Федеральное Агентство по Образованию
Новосибирский Государственный Университет
Механико-математический Факультет

Ю. Л. Трахинин

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ СО МНОГИМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Учебное пособие

Новосибирск
2009

УДК 517.956.3
ББК В161.62
Т657
Трахинин Ю. Л. Элементы теории гиперболических систем законов сохранения со многими пространственными переменными: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009. 114 с.

ISBN 978-5-94356-735-3

Пособие знакомит читателя с основными идеями и современными методами доказательства теорем существования для линейных и квазилинейных гиперболических систем уравнений (в частности, систем законов сохранения) со многими пространственными переменными. Данные аспекты теории гиперболических уравнений с частными производными практически не отражены в отечественной учебной и научной литературе. Пособие призвано восполнить этот пробел. В частности, рассматриваются отдельные вопросы математической теории ударных волн в многомерном случае, а также излагаются основные идеи метода Нэша-Мозера и его приложения к доказательству локальных по времени теорем существования для нелинейных задач, линеаризации которых являются слабокорректными.

Пособие соответствует части программы годового специального курса кафедры дифференциальных уравнений «Линейные и нелинейные эволюционные уравнения математической физики» и предназначено для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области дифференциальных уравнений с частными производными.

Издание подготовлено в рамках выполнения инновационно-образовательной программы «*Инновационные образовательные программы и технологии, реализуемые на принципах партнерства классического университета, науки, бизнеса и государства*» национального проекта «Образование».

Издание подготовлено в рамках целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» проекта № 2.1.1/4591.

ISBN 978-5-94356-735-3

Оглавление

Введение

Математическое моделирование природных явлений часто приводит к системам законов сохранения, которые, как правило, переписываются в виде квазилинейных симметрических гиперболических систем. Примерами таких систем являются уравнения газовой динамики, уравнения магнитной гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости, уравнения теории мелкой воды, уравнения сверхтекучей жидкости и многие другие. Даже уравнения Эйнштейна общей теории относительности для метрического тензора пространства-времени могут быть записаны в виде симметрической гиперболической системы.

В силу сказанного математическая теория гиперболических систем законов сохранения не теряет своей актуальности. Более того, многие вопросы этой теории до сих пор остаются открытыми. Так, например, даже для уравнений газовой динамики пока не доказана глобальная по времени теорема существования слабого решения, представляющего собой волновой пакет, который состоит из ударных волн, контактных разрывов и волн разряжения. Необходимо также отметить, что результаты теории гиперболических законов сохранения непосредственно востребованы в теории гиперболических балансовых законов, теории гиперболико-параболических «вязких» законов сохранения, теории гиперболико-эллиптических систем и других областях уравнений с частными производными и математической физики.

В настоящем учебном пособии мы затрагиваем лишь некоторые аспекты теории гиперболических законов сохранения. Прежде всего, мы рассматриваем наиболее важный для приложений случай многих пространственных переменных, а соответствующая «одномерная» теория находится за рамками пособия. Основное внимание в пособии уделяется доказательству локальных по времени теорем существования и единственности для симметризуемых гиперболических систем законов сохранения (как для задачи Коши, так и для начально-краевых задач).

Отметим, что локальная по времени теорема существования гладких решений задачи Коши для квазилинейной симметрической гиперболической системы была независимо доказана в начале 70-х годов прошлого столетия в работах Вольперта и Худяева, Лакса и Като [21]. Именно доказательству этой теоремы и посвящена первая глава данного пособия.

Основной целью второй главы является доказательство локальной теоремы существования решений с поверхностью ударной волны при определенных условиях на кусочно-гладкие начальные данные. Такая теорема на рубеже 70–80-х годов была впервые доказана Блохиным для ударных волн в газовой динамике с помощью метода интегралов энергии [1]. Чуть позднее Майда с помощью метода симметризатора Крайса [17] и исчисления псевдодифференциальных операторов доказал аналогичную теорему для определенного класса абстрактных гиперболических законов сохранения, содержащего уравнения газовой динамики [20].

Во второй главе мы вводим понятие строго диссипативного p-симметризатора [26], которое, по существу, является формализацией метода интегралов энергии [1, 3]. Это позволяет обобщить упомянутую теорему Блохина на случай ударных волн для абстрактных законов сохранения при условии, что для соответствующей линеаризованной задачи построен строго диссипативный p-симметризатор.

В третьей главе пособия мы на примере задачи со свободной границей для уравнений газовой динамики, моделирующей движение газообразной звезды, излагаем основные идеи метода Нэша-Мозера [16]. Этот метод позволяет иногда доказывать существование решений нелинейных задач, линеаризации которых являются слабокорректными в смысле потери гладкости в априорных оценках решений.

Для относительной самодостаточности учебного пособия в него включены два небольших приложения. В первом из них мы напоминаем определения и основные свойства функциональных пространств, которые используются в пособии, в частности, даем определение пространств Соболева и напоминаем основную теорему вложения. Во втором приложении мы напоминаем три теоремы функционального анализа, которые необходимы для доказательства существования решений линейных и нелинейных задач.

Наконец, отметим, что в учебном пособии [2] излагались некоторые алгебраические аспекты линейных гиперболических систем и уравнений с постоянными коэффициентами, в частности, метод симметризатора Крайса. В настоящем же учебном пособии основное внимание уделяется нелинейной теории гиперболических систем, а элементы соответствующей линейной теории излагаются не только для постоянных, но и для переменных коэффициентов.

Глава 1

Существование гладких решений задачи Коши для гиперболической системы законов сохранения

1.1. Гиперболические системы законов сохранения: симметрический вид и примеры

Рассмотрим систему N *законов сохранения*

$$\partial_t f^0(U) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f^j(U) = 0 \tag{1.1}$$

для вектора неизвестных величин $U(t,x)$, где t — время, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — декартовы координаты,

$$f^\alpha = f^\alpha(U) = (f_1^\alpha, \ldots, f_N^\alpha), \quad U = (u_1, \ldots, u_N), \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \ \ \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

С учетом обозначения

$$\operatorname{div} a = \sum_{j=1}^{n} \partial_j a^j \quad (a = (a^1, \ldots, a^n) \text{ — вектор})$$

система (1.1) в покомпонентном виде записывается так:

$$\partial_t f_i^0(U) + \operatorname{div} f_i(U) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

где $f_i = f_i(U) = (f_i^1, \ldots, f_i^n)$.

Предполагая, что функции потока $f_i = f_i(U)$ достаточно гладкие (на практике они обычно из класса C^∞), уравнения (1.1) переписываем в виде квазилинейной системы

$$B_0(U)\partial_t U + \sum_{j=1}^{n} B_j(U)\partial_j U = 0, \tag{1.2}$$

где $B_\alpha = B_\alpha(U) = (\partial f^\alpha / \partial U)$ (здесь и далее обозначение вида $(\partial a / \partial b)$ используется для матрицы (или вектора если $a = a^1$) с компонентами $\partial a^i / \partial b^j$). Умножая систему (1.2) слева на невырожденную матрицу $S = S(U)$, получаем

$$A_0(U)\partial_t U + \sum_{j=1}^{n} A_j(U)\partial_j U = 0, \tag{1.3}$$

где $A_\alpha = SB_\alpha$.

Определение 1.1. Матрица $S(U)$ называется *симметризатором Фридрихса*, если

$$A_\alpha = A_\alpha^{\mathsf{T}} \quad (\alpha = \overline{0, n}), \qquad A_0 > 0 \tag{1.4}$$

для всех $U \in G \subset \mathbb{R}^N$ (здесь и далее $^{\mathsf{T}}$ — символ транспонирования). При этом система (1.3) называется *симметрической t-гиперболической* (по Фридрихсу [15]), а подобласть G пространства состояний — областью гиперболичности.

Заметим, что симметрические гиперболические системы являются гиперболическими в смысле следующего общего определения гиперболических систем.

Определение 1.2. Квазилинейная система (1.3) с невырожденной матрицей A_0 называется *гиперболической*, если все собственные числа λ_i $(i = \overline{1, N})$ характеристической матрицы

$$A(U,\xi) = A_0^{-1}(U)\sum_{j=1}^{n}\xi_j A_j(U)$$

вещественны при всех $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $U \in G \subset \mathbb{R}^N$ и эта матрица приводится к диагональному виду (с вещественными диагональными элементами $\lambda_i = \lambda_i(U,\xi)$).

Заметим, что для гиперболических систем с *постоянными кратностями* характеристик матрица $A(U,\xi)$ равномерно (по U и ξ) диагонализуема. С другой стороны, иногда используется более общее определение гиперболичности, а именно вообще не требуется диагонализуемость характеристической матрицы.

Для некоторых моделей механики сплошной среды система (1.1) дополняется набором K *дивергентных ограничений* (или связей)

$$\operatorname{div}\Psi_j(U) = 0, \quad j = \overline{1,K}\,, \tag{1.5}$$

которым обязаны удовлетворять решения этой системы. Здесь $\Psi_j = \Psi_j(U) = (\Psi_j^1,\dots,\Psi_j^n)$. На практике (для конкретных моделей) дивергентные связи (1.5) являются ограничениями на начальные данные для системы (1.1), т.е. если (1.5) выполнены в начальный момент времени, то они справедливы при всех $t > 0$. При наличии дивергентных ограничений последние могут участвовать в симметризации системы (1.1). В этом случае мы не просто умножаем систему (1.2) слева на $S = S(U)$, но и добавляем к результату дивергенции $\operatorname{div}\Psi_j(U)$, домноженные на некоторые векторы $R_k = R_k(U)$:

$$S(U)B_0(U)\partial_t U + \sum_{j=1}^{n} S(U)B_j(U)\partial_j U + \sum_{k=1}^{K} R_k(U)\operatorname{div}\Psi_j(U)$$
$$= A_0(U)\partial_t U + \sum_{j=1}^{n} A_j(U)\partial_j U = 0.$$

Если полученная система оказывается симметрической гиперболической, т.е. выполняются требования (1.4), то набор

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}(U) = (S(U), R_1(U),\dots,R_K(U))$$

естественно называть *обобщенным симметризатором Фридрихса.*

В общем случае симметризатор Фридрихса (или обобщенный симметризатор Фридрихса) может быть найден с помощью метода симметризации, предложенного Годуновым [4] (см. также [1, 3]). Коротко говоря, он заключается в следующем. Если для системы законов сохранения (1.1) известен *дополнительный* закон сохранения («энтропии»)

$$\partial_t \Phi^0(U) + \operatorname{div} \Phi(U) = 0$$

($\Phi = \Phi(U) = (\Phi^1, \dots, \Phi^n)$), который является следствием этой системы и выполняется на ее гладких решениях, то гладкая замена переменных

$$U \to Q = \frac{\partial \Phi^0}{\partial f^0}$$

приводит (1.1) к симметрической системе для нового неизвестного Q. Сохранив симметричность, эту систему можно переписать в терминах исходного неизвестного U. При этом находится матрица

$$S(U) = \left(\frac{\partial Q}{\partial U} \right)^{\mathsf{T}}.$$

Что касается векторов R_k, то после нахождения Q они тоже могут быть вычислены с учетом дополнительного закона сохранения и дивергентных ограничений (1.5). Мы не будем обсуждать здесь этот вопрос, поскольку во многих конкретных случаях симметрический вид системы законов сохранения удается найти удачным выбором вектора неизвестных U. По крайней мере, это так для наиболее известных моделей механики сплошной среды (см. ниже их примеры).

Рассмотрим теперь некоторые конкретные примеры гиперболических систем законов сохранения.

Пример 1. Уравнения изэнтропической газовой динамики. Системой изэнтропической газовой динамики называют уравнения Эйлера, описывающие изэнтропическое течение идеальной сжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} &\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ &\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla p = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь ρ — плотность газа, $v = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость, $p = p(\rho)$ — давление. Символ $\otimes$ означает Кронекерово произведение, в частности,

$$v \otimes v = \begin{pmatrix} v_1 v \\ v_2 v \\ v_3 v \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения в (1.6) в покомпонентном виде записываются так:

$$\partial_t(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i v) + \partial_i p = 0, \qquad i = \overline{1,3}.$$

С учетом уравнения состояния газа $p = p(\rho)$ система (1.6) является замкнутой системой законов сохранения, например, для вектора неизвестных $U = (\rho, v)$.

Указанный выбор неизвестного U уже удачен в том смысле, что система (1.6), переписанная в неконсервативном (недивергентном) виде

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} v = 0, \qquad \frac{\rho}{c^2}\,\frac{dv}{dt} + \nabla\rho = 0,$$

где $d/dt = \partial_t + (v, \nabla)$, а $c^2 = p'(\rho)$ — квадрат скорости звука, является симметрической системой вида (1.3). Причем симметрические матрицы A_α могут быть легко выписаны, а диагональная матрица $A_0 > 0$ при естественных физических предположениях

$$\rho > 0, \quad p'(\rho) > 0.$$

Последние неравенства называются *условиями гиперболичности*, которые описывают область гиперболичности системы (1.6) (см. определение 1.1). Заметим, что при тех же условиях система (1.6), переписанная в неконсервативном виде

$$\frac{1}{\rho c^2}\,\frac{dp}{dt} + \operatorname{div} v = 0, \qquad \rho\,\frac{dv}{dt} + \nabla p = 0,$$

также является симметрической гиперболической, если вместо плотности в качестве первой компоненты вектора неизвестных взять давление: $U = (p, v)$.

Пример 2. Полная система газовой динамики. Рассмотрим теперь общий случай, т.е. полную систему уравнений Эйлера, описывающих течение идеальной сжимаемой жидкости (газа):

$$\begin{aligned}
&\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0,\\
&\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v\otimes v) + \nabla p = 0,\\
&\partial_t\big(\rho(v^2/2+E)\big) + \operatorname{div}\big((\rho(v^2/2+E)+p)v\big) = 0.
\end{aligned}\tag{1.7}$$

Здесь $E = E(\rho, S)$ — внутренняя энергия, S — энтропия, $p = p(\rho, S)$. Из второго начала термодинамики

$$TdS = dE - \frac{p}{\rho^2}\,d\rho$$

следует, что $p = \rho^2 E_\rho(\rho, S)$ и температура $T = E_S(\rho, S)$. Тогда с учетом уравнения состояния газа $E = E(\rho, S)$ система (1.7) является замкнутой. В качестве неизвестного можно выбрать, например, вектор $U = (p, v, S)$. Заметим, что на гладких решениях системы (1.7) выполняется дополнительный закон сохранения энтропии

$$\partial_t(\rho S) + \operatorname{div}(\rho S v) = 0. \tag{1.8}$$

С учетом (1.8) в неконсервативном виде система (1.7) переписывается так:

$$\frac{1}{\rho c^2}\,\frac{dp}{dt} + \operatorname{div} v = 0, \qquad \rho\,\frac{dv}{dt} + \nabla p = 0, \qquad \frac{dS}{dt} = 0, \tag{1.9}$$

где $c^2 = p_\rho(\rho, S)$ — квадрат скорости звука. Сейчас логичней рассматривать $\rho = \rho(p, S)$ как уравнение состояния газа. Тогда $1/c^2 = \rho_p(p, S)$. Нетрудно понять, что система (1.9) является симметрической для выбранного неизвестного $U = (p, v, S)$, а условия гиперболичности ($A_0 > 0$) имеют вид

$$\rho(p, S) > 0, \quad \rho_p(p, S) > 0. \tag{1.10}$$

Пример 3. Уравнения магнитной гидродинамики. Примером гиперболической системы законов сохранения с дивергентными ограничениями является система магнитной гидродинамики для идеальной сжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}
&\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0,\\
&\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v\otimes v - H\otimes H) + \nabla q = 0,\\
&\partial_t H - \operatorname{rot}(v\times H) = 0,\\
&\partial_t\big(\rho e + \tfrac{1}{2}H^2\big) + \operatorname{div}\big((\rho e + p)v + H\times(v\times H)\big) = 0,
\end{aligned}\tag{1.11}$$

где $H = (H_1, H_2, H_3)$ — магнитное поле, $e = v^2/2 + E$ — полная энергия, $q = H^2/2 + p$ — полное давление, а остальные обозначения те же, что и для системы газовой динамики. Для системы (1.11) обязано выполняться дивергентное ограничение

$$\operatorname{div} H = 0, \tag{1.12}$$

которое является дополнительным ограничением на начальные данные $U|_{t=0} = U_0(x)$. Действительно, действуя оператором дивергенции на третье (векторное) уравнение системы (1.11), получаем уравнение

$$\partial_t(\operatorname{div} H) = 0,$$

из которого следует, что если $\operatorname{div} H|_{t=0} = 0$, то $\operatorname{div} H = 0$ для всех $t > 0$.

С учетом второго начала термодинамики и уравнения состояния плазмы $E = E(\rho, S)$ система (1.11) является замкнутой системой законов сохранения, например, для вектора неизвестных $U = (p, v, H, S)$. Такой выбор неизвестного удачен в смысле симметризуемости системы (1.11). В самом деле, с учетом закона сохранения энтропии (1.8) (который выполняется на гладких решениях уравнений (1.11)), используя дивергентное ограничение (1.12), переписываем (1.11) в следующем неконсервативном виде:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho c^2}\,\frac{dp}{dt} + \operatorname{div} v = 0, \qquad \rho\,\frac{dv}{dt} - (H, \nabla)H + \nabla q = 0, \\ &\frac{dH}{dt} - (H, \nabla)v + H \operatorname{div} v = 0, \qquad \frac{dS}{dt} = 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Система (1.13) является симметрической системой вида (1.3). Условие гиперболичности $A_0 = \operatorname{diag}(1/(\rho c^2), \rho, \rho, \rho, 1, 1, 1, 1) > 0$ выполнено, если уравнение состояния плазмы $\rho = \rho(p, S)$ удовлетворяет неравенствам (1.10).

1.2. Метод сжимающих отображений для квазилинейных гиперболических систем

Будем далее считать, что система законов сохранения (1.1) симметризуется, т.е. переписывается в виде системы (1.3) с симметрическими матрицами. Основной целью настоящей главы является доказательство локального по времени существования и единственности гладкого решения задачи Коши

$$\mathbb{L}(U) = 0, \tag{1.14}$$

$$U|_{t=0} = U_0(x), \tag{1.15}$$

где

$$\mathbb{L}(U) = L(U)(U), \qquad L = L(U) = A_0(U)\partial_t + \sum_{j=1}^{n} A_j(U)\partial_j, \tag{1.16}$$

при условии, что начальные данные принадлежат области гиперболичности G, т.е. $A_0(U_0) > 0$. Доказательство основано на методе сжимающих отображений, т.е. на применении теоремы Банаха о неподвижной точке (см. прил. Б).

Обсудим теперь основную идею применения теоремы Б.1 (см. прил. Б) для доказательства существования решений задачи Коши (1.14), (1.15). Она основана на использовании подходящей априорной оценки для соответствующей линеаризованной задачи. Так как *метод линеаризации* является базовым методом, который используется при доказательстве теорем существования для задач Коши и начально-краевых задач не только с помощью метода сжимающих отображений, но и с помощью метода Нэша-Мозера (см. гл. 3), то остановимся вначале на нем.

Среди специалистов по механике сплошной среды часто возникают разногласия, разночтения и т.д., касающиеся того, что понимать под линеаризацией исходной нелинейной задачи. Во избежание этого дадим строгое *математическое* определение линеаризации системы квазилинейных уравнений (1.14). Что касается линеаризации граничных условий, то мы пока отложим этот вопрос, поскольку в этой главе предметом наших исследований является задача Коши. В гл. 2 мы обсудим его для, пожалуй, наиболее сложного случая граничных условий, а именно для соотношений Ренкина-Гюгонио на поверхности ударной волны.

Определение 1.3. Пусть V — заданная вектор-функция (основное состояние). Тогда линейная система

$$\mathbb{L}'(V)U = \frac{d}{d\varepsilon}\mathbb{L}(U_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0,$$

где $U_\varepsilon = V + \varepsilon U$, называется *линеаризацией* системы (1.14) относительно V.

