившихся течений жидкостей и газов по отношению к малым возмущениям в процессе изучения как можно более широкого круга линейных задач теории гидродинамической устойчивости.

В частности, в данном курсе лекций с помощью или развитых, или разработанных способов построения нарастающих со временем функционалов Ляпунова автором впервые были получены следующие выносимые на суд его слушателей основные результаты:

1) найдены необходимые и достаточные условия линейной устойчивости стационарных вращательно–симметричных и винтовых течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в магнитном поле относительно малых вращательно–симметричных же и винтовых возмущений соответственно; для неустойчивых установившихся МГД течений выведены достаточные условия практической линейной неустойчивости и сконструированы априорные экспоненциальные оценки роста исследуемых малых возмущений как сверху, так и снизу;

2) либо продемонстрирована абсолютная линейная неустойчивость, либо обнаружены достаточные условия линейной неустойчивости, либо обращены известные достаточные условия линейной устойчивости, либо найдены необходимые и достаточные условия линейной устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых струйных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой бесконечной по проводимости жидкости со свободной границей или в азимутальном, или в полоидальном магнитном полях, а также установившихся плоско–параллельных сдвиговых и произвольных трёхмерных течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости при отсутствии внешних массовых сил по отношению к соответствующим рассматриваемым малым возмущениям; получены достаточные условия практической линейной неустойчивости и построены как верхние, так и нижние априорные экспоненциальные оценки нарастания малых возмущений неустойчивых стационарных течений.

Вместе с тем, перечисленные выше результаты, конечно же, ни в коей мере не исчерпывают всех возможностей способов конструирования растущих во времени функционалов Ляпунова, модифицированных либо созданных в настоящем курсе лекций, в приложении к линейным задачам теории гидродинамической устойчивости. Так что описание области использования этих способов построения нарастающих со временем функционалов Ляпунова в ходе изучения самых разнообразных линейных задач устойчивости состояний равновесия (покоя) и установившихся течений жидкостей и газов, несомненно, составляет предмет дальнейших кропотливых исследований.

ВЫВОДЫ

1. Универсальность способа получения априорных экспоненциальных оценок снизу (II.2.42), (III.1.53), (III.3.62), (IV.1.18), (IV.2.20), (IV.2.29) и (IV.2.33) роста рассматриваемых малых возмущений свидетельствует о том, что данный способ допускает распространение на любые другие бесконечномерные математические модели естествознания (физики, химии, биологии и т. п.), лишь бы они были сконструированы на базе законов сохранения массы, импульса и энергии.

2. В свою очередь, общность выведенных дифференциальных неравенств (II.2.40), (III.1.52), (III.3.60), (IV.1.16), (IV.2.19), (IV.2.27) и (IV.2.31) говорит о том, что у интеграла M (II.2.38), (III.1.31), (IV.1.14), (IV.2.14) должен быть нелинейный аналог. Обнаружение же нелинейного аналога функционала M, бесспорно, сообщит современной математической теории устойчивости принципиально новое качество, когда можно будет находить точные аналитические результаты о нелинейной устойчивости произвольных решений каких угодно бесконечномерных математических моделей естествознания.

3. Из предыдущего пункта вытекает, что способ построения нелинейных аналогов дифференциальных неравенств (II.2.40), (III.1.52), (III.3.60), (IV.1.16), (IV.2.19), (IV.2.27) и (IV.2.31) для нелинейного же аналога функционала M (II.2.38), (III.1.31), (IV.1.14), (IV.2.14) и их интегрирования послужит одновременно и методикой отбора среди множества бесконечномерных математических моделей наиболее оптимальных с точки зрения адекватности математического моделирова-

ния изучаемым природным явлениям. Адекватное же математическое моделирование явлений природы — это, вне всякого сомнения, ключ к пониманию их механизмов, а значит — к управлению данными природными явлениями и применению их для удовлетворения практических нужд человеческой цивилизации.

