

**Наименование курса:**  
**Конечномерные алгебры Ли и их представления**

**(2014-2015, П.С. Колесников)**

Курс предназначен для студентов 2-4 курса, магистрантов и аспирантов ММФ.

**Содержание курса:**

1. Определение и примеры алгебры Ли. Задание алгебры Ли тождествами. Алгебры Ли дифференцирований. Полная линейная алгебра Ли и ее основные подалгебры.
2. Описание алгебр Ли малых размерностей. Изучение трехмерной простой алгебры Ли  $sl(2, F)$ . Понятие представления алгебры Ли.
3. Понятие идеала алгебры Ли. Гомоморфизмы алгебр Ли. Основные теоремы о гомоморфизмах. Присоединенное представление алгебры Ли и его основные свойства. Центр алгебры Ли. Автоморфизмы алгебры Ли и их связь с дифференцированиями.
4. Изучение представлений разрешимых и нильпотентных алгебр Ли. Радикал алгебры Ли. Теоремы Энгеля о нильпотентности алгебры Ли с нильпотентным присоединенным представлением. Теорема Ли о существовании общего собственного вектора для разрешимой алгебры Ли линейных преобразований. Связь разрешимых и нильпотентных алгебр Ли с треугольными и верхнетреугольными матрицами. Изучение центра нильпотентной алгебры Ли. Квадрат разрешимой алгебры Ли.
5. Изучение полупростых и нильпотентных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве. Теорема Жордана-Шевалле о разложении линейного оператора на полупростую и нильпотентную части. Изучение полупростой и нильпотентной частей в разложении Жордана-Шевалле дифференцирования конечномерной алгебры. Критерий Картана о разрешимости алгебры Ли в терминах следов эндоморфизмов.
6. Изучение полупростых алгебр Ли: форма Киллинга и ее основные свойства, критерий полупростоты алгебры Ли в терминах формы Киллинга, разложение полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых подалгебр, дифференцирования полупростой алгебры Ли, абстрактное разложение Жордана.
7. Представления алгебр Ли: определения представления алгебры Ли, элемент Казимира данного представления, модули над алгебрами Ли и их связь с представлениями, теорема Вейля о полной приводимости, совпадение обычного разложения и абстрактного разложения Жордана для полупростых подалгебр полной линейной алгебры Ли.
8. Изучение торических подалгебр, корневое разложение алгебры Ли относительно торической подалгебры, множество корней относительно торической подалгебры, торические подалгебры алгебр Ли  $sl(2, F)$  и  $sl(3, F)$ .
9. Изучение свойств централизатора торической подалгебры, абстрактное разложение Жордана элементов из централизатора торической подалгебры, невырожденность формы Киллинга на торической подалгебре, абелевость централизатора торической подалгебры, совпадение торической подалгебры с ее централизатором.
10. Изучение свойств корневого разложения, представление корней в виде функционалов, заданных на торической подалгебре, соответствие между

корнями полупростой алгебры Ли и корнями  $sl(2, F)$ , одномерность корневых подпространств, свойства рациональности корневого разложения, сведение к корневым системам в евклидовых пространствах.

11. Изучение системы корней, определения и основные свойства системы корней, простые корни, фундаментальная система корней и ее основные свойства, числа Картана и матрица Картана, однозначность задания системы корней ее матрицей Картана, неприводимые системы корней, связь между неприводимостью системы корней и ее фундаментальной системы, высота корня и единственность корня максимальной высоты.

12. Классификация системы корней, алгоритм восстановления системы корней по матрице Картана, построение графов Кокстера по системе корней, схемы Дынкина, классификация неприводимых систем корней.

13. Изучение свойств картановских подалгебр: энгелевы подалгебры и их основные свойства, определение картановской подалгебры, связь между картановскими подалгебрами и энгелевыми подалгебрами, картановские и торические подалгебры в полупростых алгебрах Ли, сопряженность картановских подалгебр.

14. Доказательство леммы Уайтхеда и теоремы Леви.

### Примеры вопросов для подготовки к экзамену

1. Теоремы Энгеля и Ли.
2. Неразложимые представления нильпотентных алгебр Ли. Весовое разложение модуля над нильпотентной алгеброй Ли.
3. Форма следа и форма Киллинга. Критерий Картана разрешимости алгебры Ли.
4. Критерий Картана полупростоты алгебры Ли. Вполне приводимость регулярного представления.
5. Леммы Уайтхеда (1-я и 2-я), теорема Леви об отщеплении разрешимого радикала.
6. Оператор Казимира. Теорема Вейля о вполне приводимости представлений.
7. Ранг полупростой алгебры Ли, подалгебра Картана.
8. Корневое разложение полупростой алгебры Ли.
9.  $\alpha$ -серии корней, связь их длин с числами Картана.
10. Простые корни и фундаментальные системы корней. Матрица Картана.
11. Схемы Дынкина: классификация матриц Картана для простых алгебр Ли.
12. Теорема об изоморфизме простых алгебр Ли с одинаковыми матрицами Картана.
13. Универсальные обертывающие алгебры, теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта.
14. Классификация конечномерных неприводимых представлений полупростых алгебр Ли.