Нетрудно вычислить явный вид линейного оператора $\mathbb{L}'(V)$. Его главная часть совпадает с $L(V)$ (см. (1.16)):

$$\mathbb{L}'(V)U = L(V)U + C(V)U.$$

Здесь матрица $C(V)$ определяется так:

$$C(V)U = (U, \nabla_u A_0(V))\partial_t V + \sum_{j=1}^{n}(U, \nabla_u A_\alpha(V))\partial_\alpha V,$$

$$(U, \nabla_u A_\alpha(V)) = \sum_{i=1}^{N} u_i \left(\frac{\partial A_\alpha(U)}{\partial u_i}\bigg|_{U=V} \right).$$

На самом деле, в отличие о метода Нэша-Мозера (см. гл. 3), для которого необходимо рассматривать истинную линеаризацию, т.е. удерживать младший член $C(V)U$, для метода сжимающих отображений достаточно рассматривать только главную часть линейного оператора. Таким образом, имеем

$$L(V)U = 0. \tag{1.17}$$

Рассмотрим отображение T такое, что $T(V) = U$, где U — решение линейной системы (1.17) и $V|_{t=0} = U|_{t=0} = U_0$. Если мы укажем такой компакт K в банаховом пространстве B, например, шар радиуса R, что отображение T действует из K в K ($T : K \to K$) и является сжимающим, т.е.

$$\|V\|_B \le R \qquad \Rightarrow \qquad \|U\|_B \le R, \tag{1.18}$$

$$\|U_1 - U_2\|_B \le q\|V_1 - V_2\|_B \qquad \forall\, V_1, V_2 \in K, \tag{1.19}$$

где $T(V_i) = U_i$, $0 \le q < 1$ и $\|\cdot\|_B$ — норма в B, то существует единственная неподвижная точка Z отображения T: $T(Z) = Z$. Это Z и есть единственное решение U задачи Коши (1.14), (1.15):

$$L(U)U = 0, \quad U|_{t=0} = U_0.$$

Важно отметить, что свойства (1.18) и (1.19) необходимо устанавливать для линейной системы (1.17) с начальными данными (1.15). Точнее, проверка (1.19) требует рассмотрения неоднородной линейной системы

$$L(V)U = f$$

с нулевыми начальными данными $U|_{t=0} = 0$. Здесь $f = f(t,x)$ — заданная правая часть (*функция источника*). В самом деле, пусть $T(V_i) = U_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$L(V_1)U_1 = 0 \quad \text{и} \quad L(V_2)U_2 = 0.$$

Рассматривая разность двух последних уравнений, получаем

$$A_0(V_1)\partial_t(U_1 - U_2) + \sum_{j=1}^{n} A_j(V_1)\partial_j(U_1 - U_2)$$
$$= (A_0(V_2) - A_0(V_1))\partial_t U_2 + \sum_{j=1}^{n}(A_j(V_2) - A_j(V_1))\partial_j U_2,$$

т.е.

$$L(V_1)(U_1 - U_2) = f = (L(V_2) - L(V_1))U_2.$$

Для того чтобы оценить правую часть f, пользуемся теоремой о среднем значении для разностей $A_\alpha(V_2) - A_\alpha(V_1)$. Точнее, для каждого элемента этих матриц мы последовательно применяем теорему о среднем значении по каждому скалярному аргументу. Например, для гладкой функции $g = g(x, y)$ двух аргументов имеем:

$$g(x_1,y_1)-g(x_2,y_2)=\frac{\partial g}{\partial x}(x_*,y_1)(x_1-x_2)+\frac{\partial g}{\partial y}(x_2,y_*)(y_1-y_2),$$

где $x_*\in(x_1,x_2)$, $y_*\in(y_1,y_2)$. Понятно, что дальнейшие рассуждения будут зависеть от свойств банахова пространства B. Будем пока предполагать, что, используя, как указано выше, теорему о среднем значении, а также определенные мультипликативные неравенства для норм пространства B, мы в итоге получим

$$\|f\|_{B_1}\leq C(R)\|V_1-V_2\|_{B_1}, \tag{1.20}$$

где $C=C(R)>0$ — постоянная, которая, в частности, зависит от радиуса R шара K (она обычно также зависит, например, от интервала времени), $\|\cdot\|_{B_1}$ — норма такого подходящего банахова пространства $B_1\supset B$, что если $u\in B$, то $\partial_t u,\partial_j u\in B_1$, а $d(u,v)=\|u-v\|_{B_1}$ также можно рассматривать в качестве метрики пространства B (тогда в (1.19) нормы $\|\cdot\|_B$ нужно заменить на нормы $\|\cdot\|_{B_1}$).

Замечание 1.1. Забегая вперед, заметим, что для задачи Коши (1.14), (1.15) в качестве пространства B будет выбрано пространство Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$ (см. прил. A) с подходящим индексом s, а «сжимаемость» отображения T будет доказана в младшей норме, а именно в норме пространства $H^0(\mathbb{R}^n)$, т.е. $B_1=L_2(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, с учетом (1.20) для доказательства теоремы существования и единственности необходимо иметь подходящие априорные оценки

$$\|U\|_{\mathcal{B}}\leq C_1\|U_0\|_{\mathcal{B}}+C_2\|f\|_{\mathcal{B}}\qquad(\text{для } \mathcal{B}=B \text{ и } \mathcal{B}=B_1)$$

решений линейной неоднородной задачи

$$L(V)U=f,\quad U|_{t=0}=U_0(x). \tag{1.21}$$

Здесь C_1, $C_2>0$ — постоянные, которые зависят от основного состояния V, интервала времени и т.д. Таким образом, доказательство теорем существования и единственности для задачи Коши, а также начально-краевых задач (см. гл. 2) опирается на вывод подходящих априорных оценок для соответствующих линеаризованных задач. Это верно и для метода Нэша-Мозера, идею которого мы изложим в гл. 3.

1.3. Задача Коши для линейной гиперболической системы с постоянными коэффициентами

Итак, как уже было отмечено, прежде чем исследовать исходную нелинейную задачу, нужно получить подходящие априорные оценки для соответствующей линейной задачи. При этом нужно еще доказать существование решений этой линейной задачи, что тоже будет опираться на указанные оценки (единственность будет следовать из них напрямую). Мы начнем изучать задачу Коши для линейных гиперболических систем с наиболее простого случая, а именно со случая постоянных коэффициентов, когда V — постоянный вектор ($V = \mathrm{const}$ — точное решение (1.14)):

$$A_0 \partial_t U + \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_j U = f, \tag{1.22}$$

$$U|_{t=0} = U_0(x). \tag{1.23}$$

Здесь A_α — постоянные матрицы, f — заданная правая часть, мотивация введения которой описана в предыдущем параграфе.

В этом параграфе мы будем придерживаться более общего предположения, а именно будем предполагать, что система (1.22) гиперболическая, но не обязательно симметрическая (см. определение 1.2 для случая постоянных матриц). Обсудим теперь вопрос о корректности задачи (1.22), (1.23) в классе L_2 (см. прил. A). Под корректностью задачи, как обычно, понимается существование, единственность и непрерывная зависимость решения от начальных данных и правых частей. Заметим, что для линейных задач непрерывная зависимость напрямую следует из соответствующей априорной оценки решения. Так как в системе (1.22) фигурируют производные решения, то прежде всего необходимо определить, что понимается под решением $U \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ задачи Коши (1.22), (1.23). Мы дадим это определение для случая переменных коэффициентов, т.е. для задачи (1.21) (при $V = \mathrm{const}$ мы получаем задачу (1.22), (1.23)).

Определение 1.4. Пусть $U_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $f \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ и коэффициенты системы гладкие и ограниченные вместе со своими производными, т.е. $A_\alpha(t,x) = A_\alpha(V) \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)\cap W^1_\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. Тогда $U \in L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ называется *сильным решением* задачи Коши (1.21), если U является пределом в $L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ такой последовательности $\{U_k\}\subset L_2([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))\cap H^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, что

$$\lim_{k\to\infty} LU_k \equiv \lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} U_k|_{t=0} = U_0$$

в $L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ и $L_2(\mathbb{R}^n)$ соответственно.

Заметим, что в литературе определения сильных решений иногда несущественно отличаются друг от друга. Здесь определение сильного решения задачи Коши дано по аналогии с определением сильного решения начально-краевой задачи из работ [18, 24]. Далее под решениями из L_2 будем по умолчанию понимать сильные решения. Для задачи Коши (1.22), (1.23) справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $U_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $f \in L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. Тогда задача Коши* (1.22), (1.23) *корректна в L_2 тогда и только тогда, когда система* (1.22) *гиперболична. При этом сильное решение принадлежит $C([0,T],L_2(\mathbb{R}^n))$.*

Доказательство. Применим преобразование Фурье по x к задаче (1.22), (1.23):

$$\frac{d}{dt}\widehat{U}(t,\xi) = -iA(\xi)\widehat{U}(t,\xi) + A_0^{-1}\widehat{f}(t,\xi), \tag{1.24}$$

$$\widehat{U}(0,\xi) = \widehat{U}_0(\xi), \tag{1.25}$$

где $A(\xi) = A_0^{-1}\sum_{j=1}^n \xi_j A_j$ — характеристическая матрица (см. определение 1.2), а значком $\widehat{\ }$ обозначается преобразование Фурье соответствующей функции из L_2 (см. прил. А). Далее без труда находим в явном виде решение задачи Коши (1.24), (1.25) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\widehat{U}(t,\xi) = \exp(-itA(\xi))\Bigg(\widehat{U}(0,\xi) + \int_0^t \exp(-i\tau A(\xi))A_0^{-1}\widehat{f}(\tau,\xi)d\tau\Bigg). \tag{1.26}$$

Тогда формально обратное преобразование Фурье

$$U(t,x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi,x)} \widehat{U}(t,\xi) d\xi \tag{1.27}$$

функции $\widehat{U}(t,\xi)$ является решением задачи (1.22), (1.23). Очевидно, что это решение непрерывно по t. Докажем, что U принадлежит $C([0,T], L_2(\mathbb{R}^n))$. Пользуясь равенством Парсеваля (см. прил. А), представлением (1.26) и интегральным неравенством Минковкого

$$\|u+v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

для всех $t \in [0,T]$ получаем

$$\|U(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{U}(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \|\exp(-itA(\xi))\| \Bigg(\|\widehat{U}(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^t \exp(-i\tau A(\xi)) A_0^{-1} \widehat{f}(\tau,\xi) d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \Bigg).$$

Заметим, что

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \|\exp(-itA(\xi))\| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \|\exp(-iA(\xi))\|.$$

Норма матричной экспоненты $\|\exp(-iA(\xi))\| = C$ ограничена тогда и только тогда, когда система (1.22) гиперболична. Тогда, используя неравенство Коши-Буняковского и равенство Парсеваля, приходим к оценке

$$\|U(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le C \left(\|U_0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \tfrac{1}{\|A_0\|} \sqrt{T} C \, \|f\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \right)$$

для всех $t \in [0,T]$, из которой следует, что $U \in C([0,T], L_2(\mathbb{R}^n))$.

В силу ограниченности интервала $[0,T]$ имеем $U \in L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. Более того, пользуясь равенством Парсеваля, из системы (1.24) выводим, что $\partial_t U \in L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. Напомним, что преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье для функций из L_2 определяется как предел в L_2 соответствующих преобразований от последовательностей функций из пространства Шварца быстро убывающих функций $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Так как $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^\infty(\mathbb{R}^n)$, решение (1.27) действительно является сильным решением. ■

1.4. Существование слабого решения линейной гиперболической системы с переменными коэффициентами

Перейдем теперь к случаю переменных коэффициентов линейной задачи Коши:

$$LU = A_0(t,x)\partial_t U + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x)\partial_j U = f(t,x), \tag{1.28}$$

$$U|_{t=0} = U_0(x). \tag{1.29}$$

Будем далее предполагать, что коэффициенты системы (1.28) являются гладкими и *ограниченными* вместе со своими производными функциями, т.е. $A_\alpha(t,x) \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)\cap W^1_\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ (см. прил. А), а сама эта система является *симметрической* гиперболической (см. определение 1.1), т.е.

$$A_\alpha = A_\alpha^{\mathsf{T}} \quad \text{и} \quad A_0(t,x) > 0 \quad \forall\ (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

Для доказательства существования сильного решения задачи Коши (1.28), (1.29) мы воспользуемся классической схемой («слабое = сильное») из работы [18], т.е. вначале мы докажем, что существует *слабое* решение этой задачи (его определение будет дано ниже), а затем покажем, что это слабое решение является сильным. Доказательство существования слабого решения будет базироваться на подходящей априорной оценке для задачи (1.28), (1.29). Для вывода этой оценки нам понадобиться известная лемма Гронуола (Gronwall).

Лемма 1.1 (Гронуола). *Если для непрерывной на отрезке* $[t_0,t_1]$ *функции* $f(t)\geq 0$ *выполняется неравенство*

$$f(t) \leq K + L\int_{t_0}^{t} f(s)ds \qquad \forall\ t\in[t_0,t_1], \tag{1.30}$$

где $K, L > 0$ *— некоторые постоянные, то*

$$f(t) \leq Ke^{L(t-t_0)} \qquad \forall\ t\in[t_0,t_1]. \tag{1.31}$$

Доказательство. Так как правая часть неравенства (1.30) положительна, оно эквивалентно неравенству

$$\frac{f(t)}{K + L\int_{t_0}^{t} f(s)ds} \le 1,$$

интегрируя которое получаем

$$\int_{t_0}^{t} \frac{Lf(s)ds}{K + L\int_{t_0}^{s} f(\tau)d\tau} \le L(t - t_0).$$

Последнее неравенство переписывается так:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\left(L\int_{t_0}^{s} f(\tau)d\tau\right)}{K + L\int_{t_0}^{s} f(\tau)d\tau} = \int_{0}^{L\int_{t_0}^{t} f(s)ds} \frac{d\tau}{K+\tau} \le L(t - t_0),$$

откуда следует

$$\ln\left(K + L\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right) - \ln K \le L(t - t_0),$$

т.е.

$$K + L\int_{t_0}^{t_1} f(s)ds \le Ke^{L(t-t_0)}.$$

В итоге с учетом (1.30) получаем (1.31). ■

Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть для $f \in L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ и $U_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$ существует решение задачи Коши (1.28), (1.29), принадлежащее $H^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. Тогда для него справедлива априорная оценка*

$$\|U(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le Ce^{Ct}\left(\|U_0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)}\right) \tag{1.32}$$

для всех $t \in [0,T]$, где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от U_0 и f и зависящая только от W^1_∞-норм коэффициентов.

Доказательство. Умножая систему (1.28) скалярно на вектор $2U$ и учитывая симметричность матриц, приходим к энергетическому тождеству

$$\partial_t(A_0U,U)+\sum_{j=1}^{n}\partial_j(A_jU,U)-(\operatorname{div}\mathcal{A}\,U,U)=2(f,U),$$

где $\operatorname{div}\mathcal{A}=\partial_tA_0+\sum_{j=1}^{n}\partial_jA_j$, интегрируя которое по области $[0,t]\times\mathbb{R}^n$, получаем *интеграл энергии*

$$\int_{\mathbb{R}^n}(A_0U,U)dx-\int_{\mathbb{R}^n}(A_0U_0,U_0)dx \\ =\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left\{2(f,U)+(\operatorname{div}\mathcal{A}\,U,U)\right\}dsdx.$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что так как $U\in L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, то $U\to 0$ при $x_i\to\infty$.

В силу положительной определенности матрицы A_0 и ограниченности ее коэффициентов существует такая константа $c>0$, что

$$cU^2\leq(A_0U,U)\leq c^{-1}U^2. \qquad (1.33)$$

Тогда, используя неравенство Юнга

$$2(u,v)\leq\mu\,u^2+\mu^{-1}v^2 \qquad (\mu=\mathrm{const}>0), \qquad (1.34)$$

например, с $\mu=c$, из интеграла энергии выводим неравенство

$$\|U(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\leq c^{-2}\left(\|U_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}+\|f\|^2_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)}\right) \\ +c^{-1}\left(c+\|\operatorname{div}\mathcal{A}\|_{L_\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)}\right)\int_0^t\|U(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}ds.$$

Из этого неравенства, применяя лемму Гронуола и используя затем тривиальное неравенство $\sqrt{a^2+b^2}\leq|a|+|b|$, выводим оценку (1.32). Заметим, что здесь мы имели право воспользоваться леммой Гронуола, поскольку в силу вложения $H^1([0,T])\subset C([0,T])$ (см. прил. A) и предположения $U\in H^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ функция $g(t)=\|U(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ непрерывна на отрезке $[0,T]$. ∎

Понятно, что если не делать никаких предположений о существовании решения задачи Коши (1.28), (1.29), то, заменяя в оценке (1.32)

f на LU, эту оценку можно просто интерпретировать как свойство дифференциального оператора L. Заметим также, что путем замены t на $-t$ нетрудно показать, что в этой оценке мы можем заменить U_0 на $U|_{t=T}$ (при этом C будет уже зависеть от T). Таким образом, выводим следующее следствие из теоремы 1.2.

Следствие 1.1. *Для всех функций $u \in H^1([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ со значениями в $\mathbb{R}^N$ справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C(T) \left(\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \|Lu\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \right),$$

где $g = u|_{t=0}$ или $g = u|_{t=T}$ и $C = C(T) > 0$ — постоянная, зависящая от T и коэффициентов оператора L.

Прежде чем давать определение слабого решения, определим понятие сопряженного оператора для L.

Определение 1.5. Оператор L^*, действующий по правилу

$$L^* V = -\partial_t (A_0 V) - \sum_j^n \partial_j (A_j V),$$

называется *сопряженным* к оператору L.

Если U и V — гладкие вектор-функции из $H^1([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, то нетрудно показать, что

$$(LU, V)_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} = (L^* V, U)_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} - ((A_0 U)|_{t=0}, V|_{t=0})_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

если $V|_{t=T} = 0$. Последнее тождество как раз и приводит к идее слабого решения.

Определение 1.6. Пусть $f \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ и $U_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Функция $U \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ называется *слабым решением* задачи Коши (1.28), (1.29), если

$$(L^* V, U)_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} = (f, V)_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} + (A_0|_{t=0} U_0, V|_{t=0})_{L_2(\mathbb{R}^n)} \quad (1.35)$$

для всех $V \in \mathscr{E}$ и начальное условие $U|_{t=0} = U_0$ выполнено в смысле обобщенных функций, где

$$\mathscr{E} = \{v \in C^\infty([0,T], C_0^\infty(\mathbb{R}^n)) \, : \, v|_{t=T} = 0\}.$$

Докажем теперь существование слабого решения. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3. *Для всех* $f \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ *и* $U_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *существует слабое решение задачи Коши* (1.28), (1.29).

Доказательство. Определим линейный функционал ℓ на подпространстве $L^*\mathscr{E}$ гильбертова пространства $L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\ell(L^*V) = (f, V)_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} + (A_0|_{t=0}U_0, V|_{t=0})_{L_2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ V \in \mathscr{E}.$$

Так как

$$L^*V = -LV - \mathrm{div}\mathcal{A}\,V,$$

то очевидно, что следствие 1.1 имеет место также и для сопряженного оператора L^*. Тогда

$$\begin{aligned}
&\|V\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \le C\|L^*V\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)}, \\
&\|V|_{t=0}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le C\|L^*V\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ V \in \mathscr{E}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Здесь и далее C — положительная постоянная, и мы часто не будем делать различия между такими константами. Используя сначала неравенство Коши-Буняковского, а затем (1.36), получаем

$$\begin{aligned}
|\ell(L^*V)| \le \|f\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)}&\|V\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \\
&+ C\|U_0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\|V|_{t=0}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le C\|L^*V\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

для всех $V \in \mathscr{E}$. Таким образом, ℓ — ограниченный линейный функционал на $L^*\mathscr{E}$, и, следовательно, по теореме Хана–Банаха (см. прил. Б) его можно продолжить на все гильбертово пространство $L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. Тогда по теореме Рисса (см. прил. Б) существует такое $U \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, что

$$\ell(L^*V) = (L^*V, U)_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)}.$$

Вспоминая определение оператора ℓ, получаем (1.35).

Из (1.35) следует, что $LU = f$ в смысле обобщенных функций (производные в операторе L также понимаются в обобщенном смысле; см. прил. Б). В самом деле, пространство $\mathscr{D}([0,T] \times \mathbb{R}^n) = C_0^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ является подпространством пространства $\mathscr{E}$, но если $\varphi \in \mathscr{D}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, то не только $\varphi|_{t=T} = 0$, но и $\varphi|_{t=0} = 0$. Тогда, рассматривая равенство (1.35) для $V = \varphi$ и применяя в его левой части интегрирование по частям, получаем

$$(LU, \varphi)_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} = (f, \varphi)_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}([0,T] \times \mathbb{R}^n).$$

Так как $LU = f$ в смысле обобщенных функций, то $LU = f$ почти всюду в области $[0,T] \times \mathbb{R}^n$. Поэтому если функция LU фигурирует в интеграле Лебега, то ее можно заменить на f. Интегрируя по частям левую часть равенства (1.35) и заменяя затем LU на f, выводим

$$(A_0|_{t=0} U|_{t=0}, V|_{t=0})_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (A_0|_{t=0} U_0, V|_{t=0})_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Поскольку $V|_{t=0} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, то $A_0|_{t=0}(U|_{t=0} - U_0) = 0$ в смысле обобщенных функций. Наконец, так как матрица A_0 невырождена, то получаем начальное условие $U|_{t=0} = U_0$, которое выполняется в смысле обобщенных функций. ■

1.5. Сильное решение линейной гиперболической системы с переменными коэффициентами

Напомним, что понятие сильного решения линейной задачи Коши было дано в определении 1.4. Покажем теперь, что слабое решение, доказательство существования которого приведено в предыдущем параграфе, является сильным. Для этого нам необходимо вспомнить так называемые *усреднения* функций из L_2 (мы будем использовать стекловские усреднения; см., например, [7]) и установить одно свойство оператора усреднения, касающееся его взаимодействия с дифференциальным оператором L.

Оператор усреднения J_ε действует по правилу

$$J_\varepsilon u = j_\varepsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(y)u(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)u(y)dy \qquad (1.37)$$

для всех $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, где

$$j_\varepsilon(x) = c\varepsilon^{-n} j\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$$

— усредняющее ядро, $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$; $j(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — так называемая функция «шапочки»:

$$j(\tau) = \begin{cases} e^{1/(\tau^2-1)}, & \tau \in (-1,1), \\ 0, & |\tau| \geq 1, \end{cases}$$

постоянная $c > 0$ выбирается так, что $\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(\tau)d\tau = 1$. При этом функцию $u_\varepsilon = J_\varepsilon u$ называют *средней* (или усредняющей) функцией.

Напомним без подробных доказательств (ниже будут даны короткие комментарии) основные *свойства средних функций*:

1) Функция $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2) Оператор J_ε действует из $L_2(\mathbb{R}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$, и его норма равна 1.

3) Функция u является пределом в $L_2(\mathbb{R}^n)$ средних функций u_ε при $\varepsilon \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Свойство 1) почти очевидно и следует из того, что во втором интеграле в (1.37) можно дифференцировать под его знаком. Свойство 2) доказывается сначала для непрерывных функций, т.е. для произвольной функции $u \in C(\mathbb{R}^n)$ напрямую устанавливается, что $J_\varepsilon u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Затем мы просто аппроксимируем функции из L_2 непрерывными функциями. Свойство 3) доказывается с помощью оценки сверху нормы $\|u_\varepsilon - u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ с использованием неравенства Коши-Буняковского и последовательных замен переменных $x - y = z = \varepsilon\tau$. Подробные доказательства оставляются читателю в качестве упражнения.

Применим теперь оператор усреднения по x к вектор-функции $U(t,x) \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Можно показать, что не только средняя функция $U_\varepsilon = J_\varepsilon U$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$ для любого фиксированного $t \in [0,T]$, но и все ее частные производные по пространству произвольного порядка, т.е. $U_\varepsilon \in L_2([0,T], H^\infty(\mathbb{R}^n))$. Также имеет место следующее важное свойство оператора усреднения, которое в литературе обычно называют леммой Фридрихса [14].