4. Наконец, касательно достаточных условий (II.2.41), (III.1.58), (III.3.61), (IV.1.17), (IV.2.25), (IV.2.28) и (IV.2.32) практической линейной неустойчивости, имеет смысл особо подчеркнуть их конструктивный характер в плане выполнения численных расчётов и проведения физических экспериментов. Это предоставляет уникальную возможность для наискорейшего внедрения данных условий неустойчивости в самые разные области науки и техники с целью разрешения проблемы осознанного управления теми или иными технологическими процессами. Так, поскольку в первых трёх главах настоящего курса лекций речь идёт о вопросах МГД устойчивости состояний равновесия (покоя) либо стационарных течений жидкостей и газов, ярким примером использования достаточных условий (II.2.41), (III.1.58), (III.3.61), (IV.1.17), (IV.2.25), (IV.2.28) и (IV.2.32) практической линейной неустойчивости может стать одна из наиболее животрепещущих научно–технологических проблем наших дней — проблема осуществления управляемого термоядерного синтеза [20, 76, 77, 118, 186, 187]. Действительно, эти условия неустойчивости можно применять на всех стадиях разработки и использования энергетических установок для термоядерных электростанций (от начала проектирования вплоть до промышленной эксплуатации включительно) с тем, чтобы обеспечить

их эффективную и бесперебойную работу с надёжным управлением в режиме реального времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Замечания о поведении течений трёхмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скорости // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 255–262.
2. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, Сиб. отд–ние, 1977. 366 с.
3. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
4. *Дикий Л. А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 108 с.
5. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд–во иностр. лит–ры, 1958. 194 с.
6. *Ляпунов А. М.* Задача минимума в одном вопросе об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости // Ляпунов А. М. Собр. соч. Т. 3. М.: Изд–во АН СССР, 1959. С. 273–360.
7. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости // Ляпунов А. М. Собр. соч. Т. 3. М.: Изд–во АН СССР, 1959. С. 5–113.
8. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова в анализе сложных систем с распределёнными параметрами (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1973. № 1. С. 5–22.
9. *Моисеев Н. Д.* Очерки развития теории устойчивости. М., Л.: ГИТТЛ, 1949. 636 с.
10. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, со-

держащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.

11. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределёнными параметрами. Новосибирск: Наука, Сиб. отд–ние, 1987. 231 с.
12. *Шестаков А. А.* Обобщённый прямой метод Ляпунова для систем с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1990. 316 с.
13. *Юдович В. И.* О потере гладкости решений уравнений Эйлера со временем // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд–ние, Ин–т гидродинамики. 1977. Вып. 16. С. 71–78.
14. *Карачаров К. А., Пилютик А. Г.* Введение в техническую теорию устойчивости движения. М.: Гос. изд–во физ.–мат. лит–ры, 1962. 244 с.
15. *Ла–Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
16. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
17. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1988. 736 с. Т. 6: Гидродинамика.
18. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon press, 1961. 652 p.
19. *Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability. Cambridge: Cambridge univ. press, 1981. 525 p.
20. *Бейтман Г.* МГД–неустойчивости. М.: Энергоатомиздат, 1982. 200 с.
21. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.

22. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М., Л.: ГИТТЛ, 1950. 471 с.

23. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л., М.: ОНТИ, Гл. ред. общетехн. лит., 1936. 375 с.

24. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.

25. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / Под ред. Мышкиса А. Д. Киев: Наук. думка, 1992. 592 с.

26. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

27. *Румянцев В. В.* Об устойчивости равновесия твёрдого тела, имеющего полости, наполненные жидкостью // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 2. С. 291–294.

28. *Румянцев В. В.* Методы Ляпунова в исследовании устойчивости движения твёрдых тел с полостями, наполненными жидкостью // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 119–139.

29. *Румянцев В. В.* К теории движения твёрдых тел с полостями, наполненными жидкостью // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 51–66.

30. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости твёрдого тела с ротором и жидкостями, обладающими поверхностным натяжением // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: Изд–во ВЦ АН СССР, 1968. С. 222–249.

31. *Самсонов В. А.* О задаче минимума функционала при исследовании устойчивости движения тела с жидким наполнением // ПММ. 1967. Т. 31. № 3. С. 523–526.

32. *Самсонов В. А.* О некоторых задачах минимума в теории устойчивости движения тела с жидкостью // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: Изд–во ВЦ АН СССР, 1968. С. 250–268.
33. *Самсонов В. А.* Устойчивость и бифуркация равновесия тела с жидкостью // Науч. тр. / Ин–т механики МГУ. 1971. № 16. С. 3–54.
34. *Богоряд И. Б., Дружинин И. А. и др.* Введение в динамику сосудов с жидкостью. Томск: Изд–во Том. ун–та, 1977. 144 с.
35. Гидромеханика невесомости / В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов. М.: Наука, 1976. 504 с.
36. *Крейн С. Г., Моисеев Н. Н.* О колебаниях твёрдого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 169–174.
37. *Моисеев Н. Н.* Задача о движении твёрдого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность // Мат. сб. 1953. Т. 32 (74). № 1. С. 61–96.
38. *Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л.* Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5. № 6. С. 1071–1095.
39. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жёсткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
40. *Мышкис А. Д.* О понятии запаса устойчивости в задачах механики сплошной среды // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: Изд–во ВЦ АН СССР, 1968. С. 269–278.

