УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

5-6 семестры, 2017–2018 учебный год

Программа курса лекций

Курс лекций разработал: д.ф.-м.н., профессор Г.В. Демиденко

Лектор: к.ф.-м.н., доцент И.И. Матвеева

1. Введение в теорию уравнений с частными производными

Дифференциальные уравнения с частными производными. Примеры уравнений, возникающих при моделировании физических процессов: уравнение колебаний струны, телеграфное уравнение, волновое уравнение, система уравнений акустики, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа.

Уравнения с частными производными второго порядка. Классификация уравнений. Канонический вид дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Канонический вид дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в двумерном случае.

Постановка задачи Коши для уравнений с частными производными произвольного порядка. Понятие характеристической поверхности, примеры. Классификация уравнений: эллиптические, t-гиперболические, параболические по Петровскому. Симметрические t-гиперболические системы. Неразрешимость задачи Коши с данными на характеристической поверхности. Теорема Коши–Ковалевской.

Задачи Коши и Гурса для гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Область зависимости решений. Задача Коши для уравнения колебания струны. Формула Даламбера, интеграл энергии.

Определение краевой задачи для уравнений с частными производными. Постановки краевых задач для уравнений второго порядка. Понятие корректности краевой задачи. Условие Адамара, как необходимое условие корректности задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами. Примеры Адамара, Ковалевской, Леви.

Метод Фурье решения двумерных краевых задач для уравнений второго порядка. Корректность первой и второй краевых задач для уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.

2. Функциональные пространства и теоремы вложения

Пространства интегрируемых функций $L_{loc}(G)$, $L_p(G)$. Определение и свойства средних функций. Аппроксимация интегрируемых функций. Теорема о плотности $C_0^\infty(G)$ в $L_p(G)$. Лемма дю-Буа-Реймонда.

Обобщенные производные локально суммируемых функций, их свойства, примеры. Слабая замкнутость оператора обобщенного дифференцирования. Перестановочность операторов обобщенного дифференцирования и усреднения.

Соболевские пространства $W_p^l(G)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$. Полнота пространства $W_p^l(G)$. Неравенство Стеклова. Теорема о продолжении функций из $W_p^l(G)$.

Пространство $S(R^n)$. Преобразование Фурье. Формула Фурье, равенство Парсеваля. Определение преобразования Фурье для функций из $L_1(R^n)$ и $L_2(R^n)$. Теорема Римана–Лебега, теорема Планшереля. Преобразование Фурье свертки функций.

Оператор Фурье в соболевском пространстве $W_2^l(R^n)$. Критерий принадлежности функций пространству $W_2^l(R^n)$ в терминах преобразования Фурье. Теоремы вложения Соболева и Реллиха для соболевских пространств $W_2^l(G)$. Понятие следа функций из пространства $W_2^l(G)$. Эквивалентные нормы в пространствах $W_2^l(G)$.

3. Гиперболические и параболические уравнения

Волновое уравнение. Энергетические оценки. Конечная область зависимости решений задачи Коши, интеграл энергии. Получение формул решения задачи Коши для многомерного волнового уравнения методом преобразования Фурье. Формула Кирхгофа ($n = 3$), принцип Гюйгенса. Получение формулы Пуассона ($n = 2$) методом спуска. Метод Дюамеля для построения решения неоднородного уравнения.

Уравнение теплопроводности. Принцип максимума, единственность классического решения первой краевой задачи в цилиндрической области. Начальная задача для многомерного уравнения теплопроводности, единственность решения в классе ограниченных функций. Формула Пуассона. Пример не единственности решений в классе растущих функций.

Первая краевая задача в цилиндрической области для волнового уравнения. Обобщенные решения. Теорема единственности. Доказательство существования обобщенного решения методом Галеркина.

Первая краевая задача в цилиндрической области для уравнения теплопроводности. Обобщенные решения. Теорема единственности. Доказательство существования обобщенного решения методом Галеркина.

4. Эллиптические уравнения

Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Интегральная формула Грина. Гармонические функции. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций, теорема о среднем арифметическом, принцип максимума.

Уравнение Пуассона, классические решения. Построение частных решений в интегральном виде. Функция Грина для задачи Дирихле. Формула Пуассона решения задачи Дирихле в шаре. Решение задачи Дирихле вне шара. Поведение гармонических функций на бесконечности. Неравенства Гарнака. Теорема Лиувилля для гармонических функций.

Эллиптические уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Обобщенные решения задач Дирихле и Неймана в ограниченной области. Альтернатива Фредгольма для задач Дирихле и Неймана в соболевском пространстве $W_2^1(G)$, теоремы об однозначной разрешимости.

Основная литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

2. Демиденко Г.В. Пространства Соболева и обобщенные решения. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.

3. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

5. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

6. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Дополнительная литература

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.

3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992.

4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: МГУ, 1999.

5. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2001.

Семинарские занятия

1. Уравнения с частными производными первого порядка. ([5], №№ 1167–1210).

2. Классификация уравнений и систем с частными производными. Характеристики. ([1], №№ 25–73; [2], №№ 2.1–2.15; [4], №№ 1–11).

3. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. ([1], №№ 74–130; [3], №№ 2.1–2.11).

4. Решение гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Область зависимости. Метод Римана. ([1], №№ 509–526; [3], №№ 12.7–12.24).

5. Уравнение колебаний струны. Формула Даламбера. ([1], №№ 370–396, №№ 438–457; [2], №№ 3.24–3.30; [4], №№ 133–136).

6. Уравнение теплопроводности. Принцип максимума. Формула Пуассона. ([1], №№ 574–590; [2], №№ 4.1–4.7, 4.27, 4.31–4.35; [4], №№ 268–284).

7. Понятие корректности краевых задач. ([1], №№ 552–565; [4], №№ 137–144).

8. Метод разделения переменных для уравнений второго порядка. ([1], №№ 637–722; [2], №№ 3.32–3.40, 4.8–4.19).

9. Функциональные пространства, теоремы вложения, обобщенные производные. ([3], №№ 4.58–4.90; [4], №№ 320–350).

10. Задача Коши для гиперболических и параболических уравнений. ([1], №№ 360–369, 413–437, 458–472, 591–599; [2], №№ 3.13–3.23, 4.36–4.40; [3], №№ 12.27-12.33, 13.1-13.8).

11. Смешанные краевые задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка. ([1], №№ 705–715; [3], №№ 20.17–20.20, 20.47–20.49).

12. Краевые задачи для гиперболических систем первого порядка с двумя независимыми переменными. ([4], №№ 80–83, №№ 94–108).

13. Уравнения эллиптического типа. Свойства гармонических функций. Задача Дирихле и задача Неймана для уравнения Пуассона. Функция Грина. ([1], №№152–157, 219–250; [2], №№ 5.1–5.15, 5.27–5.33, 5.38–5.44; [3], №№ 16.13–16.25, 17.1–17.10).

Сборники задач

1. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.

2. Вентцель Т.Д. и др. Сборник задач по уравнениям с частными производными. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

3. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

4. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: НГУ, 1987.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: URSS, 2015.