Лемма 1.2 (Лемма Фридрихса). *Оператор усреднения J_ε «почти коммутирует» с дифференциальным оператором L, т.е. коммутатор*

$$LJ_\varepsilon - J_\varepsilon L$$

действует из $L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ в $L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ и для всех $U \in L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|(LJ_\varepsilon - J_\varepsilon L)U\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Для доказательства необходимо рассмотреть отдельно каждое слагаемое

$$A_\alpha \partial_\alpha (J_\varepsilon U) - J_\varepsilon(A_\alpha \partial_\alpha U) \qquad (\partial_0 = \partial_t),$$

входящее в $(LJ_\varepsilon - J_\varepsilon L)U$, а затем оценить его сверху, используя рассуждения, абсолютно аналогичные тем, что используются при доказательстве свойства 3) средних функций. Выписанную разность достаточно сначала оценить по норме в $L_2(\mathbb{R}^n)$ для любого фиксированного $t \in [0,T]$, а затем перейти к интегралу по времени. Заметим, что так как усреднение проводится по x, то при $\alpha = 0$ мы, в некотором смысле, дифференцируем по «параметру» t. Однако принципиально рассуждения для случая $\alpha = 0$ не отличаются от рассуждений для случаев $\alpha = \overline{1,n}$. Подробное доказательство леммы 1.2 оставляется читателю в качестве упражнения.

Имея в руках лемму Фридрихса, мы готовы доказать существование сильного решения задачи Коши (1.28), (1.29).

Теорема 1.4. *Для всех $f \in L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ и $U_0 \in L_2(\mathbb{R}^n)$ существует единственное сильное решение $U \in C([0,T], L_2(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши* (1.28), (1.29). *Это решение подчиняется априорной оценке* (1.32).

Доказательство. Единственность сильного решения доказывается стандартным образом и следует из оценки (1.32). Докажем сначала его существование, а затем получим априорную оценку (1.32).

Пусть $U \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ — слабое решение задачи (1.28), (1.29). Напомним, что это решение удовлетворяет системе (1.28) и начальному условию (1.29) в смысле обобщенных функций (см. определение 1.6 и доказательство теоремы 1.3). Если $U_\varepsilon = J_\varepsilon U$, то по свойству 3) средних функций $U_\varepsilon \in L_2([0,T], H^\infty(\mathbb{R}^n))$ стремится к U в $L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$. Так как U — слабое решение, имеем

$$f_\varepsilon = LU_\varepsilon = LJ_\varepsilon U = J_\varepsilon LU + (LJ_\varepsilon - J_\varepsilon L)U = J_\varepsilon f + (LJ_\varepsilon - J_\varepsilon L).$$

Последний знак равенства понимается в смысле обобщенных функций, но этого достаточно, чтобы в силу леммы 1.2 утверждать, что f_ε стремится к f в $L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$.

Поскольку по свойству 3) средних функций U_ε стремится к U в $L_2(\mathbb{R}^n)$ для каждого фиксированного $t \in [0,T]$, то $U_\varepsilon|_{t=0}$ стремится к $U_0 = U|_{t=0}$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, чтобы утверждать, что последовательность $\{U_k\} = \{U_\varepsilon\}$ ($\varepsilon = 1/k$) является той самой последовательностью из определения 1.4, из существования которой следует, что наше слабое решение U является сильным, осталось доказать, что $U_\varepsilon \in H^1([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Для этого достаточно показать, что $\partial_t U_\varepsilon \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$.

Из равенства

$$f_\varepsilon = J_\varepsilon f + (LJ_\varepsilon - J_\varepsilon L)$$

и леммы Фридрихса следует, что $f_\varepsilon \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Тогда, учитывая, что $U_\varepsilon \in L_2([0,T], H^\infty(\mathbb{R}^n))$, получаем

$$\partial_t U_\varepsilon = A_0^{-1}\Big(f_\varepsilon - \sum_{j=1}^n A_j \partial_j U_\varepsilon\Big) \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n).$$

Таким образом, U_ε принадлежит $H^1([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ и мы применяем для U_ε теорему 1.2 и получаем оценку вида (1.32):

$$\|U_\varepsilon(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq Ce^{Ct}\left(\|U_\varepsilon|_{t=0}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \|f_\varepsilon\|_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)}\right) \qquad (1.38)$$

для всех $t \in [0,T]$ и $\varepsilon \in (0,1)$. Переходя в (1.38) к пределу $\varepsilon \to 0$, приходим к оценке (1.32), из которой следует единственность сильного решения $U \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Понятно, что оценка (1.38) верна и для разности $U_\varepsilon - U_{\varepsilon'}$, откуда следует, что $\{U_\varepsilon\}$ является последовательностью Коши в $C([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$. Тогда в силу единственности предела в $L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ получаем, что $\{U_\varepsilon\}$ сходится к U в $C([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$. Отсюда следует, что решение U принадлежит $C([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$. ■

Замечание 1.2. Предполагая, что коэффициенты системы (1.28) достаточно гладкие и ограниченные вместе со своими производными, точнее, что $A_\alpha \in C^s([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap W^s_\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, можно получить аналог априорной оценки (1.32) в H^s и далее доказать существование и единственность сильного решения $U \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ для всех $f \in L_2([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$ и $U_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда в силу вложения $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^1(\mathbb{R}^n)$ при $s > \frac{n}{2} + 1$ (см. прил. А) получаем существование и единственность *классического* решения $U \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Заметим, однако, что требование $A_\alpha \in C^s([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap W^s_\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ на коэффициенты является чрезвычайно завышенным и корректность линейной задачи Коши при таком требовании не может быть затем использована для доказательства существования решения соответствующей нелинейной задачи методом сжимающих отображений. В дальнейшем нами будет получена априорная оценка в H^s при гораздо менее ограничительном требовании на коэффициенты.

1.6. Неравенство Гальярдо-Ниренберга и мультипликативные неравенства типа Мозера

Для доказательства теоремы существования решений задачи Коши для квазилинейной симметрической гиперболической системы нам понадобится подходящая априорная оценка решений соответствующей линейной задачи с минимальными требованиями на коэффициенты (см. замечание 1.2). Для получения такой оценки нам необходимо будет воспользоваться так называемыми мультипликативными *неравенствами Мозера*. Эти неравенства доказываются с помощью известного *неравенства Гальярдо-Ниренберга.* Неравенство Гальярдо-Ниренберга мы приведем здесь без доказательства.

Теорема 1.5 (неравенство Гальярдо-Ниренберга). *Для всех $u \in H^k(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \leq c_k \|u\|_{L_\infty(\Omega)}^{1-2/p} \|u\|_{H^k(\Omega)}^{2/p}, \qquad \frac{2}{p} = \frac{|\alpha|}{k}, \tag{1.39}$$

где Ω — липшицева область, $2 < p < \infty$ и $c_k > 0$ — постоянная, зависящая от k.

Мы в качестве Ω будем рассматривать области $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$, $\Omega = [0, T] \times \mathbb{R}^n$ и т.п. В следующей главе будет приведен также другой вариант неравенства Гальярдо-Ниренберга, когда в правой части вместо супремум-нормы фигурирует L_2-норма. Приведем теперь доказательства двух мультипликативных неравенств Мозера, а доказательство третьего такого неравенства мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Лемма 1.3. *Для всех $u, v \in H^s(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ и для всех α с $|\alpha| \leq s$ справедливо неравенство*

$$\|\partial^\alpha (uv)\|_{L_2(\Omega)} \leq c_s \left(\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \|v\|_{H^s(\Omega)} + \|u\|_{H^s(\Omega)} \|v\|_{L_\infty(\Omega)} \right), \tag{1.40}$$

где $c_s > 0$ — постоянная, зависящая от s.

Доказательство. Пусть $|\alpha| = s$. Случай же $|\alpha| < s$ будет следовать из случая $|\alpha| = s$. Применяя вначале неравенство Гельдера [6], затем (1.39), а также неравенство $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ [6], оцениваем:

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha (uv)\|_{L_2} &\leq c_s \sum_{|\beta|+|\gamma|=s} \|\partial^\beta u \, \partial^\gamma v\|_{L_2} \\ &\qquad \leq c_s \sum_{|\beta|+|\gamma|=s} \|\partial^\beta u\|_{L_{2s/|\beta|}} \|\partial^\gamma v\|_{L_{2s/|\gamma|}} \\ &\leq c_s \sum_{|\beta|+|\gamma|=s} c_{|\beta|} c_{|\gamma|} \|u\|_{L_\infty}^{1-|\beta|/s} \|u\|_{H^s}^{|\beta|/s} \|v\|_{L_\infty}^{1-|\gamma|/s} \|v\|_{H^s}^{|\gamma|/s} \end{aligned}$$

$$= c_s \sum_{|\beta|+|\gamma|=s} c_{|\beta|} c_{|\gamma|} \left(\|u\|_{L_\infty} \|v\|_{H^s}\right)^{|\gamma|/s} \left(\|u\|_{H^s} \|v\|_{L_\infty}\right)^{|\beta|/s}$$

$$\leq c_s \left(\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \|v\|_{H^s(\Omega)} + \|u\|_{H^s(\Omega)} \|v\|_{L_\infty(\Omega)}\right).$$

■

Используя вложение Соболева (см. прил. A), из леммы 1.3 выводим следствие.

Следствие 1.2. *Для всех $u, v \in H^s(\Omega)$ и $s > n/2$*

$$\|uv\|_{H^s(\Omega)} \leq c_s \|u\|_{H^s(\Omega)} \|v\|_{H^s(\Omega)}.$$

Используя рассуждения из доказательства леммы 1.3, получаем также следующее утверждение.

Лемма 1.4. *Для всех $u \in H^s(\Omega) \cap W^1_\infty(\Omega)$, $v \in H^{s-1}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ и для всех α с $|\alpha| \leq s$ справедливо неравенство*

$$\|\partial^\alpha(uv) - u\partial^\alpha v\|_{L_2(\Omega)} \leq c_s \big(\|u\|_{W^1_\infty(\Omega)} \|v\|_{H^{s-1}(\Omega)} + \|u\|_{H^s(\Omega)} \|v\|_{L_\infty(\Omega)}\big). \quad (1.41)$$

Доказательство. Пусть, не нарушая общности, $|\alpha| = s$. Тогда имеем

$$\|\partial^\alpha(uv) - u\partial^\alpha v\|_{L_2} \leq c_s \sum_{|\beta|+|\gamma|=s,\ |\beta|\neq 0} \|\partial^\beta u\, \partial^\gamma v\|_{L_2}$$

$$\leq c_s \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\beta'|+|\gamma|\leq s-1} \|\partial^{\beta'}(\partial_i u)\, \partial^\gamma v\|_{L_2}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям из доказательства леммы 1.3. ■

Используя элементарное неравенство

$$\sum_{|\alpha_1|+\ldots+|\alpha_\ell|\le s} \|\partial^{\alpha_1} u_1 \cdots \partial^{\alpha_\ell} u_\ell\|_{L_2} \le \mathrm{const} \|u_1 \cdots u_\ell\|_{H^s},$$

а также неравенство (1.40), можно получить следующее полезное неравенство, доказательство которого мы оставляем читателю.

Лемма 1.5. *Пусть $F = F(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Тогда для всех $u \in H^s(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|F(u)\|_{H^s(\Omega)} \le C(M) \left(1 + \|u\|_{H^s(\Omega)}\right), \tag{1.42}$$

где M — такая положительная постоянная, что

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le M.$$

Если к тому же $F(0) = 0$, то

$$\|F(u)\|_{H^s(\Omega)} \le C(M)\|u\|_{H^s(\Omega)}. \tag{1.43}$$

1.7. Существование гладкого решения линейной гиперболической системы с переменными коэффициентами

Вернемся теперь к задаче Коши (1.28), (1.29). Обсудим вначале вопрос о получении априорной оценки решений этой задачи в пространствах Соболева H^s. Эта оценка и будет служить основой для доказательства существования *классического* (гладкого) решения.

Теорема 1.6. *Пусть*

$$A_\alpha(t,x) \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$$

и пусть существует достаточно гладкое решение задачи Коши (1.28), (1.29) *при всех*

$$f \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \quad \text{и} \quad U_0 \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Тогда это решение подчиняется априорной оценке

$$\|U(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le c^{-1} e^{C(M)t}\Big(\|U_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + T^{1/2}\max_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\Big) \quad (1.44)$$

для всех $t \in [0,T]$ *и* $s > \frac{n}{2}+1$, *где* c *— постоянная из* (1.33), $C = C(M) > 0$ *— постоянная, зависящая только от*

$$M = \max_{\alpha}\max_{t\in[0,T]}\left\{\|A_\alpha(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t A_\alpha(t)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)}\right\}.$$

Доказательство. Применим к системе (1.28) оператор ∂^α с $|\alpha| \le s$:

$$\partial^\alpha LU = \partial^\alpha f.$$

Используя обозначение коммутатора $[a,b]c = a(bc) - b(ac)$, результат можно записать так:

$$L(\partial^\alpha U) = \widetilde{f} = \partial^\alpha f - [\partial^\alpha, L]\,U. \quad (1.45)$$

Используя неравенство Мозера (1.41) и вложение Соболева (см. прил. А), оцениваем коммутатор:

$$\|\,[\partial^\alpha, L]\,U(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le C\sum_{\beta=0}^{n}\Big\{\|A_\beta(t)\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}^n)}\|\partial_\beta U\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} + \|A_\beta(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\|\partial_\beta U\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\Big\} \le C\sum_{\beta=0}^{n}\|A_\beta(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\|U(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

$(\partial_0 = \partial_t)$. Тогда окончательно получаем

$$\|\,[\partial^\alpha, L]\,U(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le C(M)\|U(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.46)$$

Используя оценку (1.46) и применяя к системе (1.45) стандартные рассуждения энергетического метода из доказательства теоремы 1.2, приходим к неравенству

$$\|\partial^\alpha U(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le c^{-2}\left(\|\partial^\alpha U_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^\alpha f\|^2_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)}\right)$$
$$+ c^{-1}\left(2c + \|\operatorname{div}\mathcal{A}\|_{L_\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)} + c^{-1}C(M)\right)\int_0^t \|\partial^\alpha U(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}ds.$$

В силу вложения Соболева можно считать, что в последнем неравенстве множитель, стоящий перед интегралом ограничен некоторой постоянной $C(M)$, зависящей от M. Используя затем лемму Гронуола 1.1 и элементарное неравенство

$$\|\partial^\alpha f\|^2_{L_2([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \le T \max_{t\in[0,T]} \|\partial^\alpha f(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

получаем оценку (1.44). ■

Проводя рассуждения (которые мы опускаем), аналогичные рассуждениям из доказательства теоремы 1.4 о существовании и единственности сильного L_2-решения и используя априорную оценку (1.44), мы доказываем существование и единственность решения задачи Коши (1.28), (1.29), которое принадлежит $C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$ при условии, что выполнены предположения теоремы 1.6 на коэффициенты, правую часть и начальные данные. Более того,

$$\partial_t U = -(A_0)^{-1}\left\{\sum_{j=1}^n A_j\partial_j U - f\right\} \in C([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n)),$$

т.е. решение $U \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ и является в силу вложения Соболева (так как $s > \frac{n}{2}+1$) классическим решением. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.7. *Пусть коэффициенты, правая часть и начальные данные задачи Коши* (1.28), (1.29) *удовлетворяют предположениям теоремы 1.6. Тогда существует единственное гладкое решение этой задачи:*

$$U \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n)).$$

1.8. Локальная по времени теорема существования решения задачи Коши для гиперболической системы законов сохранения

Теперь все готово для того, чтобы доказать существование и единственность решения задачи Коши (1.14), (1.15) для гиперболической симметризуемой системы законов сохранения.

Теорема 1.8. *Пусть* $s > \frac{n}{2} + 1$ *и начальные* (1.15) *для симметрической системы* (1.14) *удовлетворяют условию гиперболичности*

$$A_0(U_0(x)) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

а также $U_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n)$. *Тогда существует такое достаточно малое* $T > 0$, *что задача Коши* (1.14), (1.15) *имеет единственное классическое решение* $U(t,x) \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, *причем*

$$U \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n)).$$

Доказательство. Рассмотрим соответствующую линейную задачу

$$L(V)U = f, \quad U|_{t=0} = U_0(x), \tag{1.47}$$

где V и f — некоторые заданные вектор-функции (основное состояние и правая часть). Тогда, следуя доказательству теоремы 1.6, оцениваем коммутатор:

$$\|\,[\partial^\alpha, L(V)]\,U(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{\beta=0}^{n} \|A_\beta(V)(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|U(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

где с учетом неравенства Мозера (1.42)

$$\|A_\beta(V)(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le C(\|V\|_{L_\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)}) \left(1 + \|V(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\right),$$

где $C > 0$ — постоянная, зависящая от супремум-нормы V. Пусть

$$V \in X^s = C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$$

и

$$\|V\|_{X^s} = \max_{t\in[0,T]} \left\{ \|V(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t V(t)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \right\} = M. \qquad (1.48)$$

Тогда, используя соболевское вложение, окончательно выводим следующую оценку для коммутатора:

$$\| [\partial^\alpha, L(V)]\, U(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C(M)\|U(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \qquad (1.49)$$

Пусть минимальное собственное значение матрицы $A_0(V)$ подчиняется неравенству

$$\min_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(A_0(V)) \geq \epsilon = \frac{1}{2} \min_{\mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(A_0(U_0)).$$

Тогда, повторяя рассуждения доказательства теоремы 1.6 и используя оценку коммутатора (1.49), получаем априорную оценку (1.44) решений линейной задачи (1.47) с константой M, определенной в (1.48), и постоянной $C(\varepsilon, \gamma) > 0$ вместо c^{-1}, где $\gamma = \|A_0(V|_{t=0})\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$. При этом постоянная $C = C(M)$ зависит также от ϵ.

Определим следующее замкнутое подмножество банахова пространства X^s:

$$\mathscr{K} = \Big\{ u \in X^s : \ \|u\|_{X^s} \leq M, \quad u(0,x) = U_0(x) \quad \text{и} \ \min_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(A_0(u)) \geq \epsilon \Big\}.$$

Рассмотрим отображение Λ такое, что $\Lambda(V) = U$, где U — решение задачи (1.47) с $f = 0$. В силу теоремы 1.7 это решение существует и единственно для всех $V \in X^s$ при $s > \frac{n}{2} + 1$. Пусть $V \in \mathscr{K}$. Тогда в силу оценки (1.44) (с $f = 0$) получаем, что $U \in \mathscr{K}$ для подходящего выбора M и достаточно малого T, т.е. $\Lambda(\mathscr{K}) \subset \mathscr{K}$. При этом, проводя некий скрупулезный анализ, при желании можно указать точную оценку сверху для T через постоянные M, ϵ и $\gamma = \|A_0(U_0)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Рассмотрим теперь $V_1, V_2 \in \mathscr{K}$. Пусть $U_i = \Lambda(V_i)$. Тогда для $U = U_1 - U_2$ получаем задачу (1.47) с $U_0 = 0$, $V = V_1$ и

$$f = (L(V_2) - L(V_1))U_2.$$

Очевидно, что для решения этой линейной задачи справедлива оценка (1.32). С учетом вложения Соболева и того факта, что $(U_1 - U_2)|_{t=0} = 0$, для данной задачи эту оценку можно переписать так:

$$\max_{t\in[0,T]} \|(U_1 - U_2)(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\epsilon,\gamma)e^{C(M,\epsilon)T}T^{1/2} \max_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Заметим, что в последнем неравенстве стоят нормы $U_1 - U_2$ и f в пространстве $X^0 = C([0,T], L_2(\mathbb{R}^n))$. Применяя теорему о среднем значении для разностей $A_\alpha(V_2) - A_\alpha(V_1)$, а также вложение Соболева, получаем

$$\|U_1 - U_2\|_{X^0} \leq C_1(M,\epsilon)e^{C(M,\epsilon)T}T^{1/2}\|U_2\|_{X^s}\|V_1 - V_2\|_{X^0}$$

$$\leq MC_1(M,\epsilon)e^{C(M,\epsilon)T}T^{1/2}\|V_1 - V_2\|_{X^0} = \delta(T,M,\epsilon)\|V_1 - V_2\|_{X^0}.$$

Для достаточно малого T постоянная $\delta(T,M,\epsilon) < 1$. При этом можно выписать окончательную оценку сверху на длину временного интервала T через M и ϵ. Таким образом Λ — сжимающее отображение в топологии пространства X^0. Тогда по теореме Банаха о неподвижной точке (см. прил. Б) существует единственное U такое, что $\Lambda(U) = U$. Это $U \in X^s$ и есть единственное решение задачи Коши (1.28), (1.29). ■

Глава 2

Существование решений с ударной волной для гиперболических законов сохранения

2.1. Задача со свободной границей с граничными условиями на поверхности ударной волны

В гл. 1 мы обсудили вопрос о существовании и единственности классического (гладкого) решения задачи Коши для гиперболических законов сохранения. В настоящей главе нас будет интересовать аналогичный вопрос, касающийся *кусочно-гладких* решений, гладкие куски которых разделены поверхностью разрыва, которая является *ударной волной* (определение ударной волны будет дано ниже).

И с физической, и с математической точек зрения необходимо, чтобы такие кусочно-гладкие решения являлись слабыми решениями системы законов сохранения (1.1). Дадим вначале определение слабого решения. Идея такого решения аналогична идее слабого L_2-решения соответствующей линейной системы (см. определение 1.6), т.е. к определению слабого решения приводит умножение системы (1.1) скалярно на произвольную финитную гладкую вектор-функцию, интегрирование по частям и рассмотрение полученного интегрального аналога системы законов сохранения.

Определение 2.1. Вектор-функция $U(t,x) \in L_2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ называется *слабым решением* системы законов сохранения (1.1), если

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ (\partial_t \psi, f^0(U)) + \sum_{j=1}^n (\partial_j \psi, f^j(U)) \Big\} dtdx = 0 \qquad (2.1)$$

для всех $\psi \in C_0^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, $\psi(t,x) \in \mathbb{R}^N$.