41. *Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* О малых возмущениях равновесной поверхности капиллярной жидкости // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 695–702.
42. *Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
43. *Слобожанин Л. А.* Задачи устойчивости равновесия жидкости, возникающие в вопросах космической технологии // Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. М.: Наука, 1982. С. 9–24.
44. *Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Характеристический параметр устойчивости осесимметричной равновесной поверхности капиллярной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 4. С. 74–84.
45. *Тюпцов А. Д.* Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 2. С. 78–85.
46. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединённых масс жидкости в подвижных полостях. Киев: Наук. думка, 1969. 250 с.
47. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 310 с.
48. *Черноусько Ф. Л.* Вращательные движения твёрдого тела с полостью, заполненной жидкостью // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 416–432.
49. *Черноусько Ф. Л.* Задача о равновесии жидкости, подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения // Введение в

динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: Изд–во ВЦ АН СССР, 1968. С. 69–97.

50. *Черноусько Ф. Л.* Движение твёрдого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: Изд–во ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.

51. Low–gravity fluid mechanics. Mathematical theory of capillary phenomena / V. G. Babsky, N. D. Kopachevsky, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, A. D. Typtsov. Berlin etc.: Springer–Verlag, 1987. 583 p.

52. *Rayleigh J. W. S.* On the stability, or instability, of certain fluid motions // Scientific papers. Vol. 1. Cambridge univ. press, 1880. P. 474–487.

53. *Rayleigh J. W. S.* On the dynamics of revolving fluids // Scientific papers. Vol. 6. Cambridge univ. press, 1916. P. 447–453.

54. *Fjørtoft R.* Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geofys. publ. Norske vid.–akad. Oslo. 1950. Vol. 17. No. 6. P. 1–52.

55. *Арнольд В. И.* Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162. № 5. С. 975–978.

56. *Арнольд В. И.* Вариационный принцип для трёхмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 846–851.

57. *Арнольд В. И.* Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 1966. № 5 (54). С. 3–5.

58. *Дикий Л. А.* К нелинейной теории гидродинамической устойчивости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 852–855.

59. *Седенко В. И., Юдович В. И.* Устойчивость стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 6. С. 1049–1055.

60. *Гринфельд М. А.* Устойчивость плоских криволинейных течений идеальной баротропной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 5. С. 19–25.

61. *Moffatt H. K.* Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrary complex topology. Pt. 1. Fundamentals // J. fluid mech. 1985. Vol. 159. P. 359–378.

62. *Moffatt H. K.* Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrary complex topology. Pt. 2. Stability considerations // J. fluid mech. 1986. Vol. 166. P. 359–378.

63. *Владимиров В. А.* Аналогия эффектов стратификации и вращения // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, Сиб. отд–ние, 1985. С. 270–312.

64. *Владимиров В. А.* Вариационный принцип и априорная оценка устойчивости для состояний покоя непрерывно стратифицированной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд–ние, Ин–т гидродинамики. 1985. Вып. 72. С. 12–18.

65. *Владимиров В. А.* Аналоги теоремы Лагранжа в гидродинамике завихренной и стратифицированной жидкостей // ПММ. 1986. Т. 50. № 5. С. 727–733.

66. *Владимиров В. А.* Условия нелинейной устойчивости течений

идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1986. № 3. С. 70–78.

67. *Владимиров В. А.* О приложениях законов сохранения к получению условий устойчивости стационарных течений идеальной жидкости // ПМТФ. 1987. № 3. С. 36–45.

68. *Владимиров В. А.* Об интегралах плоских движений несжимаемой неоднородной по плотности жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 16–20.

69. *Владимиров В. А.* Аналогия эффектов плотностной стратификации и вращения и её использование в теории устойчивости // Методы гидрофизических исследований: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР, Горький. 1987. С. 76–90.

70. *Владимиров В. А.* Условия устойчивости течений идеальной жидкости с разрывами вихря // ПМТФ. 1988. № 1. С. 83–91.

71. *Владимиров В. А.* Вариационные подходы в теории устойчивости бароклинной атмосферы // Изв. АН СССР. ФАО. 1989. Т. 25. № 4. С. 348–355.

72. *Abarbanel H. D. I., Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S.* Nonlinear stability analysis of stratified fluid equilibria // Phil. trans. Roy. soc. London. 1986. Vol. A318. No. 1543. P. 349–409.

73. *Holm D. D., Long B.* Lyapunov stability of ideal stratified fluid equilibria in hydrostatic balance // Nonlinearity. 1989. Vol. 2. No. 1. P. 23–35.

74. *Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S.* Hamilton structure and Lyapunov stability for ideal continuum dynamics. Montreal: Montreal univ. press, 1986. 208 p.

75. *Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S., Weinstein A.* Nonlinear stability conditions and a priory estimates for barotropic hydrodynamics // Phys. letters. 1983. Vol. A98. No. 1 & 2. P. 15–21.
76. *Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Physics reports. 1985. Vol. 123. No. 1 & 2. P. 1–116.
77. *Гордин В. А., Петвиашвили В. И.* Устойчивость по Ляпунову МГД–равновесия плазмы с ненулевым давлением // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. Вып. 5. С. 1711–1722.
78. *Гордин В. А., Петвиашвили В. И.* Устойчивые солитонные решения в резонансном зональном потоке // Изв. АН СССР. ФАО. 1984. Т. 20. № 7. С. 645–648.
79. *Курганский М. В.* О неустойчивости сдвиговых течений стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 5. С. 467–474.
80. *Mc Intyre M. E., Shepherd T. G.* An exact local conservation theorem for finite–amplitude disturbances to non–parallel shear flows, with remarks on hamiltonian structure and Arnold's stability theorems // J. fluid mech. 1987. Vol. 181. P. 527–565.
81. *Petroni R., Vulpani A.* Nonlinear stability of steady constant–vorticity solutions of the plane Euler equation // Nuovo cimento. 1983. Vol. B78. No. 1. P. 1–8.
82. *Pierini S., Salusti E.* Nonlinear hydrodynamic stability of some simple rotational flows // Nuovo cimento. 1982. Vol. B71. No. 2. P. 282–294.
83. *Shepherd T. G.* Rigorous bounds on the nonlinear saturation of

instabilities to parallel shear flows // J. fluid mech. 1988. Vol. 196. P. 291–322.

84. *Wan Y. H., Pulvirenti M.* Non–linear stability of circular vortex pathes // Commun. math. phys. 1985. Vol. 99. No. 3. P. 435–450.

85. *Ильин К. И.* К устойчивости бароклинного вихря // Изв. АН СССР. ФАО. 1991. Т. 27. № 5. С. 584–588.

86. *Rouchon P.* On the Arnol'd stability criterion for steady–state flows of an ideal fluid // Eur. j. mech., b/fluids. 1991. Vol. 10. P. 651–661.

87. *Cho H.–R., Shepherd T. G., Vladimirov V. A.* Application of direct Liapunov method to the problem of symmetric stability in the atmosphere // J. atmospheric sci. 1993. Vol. 50. No. 6. P. 822–836.

88. *Misiolek G.* Stability of flows of ideal fluids and the geometry of the group of diffeomorphisms // Indiana univ. math. j. 1993. Vol. 42. No. 1. P. 215–235.

89. *Губарев Ю. Г.* К аналогии между уравнениями Бенни и уравнениями Власова–Пуассона // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН, Сиб. отд–ние, Ин–т гидродинамики. 1995. Вып. 110. Акустика неоднородных сред. С. 78–90.

90. *Владимиров В. А., Губарев Ю. Г.* Условия нелинейной устойчивости плоских и винтовых МГД течений // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 442–450.

91. *Vladimirov V. A., Moffatt H. K.* On general transformations and variational principles for the magnetohydrodynamics of ideal fluids. Pt. I. Fundamental principles // J. fluid mech. 1995. Vol. 283. P. 125–139.