Несколько нарушая общность, далее для технической простоты будем считать, что система (1.1) уже переписана в симметрическом виде (1.3) с тождественным симметризатором Фридрихса $S(U) = I$ (в случае наличия дивергентных ограничений (1.5) будем полагать, что $\mathbb{S}(U) = (I, 0, \dots, 0)$). Пусть

$$\Gamma(t) = \{x_1 - \varphi(t,x') = 0\}\,, \quad x' = (x_2, \dots, x_n)$$

является гладкой гиперповерхностью в $[0,T] \times \mathbb{R}^n$. Предположим, что $\Gamma(t)$ есть поверхность *сильного разрыва* решения $U(t,x)$ системы (1.1), которое является классическим решением (1.1) с обеих сторон от разрыва Γ, т.е. на этой поверхности терпит разрыв само решение U, а не только его производные (если решение непрерывно, а его производные терпят разрыв, то $\Gamma(t)$ называется поверхностью *слабого разрыва*). Вопрос спонтанного образования сильных разрывов из гладких начальных данных в решениях гиперболических систем законов сохранения мы оставляем за рамками пособия и отсылаем читателя, например, к монографиям [9, 21].

Пусть

$$U^\pm = U \quad \text{в} \quad \Omega^\pm(t) = \{x_1 \gtrless \varphi(t,x')\},$$

а n^+ и n^- — векторы внешних нормалей к пространственно-временным областям Ω^+ и Ω^+ соответственно. Учитывая, что можно взять

$$n^- = (-\partial_t\varphi, 1, -\partial_2\varphi, \dots, -\partial_n\varphi), \quad n^+ = (\partial_t\varphi, -1, \partial_2\varphi, \dots, \partial_n\varphi),$$

умножая систему (1.1) скалярно на $\psi \in C_0^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, интегрируя полученное равенство по частям в областях гладкости U, т.е. в $\Omega^\pm$, а также используя равенство Гаусса-Остроградского, получаем

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ (\partial_t \psi, f^0(U)) + \sum_{j=1}^n (\partial_j \psi, f^j(U)) \Big\} dtdx \qquad (2.2)$$

$$+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\psi|_\Gamma, \Big\{ \partial_t\varphi\, [f^0(U)] - [f^1(U)] + \sum_{k=2}^n \partial_k\varphi\, [f^k(U)] \Big\} \Big) dtdx'$$

для всех $\psi \in C_0^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Здесь мы используем обычное обозначение $[g] = g^+_{|\Gamma} - g^-_{|\Gamma}$ для скачка некоторой регулярно разрывной функции g, т.е.

$$[f^\alpha(U)] = f^\alpha(U^+)|_\Gamma - f^\alpha(U^-)|_\Gamma.$$

Таким образом, в силу известной леммы дю Буа-Реймон [5], а также предположения о непрерывности U в областях $\Omega^\pm$, из (2.2) и определения слабого решения (см. (2.1)) получаем, что кусочно-гладкое решение U системы (1.1) (или (1.3)), терпящее разрыв на $\Gamma(t)$, будет являться слабым решением тогда и только тогда, когда в каждой точке Γ выполнены так называемые *соотношения Ренкина-Гюгонио*:

$$\partial_t\varphi\,[f^0(U)] - [f^1(U)] + \sum_{k=2}^{n} \partial_k\varphi\,[f^k(U)] = 0\,. \qquad (2.3)$$

Заметим, что соотношения (2.3) было бы более правильно называть обобщенными соотношениями Ренкина-Гюгонио, так как впервые они были получены независимо Ренкиным и Гюгонио для уравнений газовой динамики, а не для абстрактных законов сохранения. Например, нетрудно понять, что для системы Эйлера (1.6) изэнтропической газовой динамики эти соотношения записываются так:

$$\partial_t\varphi\,[\rho] - [\rho v_1] + \partial_2\varphi\,[\rho v_2] + \partial_3\varphi\,[\rho v_3] = 0,$$

$$\partial_t\varphi\,[\rho v_1] - [p + \rho v_1^2] + \partial_2\varphi\,[\rho v_1 v_2] + \partial_3\varphi\,[\rho v_1 v_3] = 0,$$

$$\partial_t\varphi\,[\rho v_k] - [\rho v_1 v_k] + \partial_2\varphi\,[\rho v_2 v_k] + \partial_3\varphi\,[\rho v_3 v_k] + \partial_k\varphi\,[p] = 0,\ \ k = 2, 3.$$

Необходимо отметить, что задача для системы (1.3) в областях $\Omega^\pm(t)$ с граничными условиями (2.3) на гиперповерхности $\Gamma(t)$ является (в математическом смысле) задачей со свободной границей.

В самом деле, функция $\varphi(t,x')$, задающая Γ, является одной из неизвестных задачи (1.3), (2.3) с соответствующими начальными данными

$$\varphi(0,x') = \varphi_0(x')\,,\ x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad U(0,x) = U_0(x),\ x \in \Omega^\pm(0). \qquad (2.4)$$

Для того чтобы свести эту задачу к задаче в фиксированной области вместо $\Omega^+(t) \cup \Omega^-(t)$, мы делаем замену («распрямление») переменных:

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x}_1 = x_1 - \varphi(t, x'), \quad \tilde{x}' = x'. \tag{2.5}$$

Эта замена сводит нашу задачу к задаче в фиксированных областях $\mathbb{R}^n_\pm = \{\tilde{x}_1 \gtrless 0,\, \tilde{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ с граничными условиями при $x_1 = 0$. Нам, с одной стороны, будет удобнее рассматривать задачу только в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$, с другой — в дальнейшем при доказательстве теоремы существования, чтобы избежать предположения о компактности начальных данных по x_1, т.е. чтобы «работать глобально» в нормальном направлении, необходимо использовать функцию срезки по x_1. В силу этого сделаем более сложную замену, а именно неизвестные $U^\pm$, гладкие в областях $\Omega^\pm(t)$, заменяются на вектор-функции

$$\widetilde{U}^\pm(t,x) = U^\pm(t, \Phi(t, \pm x_1, x'), x'),$$

гладкие в в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$, где $\Phi(t,0,x') = \varphi(t,x')$ и $\partial_1\Phi > 0$. Заметим, что для выписанной выше простой замены (2.5) $\Phi(t,x) = x_1 + \varphi(t,x')$. Пусть теперь

$$\Phi(t,x) = x_1 + \chi(x_1)\varphi(t,x'),$$

где функция срезки $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ равна 1 на $[-1,1]$ и $\|\chi'\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < 1/2$. Требование $\partial_1\Phi > 0$ будет гарантировано, если $\|\varphi\|_{L_\infty([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})} \leq 1$. Последнее будет выполнено в малом по времени, если, не нарушая общности, мы будем рассматривать начальные данные с $\|\varphi_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 1/2$.

Опуская для удобства обозначений «волны» в $\widetilde{U}^\pm$ и вводя в рассмотрение функции

$$\Phi^\pm(t,x) = \Phi(t, \pm x_1, x') = \pm x_1 + \Psi^\pm(t,x), \quad \Psi^\pm(t,x) = \chi(\pm x_1)\varphi(t,x'),$$

мы сводим задачу (1.3), (2.3), (2.4) к начально-краевой задаче:

$$\mathbb{L}(U^+, \Psi^+) = 0, \quad \mathbb{L}(U^-, \Psi^-) = 0 \quad \text{в } [0,T]\times\mathbb{R}^n_+, \tag{2.6}$$

$$\mathbb{B}(U^+, U^-, \varphi) = 0 \quad \text{на } [0,T]\times\{x_1 = 0\}\times\mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.7}$$

$$U^+|_{t=0} = U_0^+, \quad U^-|_{t=0} = U_0^- \quad \text{в } \mathbb{R}^n_+, \qquad \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \quad \text{в } \mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.8}$$

где $\mathbb{L}(U,\Psi) = L(U,\Psi)U, \quad \nabla_{t,x'}\varphi = (\partial_t\varphi, \partial_2\varphi, \dots, \partial_n\varphi),$

$$L(U,\Psi) = A_0(U)\partial_t + A_\nu(U,\Psi)\partial_1 + \sum_{k=2}^{n} A_k(U)\partial_k,$$

$$A_\nu(U^\pm,\Psi^\pm) = \frac{1}{\partial_1\Phi^\pm}\Big(A_1(U^\pm) - A_0(U^\pm)\partial_t\Psi^\pm - \sum_{k=2}^{n} A_k(U^\pm)\partial_k\Psi^\pm\Big),$$

$$\mathbb{B}(U^+,U^-,\nabla_{t,x'}\varphi) = B(U^+,U^-)\nabla_{t,x'}\varphi - [f^1(U)],$$

$$B(U^+,U^-) = \big([f^0(U)] \quad [f^2(U)] \quad \cdots \quad [f^n(U)]\big)$$

$(\partial_1\Phi^\pm = \pm 1 + \partial_1\Psi^\pm, \quad \partial_1\Phi^\pm|_{x_1=0} = \pm 1)$, при этом матрица

$$A_\nu(U^+,U^-,\nabla_{t,x'}\varphi) = \operatorname{diag}(A_\nu^+, A_\nu^-)$$

называется *граничной матрицей*, где $A_\nu^\pm = A_\nu(U^\pm,\Psi^\pm)$.

После «распрямления» переменных дивергентные ограничения (1.5) принимают вид

$$\operatorname{div}\psi_j(U^\pm,\Psi^\pm) = 0, \quad j = \overline{1,K} \quad \text{в } [0,T]\times\mathbb{R}^n_+, \tag{2.9}$$

где

$$\psi_j(U^\pm,\Psi^\pm) = (\Psi_{j,n}(U^\pm,\Psi^\pm), \Psi_j^2(U^\pm)\partial_1\Phi^\pm, \ldots, \Psi_j^n(U^\pm)\partial_1\Phi^\pm),$$

$$\Psi_{j,n}(U^\pm,\Psi^\pm) = \Psi_j^1(U^\pm) - \Psi_j^2(U^\pm)\partial_2\Psi^\pm - \ldots - \Psi_j^n(U^\pm)\partial_n\Psi^\pm.$$

Естественно сделать следующее предположение, которое должно выполняться для всех физически допустимых моделей.

Предположение 2.1. *Дивергентные ограничения* (2.9) *являются ограничениями на начальные данные* (2.8), *т.е. если* (2.9) *выполнены в начальный момент времени, то они справедливы при всех* $t > 0$.

Для того чтобы доказать существование кусочно-гладкого решения с поверхностью сильного разрыва $\Gamma(t)$ для системы законов сохранения (1.1), необходимо ответить на следующий вопрос: «Существует ли решение (U^+,U^-,φ) задачи (2.6)–(2.8), по крайней мере, локально по времени?» При этом необходимо, конечно, еще доказать единственность такого решения. В этой главе далее нас будут интересовать *нехарактеристические* сильные разрывы, т.е. *ударные волны*. Это случай, когда гиперплоскость $x_1 = 0$ не является характеристической границей для гиперболической системы (2.6). Дадим точное определение.

Определение 2.2. Если граничная матрица $A_\nu(U^+, U^-, \nabla_{t,x'}\varphi)$ такова, что $\det A_\nu|_{x_1=0} \neq 0$ для всех $(U^+, U^-, \nabla_{t,x'}\varphi) \in G$, удовлетворяющих граничным условиям (2.7), то сильный разрыв называется *ударной волной*. В противном случае сильный разрыв называют *характеристическим разрывом*. Здесь $G \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$ — некоторое пространство состояний.

Нетрудно показать, что известные *условия Лакса*

$$\begin{gathered} \lambda_k(U^+_{|x_1=0}, \mathrm{N}) < \varphi_t < \lambda_{k+1}(U^+_{|x_1=0}, \mathrm{N}), \\ \lambda_{k-1}(U^-_{|x_1=0}, \mathrm{N}) < \varphi_t < \lambda_k(U^-_{|x_1=0}, \mathrm{N}) \end{gathered} \tag{2.10}$$

достаточны для того, чтобы граничная матрица A_ν была невырождена, и необходимы для того, чтобы соответствующая линеаризованная задача с нехарактеристической границей, ассоциированная с (2.6)–(2.8) (см. следующий параграф), была правильно поставлена по числу граничных условий. Здесь λ_i $(i = \overline{1, N})$ с

$$\lambda_1(U, \mathrm{N}) \leq \ldots \leq \lambda_N(U, \mathrm{N})$$

— собственные числа характеристической матрицы $A(U, \mathrm{N})$ (см. определение 1.2); $\mathrm{N} = (1, -\partial_2\varphi, \ldots, \partial_n\varphi)$ — вектор пространственной нормали к $\Gamma(t)$; k — фиксированное целое число, $1 \leq k \leq N$, $\lambda_0 = -\infty$, $\lambda_{N+1} = +\infty$. Заметим, что при этом соответствующая ударная волна называется *ударной волной индекса* k (k-shock).

В самом деле, неравенства (2.10) можно эквивалентным образом переписать так:

$$\begin{gathered} \lambda_k(A^+_\nu|_{x_1=0}) < 0 < \lambda_{k+1}(A^+_\nu|_{x_1=0}), \\ \lambda_{k-1}(-A^-_\nu|_{x_1=0}) < 0 < \lambda_k(-A^-_\nu|_{x_1=0}), \end{gathered} \tag{2.11}$$

где $\lambda_i(A^\pm_\nu)$ $(i = \overline{1, N}$, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_N)$ — теперь собственные числа матриц $A^\pm_\nu|_{x_1=0}$. Отсюда следует, что $\det A_\nu|_{x_1=0} \neq 0$, а число *уходящих* характеристических направлений плюс единица равно числу граничных условий N в (2.7):

$$n^+(A_\nu^+|_{x_1=0}) + n^-(-A_\nu^-|_{x_1=0}) + 1 = (N-k) + (k-1) + 1 = N\,.$$

Здесь n^+ (n^-) — число положительных (отрицательных) собственных чисел соответствующей матрицы с учетом кратности, $n^+ + n^-$ — число уходящих характеристических направлений, а «+1» требуется, поскольку одно из граничных условий необходимо для определения функции $\varphi(t,x')$.

Заметим, что если условия Лакса нарушены, т.е. число граничных условий в (2.7) больше или меньше, чем нужно, то соответствующая линеаризованная задача будет некорректна. В частности, если число граничных условий меньше, чем нужно, то это доказывается построением примера некорректности типа примера Адамара.

2.2. Постановка линеаризованной задачи

Выпишем теперь соответствующую линеаризованную задачу для исходной нелинейной задачи (2.6)–(2.8). Прежде всего рассмотрим истинную линеаризацию в том смысле, что при линеаризации будем удерживать все младшие члены. Итак, пусть

$$(V^+(t,x), V^-(t,x), \theta(t,x'))$$

— заданная вектор-функция, где $V^\pm \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n_+)\cap W^1_\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n_+)$, $\theta \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})\cap W^1_\infty([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})$. В частности, эта вектор-функция, которую далее будем называть *основным состоянием*, может быть произвольным решением задачи (2.6)–(2.8) (при условии его существования, которое еще не доказано). Будем также использовать обозначения

$$\phi^\pm(t,x) = \pm x_1 + \psi^\pm(t,x), \quad \psi^\pm(t,x) = \chi(\pm x_1)\theta(t,x')$$

и, не нарушая общности, предполагать, что $\|\theta\|_{L_\infty([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})} \le 1$.

Как и в определении 1.3, под линеаризацией будем понимать первую вариацию нелинейной задачи, т.е. рассмотрим первую вариацию функционалов $\mathbb{L}$ и $\mathbb{B}$ в основном состоянии:

$$\mathbb{L}'(V^\pm,\psi^\pm)(U^\pm,\Psi^\pm) = \frac{d}{d\varepsilon}\mathbb{L}(U^\pm_\varepsilon,\Psi^\pm_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = f^\pm \quad \text{при } x\in\mathbb{R}^n_+,$$

$$\mathbb{B}'(V^+,V^-,\theta)(U^+,U^-,\varphi)=\frac{d}{d\varepsilon}\mathbb{B}(U^+_\varepsilon,U^-_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)|_{\varepsilon=0}=g\quad \text{при } x_1=0,$$

где $U^\pm_\varepsilon=V^\pm+\varepsilon\,U^\pm$, $\varphi_\varepsilon=\theta+\varepsilon\,\varphi$ и

$$\Psi^\pm_\varepsilon(t,x)=\chi(\pm x_1)\varphi_\varepsilon(t,x'),\quad \Phi^\pm_\varepsilon(t,x)=\pm x_1+\Psi^\pm_\varepsilon(t,x).$$

Здесь мы, как обычно, вводим в рассмотрение правые части $f^\pm(t,x)$ и $g(t,x')$, необходимые для того, чтобы использовать априорные оценки решений линейной задачи для доказательства существования решений исходной нелинейной задачи.

Несложно вычислить точный вид операторов линеаризованной задачи:

$$\begin{aligned}&\mathbb{L}'(V^\pm,\psi^\pm)(U^\pm,\Psi^\pm)\\&\qquad=L(V^\pm,\psi^\pm)U^\pm+\mathcal{C}(V^\pm,\psi^\pm)U^\pm-\left\{L(V^\pm,\psi^\pm)\Psi^\pm\right\}\partial_1V^\pm,\end{aligned}$$

$$\mathbb{B}'(V^+,V^-,\theta)(U^+,U^-,\varphi)=B(V^+,V^-)\nabla_{t,x'}\varphi-[A_\nu(V,\psi)U],\ x_1=0,$$

где

$$\begin{aligned}[A_\nu(V,\psi)U]&=\big(A_\nu(V^+,\psi^+)U^++A_\nu(V^+,\psi^+)U^-\big)\,|_{x_1=0}\\&=[A_1(V)U]-\partial_t\theta\,[A_0(V)U]-\sum_{k=2}^n\partial_k\theta\,[A_k(V)U]\end{aligned}$$

($[A_\alpha(V)U]=(A_\alpha(V^+)U^+-A_\alpha(V^-)U^-)\,|_{x_1=0}$), а матрицы $\mathcal{C}(V^+,\psi^+)$ и $\mathcal{C}(V^-,\psi^-)$ определяются так:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(V^\pm,\psi^\pm)U&=(U,\nabla_uA_0(V^\pm))\partial_tV^\pm\\&\quad+(U,\nabla_uA_\nu(V^\pm,\psi^\pm))\partial_1V^\pm+\sum_{k=2}^n(U,\nabla_uA_k(V^\pm))\partial_kV^\pm.\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что дифференциальный оператор линеаризованной системы имеет первый порядок для φ, что может принести определенное беспокойство при получении априорных оценок для линеаризованной задачи. Для того чтобы преодолеть эту трудность, мы переходим к «хорошему неизвестному» Алиньяка [11]:

$$\dot{U}^+ = U^+ - \frac{\Psi^+}{\partial_1 \phi^+}\,\partial_1 V^+, \quad \dot{U}^- = U^- - \frac{\Psi^-}{\partial_1 \phi^-}\,\partial_1 V^-. \tag{2.12}$$

В терминах (2.12) линейная задача принимает вид

$$L(V^\pm,\psi^\pm)\dot{U}^\pm + \mathcal{C}(V^\pm,\psi^\pm)\dot{U}^\pm - \frac{\Psi^\pm}{\partial_1\phi^\pm}\,\partial_1\big\{\mathbb{L}(V^\pm,\psi^\pm)\big\} = f^\pm, \tag{2.13}$$

$$B(V^+_{|x_1=0}, V^-_{|x_1=0})\nabla_{t,x'}\varphi - [A_\nu(V,\psi)\dot{U}] + \varphi[A_\nu(V,\psi)\partial_1 V] = g. \tag{2.14}$$

Для того, чтобы доказать локальную теорему существования и единственности для нелинейной задачи (2.6)–(2.8), обладающей так называемым *строго диссипативным симметризатором* (его определение дается ниже), с помощью метода сжимающих отображений, нет необходимости рассматривать истинную линеаризацию. Достаточно удерживать только главную часть у дифференциальных операторов линеаризованных уравнений, т.е. можно опустить все младшие члены в (2.13), (2.14). В то же время необходимо помнить, что в случае применения метода Нэша-Мозера необходимо выполнять истинную линеаризацию, т.е. находить первую вариацию. Линеаризованные уравнения, ассоциированные с (2.6), (2.7) и полученные отбрасыванием младших членов в (2.13), (2.14) и точек над неизвестными, имеют вид

$$L(V^\pm,\psi^\pm)U^\pm = f^\pm \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^n_+, \tag{2.15}$$

$$B(V^+,V^-)\nabla_{t,x'}\varphi - [A_\nu(V,\psi)U] = g \quad \text{при } x_1 = 0. \tag{2.16}$$

Определяющее значение для анализа корректности линеаризованной задачи, а также для последующего нелинейного анализа имеет линейная задача с *постоянными («замороженными») коэффициентами* для случая плоского (в геометрическом смысле) сильного разрыва. Для плоского разрыва функция $\theta(t,x')$ линейная:

$$\theta(t,x') = \sigma_0 t + (\sigma', x'), \quad \sigma = (\sigma_0,\sigma')\in\mathbb{R}^n\,. \tag{2.17}$$

Постоянные векторы $V^\pm = \mathrm{const}$ соответствуют кусочно-постоянному решению

$$U = \begin{cases} V^+, & x_1 > \sigma_0 t + (\sigma', x'), \\ V^-, & x_1 < \sigma_0 t + (\sigma', x') \end{cases}$$

задачи (1.1), (2.3). В этом случае уравнения (2.15), (2.16) имеют постоянные коэффициенты (мы также полагаем, что $\chi(x_1) \equiv 1$), т.е.

$$L^{\pm} U^{\pm} = f^{\pm} \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.18}$$

$$B \nabla_{t,x'} \varphi - [A_\nu U] = g \quad \text{при } x_1 = 0, \tag{2.19}$$

где

$$L^{\pm} = L(V^{\pm}, \sigma) = A_0^{\pm} \partial_t + A_\nu^{\pm} \partial_1 + \sum_{k=2}^{n} A_k^{\pm} \partial_k, \qquad A_\alpha^{\pm} = A_\alpha(V^{\pm}),$$

$$A_\nu^{\pm} = \pm A_1^{\pm} \mp \sigma_0 A_0^{\pm} \mp \sum_{k=2}^{n} \sigma_k A_k^{\pm}, \;\; [A_\nu U] = [A_1 U] - \sigma_0 [A_0 U] - \sum_{k=2}^{n} \sigma_k [A_k U],$$

$$[A_\alpha U] = \left(A_\alpha^+ U^+ - A_\alpha^- U^- \right) |_{x_1 = 0}, \quad B = B(V^+, V^-).$$

2.3. Строго диссипативный p-симметризатор и априорная оценка для задачи с постоянными коэффициентами

Будем предполагать, что функции $\Psi_j^i(U)$ в (1.5) *линейные*. По крайней мере, это так для большинства известных конкретных примеров гиперболических систем с дивергентными ограничениями. В то же время это предположение делается только лишь для упрощения нижеследующих рассуждений и может быть легко опущено. Предполагая линейность $\Psi_j^i(U)$, а также то, что основное состояние удовлетворяет дивергентным ограничениям (2.9), линеаризованные ограничения (2.9) после замены неизвестных (2.12) (точки над U мы опять опускаем) принимают вид

$$\operatorname{div} \psi_j(U^{\pm}, \psi^{\pm}) = 0, \quad j = \overline{1, K}, \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.20}$$

Для случая постоянных коэффициентов коэффициентами в (2.20) являются компоненты постоянного вектора $\sigma' = (\sigma_2, \dots, \sigma_n)$, а именно

$$\operatorname{div}\psi_j(U^{\pm},\sigma')=0, \tag{2.21}$$

$$\psi_j(U^{\pm},\sigma')=((\Psi_j(U^{\pm}),\mathrm{n}),\pm\Psi_j^2(U^{\pm}),\dots,\pm\Psi_j^n(U^{\pm})),\quad \mathrm{n}=(1,-\sigma').$$

Для фиксированного неотрицательного целого числа p введем обозначение

$$W_p^{\pm}=(\partial^{\alpha^1}U^{\pm},\dots,\partial^{\alpha^d}U^{\pm}),$$

где

$$d=C^p_{n+p},\quad |\alpha^i|=p,\quad i=\overline{1,d};\quad \partial^{\alpha^i}U^{\pm}\neq\partial^{\alpha^j}U^{\pm}\quad \text{при}\quad i\neq j,$$

где $\partial^{\alpha}=\partial_t^{\alpha_0}\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$, $\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$. В частности, $W_0^{\pm}=U^{\pm}$, $W_1^{\pm}=(U_t^{\pm},U_{x_1}^{\pm},\dots,U_{x_n}^{\pm})$, $W_2^{\pm}=(U_{tt}^{\pm},U_{tx_1}^{\pm},\dots,U^{\pm}x_{n-1}x_n,U_{x_nx_n}^{\pm})$. Ниже мы будем обычно опускать индекс p, т.е. $W^{\pm}=W_p^{\pm}$.