92. *Friedlander S., Vishik M.* On stability and instability criteria for magnetohydrodynamics // Chaos. 1995. Vol. 5. No. 2. P. 416–423.
93. *Vladimirov V. A., Moffatt H. K., Ilin K. I.* On general transformations and variational principles for the magnetohydrodynamics of ideal fluids. Pt. II. Stability criteria for two–dimensional flows // J. fluid mech. 1996. Vol. 329. P. 187–205.
94. *Isichenko M. B.* Nonlinear hydrodynamic stability // Phys. review letters. 1998. Vol. 80. No. 5. P. 972–975.
95. *Vladimirov V. A., Moffatt H. K., Ilin K. I.* On general transformations and variational principles for the magnetohydrodynamics of ideal fluids. Pt. III. Stability criteria for axisymmetric flows // J. plasma phys. 1997. Vol. 57. Pt. 1. P. 89–120.
96. *Vladimirov V. A., Moffatt H. K., Ilin K. I.* On general transformations and variational principles for the magnetohydrodynamics of ideal fluids. Pt. IV. Generalized isovorticity principle for three–dimensional flows // J. fluid mech. Vol. 390. P. 127–150.
97. *Кашаев Ю. К., Седенко В. И., Юдович В. И.* Устойчивость стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости с кусочно–постоянной плотностью // Изв. высш. учебн. заведений. Северо–Кавказский регион. Естественные науки. 1999. № 2 (106). С. 16–18.
98. *Swaters G. E.* Introduction to hamiltonian fluid dynamics and stability theory. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2000. 274 p. Chapman & Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics. Vol. 102.

99. *Davidson P. A.* An energy criterion for the linear stability of conservative flows // J. fluid mech. 2000. Vol. 402. P. 329–348.

100. *Yoshida Z., Ohsaki S., Ito A., Mahajan S. M.* Stability of Beltrami flows // J. math. phys. 2003. Vol. 44. No. 5. P. 2168–2178.

101. *Свиркунов П. Н.* О симметричной устойчивости стационарных осесимметричных и геострофических движений в стратифицированной сжимаемой среде // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 40–43.

102. *Xu L.* Energy criterion of nonlinear stability of a flow of the Rivlin–Ericksen fluid in porous medium // Commun. nonlinear sci. numer. simul. 2002. Vol. 7. No. 4. P. 165–173.

103. *Kaiser R., Schmitt B. J.* Bounds on the energy stability limit of plane parallel shear flows // Z. angew. math. phys. 2001. Vol. 52. No. 4. P. 573–596.

104. *Vladimirov V. A., Moffatt H. K., Davidson P. A., Ilin K. I.* On the stability of a rigid body in a magnetostatic equilibrium // Eur. j. mech., b/fluids. 2003. Vol. 22. No. 5. P. 511–523.

105. *Solonnikov V. A.* On the stability of axially symmetric equilibrium figures of a rotating viscous incompressible fluid // Algebra anal. 2004. Vol. 16. No. 2. P. 120–153.

106. *Solonnikov V. A.* On the stability of nonsymmetric equilibrium figures of rotating viscous incompressible liquid // Interfaces and free boundaries. 2004. Vol. 6. P. 461–492.

107. *Solonnikov V. A.* On instability of equilibrium figures of rotating viscous incompressible // J. math. sci. 2005. Vol. 128. P. 3241–3262.

108. *Pieters G. J. M., van Duijn C. J.* Transient growth in linearly stable

gravity–driven flow in porous media // Eur. j. mech., b/fluids. 2006. Vol. 25. No. 1. P. 83–94.

109. *Ilin K. I., Vladimirov V. A.* Asymptotic model for free surface flow of an electrically conducting fluid in a high–frequency magnetic field // J. comput. appl. math. 2006. Vol. 190. No. 1 & 2. P. 520–531.

110. *Ortega J.–P., Planas–Bielsa V., Ratiu T. S.* Asymptotic and Lyapunov stability of constrained and Poisson equilibria // J. differ. equations. 2005. Vol. 214. No. 1. P. 92–127.

111. *Kaiser R., Mulone G.* A note on nonlinear stability of plane parallel shear flows // J. math. anal. appl. 2005. Vol. 302. No. 2. P. 543–556.

112. *Burton G. R.* Global nonlinear stability for steady ideal fluid flow in bounded planar domains // Arch. ration. mech. anal. 2005. Vol. 176. No. 2. P. 149–163.

113. *Coulombel J.–F., Secchi P.* The stability of compressible vortex sheets in two space dimensions // Indiana univ. math. j. 2004. Vol. 53. No. 4. P. 941–1012.

114. *Лихоманов Н. И., Петров А. Г.* Обтекание плоскопараллельным потоком газовой полости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 20–26.

115. *Петров А. Г.* Принцип минимума и устойчивость стационарного движения полости в жидкости, обладающей поверхностным натяжением // Вестн. МГУ. Математика и механика. 1981. № 3. С. 71–75.

116. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.

117. *Ooyama K.* On the stability of the baroclinic circular vortex: a sufficient criterion for instability // J. atmospheric sci. 1966. Vol. 23. No. 1. P. 43–53.

118. *Laval G., Mercier C., Pellat R.* Necessity of the energy principles for magnetostatic stability // Nuclear fusion. 1965. Vol. 5. No. 2. P. 156–158.

119. *Владимиров В. А.* О неустойчивости равновесия неоднородной жидкости в случаях, когда потенциальная энергия не является минимальной // ПММ. 1988. Т. 58. Вып. 3. С. 415–422.

120. *Владимиров В. А.* К неустойчивости равновесия жидкостей // ПМТФ. 1989. № 2. С. 108–116.

121. *Владимиров В. А.* К неустойчивости равновесия вязкой капиллярной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд–ние, Ин–т гидродинамики. 1989. Вып. 89. С. 92–106.

122. *Владимиров В. А., Румянцев В. В.* К обращению теоремы Лагранжа для твёрдого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 608–612.

123. *Владимиров В. А., Румянцев В. В.* К обращению теоремы Лагранжа для твёрдого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 303–310.

124. *Губарев Ю. Г.* К обращению теоремы Лагранжа в магнитной гидродинамике // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 988–991.

125. *Ильин К. И.* Неустойчивость равновесий жидких кристаллов // Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб.

отд–ние, Ин–т гидродинамики. 1990. Вып. 96. С. 111–121.

126. *Vladimirov V. A.* Lyapunov's direct method in problems of fluid equilibrium instability // Arch. mech. (Arch. mech. stos.). 1991. Vol. 42. No. 4 & 5. P. 595–607.

127. *Губарев Ю. Г.* Неустойчивость самогравитирующей сжимаемой среды // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 4. С. 68–77.

128. *Vladimirov V. A., Ilin K. I.* On the energy instability of liquid crystals // Eur. j. appl. math. 1998. Vol. 9. No. 1. P. 23–36.

129. *Губарев Ю. Г., Негматов М.–Б. А.* К неустойчивости состояний покоя вязкой идеально проводящей сжимаемой среды, содержащей магнитное поле // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 644–650.

130. *Свиркунов П. Н.* Об условиях симметричной неустойчивости вихревых движений идеальной стратифицированной жидкости // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 996–1001.

131. *Калашник М. В.* Критерии симметричной и несимметричной устойчивости геострофических и градиентных течений стратифицированной вращающейся жидкости // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 3. С. 383–386.

132. *Белов С. Я. , Владимиров В. А.* Пример обращения теоремы Лагранжа в гидродинамике двуслойной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд–ние, Ин–т гидродинамики. 1988. Вып. 84. Вычислительные методы прикладной гидродинамики. С. 21–27.

133. *Vladimirov V. A., Ilin K. I.* Virial functionals in fluid dynamics // Moscow math. j. 2003. Vol. 3. No. 2. P. 691–709.

134. *Губарев Ю. Г., Ковылина С. С.* Неустойчивость состояний покоя идеальной проводящей среды в магнитном поле // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 2. С. 148–155.

135. *Губарев Ю. Г.* Прямой метод Ляпунова в магнитной гидродинамике: Учеб. пособие / Новосибирский гос. ун–т. Новосибирск, 2002. 170 с.

136. *Губарев Ю. Г.* К неустойчивости вращательно–симметричных МГД–течений // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 19–25.

137. *Губарев Ю. Г.* К неустойчивости винтовых магнитогидродинамических течений // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 150–156.

138. *Губарев Ю. Г.* Критерий линейной устойчивости установившихся винтовых магнитогидродинамических течений идеальной жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2009. Т. 16. № 3. С. 429–441.

139. *Губарев Ю. Г., Никулин В. В.* Линейная длинноволновая неустойчивость одного класса стационарных струйных течений идеальной жидкости в поле собственного электрического тока // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 64–75.

140. *Губарев Ю. Г., Никулин В. В.* Критерий линейной длинноволновой устойчивости стационарных струйных магнитогидродинамических течений идеальной жидкости // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 849–863.

141. *Губарев Ю. Г.* Устойчивость стационарных струйных сдвиговых течений идеальной жидкости со свободной границей в азимутальном магнитном поле относительно малых длинноволновых возму-

щений // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 2. С. 111–123.

142. *Gubarev Yu. G.* The development of Lyapunov's direct method in the application to new types of problems of hydrodynamic stability theory // In: Progress in nonlinear analysis research / Ed. Erik T. Hoffmann. Chapter 7. New York: Nova science publishers, inc., 2009. P. 137–181.

143. *Губарев Ю. Г.* Об устойчивости струйных магнитогидродинамических течений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. XII. № 2. С. 38–53.