Дифференцируя системы (2.18) (если $p\neq 0$) и учитывая соотношения (2.21), получаем

$$P^{\pm}\widetilde{L}^{\pm}W^{\pm}+\sum_{j=1}^{K}\sum_{|\alpha|=p}R_{j,\alpha}^{\pm}\operatorname{div}\left(\psi_j(\partial^{\alpha}U^{\pm},\sigma')\right)=P^{\pm}\widetilde{f}^{\pm} \tag{2.22}$$

($x\in\mathbb{R}^n_+$), где

$$\widetilde{L}^{\pm}=I_d\otimes L^{\pm},\quad \widetilde{f}^{\pm}=(\partial^{\alpha^1}f^{\pm},\dots,\partial^{\alpha^d}f^{\pm}),$$

I_d — единичная матрица порядка d; $R_{j,\alpha}^{\pm}=R_{j,\alpha}^{\pm}(V^{\pm},\sigma)$ и $P^{\pm}=P(V^{\pm},\sigma)$ — соответственно векторы и невырожденные матрицы порядка Nd.

Системы (2.22) можно переписать так:

$$\mathcal{L}(V^{\pm},\sigma)W^{\pm}=\mathcal{F}^{\pm},\quad x\in\mathbb{R}^n_+, \tag{2.23}$$

где

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(V^{\pm},\sigma)=\mathcal{A}_0^{\pm}\partial_t+\sum_{j=1}^{n}\mathcal{A}_j^{\pm}\partial_j,\quad \mathcal{F}^{\pm}=\mathcal{F}^{\pm}(V^{\pm},\sigma)=P^{\pm}\widetilde{f}^{\pm};$$

$\mathcal{A}_i^{\pm}=\mathcal{A}_i(V^{\pm},\sigma)$, $i=\overline{0,n}$ — матрицы порядка Nd (их точный вид определяется из (2.22)). Системы (2.23) являются, в некотором смысле, «*вторичными симметризациями высокого порядка*» симметрических систем (2.18), если матрицы $\mathcal{A}_i^{\pm}$ снова симметрические.

Граничные условия для систем (2.23) получаются «тангенциальным» дифференцированием (по t и по x') условий (2.19), и, более того, системы (2.18), продифференцированные $p-1$ раз и рассматриваемые при $x_1 = 0$, также могут использоваться в качестве граничных условий. К сожалению, граничные условия для (2.23) не могут быть в *общем случае* выписаны в конкретном виде, но ясно, что правые части в них будут зависеть от $\partial^{\alpha}_{t,\mathrm{x}'} g$ при $|\alpha| = p$ и $\partial^{\beta} f^{\pm}|_{x_1=0}$ при $|\beta| = p-1$, где $\partial^{\alpha}_{t,\mathrm{x}'} = \partial_t^{\alpha_0}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Теперь все готово, чтобы ввести понятие строго диссипативного p-симметризатора [26].

Определение 2.3. Набор матриц и векторов

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}(V^+, V^-, \sigma) = \Big\{P^+, P^-, \big\{R^+_{j,\alpha}\big\}_{j=\overline{1,K},|\alpha|=p}, \big\{R^-_{j,\alpha}\big\}_{j=\overline{1,K},|\alpha|=p}\Big\}$$

будем называть *диссипативным p-симметризатором* задачи (2.18), (2.19), если матрицы $\mathcal{A}_i^{\pm}$ в (2.23) симметрические и существует открытое подмножество D пространства состояний G такое, что

$$\mathcal{A}_0^+ > 0, \quad \mathcal{A}_0^- > 0 \tag{2.24}$$

и

$$-(\mathcal{A}_1^+ W^+_{|x_1=0}, W^+_{|x_1=0}) - (\mathcal{A}_1^- W^-_{|x_1=0}, W^-_{|x_1=0}) \geq 0$$

для всех $(V^+, V^-, \sigma) \in D$ и всех W, удовлетворяющих граничным условиям для систем (2.23) при $g = 0$. Набор $\mathbb{S}$ будем называть *строго диссипативным p-симметризатором* задачи (2.18), (2.19), если он является диссипативным p-симметризатором этой задачи и существует такая фиксированная положительная постоянная δ, что

$$\begin{aligned}
-&(\mathcal{A}_1^+ W^+_{|x_1=0}, W^+_{|x_1=0}) - (\mathcal{A}_1^- W^-_{|x_1=0}, W^-_{|x_1=0}) \geq \delta\Big(|\widetilde{W}^+_{|x_1=0}|^2 \\
&+ |\widetilde{W}^-_{|x_1=0}|^2\Big) - \delta^{-1} C\Big\{\sum_{|\alpha|=p} |\partial^{\alpha}_{t,\mathrm{x}'} g|^2 + \sum_{|\beta|=p-1} \big|\partial^{\beta} f|_{x_1=0}\big|^2\Big\},
\end{aligned} \tag{2.25}$$

где $\widetilde{W}^{\pm}$ — проекция $W^{\pm}$ на ортогональное дополнение к $\ker\mathcal{A}_1^{\pm}$ (для случая ударных волн $\widetilde{W}^{\pm} = W^{\pm}$), $|\partial^{\beta} f|_{x_1=0}|^2 = |\partial^{\beta} f^+|_{x_1=0}|^2 + |\partial^{\beta} f^-|_{x_1=0}|^2$; здесь и далее $C = C(V^+, V^-, \sigma)$ — положительная постоянная.

Замечание 2.1. Для ударных волн индекса 1 матрица $-A_\nu^- > 0$ (см. (2.11)), и поэтому строго диссипативный p-симметризатор может быть взят в виде

$$\mathbb{S} = \left\{P^+, \gamma I_m, \left\{R_{j,\alpha}^+\right\}_{j=\overline{1,K},|\alpha|=p}, 0, \ldots, 0\right\}, \quad m = Nd,$$

где $\gamma > 0$ — достаточно большая постоянная, P^+, $R_{j,\alpha}^+$ — такие, что матрицы $\mathcal{A}_\alpha^+$ симметрические, $\mathcal{A}_0^+ > 0$ и выполнено ослабленное условие (2.25):

$$-(\mathcal{A}_1^+ W^+, W^+)|_{x_1=0} \geq \delta |W_{|x_1=0}^+|^2$$

$$-\delta^{-1} C \left\{ \sum_{|\alpha|=p} |\partial_{t,\mathrm{x}'}^\alpha g|^2 + \sum_{|\beta|=p-1} \left|\partial^\beta f|_{x_1=0}\right|^2 + |W_{|x_1=0}^-|^2 \right\}.$$

Благодаря выбору γ и условию $\mathcal{A}_1^- = \gamma(I_d \otimes A_\nu^-) > 0$ из последнего неравенства следует (2.25) с некоторым подходящим δ, т.е. системы (2.23) — симметрические t-гиперболические, а граничные условия для них *строго диссипативные.*

К сожалению, не существует общей схемы построения p-симметризаторов, и введенное определение не имело бы никакого практического смысла, если бы не существовало многочисленных конкретных примеров таких симметризаторов. Для ударных волн строго диссипативный симметризатор был впервые построен Блохиным [1] для уравнений газовой динамики. Им был, по существу, построен строго диссипативный 2-симметризатор, хотя само понятие p-симметризатора и не использовалось (оно было недавно введено в [26]). Построение строго диссипативного 2-симметризатора для ударных волн в магнитной гидродинамике описано в монографии [3]. Ранее строго диссипативные симметризаторы были также построены, например, для ударных волн в релятивистской газовой динамике, сверхтекучей жидкости, радиационной гидродинамике и т.д. Примером построения диссипативного симметризатора для характеристического разрыва является недавно построенный диссипативный (но не строго диссипативный) 0-симметризатор для тангенциального разрыва в магнитной гидродинамике [25, 27].

Мы не будем описывать здесь конкретные примеры p-симметризаторов для ударных волн, а ограничимся лишь некоторым «модельным» примером для волнового уравнения. Этот пример является, однако, достаточно показательным, поскольку, с одной стороны, все ранее построенные строго диссипативные симметризаторы для ударных волн как раз и основаны на использовании симметризаций волнового уравнения, а с другой — для этого примера удается построить симметризатор для всей параметрической области *равномерного условия Лопатинского*. Что касается понятий условия Лопатинского и равномерного условия Лопатинского для линейных гиперболических систем, то мы отсылаем читателя к учебному пособию [2]. Здесь мы отметим лишь, что для широкого класса начально-краевых задач для линейных гиперболических систем выполнение равномерного условия Лопатинского эквивалентно сильной корректности соответствующей задачи. Под сильной корректностью понимается обычная корректность при условии, что начальные данные и правые части имеют ту же гладкость, что и само решение. Например, для строго гиперболических систем такая эквивалентность доказана в работе Крайса [17].

В связи с этим нужно отметить, что построение p-симметризатора дает, вообще говоря, только достаточное условие сильной корректности. Однако пример для волнового уравнения, который мы сейчас собираемся описать, как раз и является тем удачным случаем, когда достаточное условие корректности, найденное с помощью симметризатора, является необходимым, т.е. совпадает с равномерным условием Лопатинского.

Итак, рассмотрим начально-краевую задачу в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ для двумерного волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} \quad \text{при } x_1 > 0, \tag{2.26}$$

$$u_t + au_{x_1} + bu_{x_2} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \tag{2.27}$$

где a и b — вещественные постоянные. Для простоты мы рассматриваем случай однородного уравнения и однородного граничного условия. Известно, что граничное условие (2.27) удовлетворяет равномерному условию Лопатинского во внутренности полукруга

$$|b| < 1, \quad a < 0. \tag{2.28}$$

Именно в области (2.28) выписывается априорная оценка для задачи (2.26), (2.27) без потери гладкости от начального условия. Эта оценка может быть получена путем построения симметризатора Крайса [17]. Обсудим теперь ее вывод с помощью построения строго диссипативного симметризатора.

Задача (2.26), (2.27) легко переписывается в виде задачи для симметрической гиперболической системы для вектора $U = (u_1, u_2, u_3) = (u_t, u_{x_1}, u_{x_2})$:

$$U_t + A_1 U_{x_1} + A_2 U_{x_2} = 0 \quad \text{при } x_1 > 0, \tag{2.29}$$

$$MU = 0 \quad \text{при } x_1 = 0 \tag{2.30}$$

с

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \end{pmatrix}.$$

В терминах компонент вектора U тривиальное соотношение $u_{x_1x_2} = u_{x_2x_1}$, которое выполняется для классических решений (2.26), (2.27), записывается так:

$$\operatorname{div} \Psi(U) = 0, \quad \Psi = (u_3, -u_2). \tag{2.31}$$

Забудем теперь о связи между задачами (2.26),(2.27) и (2.29), (2.30). Тогда уравнение (2.31) является дивергентным ограничением на начальные данные для задачи (2.29), (2.30). Легко показать, что если (2.31) выполнено при $t = 0$, то оно выполняется на решениях этой задачи при всех $t > 0$.

Докажем теперь, что задача (2.29), (2.30) имеет строго диссипативный 0-симметризатор $\mathbb{S} = \{P, R\}$ с

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_1 & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_3 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad p_i \in \mathbb{R},$$

и параметрическая область D (см. определение 2.3 и замечание 2.1) совпадает с полукругом (2.28). Применяя $\mathbb{S}$ к (2.29)–(2.31), приходим к системе

$$PU_t+PA_1U_{x_1}+PA_2U_{x_2}+R\mathrm{div}\,\Psi=\mathcal{A}_0U_t+\mathcal{A}_1U_{x_1}+\mathcal{A}_2U_{x_2}=0, \quad (2.32)$$

где $\mathcal{A}_0=P>0$, если $p_1>0$ и $p_1^2-p_2^2-p_3^2>0$. При этом

$$\mathcal{A}_1=\begin{pmatrix} -p_2 & -p_1 & 0\\ -p_1 & -p_2 & -p_3\\ 0 & -p_3 & p_2\end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2=\begin{pmatrix} -p_3 & 0 & -p_1\\ 0 & p_3 & -p_2\\ -p_1 & -p_2 & -p_3\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\mathcal{A}_0=\mathcal{T}^*\{I_2\otimes\mathcal{H}\}\mathcal{T}\quad(\mathcal{A}_0>0$, если $\mathcal{H}>0)$,

$$\mathcal{A}_1=\mathcal{T}^*\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\otimes\mathcal{H}\right\}\mathcal{T}, \quad \mathcal{A}_2=\mathcal{T}^*\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\otimes\mathcal{H}\right\}\mathcal{T},$$

$$\mathcal{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}=\begin{pmatrix} p_1-p_3 & -p_2\\ -p_2 & p_1+p_3\end{pmatrix}.$$

Опуская простые вычисления, получаем

$$-(\mathcal{A}_1U,U)|_{x_1=0}=-\left(\{\mathcal{S}^*\mathcal{H}+\mathcal{H}\mathcal{S}\}V_2,V_2\right)|_{x_1=0}, \quad (2.33)$$

где

$$V=\mathcal{T}U=\begin{pmatrix} V_1\\ V_2\end{pmatrix}, \quad V_1|_{x_1=0}=\mathcal{S}V_2|_{x_1=0}, \quad \mathcal{S}=\begin{pmatrix} \dfrac{2a}{1-b} & \dfrac{b+1}{b-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Все собственные числа матрицы $\mathcal{S}$ лежат в левой полуплоскости ($\Re\lambda_i(\mathcal{S})<0$) при условии, что выполнено равномерное условие Лопатинского (2.28). В этом случае известно, что матричное уравнение Ляпунова

$$\mathcal{S}^*\mathcal{H}+\mathcal{H}\mathcal{S}=-G \quad (2.34)$$

имеет единственное решение $\mathcal{H}$ для любой симметрической матрицы G, и если $G>0$, то $\mathcal{H}=\mathcal{H}^*>0$. Предполагая, что $G=G^*>0$ и учитывая соотношение $V=\mathcal{T}U$ и граничные условия $V_1|_{x_1=0}=\mathcal{S}V_2|_{x_1=0}$, получаем

$$-(\mathcal{A}_1 U, U)|_{x_1=0} = (GV_2, V_2)\,|_{x_1=0} \geq \delta |U|_{x_1=0}|^2,$$

где $\delta > 0$ — постоянная, зависящая от норм матриц G, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$. Таким образом, $\mathbb{S}$ — строго диссипативный 0-симметризатор.

Мы не будем сейчас обсуждать вопрос о выводе априорной оценки для задачи (2.29), (2.30), так как ниже получим ее в общем случае и для более сложных граничных условий, а именно — для ударных волн, в предположении, что линеаризованная задача обладает строго диссипативным p-симметризатором.

Сделаем следующее предположение, которое выполняется для ударных волн для всех известных конкретных моделей.

Предположение 2.2. *Пусть для граничных условий* (2.19) $\operatorname{rank} B = n$, *т.е. векторы* $[f^0(V)], \dots, [f^n(V)]$ *линейно независимы.*

Если выполнено предположение 2.2, то в рамках терминологии псевдо- или парадифференциальных операторов символ свободной границы (в нашем случае фронта ударной волны) называется эллиптическим. В следующей главе мы будем рассматривать задачу со свободной границей с неэллиптическим символом.

Из предположения 2.2 следует, что $n \leq N$ и существует такая невырожденная $\mathcal{M} = \mathcal{M}(V^+, V^-)$ порядка N, что

$$\mathcal{M}B = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{\mathrm{I}} \\ \mathcal{M}^{\mathrm{II}} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{M}^{\mathrm{I}}$ и $\mathcal{M}^{\mathrm{II}}$ — матрицы порядков $n \times N$ и $(N-n) \times N$ соответственно. Тогда граничные условия (2.19) могут быть разбиты на две группы:

$$\nabla_{t,x'}\varphi = \mathcal{M}^{\mathrm{I}}[A_\nu U] + \mathcal{M}^{\mathrm{I}} g, \quad x_1 = 0, \tag{2.35}$$

$$-\mathcal{M}^{\mathrm{II}}[A_\nu U] = \mathcal{M}^{\mathrm{II}} g, \quad x_1 = 0. \tag{2.36}$$

Заметим, что посредством перекрестного дифференцирования можно в принципе исключить фронт φ из соотношений (2.35). В результате такой процедуры мы получим граничные условия первого порядка.

Получим теперь базовую априорную оценку для линейной задачи с постоянными коэффициентами при условии, что она обладает строго диссипативным симметризатором.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия Лакса* (2.11), *а также все предположения, сделанные выше. Предположим также, что задача* (2.18), (2.19) *имеет строго диссипативный p-симметризатор. Тогда для этой задачи имеет место априорная оценка*

$$\begin{aligned}|||U(t)|||_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|U|_{x_1=0}\|_{H^p([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})} + \|\varphi\|_{H^{p+1}([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})} \\ \leq C\big\{|||U_0|||_{H^p(\mathbb{R}^n_+)} + \|\varphi_0\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ + \|f\|_{H^p([0,T]\times\mathbb{R}^n_+)} + \|g\|_{H^p([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})}\big\} \quad (2.37)\end{aligned}$$

для всех $t\in[0,T]$. *Здесь* $|||(\cdot)(t)|||^2_{H^k} = \sum_{j=0}^k \|\partial_t^j(\cdot)(t)\|^2_{H^{k-j}}$, $U = (U^+,U^-)$, $f=(f^+,f^-)$; T *— положительная постоянная,* $C=C(T)$ *— положительная константа, независящая от начальных данных и правых частей.*

Доказательство. Умножая скалярно системы (2.23) на векторы $2W^\pm$ соответственно и интегрируя результаты по области $[0,t]\times\mathbb{R}^n_+$, мы выводим *тождество интеграла энергии*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+}(\mathcal{A}_0W,W)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n_+}(\mathcal{A}_0W|_{t=0},W|_{t=0})\,dx - \int_0^t\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big((\mathcal{A}_1^+W^+, \\ W^+) + (\mathcal{A}_1^-W^-,W^-)\Big)\Big|_{|x_1=0}dx' = 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n_+}(\mathcal{F},W)\,dx = 0, \quad (2.38)\end{aligned}$$

где $W=(W^+,W^-)$, $\mathcal{A}_0 = \operatorname{diag}(\mathcal{A}_0^+,\mathcal{A}^-)$, $\mathcal{F}=(\mathcal{F}^+,\mathcal{F}^-)$. Учитывая (2.24), (2.25), из (2.38) выводим

$$\begin{aligned}I_1(t) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|W|_{x_1=0}|^2\,dx'dt \\ \leq C\Big\{I_1(0) + J(T) + \int_0^t I_1(s)\,ds\Big\}, \quad (2.39)\end{aligned}$$

где

$$I_1(t) = \|W(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n_+)}, \quad J(T) = \|g\|^2_{H^p([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})} + \|f\|^2_{H^p([0,T]\times\mathbb{R}^n_+)}.$$

Если $p \neq 0$, мы используем элементарное неравенство

$$I_0(t) \leq I_0(0) + \int_0^t I(s)ds, \tag{2.40}$$

следующее из тривиального соотношения

$$\frac{d}{dt} I_0(t) = 2\int_{\mathbb{R}^n_+} (Y, Y_t)\, dt,$$

где $I(t) = I_0(t) + I_1(t)$, $Y = (W_0, \dots, W_{p-1})$, $W_\alpha = (W_\alpha^+, W_\alpha^-)$, $p \geq 1$,

$$I_0(t) = |||U(t)|||^2_{H^{p-1}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Из неравенств (2.39) и (2.40) следует

$$I(t) \leq C\Big\{I(0) + J(T) + \int_0^t I(s)ds\Big\}.$$

Применяя лемму Гронуола, получаем

$$I(t) \leq C(I(0) + J(T))\,, \quad 0 \leq t \leq T\,. \tag{2.41}$$

Используя теорему о следе (см. прил. А), имеем

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Y|_{x_1=0}|^2\, dx'dt \leq \int_0^t I(s)ds. \tag{2.42}$$

Складывая (2.39) с (2.42) и учитывая (2.41), получаем

$$\|U|_{x_1=0}\|^2_{H^p([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})} \leq C(I(0) + J(T)). \tag{2.43}$$

Используя (2.43), граничные условия (2.35) и элементарное неравенство для φ аналогичное (2.40), мы оцениваем возмущение фронта φ:

$$\|\varphi\|^2_{H^{p+1}([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})} \le C\left\{I(0)+J(T)+\|\varphi_0\|^2_{H^{p+1}(\mathbb{R}^{n-1})}\right\}. \qquad (2.44)$$

Оценки (2.41), (2.43) и (2.44) дают требуемую априорную оценку (2.37). ■

2.4. Локальная теорема существования и единственности для нелинейной задачи

Для того чтобы доказать теорему существования и единственности для исходной нелинейной задачи (2.6)–(2.8), необходимо получить подходящую априорную оценку для линеаризованной задачи с переменными коэффициентами. Так как мы собираемся применять метод сжимающих отображений, то достаточно рассмотреть линейную задачу (2.15) (2.16). Говоря о p-симметризаторе для соответствующей задачи с «замороженными» коэффициентами, будем предполагать, что $p < [\frac{n}{2}] + 2$. Это предположение выполняется для всех известных конкретных примеров. Например, для ударных волн в газовой динамике и магнитной гидродинамике $p = 2 < [\frac{n}{2}] + 2 = 3$ ($n = 2$ или $n = 3$).