144. *Губарев Ю. Г.* Достаточные условия линейной длинноволновой неустойчивости установившихся струйных сдвиговых течений идеальной жидкости со свободной границей в азимутальном магнитном поле // Труды Международного семинара «Гидродинамика высоких плотностей энергии». 11–15 августа 2003 г., Новосибирск, Россия / Новосибирск: Изд–во Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2004. С. 94–103.

145. *Gubarev Yu. G.* On stability of steady–state plane–parallel shearing flows in a homogeneous in density ideal incompressible fluid // Nonlinear analysis: hybrid systems. 2007. Vol. 1. No. 1. P. 103–118.

146. *Gubarev Yu. G.* On instability of hydrodynamical flows // AIP conference proceedings. Vol. 849. Zababakhin scientific talks – 2005: International conference on high energy density physics, Snezhinsk, Russia, 5–10 September 2005 / Eds Evgeniy N. Avrorin, Vadim A. Simonenko; Russian federal nuclear center – Zababakhin all–Russia research institute of technical physics, Snezhinsk, Russia. Melville, New York:

American institute of physics, 2006. P. 335–340.

147. *Губарев Ю. Г.* К устойчивости установившихся трёхмерных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (материалы V Всероссийской научной конференции). Томск, 3–5 октября 2006 г. / Томск: Изд–во Томского университета, 2006. С. 493–494.

148. *Блохин А. М., Трахинин Ю. Л.* Устойчивость сильных разрывов в магнитной гидродинамике и электрогидродинамике. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 324 с.

149. *Ohno M., Shirota T.* On the initial–boundary value problem for the linearized MHD equations // Proc. of the Sixth international colloquium on differential equations, Plovdiv, Bulgaria, August 18–23, 1995 / Ed. D. Bainov. Zeist: VSP, 1996. P. 173–180.

150. *Wang D.* Large solutions to the initial–boundary value problem for planar magnetohydrodynamics // SIAM j. appl. math. 2003. Vol. 63. No. 4. P. 1424–1441.

151. *Захаров В. Е.* Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функциональный анализ и его приложения. 1980. Т. 14. Вып. 2. С. 15–24.

152. *Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд–во СО РАН, 2000. 420 с.

153. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. Ново-

сибирск: Новосибирский гос. ун–т, 1967. 234 с.

154. *Benney D. J.* Some properties of long nonlinear waves // Stud. appl. math. 1973. Vol. 52. No. 1. P. 45–50.

155. *Купершмит Б. А., Манин Ю. И.* Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. I. Законы сохранения и решения // Функциональный анализ и его приложения. 1977. Т. 11. Вып. 3. С. 31–42.

156. *Купершмит Б. А., Манин Ю. И.* Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. II. Гамильтонова структура и высшие уравнения // Функциональный анализ и его приложения. 1978. Т. 12. Вып. 1. С. 25–37.

157. *Mayer P. G.* Roll waves and slug flows in inclined open channels // Trans. ASCE. 1981. No. 3158. P. 505–535.

158. *Павлов М. В.* Полная интегрируемость системы уравнений Бенни // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 3. С. 311–313.

159. *Павлов М. В., Царёв С. П.* О законах сохранения уравнений Бенни // УМН. 1991. Т. 46. Вып. 4. С. 169, 170.

160. *Geogjaev V. V.* New integrals of motion for the Benney equations // Phys. lett. A. 1992. Vol. 165. No. 2. P. 111.

161. *Geogjaev V. V.* On the continuous Benney equations // Physica D. 1995. Vol. 87. P. 168–175.

162. *Gibbons J.* Collisionless Boltzmann equations and integrable moment equations // Physica D. 1981. Vol. 3. P. 503–511.

163. *Царёв С. П.* О скобках Пуассона в одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа // Докл. АН СССР. 1985.

Т. 282. № 3. С. 534–537.

164. *Тешуков В. М.* О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 3. С. 555–562.

165. *Тешуков В. М.* Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 6. С. 17–26.

166. *Kato T.* The Cauchy problem for quasi–linear symmetric hyperbolic systems // Arch. rat. mech. anal. 1975. Vol. 58. P. 181–205.

167. *Majda A.* Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables. New York: Springer–Verlag, 1984. 159 p.

168. *Блохин А. М.* Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.

169. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. I. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.

170. *Гринспен Х. В.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 304 с.

171. *Новожилов В. В.* О расчёте турбулентного течения между двумя соосными вращающимися цилиндрами // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 6. С. 1337–1342.

172. *Bradsow P.* The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow // J. fluid mech. 1969. Vol. 36. No. 1. P. 177–192.

173. *Veronis G.* The analogy between rotating and stratified fluids // Ann. rev. fluid mech. 1970. Vol. 2. P. 37–66.

174. *Yih C.–S.* Stratified flows. New York e. a.: Acad. press, 1980. 418 p.

175. *Zeldovich Y. B.* On the friction of fluids between rotating cylinders

// Proc. Roy. soc. London. 1981. Vol. A374. P. 299–312.

176. *Антонцев С. И., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 316 с.

177. *Sedenko V. I.* Solvability of initial–boundary value problems for the Euler equations of flow of ideal incompressible inhomogeneous and ideal barotropic fluids bounded by free surfaces // Russ. acad. sci., sb., math. 1995. Vol. 83. No. 2. P. 347–368.

178. *Андреев В. К.* Об устойчивости неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, имеющей форму эллипсоида вращения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд–ние, Ин–т гидродинамики. 1972. Вып. 12. С. 14–25.

179. *Андреев В. К.* Корректность задачи о малых возмущениях движения жидкости со свободной границей // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд–ние, Ин–т гидродинамики. 1973. Вып. 15. С. 18–24.

180. *Плотников П. И.* Некорректность нелинейной задачи о развитии неустойчивости Тейлора // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 12. (Зап. науч. сем. ЛОМИ. Т. 96.) Л.: Наука, 1980. С. 240–246.

181. *Плотников П. И.* О разрешимости одного класса задач на склеивание потенциального и вихревого течений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд–ние, Ин–т гидродинамики. 1969. Вып. 3. С. 61–69.

182. *Юдович В. И.* Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // ЖВМиМФ. 1963. Т. 3. № 6. С. 1032–1066.

183. *Zayaczkowski W. M.* Local solvability of nonstationary leakage problem for ideal incompressible fluid. II // Pac. j. math. 1984. Vol. 113. P. 229–255.

184. *Majda A. J., Bertozzi A. L.* Vorticity and incompressible flow. Cambridge: Cambridge univ. press, 2002. 545 p.

185. *Козырев О. Р., Степанянц Ю. А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. «Механика жидкости и газа». 1991. Т. 25. С. 3–89.

186. *Демуцкий В. П., Половин Р. В.* Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 206 с.

187. *Кадомцев Б. Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 132–176.

188. *Molodensky M. M.* Equilibrium and stability of the force–free magnetic field // Solar phys. 1974. V. 39. P. 393–404.

189. *Molodensky M. M.* Equilibrium and stability of the force–free magnetic field. II. Stability // Solar phys. 1975. V. 43. P. 311–316.

190. *Molodensky M. M.* Equilibrium and stability of the force–free magnetic field. III // Solar phys. 1976. V. 49. P. 279–282.

191. *Маков Ю. Н.* Неустойчивость пространственно–периодического магнитостатического поля в условиях синхронизма с возмущением // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 11. С. 2093–2097.

192. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1982. 623 с. Т. 8: Электродинамика сплошных сред.

193. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1965. 479 с.

194. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. М., Л.: ГИТТЛ, 1950. 104 с.

195. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М.: Наука, 1979. 720 с.

196. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

197. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.

198. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.

199. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.

200. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

201. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1988. 512 с. Т. 2: Теория поля.

202. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В. С. Владимирова. М.: Наука, 1974. 272 с.

203. *Hoiland E.* On two–dimensional perturbation of linear flow // Geofys. publ. Norske vid.–akad. Oslo. 1953. Vol. 18. No. 9. P. 1–12.

204. *Tollmien W.* Ein allgemeines kriterium der instabilität laminarer geschwindigkeitsverteilungen // Nachr. wiss. fachgruppe. Göttingen. Math.–phys. klasse. Vol. 1. P. 79–114.

205. *Howard L. N.* Note on a paper of John W. Miles // J. fluid mech. 1961. Vol. 10. No. 4. P. 509–512.

206. *Banerjee M. B., Gupta J. R., Subbiah M.* Reducing Howard's semicircle for homogeneous shear flow // Math. anal. and appl. 1988. Vol. 130. No. 2. P. 398–402.

207. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 2003. 687 с. Т. 3: Специальные функции. Дополнительные главы.

208. *Мак–Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

209. *Squire H. B.* On the stability for three–dimensional disturbances viscous fluid flow between parallel walls // Proc. Roy. soc. London. Ser. A. 1933. V. 142. No. 847. P. 621–628.