Пусть

$$X_k([0,T],\mathbb{R}^n_+) = \bigcap_{j=0}^{k} C^j([0,T], H^{k-j}(\mathbb{R}^n_+))$$

с нормой $\|\cdot\|_{X_k} = \max\limits_{t\in[0,T]} |||(\cdot)(t)|||_{H^k}$. Введем в рассмотрение пространство

$$Z^s_T = X_s([0,T],\mathbb{R}^n_+)\times H^{s+1}([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})$$

с нормой

$$\mathcal{N}^s_T(u,\omega) = \|u\|_{X_s([0,T],\mathbb{R}^n_+)} + \|u|_{x_1=0}\|_{H^s([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})} + \|\omega\|_{H^{s+1}([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})}$$

для вектор-функции $(u(t,x),\omega(t,x')) \in \mathbb{R}^{2N}\times\mathbb{R}$, где s — неотрицательное целое число. Для заданного $s > \frac{n}{2}+1$ будем рассматривать основное состояние

$$(V,\theta) = (V^+, V^-, \theta) \in Z_T^s$$

с некоторым временем $T > 0$ и предположим, что существует константа $M > 0$ такая, что

$$\mathcal{N}_T^s(V,\theta) \le M. \tag{2.45}$$

Теорема 2.2. *Пусть для заданного целого $m \ge p$ задача* (2.15), (2.16) *с «замороженными» коэффициентами*

$$(V, \nabla_{t,x'}\theta) = (V^+, V^-, \sigma)$$

имеет строго диссипативный p-симметризатор ($p < [\frac{n}{2}]+2$) и вектор-функция $(V,\theta) \in Z_T^s$, где $s = \max\{m, [n/2]+2\}$, удовлетворяет условиям Лакса (2.11) *и неравенству* (2.45)*. Тогда для всех*

$$f = (f^+, f^-) \in H^m([0,T] \times \mathbb{R}_+^n), \quad g \in H^m([0,T] \times \mathbb{R}^{n-1}),$$

и начальных данных

$$U_0 = (U_0^+, U_0^-) \in H^m(\mathbb{R}_+^n), \quad \varphi_0 \in H^{m+1}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

удовлетворяющих условиям согласования с граничными условиями (2.16) *вплоть до порядка $m-1$ включительно, задача* (2.15), (2.16), (2.8) *имеет единственное решение $(U,\varphi) = (U^+, U^-, \varphi) \in Z_T^m$. При этом имеет место априорная оценка*

$$\mathcal{N}_T^m(U,\varphi) \le C(T,M)\big\{|||U_0|||_{H^m(\mathbb{R}_+^n)} + \|\varphi_0\|_{H^{m+1}(\mathbb{R}^{n-1})} \\ + \|f\|_{H^m([0,T]\times\mathbb{R}_+^n)} + \|g\|_{H^m([0,T]\times\mathbb{R}^{n-1})}\big\}, \tag{2.46}$$

где $C = C(T,M)$ — положительная постоянная, зависящая от T и M, но не зависящая от начальных данных и правых частей.

Мы не будем здесь доказывать теорему 2.2, а ограничимся лишь короткими комментариями. Что касается вывода априорной оценки (2.46), то, так же как и для задачи Коши (см. доказательство теоремы 1.6), он основан на аккуратной оценке коммутаторов, возникающих после дифференцирования системы. Теперь необходимо будет также оценивать коммутаторы, возникающие при дифференцировании граничных условий. При этом, так как мы имеем возможность получить априорную оценку для линейной задачи с постоянными коэффициентами только при $m \geq p$, то в нелинейном анализе выбор топологии пространства Z_T^0 для доказательства того, что соответствующее отображение является сжимающим в этой топологии, будет неприемлемым. Поэтому, в отличие от задачи Коши (см. теорему 1.6), в теореме 2.2 мы вынуждены не делать предположения $m = s > \frac{n}{2} + 1$ с той целью, чтобы в нелинейном анализе иметь возможность доказывать сжимаемость соответствующего отображения в топологии пространства Z_T^p (или Z_T^{s-1}).

Для того чтобы получить оценку (2.46) при $m < s$ для оценки коммутаторов, необходимо воспользоваться другим вариантом неравенства Гальярдо-Ниренберга (1.39):

$$\|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \leq c_k \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1-r} \|u\|_{H^k(\Omega)}^r, \tag{2.47}$$

где

$$\frac{|\alpha|}{k} < r < 1, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{|\alpha| - rk}{\dim \Omega}.$$

Используя (2.47), можно доказать (см. [23]) следующий вариант неравенства типа Мозера:

$$\|uv\|_{H^k(\Omega)} \leq c_k \|u\|_{H^q(\Omega)} \|v\|_{H^k(\Omega)}, \quad q = \max\left\{\left[\frac{n}{2}\right] + 1, k\right\} \tag{2.48}$$

(здесь $\dim \Omega = n$). Именно неравенство (2.48) и некоторые его модификации [23, 26] нужно использовать для оценки коммутаторов. Подробное доказательство априорной оценки (2.46) приведено в [26].

Что касается доказательства существования решения линейной задачи (2.15), (2.16), (2.8), то, как и для задачи Коши (см. гл. 1), нужно воспользоваться классической схемой «слабое = сильное». При доказательстве того, что слабое решение является сильным, необходимо использовать усреднение по тангенциальному направлению, т.е. по переменным $x' = (x_2, \ldots, x_n)$ [18].

Наконец, отметим, что мы не выписываем здесь условий согласования. Для линеаризованных соотношений Ренкина-Гюгонио они могут быть получены, как и для обычных граничных условий. Заметим, что для линейной задачи можно даже ограничиться случаем нулевых начальных данных, и тогда вопрос об условиях согласования автоматически отпадает. Для этого для нелинейной задачи необходимо будет построить так называемое *аппроксимационное решение.* Построение такого решения и выписывание условий согласования для нелинейной задачи будет описано в гл. 3 на примере задачи со свободной границей для уравнений газовой динамики.

Имея в руках теорему 2.2 для линейной задачи, нетрудно доказать локальную по времени теорему существования и единственности для исходной нелинейной задачи (2.6)–(2.8).

Теорема 2.3. *Пусть линейная задача с постоянными коэффициентами* (2.18), (2.19) *имеет строго диссипативный p-симметризатор. Пусть начальные данные* (2.8) *удовлетворяют условию гиперболичности* $A_0 > 0$ *(при* $x \in \mathbb{R}^n_+$*), условиям Лакса* (2.11) *и условиям согласования* [22]. *Пусть также* $(U_0, \varphi_0)(x) = (U_0^+, U_0^-, \varphi_0)(x) \in D$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n_+$ *(см. определение 2.3). Тогда для всех*

$$(U_0, \varphi_0) \in H^s(\mathbb{R}^n_+) \times H^{s+1}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

где $s > \frac{n}{2} + 1$, *существует такое достаточно малое время* $T > 0$, *что задача* (2.6)–(2.8) *имеет единственное решение* $(U, \varphi) = (U^+, U^-, \varphi) \in Z^s_T$.

Доказательство. Как и для задачи Коши (см. гл. 1), для доказательства существования и единственности мы воспользуемся теоремой Банаха о неподвижной точке (см. прил. Б). Пусть начальные данные (U_0, φ_0) согласованы с граничными условиями вплоть до порядка $s - 1$ включительно. Мы не выписываем здесь условия согласования и отсылаем читателя к [22] и гл. 3 (в которой они будут выписаны для конкретной задачи аналогичного вида). Пусть

$$\epsilon = \frac{1}{2} \min_{\mathbb{R}^n_+} \lambda_{\min}(A_0(U_0)), \quad A_0(U_0) = \operatorname{diag}\left(A_0(U_0^+), A_0(U_0^-)\right).$$

Для некоторого времени $T > 0$, постоянной $M > 0$ и целого числа $s > \frac{n}{2} + 1$ определим следующее замкнутое подмножество банахова пространства Z^s_T:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{K} = \Big\{ (V,\theta) \in Z_T^s :\ \mathcal{N}_T^s(V,\theta) \le M, \quad V(0,x) = U_0(x),& \\
\theta(0,x') = \varphi_0(x'), \quad \min_{[0,T]\times\mathbb{R}^n_+} \lambda_{\min}(A_0(V)) \ge \epsilon,& \\
(V,\theta)(t,x) \in D \quad \forall\ (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n_+ \Big\}&.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим теперь такое отображение, что $\Lambda(V,\theta) = (U,\varphi)$, где (U,φ) — решение задачи (2.15), (2.16), (2.8) с $f = (f^+, f^-) = 0$ и

$$
g = [f^1(V)] - [A_\nu(V,\psi)V].
$$

Заметим, что при таком выборе g линейные условия в (2.16) являются ньютоновской аппроксимацией нелинейных граничных условий (2.7). Теорема 2.2 гарантирует существование единственного $(V,\varphi) \in Z_T^s$. Более того, из априорной оценки (2.46) следует, что $\Lambda(\mathscr{K}) \subset \mathscr{K}$ для подходящего выбора T и M.

Рассмотрим $(V^i,\theta^i) \in \mathscr{K}$ $(V^i = (V^{+i}, V^{-i}))$, и пусть $(U^i,\varphi^i) = \Lambda(V^i,\theta^i)$, $i = 1,2$. Для разностей $U^1 - U^2$ и $\varphi^1 - \varphi^2$ получаем задачу (2.15), (2.16) с однородными начальными данными, коэффициентами $(V,\theta) = (V^1,\theta^1)$, правыми частями

$$
f^\pm = \big(L(V^{\pm 2},\psi^{\pm 2}) - L(V^{\pm 1},\psi^{\pm 1})\big)U^{\pm 2}
$$

и соответствующей вектор-функцией g (ее также нетрудно выписать). Применяя оценку (2.46) с $m = s-1$ к этой задаче и используя теорему о среднем значении для вектор-функций $f^\pm$ и g, получаем

$$
\mathcal{N}_T^{s-1}(U^1 - U^2, \varphi^1 - \varphi^2) \le \delta\, \mathcal{N}_T^{s-1}(V^1 - V^2, \theta^1 - \theta^2),
$$

где положительная константа $\delta = \delta(T,M,\epsilon) < 1$ для достаточно малого T (мы не описываем здесь подробно выбор T, а просто отсылаем к аналогичным рассуждениям для задачи Коши из главы 1). Таким образом, Λ является сжимающим отображением в младшей норме $\mathcal{N}_T^{s-1}$. Следовательно, существует единственная неподвижная точка $(U,\varphi) = (V,\theta) \in \mathscr{K}$, которая удовлетворяет задаче (2.6)–(2.8). ∎

Глава 3

Метод Нэша-Мозера на примере задачи о движении газообразной звезды

3.1. Постановка задачи со свободной границей о движении газообразной звезды

В гл. 1 и 2 доказательство локального по времени существования решений нелинейных задач было основано на использовании априорных оценок (1.44) и (2.46) для соответствующих линейных задач с переменными коэффициентами. В этих оценках гладкость решений совпадает с гладкостью начальных данных и правых частей. Априорные оценки с таким свойством называются оценками без потери гладкости или оценками *без потери производных*. Наличие априорных оценок без потери производных является решающим моментом при доказательстве существования инвариантных подпространств банаховых пространств, что, в свою очередь, необходимо для применения теоремы Банаха о неподвижной точке. Отметим, что для ударных волн важное значение для существования инвариантного подпространства играет также выигрыш одной производной для фронта разрыва, т.е. тот факт, что в оценке (2.46) H^m-норма U соседствует с H^{m+1}-нормой φ.

Если же линеаризованная задача является слабокорректной в том смысле, что для нее принципиально невозможно получить априорную оценку без потери производных, то существование решений исходной нелинейной задачи не может в общем случае быть доказано с помощью метода сжимающих отображений. В этом случае иногда удается использовать метод Нэша-Мозера. При этом решающую роль для доказательства сходимости итераций Нэша-Мозера играет так называемая «подручная» априорная оценка (см. п. 3.3). В этой главе основные идеи метода Нэша-Мозера излагаются на конкретном примере задачи со свободной границей для уравнений газовой динамики (сам метод будет описан в последнем параграфе).

Итак, будем рассматривать полную систему газовой динамики (1.7) при наличии гравитационного поля $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^3$. Эта система переписывается в симметрическом виде (см. (1.3), (1.9))

$$A_0(U)\partial_t U + \sum_{j=1}^{n} A_j(U)\partial_j U + Q(U) = 0, \tag{3.1}$$

где $Q(U) = (0, -\rho\mathcal{G}, 0)$. Напомним, что диагональная (в нашем случае) матрица $A_0 > 0$ при выполнении условия гиперболичности (1.10). Нас будет интересовать движение газообразного тела в вакууме, описываемое уравнениями Эйлера (1.7) в замкнутой пространственно-временной области $\Omega(t)$ с границей $\Sigma(t) = \{F(t,x) = 0\}$, которая априори неизвестна и движется вместе с частицами газа:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad p = 0 \qquad \text{на} \quad \Sigma(t) \tag{3.2}$$

(для всех $t \in [0,T]$). Такая задача со свободной границей обычно используется для моделирования движения нормальной (газообразной) звезды.

Локальная корректность описанной задачи была недавно доказана в работе Линдблада [19] для изэнтропической газовой динамики при $\mathcal{G} = 0$. А именно, было доказано локальное по времени существование и единственность гладкого решения задачи (1.6), (3.2), если физическое предположение

$$\frac{\partial p}{\partial N} \leq -\epsilon < 0 \qquad \text{на} \quad \Sigma(0), \tag{3.3}$$

где $\partial/\partial N = (\nabla F, \nabla)$, выполнено вместе с условием гиперболичности (1.10). При этом также предполагалось, что начальная область $\Omega(0)$

диффеоморфна шару. Основным инструментом в работе [19] является переход к лагранжевым координатам, что, на первый взгляд, является вполне естественным приемом для граничных условий вида (3.2). При этом получается задача в фиксированной области.

В то же время такой подход связан с огромными техническими трудностями. Более того, не вполне ясно, как он может быть обобщен на похожие задачи со свободными границами для более сложных моделей, например, для уравнений релятивистской газовой динамики или уравнений магнитной гидродинамики. Даже распространение подхода работы [19] на случай полной системы газовой динамики не кажется чисто техническим вопросом.

В силу сказанного предпочитаем использовать другой подход. Мы будем работать в эйлеровых координатах. Наш подход к задаче (3.1), (3.2) будет аналогичен подходу, использованному для ударных волн в гл. 2. В силу того, что соответствующая линеаризованная задача является только слабокорректной, для использования метода Нэша-Мозера мы будем вынуждены рассматривать истинную линеаризацию, после чего переход к «хорошему неизвестному» Алиньяка (см. (2.12)) будет принципиальным моментом. При этом определенная модификация стандартного подхода будет также связана с тем фактом, что для задачи (3.1), (3.2) символ, ассоциированный со свободной границей, является неэллиптическим (см. обсуждение после предположения 2.2).

3.2. Базовая оценка для линеаризованной задачи

Не нарушая общности, мы будем предполагать, что область $\Omega(t)$ является неограниченной и лежит с одной стороны от свободной границы $\Sigma(t)$, которая имеет вид $x_1 = \varphi(t, x')$, $x' = (x_2, x_3)$, т.е.

$$\Omega(t) = \{x_1 > \varphi(t, x')\}\,, \tag{3.4}$$

а функция $\varphi(t, x')$ является одной из неизвестных задачи. В самом деле, как и для ударных волн, используя рассуждения Майда [20], мы можем обобщить технику, которая будет описана ниже на случай произвольной компактной поверхности Σ. Приведение $\Omega(t)$ к фиксированной области просто более технически сложное, когда $\Omega(t)$ ограниченная.

Для области (3.4) граничные условия (3.2) принимают вид

$$\partial_t\varphi = v_N, \qquad p = 0 \qquad \text{на} \quad \Sigma(t), \tag{3.5}$$

где $v_N = (v, N)$, $N = (1, -\partial_2\varphi, -\partial_2\varphi)$, а гравитационное поле $\mathcal{G} = (G, 0, 0)$ (G — гравитационная постоянная). Наша цель — найти условия на начальные данные

$$U(0,x) = U_0(x), \quad x \in \Omega(0), \qquad \varphi(0,x') = \varphi_0(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^2, \tag{3.6}$$

обеспечивающие существование гладкого решения (U, φ) задачи (3.1), (3.5), (3.6) в $\Omega(t)$ для всех $t \in [0, T]$, где T достаточно мало.

Как и в гл. 2, мы сводим задачу (3.1), (3.5), (3.6) к фиксированной области. Неизвестное U, гладкое в $\Omega(t)$, заменяется на вектор-функцию

$$\widetilde{U}(t,x) = U(t, \Phi(t,x), x'),$$

гладкую в фиксированной области $\mathbb{R}^3_+ = \{x_1 > 0,\ x' \in \mathbb{R}^2\}$, где $\Phi(t,0,x') = \varphi(t,x')$ и $\partial_1\Phi > 0$. Опять мы используем выбор $\Phi(t,x)$, аналогичный предложенному в [22]:

$$\Phi(t,x) = x_1 + \Psi(t,x), \quad \Psi(t,x) = \chi(x_1)\varphi(t,x'),$$

где $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ равна 1 на $[0,1]$ и $\|\chi'\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < 1/2$. Как и в гл. 2, не нарушая общности, будем рассматривать начальные данные с $\|\varphi_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le 1/2$.

Опуская «волны» в $\widetilde{U}$, мы сводим (3.1), (3.5), (3.6) к начально-краевой задаче

$$\mathbb{L}(U,\Psi) = 0 \quad \text{в } [0,T] \times \mathbb{R}^3_+, \tag{3.7}$$

$$\mathbb{B}(U,\varphi) = 0 \quad \text{на } [0,T] \times \{x_1 = 0\} \times \mathbb{R}^2, \tag{3.8}$$

$$U|_{t=0} = U_0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3_+, \qquad \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \quad \text{в } \mathbb{R}^2, \tag{3.9}$$

где $\mathbb{L}(U,\Psi) = L(U,\Psi)U + Q(U)$,

$$L(U,\Psi) = A_0(U)\partial_t + A_\nu(U,\Psi)\partial_1 + A_2(U)\partial_2 + A_3(U)\partial_3,$$

$$A_\nu(U,\Psi) = \frac{1}{\partial_1\Phi}\Big(A_1(U) - A_0(U)\partial_t\Psi - \sum_{k=2}^{3} A_k(U)\partial_k\Psi\Big)$$

($\partial_1\Phi = 1 + \partial_1\Psi$) и (3.8) — компактная запись граничных условий

$$\partial_t\varphi - v_N = 0, \qquad p = 0 \qquad \text{на } [0,T]\times\{x_1 = 0\}\times\mathbb{R}^2.$$

Мы теперь готовы сформулировать локальную теорему существования для задачи (3.7)–(3.9). Понятно, что из этой теоремы будет следовать соответствующая теорема для исходной задачи (3.1), (3.5), (3.6).

Теорема 3.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $m \geq 6$. Предположим, что начальные данные* (3.7) *с*

$$(U_0 - \check{U}, \varphi_0) \in H^{m+7}(\mathbb{R}^3_+) \times H^{m+7}(\mathbb{R}^2) \text{ и } \rho(p_0, S_0) - \epsilon_1 \in H^{m+7}(\mathbb{R}^3_+)$$

удовлетворяют условию гиперболичности (1.10) *для всех $x \in \overline{\mathbb{R}^3_+}$ и согласованы с граничными условиями вплоть до порядка $m+7$ в смысле определения 3.1 (см. п. 3.4). Здесь $\check{U} = (2\epsilon x_1, 0, 0, 0, 0)$, $\epsilon_1 = 2\epsilon/G$ ($\epsilon = \mathrm{const} > 0$). Пусть также начальные данные удовлетворяют физическому условию*

$$\partial_1 p \geq \epsilon > 0 \qquad \text{при} \quad x_1 = 0 \tag{3.10}$$

для всех $x' \in \mathbb{R}^2$. Тогда существует такое достаточно малое время $T > 0$, что задача (3.7)–(3.9) *имеет единственное решение*

$$(U,\varphi) \in \big\{\check{U} + H^m([0,T]\times\mathbb{R}^3_+)\big\} \times H^m([0,T]\times\mathbb{R}^2).$$

При этом $\rho - \epsilon_1 \in H^m([0,T]\times\mathbb{R}^3_+)$.

Замечание 3.1. Неравенство (3.10) является аналогом физического условия (3.3) для неограниченной области (3.4). Граничное условие $p|_\Sigma = 0$ формально несовместимо с моделью политропного газа $p = a\rho^\gamma \exp(S/c_v)$, так как оно противоречит условию гиперболичности (1.10) на границе. С другой стороны, как было указано в [19], с физической точки зрения мы можем альтернативно рассматривать давление на границе как достаточно малую постоянную ε. Результат теоремы 3.1 легко может быть обобщен на случай граничного условия $p|_{x_1=0} = \varepsilon$ с помощью перехода к новому неизвестному $p' = p - \varepsilon$. При этом необходимо предполагать, что $p_0 - 2\epsilon x_1 - \varepsilon \in H^{m+7}(\mathbb{R}^3_+)$.

В этом параграфе мы получим базовую априорную L_2-оценку для линеаризованной задачи. Эта оценка является базисом для вывода так называемой «подручной» априорной оценки в пространствах Соболева (см. следующий параграф) и влечет *единственность* решения нелинейной задачи (3.7)–(3.9), что доказывается стандартным образом.

Перейдем вначале к новому неизвестному $U' = U - \check{U}$. Для него система (3.7) переписывается так:

$$\mathbb{L}'(U', \Psi) = L(U' + \check{U}, \Psi)U' + A_\nu(U' + \check{U}, \Psi)\partial_1 \check{U} + Q(U' + \check{U}) = 0,$$

где $\partial_1 \check{U} = (2\epsilon, 0, 0, 0, 0)$. Пусть $\rho'(p', S) = \rho(p, S)$, $A'_\alpha(U') = A_\alpha(U)$ и $Q'(U') = Q(U)$. Тогда, опуская штрихи, для нового неизвестного получаем задачу (3.7)–(3.9), где

$$\mathbb{L}(U, \Psi) = L(U, \Psi)U + A_\nu(U, \Psi)\partial_1 \check{U} + Q(U). \tag{3.11}$$

Ссылаясь далее на (3.7), будем иметь в виду, что оператор $\mathbb{L}$ действует по правилу (3.11). Для нового неизвестного будем предполагать выполнение условия

$$\partial_1 p|_{x_1=0} > -\epsilon \qquad \forall\ x' \in \mathbb{R}^2, \tag{3.12}$$

гарантирующего справедливость (3.10) для исходного неизвестного.

Замечание 3.2. Нетрудно вычислить граничную матрицу

$$\widetilde{A}_1(U, \Psi) = \frac{1}{\partial_1 \Phi} \begin{pmatrix} \dfrac{\mathfrak{f}}{\rho c^2} & 1 & -\partial_2\Psi & -\partial_3\Psi & 0 \\ 1 & \rho\mathfrak{f} & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_2\Psi & 0 & \rho\mathfrak{f} & 0 & 0 \\ -\partial_3\Psi & 0 & 0 & \rho\mathfrak{f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{f} \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{f} = v_1 - v_2\partial_2\Psi - v_3\partial_3\Psi - \partial_t\Psi$. Вектор-функция $\widetilde{A}_1(U, \Psi^a)\partial_1\check{U}$ не может принадлежать пространству Соболева, поскольку вторая ее компонента равна $2\epsilon/(\partial_1\Phi)$. Однако, если теорема 3.1 справедлива, то сумма

$$\widetilde{A}_1(U,\Psi)\partial_1\check{U} + Q(U)$$

уже принадлежит соболевскому классу, так как

$$\frac{2\epsilon}{\partial_1\Phi} - G\rho = -G(\rho-\epsilon_1) - 2\epsilon\frac{\partial_1\Psi}{\partial_1\Phi} \in H^m([0,T]\times\mathbb{R}^3_+).$$

Таким образом, для случая неограниченной области наличие в нашей задаче гравитационного поля имеет очень важное значение.

Сформулируем теперь линеаризованную задачу. Рассмотрим

$$\Omega_T = (-\infty,T]\times\mathbb{R}^3_+, \quad \partial\Omega_T = (-\infty,T]\times\{x_1=0\}\times\mathbb{R}^2.$$

Пусть

$$(\widehat{U}(t,x),\hat{\varphi}(t,x')) \in W^2_\infty(\Omega_T)\times W^2_\infty(\partial\Omega_T) \tag{3.13}$$

— заданная достаточно гладкая вектор-функция (основное состояние) с $\widehat{U} = (\hat{p},\hat{v},\widehat{S})$ и

$$\|\widehat{U}\|_{W^2_\infty(\Omega_T)} + \|\hat{\varphi}\|_{W^2_\infty(\partial\Omega_T)} \le K, \tag{3.14}$$

где $K>0$ — постоянная. Здесь и ниже все величины, связанные с основным состоянием, будут отмечены «крышечками» над обозначающими их буквами. Надеемся, что эти обозначения не вызовут путаницу, связанную с таким же обозначением для преобразования Фурье в гл. 1. Будем также, не нарушая общности, предполагать, что $\|\hat{\varphi}\|_{L_\infty(\partial\Omega_T)} < 1$. Это влечет $\partial_1\widehat{\Phi} \ge 1/2$ с $\widehat{\Phi}(t,x) = x_1 + \widehat{\Psi}(t,x)$, $\widehat{\Psi}(t,x) = \chi(x_1)\hat{\varphi}(t,x')$. Полагаем также, что основное состояние (3.13), относительно которого мы будем линеаризовывать задачу (3.7), (3.8), удовлетворяет условию гиперболичности (1.10) в $\overline{\Omega_T}$:

$$\rho(\hat{p},\widehat{S}) > 0, \quad \rho_p(\hat{p},\widehat{S}) > 0, \tag{3.15}$$

первому граничному условию в (3.8):

$$\partial_t\hat{\varphi} - \hat{v}_N|_{x_1=0} = 0 \tag{3.16}$$

и предположению

$$\partial_1 \hat{p}|_{x_1=0} > -\epsilon, \tag{3.17}$$

где $\hat{v}_N = \hat{v}_1 - \hat{v}_2\partial_2\hat{\varphi} - \hat{v}_3\partial_3\hat{\varphi}$.

Линеаризованные уравнения для (3.7) и (3.8) для определения малых возмущений (U, φ) имеют вид

$$\mathbb{L}'(\widehat{U}, \widehat{\Psi})(U, \Psi) = L(\widehat{U}, \widehat{\Psi})U + \mathcal{C}(\widehat{U}, \widehat{\Psi})U - \big\{L(\widehat{U}, \widehat{\Psi})\Psi\big\}\frac{\partial_1(\widehat{U} + \check{U})}{\partial_1\widehat{\Phi}} = f,$$

$$\mathbb{B}'(\widehat{U}, \hat{\varphi})(U, \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_t\varphi + \hat{v}_2\partial_2\varphi + \hat{v}_3\partial_3\varphi - v_N \\ p \end{pmatrix} = g,$$

где $v_N = v_1 - v_2\partial_2\hat{\varphi} - v_3\partial_3\hat{\varphi}$, а матрица $\mathcal{C}(\widehat{U}, \widehat{\Psi})$ определяется так:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\widehat{U}, \widehat{\Psi})U &= (U, \nabla_u A_0(\widehat{U}))\partial_t\widehat{U} + (U, \nabla_u A_\nu(\widehat{U}, \widehat{\Psi}))\partial_1\widehat{U} \\ &+ \sum_{k=2}^{3}(U, \nabla_u A_k(\widehat{U}))\partial_k\widehat{U} + \begin{pmatrix} 0 \\ -G\rho_p(\hat{p}, \widehat{S})p - G\rho_S(\hat{p}, \widehat{S})S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь, как обычно, мы вводим в рассмотрение правые части $f = (f_1, \dots, f_5)$ и $g = (g_1, g_2)$.

Переходя к «хорошему неизвестному» Алиньяка [11]

$$\dot{U} = U - \frac{\Psi}{\partial_1\widehat{\Phi}}\,\partial_1(\widehat{U} + \check{U}), \tag{3.18}$$

мы упрощаем линеаризованную систему:

$$L(\widehat{U}, \widehat{\Psi})\dot{U} + \mathcal{C}(\widehat{U}, \widehat{\Psi})\dot{U} - \frac{\Psi}{\partial_1\widehat{\Phi}}\,\partial_1\big\{\mathbb{L}(\widehat{U}, \widehat{\Psi})\big\} = f. \tag{3.19}$$

Следуя [11, 12, 25, 27], мы опустим далее слагаемое нулевого порядка по Ψ в (3.19) и рассмотрим эффективный оператор

$$\begin{aligned} \mathbb{L}'_e(\widehat{U}, \widehat{\Psi})\dot{U} &= L(\widehat{U}, \widehat{\Psi})\dot{U} + \mathcal{C}(\widehat{U}, \widehat{\Psi})\dot{U} = A_0(\widehat{U})\partial_t\dot{U} \\ &+ A_\nu(\widehat{U}, \widehat{\Psi})\partial_1\dot{U} + A_2(\widehat{U})\partial_2\dot{U} + A_3(\widehat{U})\partial_3\dot{U} + \mathcal{C}(\widehat{U}, \widehat{\Psi})\dot{U}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

В последующем нелинейном анализе опущенное слагаемое в (3.19) будет рассмотрено как дополнительная ошибка на каждом итерационном шаге Нэша-Мозера.

Что касается граничного дифференциального оператора $\mathbb{B}'$, в терминах неизвестного (3.18) он имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbb{B}'_e(\widehat{U},\hat{\varphi})(\dot{U},\varphi) &= \mathbb{B}'(\widehat{U},\hat{\varphi})(U,\varphi)\\ &= \begin{pmatrix} \partial_t\varphi + \hat{v}_2\partial_2\varphi + \hat{v}_3\partial_3\varphi - \dot{v}_N - \varphi\,\partial_1\hat{v}_N \\ \dot{p} + \varphi(2\epsilon + \partial_1\hat{p}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

где $\dot{v}_{\mathrm{N}} = \dot{v}_1 - \dot{v}_2\partial_2\hat{\varphi} - \dot{v}_3\partial_3\hat{\varphi}$. Таким образом, линейная задача для $(\dot{U},\varphi)$ имеет вид

$$\mathbb{L}'_e(\widehat{U},\widehat{\Psi})\dot{U} = f \quad \text{в } \Omega_T, \tag{3.22}$$

$$\mathbb{B}'_e(\widehat{U},\hat{\varphi})(\dot{U},\varphi) = g \quad \text{на } \partial\Omega_T, \tag{3.23}$$

$$(\dot{U},\varphi) = 0 \quad \text{при } t<0, \tag{3.24}$$

где f и g равны нулю при отрицательных временах. Мы рассматриваем здесь случай нулевых начальных данных и откладываем случай ненулевых начальных данных на нелинейный анализ (построение так называемого аппроксимационного решения, см. п. 3.4).

Беря во внимание (3.16), можно показать, что граничная матрица $A_\nu(\widehat{U},\widehat{\Psi})$ вырождена на границе $x_1=0$, т.е. (3.22)–(3.24) — гиперболическая задача с *характеристической границей*. Удобно выделить «характеристические» и «нехарактеристические» неизвестные. С этой целью мы вводим в рассмотрение вектор новых неизвестных

$$V = (\dot{p},\dot{v}_n,\dot{v}_2,\dot{v}_3,\dot{S}),$$

где $\dot{v}_n = \dot{v}_1 - \dot{v}_2\partial_2\widehat{\Psi} - \dot{v}_3\partial_3\widehat{\Psi}$ $(\dot{v}_n|_{x_1=0} = \dot{v}_N|_{x_1=0})$. Имеем $\dot{U} = JV$ с

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \partial_2\widehat{\Psi} & \partial_3\widehat{\Psi} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3.22) эквивалентным образом переписывается так:

$$\mathcal{A}_0(\widehat{U},\widehat{\Psi})\partial_t V + \sum_{k=1}^{3}\mathcal{A}_k(\widehat{U},\widehat{\Psi})\partial_k V + \mathcal{A}_4(\widehat{U},\widehat{\Psi})V = \mathcal{F}(\widehat{U},\widehat{\Psi}), \tag{3.25}$$

где $\mathcal{A}_\alpha = J^{\mathsf{T}} A_\alpha J \quad (\alpha = 0,2,3), \quad \mathcal{A}_1 = J^{\mathsf{T}} A_\nu J, \quad \mathcal{F} = J^{\mathsf{T}} f$. Граничная матрица $\mathcal{A}_1$ в (3.25) имеет вид

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{\partial_1\widehat{\Phi}}\mathcal{A}_{(1)} + \mathcal{A}_{(0)}, \quad \mathcal{A}_{(0)}|_{x_1=0} = 0,$$
$$\mathcal{A}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

т.е. $V_n = (\dot{p}, \dot{v}_n)$ — «нехарактеристическая» часть вектора V. Точный вид матрицы $\mathcal{A}_{(0)}$ не имеет значения. Важно только, что в силу (3.16) $\mathcal{A}_{(0)}|_{x_1=0} = 0$. Граничная матрица $\mathcal{A}_1$ на границе $x_1 = 0$ имеет одно положительное («уходящее») собственное значение. Так как одно из граничных значений необходимо для определения функции φ, то правильное число граничных условий равно двум, что мы и имеем в точности в (3.23).

Стандартные рассуждения метода интегралов энергии (см. гл. 1 и 2) для системы (3.22) приводят нас к энергетическому неравенству

$$I(t) - 2\int_{\partial\Omega_t} \dot{p}\,\dot{v}_N|_{x_1=0}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}s \le C(K)\left(\|f\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \int_0^t I(s)\,\mathrm{d}s\right), \tag{3.27}$$

где $I(t) = \int_{\mathbb{R}^3_+}(\mathcal{A}_0 V, V)\,\mathrm{d}x$ и $C = C(K) > 0$ — постоянная, зависящая от K (см. (3.14)). Учитывая граничные условия (3.23), получаем

$$\begin{aligned} -2\dot{p}\,\dot{v}_N|_{x_1=0} &= 2(\varphi\hat{a} - g_2)(\partial_t\varphi + \hat{v}_2\partial_2\varphi + \hat{v}_3\partial_3\varphi - \varphi\,\partial_1\hat{v}_N - g_1)|_{x_1=0} \\ &= \partial_t\left\{\hat{a}|_{x_1=0}\,\varphi^2 - 2g_2\varphi\right\} + \partial_2\{\ldots\} + \partial_3\{\ldots\} \\ &\quad - \left\{\partial_t\hat{a} + \partial_2(\hat{v}_2\hat{a}) + \partial_3(\hat{v}_3\hat{a}) - 2\hat{a}\partial_1\hat{v}_N\right\}|_{x_1=0}\,\varphi^2 \\ &\quad + 2\left\{\partial_t g_2 + \partial_2(\hat{v}_2 g_2) + \partial_3(\hat{v}_3 g_2) + g_2\partial_1\hat{v}_N - g_1\hat{a}\right\}|_{x_1=0}\,\varphi + 2g_1g_2, \end{aligned}$$

где $\hat{a} = 2\epsilon + \partial_1 \hat{p}$. Тогда, используя неравенство Юнга (1.34), из (3.27) получаем

$$I(t) + \int_{\mathbb{R}^2} (2\epsilon + \partial_1 \hat{p}|_{x_1=0})\, \varphi^2 \,\mathrm{d}x' \leq C(K)\Big\{ \|f\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \|g\|^2_{H^1(\partial\Omega_T)} + \int_0^t \Big(I(s) + \|\varphi(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} \Big)\,\mathrm{d}s \Big\}.$$

С учетом предположения (3.17), используя лемму Гроноула, мы окончательно выводим базовую априорную L_2-оценку:

$$\|\dot{U}\|_{L_2(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega_T)} \leq C(K) \left\{ \|f\|_{L_2(\Omega_T)} + \|g\|_{H^1(\partial\Omega_T)} \right\}. \quad (3.28)$$

Замечание 3.3. В оценке (3.28) мы имеем потерю одной производной от правой части g относительно решения. Это вполне естественно, так как можно проверить, что линеаризованная задача с постоянными коэффициентами удовлетворяет условию Лопатинского, но не удовлетворяет *равномерному* условию Лопатинского [2, 17, 20]. Несмотря на то, что задача удовлетворяет условию Лопатинского, мы вынуждены предполагать выполнение *дополнительного* условия (3.17) при получении априорной оценки (3.28). Появление этого условия вызвано тем, что символ, ассоциированный со свободной границей, *неэллиптичен*, т.е. мы не можем разрешить граничные условия (3.23) для градиента $(\partial_t\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi)$. Поэтому также вполне естественно то, что в оценке (3.28) мы «теряем одну производную от границы», т.е. мы не можем включить H^1-норму φ в левую часть оценки (3.28).

Так как в оценке (3.28) мы не теряем производные от f относительно решения, то существование решений задачи (3.22)–(3.24) может быть доказано по классической схеме «слабое = сильное» [18] (см. гл. 1). В самом деле, мы вначале можем привести эту задачу к задаче с однородными граничными условиями, вычитая из решения более гладкую функцию [24]. А именно, существует такое $\widetilde{U} = (\tilde{p}, \tilde{v}, \widetilde{S}) \in H^{s+1}(\Omega_T)$, равное нулю при отрицательных временах, что

$$-\tilde{v}_N = g_1, \quad \tilde{p} = g_2 \quad \text{на } \partial\Omega_T,$$

где $\tilde{v}_{\mathrm{N}} = \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\partial_2\hat{\varphi} - \tilde{v}_3\partial_3\hat{\varphi}$. Если $\dot{U} = U^\natural + \widetilde{U}$, то $U^\natural$ удовлетворяет (3.22)–(3.24) с $g = 0$ и $f = f^\natural$, где $f^\natural = f - \mathbb{L}'_e(\widehat{U}, \widehat{\Psi})\widetilde{U}$, т.е. достаточно доказать существование решения $(\dot{U}, \varphi)$ задачи (3.22)–(3.24) с $g = 0$. Для этой задачи справедлива оценка

$$\|\dot{U}\|_{L_2(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega_T)} \leq C(K)\, \|f\|_{L_2(\Omega_T)}. \tag{3.29}$$

Имея в руках оценку (3.29) *без потери производных*, мы можем пользоваться классической схемой рассуждений «слабое = сильное» [18]. В частности, мы определяем *сопряженную задачу* для (3.22)–(3.24) так (ср. с определением 1.5):

$$\mathbb{L}'_e(\widehat{U}, \widehat{\Psi})^*\bar{U} = \bar{f} \quad \text{в } \Omega_T, \tag{3.30}$$

$$\partial_t\bar{p} + \partial_2(\hat{v}_2\bar{p}) + \partial_3(\hat{v}_3\bar{p}) + \bar{p}\partial_1\hat{v}_N + \bar{v}_N\hat{a} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_T, \tag{3.31}$$

$$\bar{U} = 0 \quad \text{при } t < 0, \tag{3.32}$$

где $\bar{U} = (\bar{p}, \bar{v}, \bar{S})$, $\bar{v}_{\mathrm{N}} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2\partial_2\hat{\varphi} - \bar{v}_3\partial_3\hat{\varphi}$ и

$$\mathbb{L}_e'^{\,*} = -\mathbb{L}'_e + \mathcal{C} + \mathcal{C}^{\mathsf{T}} - \partial_t A_0 - \partial_1 A_\nu - \partial_2 A_2 - \partial_3 A_3.$$

Задача (3.30)–(3.32) является сопряженной для (3.22)–(3.24), поскольку для всех $\dot{U} \in H^1(\Omega_T)$ и $\bar{U} \in H^1(\Omega_T)$ с $\bar{U}|_{t=T} = 0$, удовлетворяющих однородным граничным условиям (3.23) (с $g = 0$) и (3.31) соответственно, имеем

$$\begin{aligned}(\mathbb{L}'_e\dot{U}, \bar{U})_{L_2(\Omega_T)} - (\dot{U}, \mathbb{L}_e'^{\,*}\bar{U})_{L_2(\Omega_T)} \\ = -(A_\nu\dot{U}, \bar{U})_{L_2(\partial\Omega_T)} = -(\mathcal{A}_1 V, \bar{V})_{L_2(\partial\Omega_T)} = 0,\end{aligned}$$

где $\bar{V} = J^{-1}\bar{U}$. Для сопряженной задачи (3.30)–(3.32) мы можем легко получить неравенство

$$\begin{aligned}\bar{I}(t) + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\epsilon + \partial_1\hat{p}_{|x_1=0}}\, \bar{p}^2_{|x_1=0}\, \mathrm{d}x' \\ \leq C(K)\left\{\|\bar{f}\|^2_{L_2(\Omega_T)} + \int_0^t \left(\bar{I}(s) + \|\bar{p}_{|x_1=0}(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\right) \mathrm{d}s\right\}\end{aligned}$$

($\bar{I}(t) = \int_{\mathbb{R}^3_+}(\mathcal{A}_0\bar{V}, \bar{V})\,\mathrm{d}x$), которое в силу условия (3.17) влечет L_2-оценку

$$\|\bar{U}\|_{L_2(\Omega_T)} \leq C(K)\,\|\bar{f}\|_{L_2(\Omega_T)}.$$

Мы опускаем здесь дальнейшие рассуждения, которые аналогичны соответствующим рассуждениям для задачи Коши из гл. 1 (см. также [18]). Таким образом, имеем следующую теорему о корректности линейной задачи (3.22)–(3.24).

Теорема 3.2. *Пусть для основного состояния* (3.13) *выполнены предположения* (3.14)–(3.17). *Тогда для всех* $(f,g) \in L_2(\Omega_T)\times H^1(\partial\Omega_T)$, *которые равны нулю при отрицательных временах, задача* (3.22)–(3.24) *имеет единственное решение* $(\dot{U},\varphi) \in L_2(\Omega_T) \times L_2(\partial\Omega_T)$. *Это решение удовлетворяет априорной оценке* (3.28).

3.3. «Подручная» априорная оценка

Мы теперь получим так называемую «подручную» априорную оценку [tame estimate] в H^s для задачи (3.22)–(3.24). Эта оценка (см. ниже теорему 3.3) является линейной относительно старших норм (которые умножаются на младшие нормы).

Теорема 3.3. *Пусть* $T > 0$ *и* $s \in \mathbb{N}$ *с* $s \geq 3$. *Предположим, что основное состояние* $(\widehat{U},\hat{\varphi}) \in H^{s+3}(\Omega_T) \times H^{s+3}(\partial\Omega_T)$ *удовлетворяет предположениям* (3.14)–(3.17) *и*

$$\|\widehat{U}\|_{H^6(\Omega_T)} + \|\hat{\varphi}\|_{H^6(\partial\Omega_T)} \leq \widehat{K}, \tag{3.33}$$

где $\widehat{K} > 0$ — *постоянная. Пусть также данные* $(f,g) \in H^s(\Omega_T) \times H^{s+1}(\partial\Omega_T)$ *равны нулю при отрицательных временах. Тогда существует такая положительная постоянная* K_0, *не зависящая от* s *и* T, *и такая постоянная* $C(K_0) > 0$, *что если* $\widehat{K} \leq K_0$, *то существует единственное решение* $(\dot{U},\varphi) \in H^s(\Omega_T) \times H^s(\partial\Omega_T)$ *задачи* (3.22)–(3.24). *Это решение подчиняется «подручной» априорной оценке*

$$\|\dot{U}\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq C(K_0)\Big\{\|f\|_{H^s(\Omega_T)}$$
$$+ \|g\|_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)} + \big(\|f\|_{H^3(\Omega_T)}$$

$$+ \|g\|_{H^4(\partial\Omega_T)}\big)\big(\|\widehat{U}\|_{H^{s+3}(\Omega_T)} + \|\hat{\varphi}\|_{H^{s+3}(\partial\Omega_T)}\big)\Big\} \quad (3.34)$$

для достаточно малого времени T.

Доказательство. Ниже мы будем использовать стандартные рассуждения метода интегралов энергии (см. гл. 1 и 2) и поэтому иногда будем опускать подробные выкладки, которые оставляются читателю в качестве упражнения. Применяя к системе (3.25) оператор $\partial^\alpha_{\rm tan} = \partial_t^{\alpha_0}\partial_2^{\alpha_2}\partial_3^{\alpha_3}$, with $|\alpha| = |(\alpha_0,\alpha_2,\alpha_3)| \le s$, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^3_+}(\mathcal{A}_0\partial^\alpha_{\rm tan}V, \partial^\alpha_{\rm tan}V){\rm d}x - 2\int_{\partial\Omega_t}\partial^\alpha_{\rm tan}\dot{p}\,\partial^\alpha_{\rm tan}\dot{v}_N|_{x_1=0}\,{\rm d}x'\,{\rm d}s = \mathcal{R}, \quad (3.35)$$

где

$$\mathcal{R} = \int_{\Omega_t}\Big(\big\{{\rm div}\mathbb{A}\,\partial^\alpha_{\rm tan}V - 2\sum_{j=0}^{3}[\partial^\alpha_{\rm tan}, \mathcal{A}_j]\partial_jV$$
$$- 2\partial^\alpha_{\rm tan}(\mathcal{A}_4V) + 2\partial^\alpha_{\rm tan}\mathcal{F}\big\}, \partial^\alpha_{\rm tan}V\Big){\rm d}x{\rm d}s,$$

${\rm div}\mathbb{A} = \sum_{j=0}^3\partial_j\mathcal{A}_j$ $(\partial_0 = \partial_t)$. Используя мультипликативные неравенства типа Мозера (1.40) и (1.42), оцениваем правую часть в (3.35):

$$\mathcal{R} \le C(K)\Big\{\|V\|^2_{H^s(\Omega_t)} + \|f\|^2_{H^s(\Omega_T)}$$
$$+ \Big(\|\dot{U}\|^2_{W^1_\infty(\Omega_T)} + \|f\|^2_{L_\infty(\Omega_T)}\Big)\left(1 + \|{\rm coeff}\|^2_{s+1}\right)\Big\}, \quad (3.36)$$

где $\|{\rm coeff}\|_m = \|\widehat{U}\|_{H^m(\Omega_T)} + \|\hat{\varphi}\|_{H^m(\partial\Omega_T)}$.

С учетом граничных условий получаем

$$- \partial^\alpha_{\rm tan}\dot{p}\,\partial^\alpha_{\rm tan}\dot{v}_N|_{x_1=0} = 2\partial^\alpha_{\rm tan}(\varphi\hat{a} - g_2)\partial^\alpha_{\rm tan}(\partial_t\varphi + \hat{v}_2\partial_2\varphi + \hat{v}_3\partial_3\varphi$$
$$- \varphi\,\partial_1\hat{v}_N - g_1)|_{x_1=0} = \partial_t\left\{\hat{a}|_{x_1=0}\,(\partial^\alpha_{\rm tan}\varphi)^2 - 2\partial^\alpha_{\rm tan}g_2\,\partial^\alpha_{\rm tan}\varphi\right\} + \ldots$$
$$+ \underline{\partial_2\left\{\hat{v}_2|_{x_1=0}[\partial^\alpha_{\rm tan}, \partial_1\hat{p}|_{x_1=0}]\varphi\right\}\partial^\alpha_{\rm tan}\varphi} + \ldots,$$

где подчеркнутое слагаемое просто является типичным слагаемым, вызывающим наибольшую потерю производных от коэффициентов в окончательной априорной оценке (3.34). Используя неравенство (1.40) и теорему о следе (см. прил. A), оцениваем:

$$\|\partial_2\left\{\hat v_2|_{x_1=0}[\partial^\alpha_{\tan},\partial_1\hat p|_{x_1=0}]\varphi\right\}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\le C(K)\Big\{\|\varphi\|^2_{H^s(\partial\Omega_t)}$$

$$+\|\varphi\|^2_{L_\infty(\partial\Omega_T)}\Big(1+\|\widehat U|_{x_1=0}\|^2_{H^{s+2}(\partial\Omega_T)}\Big)\Big\}$$

$$\le C(K)\Big\{\|\varphi\|^2_{H^s(\partial\Omega_t)}+\|\varphi\|^2_{L_\infty(\partial\Omega_T)}\Big(1+\|\widehat U\|^2_{H^{s+3}(\Omega_T)}\Big)\Big\}.$$

Опуская подробные выкладки, из (3.35) и (3.36) выводим

$$|||V(t)|||^2_{\tan,s}+|||\varphi(t)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^2)}\le C(K)\mathcal{M}(t), \tag{3.37}$$

где

$$\mathcal{M}(t)=\mathcal{N}(T)+\int_0^t\mathcal{I}(s)\,\mathrm{d}s,\quad \mathcal{I}(t)=|||V(t)|||^2_{H^s(\mathbb{R}^3_+)}+|||\varphi(t)|||^2_{H^s(\mathbb{R}^2)},$$

$$\mathcal{N}(T)=\|f\|^2_{H^s(\Omega_T)}+\|g\|^2_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)}+\Big(\|\dot U\|^2_{W^1_\infty(\Omega_T)}+\|\varphi\|^2_{W^1_\infty(\partial\Omega_T)}$$

$$+\|f\|^2_{L_\infty(\Omega_T)}\Big)\left(1+\|\mathrm{coeff}\|^2_{s+3}\right),\ \ |||u(t)|||^2_{\tan,m}=\sum_{|\alpha|\le m}\|\partial^\alpha_{\tan}u(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+)}.$$

Поскольку только наибольшая потеря производных от коэффициентов будет играть роль при получении окончательной «подручной» априорной оценки, мы огрубили неравенство (3.37), выбрав наибольшую потерю производных.

Из (3.25) и (3.26) следует, что

$$(\partial_1 V_n,0,0,0)=\big(\partial_1\widehat\Phi\big)\mathcal{A}_{(1)}\Big(\mathcal{F}-\mathcal{A}_0\partial_t V$$

$$-\sum_{k=2}^{3}\mathcal{A}_k\partial_k V-\mathcal{A}_4V-\mathcal{A}_{(0)}\partial_1 V\Big). \tag{3.38}$$

Применяя к (3.38) оператор $\partial^\beta_{\tan}$ с $|\beta|\le s-1$, используя разложения вида

$$\partial^\beta_{\tan}(B\partial_i V)=B\partial^\beta_{\tan}\partial_i V+[\partial^\beta_{\tan},B]\partial_i V,$$

учитывая $\mathcal{A}_{(0)}|_{x_1=0}=0$ и используя аналоги мультипликативных неравенств (1.40) и (1.42) для «послойных» норм $|||(\cdot)(t)|||$ [23], получаем

$$\|\partial_1\partial^\beta_{\tan}V_n(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+)}\le C(K)\Big\{|||V(t)|||^2_{\tan,s}+\|\sigma\partial_1\partial^\beta_{\tan}V(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+)}$$
$$+|||V(t)|||^2_{H^{s-1}(\mathbb{R}^3_+)}+|||f(t)|||^2_{H^{s-1}(\mathbb{R}^3_+)}$$
$$+\Big(\|\dot U\|^2_{W^1_\infty(\Omega_T)}+\|f\|^2_{L_\infty(\Omega_T)}\Big)\left(1+|||\mathrm{coeff(t)}|||^2_{s+1}\right)\Big\}, \quad (3.39)$$

где $\sigma=\sigma(x_1)\in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ — такая монотонно возрастающая функция, что $\sigma(x_1)=x_1$ в окрестности нуля и $\sigma(x_1)=1$ при достаточно больших x_1. Так как $\sigma|_{x_1=0}=0$, нам не нужно использовать граничные условия для оценивания $\sigma\partial_1^j\partial^\gamma_{\tan}V$ с $j+|\gamma|\le s$, и мы легко получаем неравенство

$$\|\sigma\partial_1^j\partial^\gamma_{\tan}V(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+)}\le C(K)\Big\{\|V\|^2_{H^s(\Omega_t)}+\|f\|^2_{H^s(\Omega_T)}$$
$$+\Big(\|\dot U\|^2_{W^1_\infty(\Omega_T)}+\|f\|^2_{L_\infty(\Omega_T)}\Big)\left(1+\|\mathrm{coeff}\|^2_{s+1}\right)\Big\}. \quad (3.40)$$

Используя вложение Соболева для одномерного случая, т.е. то, что

$$|||u(t)|||^2_{H^{m-1}(D)}\le\|u\|^2_{L_\infty([0,t],H^{m-1}(D))}\le C\|u\|^2_{H^m([0,t]\times D)},$$

из (3.37), (3.39) и (3.40) при $j=1$ выводим

$$|||V(t)|||^2_{\tan,s}+|||\varphi(t)|||^2_{H^s(\mathbb{R}^2)}$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\sum_{|\alpha|\le s-i}\|\partial_1^i\partial^\alpha_{\tan}V_n(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3_+)}\le C(K)\mathcal{M}(t) \quad (3.41)$$

с $k=1$.

Оценка (3.41) при $k=s$ легко доказывается математической индукцией. Она эквивалентно переписывается так:

$$|||V(t)|||^2_{\tan,s}+\|V_n(t)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^3_+)}+|||\varphi(t)|||^2_{H^s(\mathbb{R}^2)}\le C(K)\mathcal{M}(t). \quad (3.42)$$

Недостающие «нормальные» производные (по x_1) в (3.42) для «характеристической» части $(\dot v_2,\dot v_3,\dot S)$ неизвестного V могут быть оценены из последнего уравнения в (3.22), т.е. из

$$\partial_t\dot S+\frac{1}{\partial_1\widehat\Phi}\left\{(\hat w,\nabla)\dot S+(\dot u,\nabla)\widehat S\right\}=f_5 \quad (3.43)$$

и системы для линеаризованной завихренности $\xi=\mathrm{rot}\,\tilde v$, где

$$\tilde{v} = (\dot{v}_1, \dot{v}_{\tau_2}, \dot{v}_{\tau_3}), \quad \dot{v}_{\tau_k} = (\dot{v}, \tau_k), \quad \tau_2 = (\partial_2\hat{\varphi}, 1, 0), \quad \tau_3 = (\partial_3\hat{\varphi}, 0, 1),$$

$$\hat{w} = (\hat{v}_n - \partial_t\widehat{\Psi}, \hat{v}_2\partial_1\widehat{\Phi}, \hat{v}_3\partial_1\widehat{\Phi}), \quad \dot{u} = (\dot{v}_n, \dot{v}_2\partial_1\widehat{\Phi}, \dot{v}_3\partial_1\widehat{\Phi}).$$

Эта система получается применением оператора ротора к уравнению для $\tilde{v}$, следующему из (3.22):

$$\partial_t\tilde{v} + \frac{1}{\partial_1\widehat{\Phi}}\left\{(\hat{w}, \nabla)\tilde{v} + \frac{1}{\rho(\hat{p}, \widehat{S})}\nabla\dot{p}\right\} + \mathrm{l.o.t} = \tilde{f}_v$$

($\tilde{f}_v = (f_2, f_{\tau_2}, f_{\tau_3}), \quad f_{\tau_k} = (f_v, \tau_k), \quad f_v = (f_2, f_3, f_4)$), и имеет вид

$$\xi_t + \frac{1}{\partial_1\widehat{\Phi}}(\hat{w}, \nabla)\xi + \mathrm{l.o.t} = \mathrm{rot}\,\tilde{f}_v, \tag{3.44}$$

где l.o.t. — младшие члены, чей точный вид не так важен.

Как уравнение (3.43), так и (3.44) не требуют граничных условий, поскольку в силу (3.16), первая компонента вектора $\hat{w}$ равна нулю на границе $x_1 = 0$. Следовательно, опуская подробные рассуждения и комбинируя соответствующие оценки для «нормальных» производных «характеристического» неизвестного $(\dot{v}_2, \dot{v}_3, \dot{S})$ с (3.42), выводим неравенство

$$\mathcal{I}(t) \leq C(K)\left\{\mathcal{N}(T) + \int_0^t \mathcal{I}(s)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

Применяя лемму Гронуола, получаем

$$\mathcal{I}(t) \leq C(K)\,e^{C(K)T}\mathcal{N}(T)$$

($\mathcal{I}(0) = 0$, см. (3.24)). Интегрируя последнее неравенство по отрезку $[0, T]$, мы приходим к оценке

$$\|V\|^2_{H^s(\Omega_T)} + \|\varphi\|^2_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq C(K)Te^{C(K)T}\mathcal{N}(T). \tag{3.45}$$

Напомним, что $\dot{U} = JV$. Используя разложение $J(\hat{\varphi}) = I + J_0(\hat{\varphi})$ и $J_0(0) = 0$, а также неравенства типа Мозера (1.40), (1.43), применяя соболевское вложение в одномерном случае, получаем

$$
\begin{aligned}
\|\dot U\|^2_{H^s(\Omega_T)} = \|V + J_0 V\|^2_{H^s(\Omega_T)} \le C(K)\bigl(\|V\|^2_{H^s(\Omega_T)} \\
+ \|\dot U\|^2_{L_\infty(\Omega_T)}\|\mathrm{coeff}\|^2_s\bigr) \le C(K)\|V\|^2_{H^s(\Omega_T)} \\
+ TC(K)\|\dot U\|^2_{L_\infty(\Omega_T)}\|\mathrm{coeff}\|^2_{s+1}. \quad (3.46)
\end{aligned}
$$

Из неравенств (3.45) и (3.46) следует, что

$$
\|\dot U\|^2_{H^s(\Omega_T)} + \|\varphi\|^2_{H^s(\partial\Omega_T)} \le C(K)Te^{C(K)T}\mathcal{N}(T). \quad (3.47)
$$

Аналогично теореме 3.2 можно доказать корректность задачи (3.22)–(3.24) в $H^s(\Omega_T) \times H^s(\partial\Omega_T)$. Применяя вложения Соболева, из (3.47) при $s \ge 3$ выводим неравенство

$$
\begin{aligned}
\|\dot U\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \le C(K)T^{1/2}e^{C(K)T}\Bigl\{\|f\|_{H^s(\Omega_T)} \\
+ \|g\|_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)} + \Bigl(\|\dot U\|_{H^3(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{H^3(\partial\Omega_T)} \\
+ \|f\|_{H^3(\Omega_T)}\Bigr)\bigl(\|\widehat U\|_{H^{s+3}(\Omega_T)} + \|\hat\varphi\|_{H^{s+3}(\partial\Omega_T)}\bigr)\Bigr\}, \quad (3.48)
\end{aligned}
$$

где мы абсорбировали некоторые нормы $\|\dot U\|_{H^3(\Omega_T)}$ и $\|\varphi\|_{H^3(\partial\Omega_T)}$ в левую часть неравенства, выбрав T достаточно малым. Рассматривая (3.48) при $s = 3$ и используя (3.33), для достаточно малого T получаем

$$
\|\dot U\|_{H^3(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{H^3(\partial\Omega_T)} \le C(K_0)\left\{\|f\|_{H^3(\Omega_T)} + \|g\|_{H^4(\partial\Omega_T)}\right\}. \quad (3.49)
$$

Естественно предположить, что $T < 1$, и, следовательно, мы можем считать, что постоянная $C(K_0)$ не зависит от T. Из неравенств (3.48) и (3.49) следует (3.34). ■

3.4. Аппроксимационное решение и условия согласования

Для того чтобы использовать оценку (3.34) для доказательства сходимости итераций Нэша-Мозера, которые будут описаны в следующем параграфе, необходимо свести задачу (3.7)–(3.9) в $[0,T]\times\mathbb{R}^3_+$ к задаче в Ω_T, чьи решения равны нулю при отрицательных временах. Это можно достичь с помощью классического приема, предлагающего абсорбировать начальные данные в систему уравнений путем построения так называемого *аппроксимационного решения*. Перед тем как построить аппроксимационное решение, мы должны определить *условия согласования* для начальных данных (3.9):

$$(U_0, \varphi_0) = (p_0, v_{1,0}, v_{2,0}, v_{3,0}, S_0, \varphi_0).$$

С учетом условия гиперболичности (1.10) переписываем систему (3.7) в виде

$$\partial_t U = -(A_0(U))^{-1}\Big(A_\nu(U,\Psi)\partial_1 U + A_\nu(U,\Psi)\partial_1 \check{U} \\ + A_2(U)\partial_2 U + A_3(U)\partial_3 U + Q(U)\Big). \quad (3.50)$$

Следы

$$U_j = (p_j, v_{1,j}, v_{2,j}, v_{3,j}, S_j) = \partial_t^j U|_{t=0} \quad \text{и} \quad \varphi_j = \partial_t^j \varphi|_{t=0}$$

с $j \geq 1$ определяются рекурсивно формальным применением дифференциального оператора ∂_t^{j-1} к граничному условию

$$\partial_t \varphi = (v_1 - v_2\partial_2\varphi - v_3\partial_3\varphi)\,|_{x_1=0} \quad (3.51)$$

и (3.50) и вычислением $\partial_t^j \varphi$, $\partial_t^j U$ при $t = 0$. Пусть также $\Psi_j = \partial_t^j \Psi|_{t=0} = \chi(x_1)\varphi_j$.

Мы естественным образом определяем условие согласования нулевого порядка как $p_0|_{x_1=0} = 0$. Вычисляя (3.51) при $t = 0$, получаем

$$\varphi_1 = (v_{1,0} - v_{2,0}\partial_2\varphi_0 - v_{3,0}\partial_3\varphi_0)\,|_{x_1=0}. \quad (3.52)$$

Затем $\partial_t \Phi|_{t=0} = \Phi_1 = \chi(x_1)\varphi_1$ и из формулы (3.50) при $t = 0$ определяем U_1. Условие согласования первого порядка $p_1|_{x_1=0} = 0$ будет неявно зависеть от φ_0 и φ_1. Зная φ_1 и U_1, мы можем затем найти φ_2, U_2 и т.д. Доказательство следующей леммы является почти очевидным и основывается на мультипликативных свойствах пространств Соболева (см. следствие 1.2 и неравенство (2.48)). Мы должны также принять во внимание замечание 3.2.

Лемма 3.6. *Пусть $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 3$, $U_0 \in H^\mu(\mathbb{R}^3_+)$ и $\varphi_0 \in H^\mu(\mathbb{R}^2)$. Тогда описанная выше процедура определяет $U_j \in H^{\mu-j}(\mathbb{R}^3_+)$ и $\varphi_j \in H^{\mu-j}(\mathbb{R}^2)$ для $j = 1, \ldots, \mu$. Причем*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \Big(\|U_j\|_{H^{\mu-j}(\mathbb{R}^3_+)} + \|\varphi_j\|_{H^{\mu-j}(\mathbb{R}^2)} \Big) \leq C M_0, \tag{3.53}$$

где

$$M_0 = \|U_0\|_{H^\mu(\mathbb{R}^3_+)} + \|\varphi_0\|_{H^\mu(\mathbb{R}^2)}, \tag{3.54}$$

постоянная $C > 0$ зависит только от μ и норм $\|U_0\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}^3_+)}$ и $\|\varphi_0\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}^2_+)}$.

Определение 3.1. Пусть $\mu \in \mathbb{N}$ и $\mu \geq 3$. Начальные данные $(U_0, \varphi_0) \in H^\mu(\mathbb{R}^3_+) \times H^\mu(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяют *условиям согласования* вплоть до порядка μ, если для (U_j, φ_j)

$$p_j|_{x_1=0} = 0 \tag{3.55}$$

при $j = 0, \ldots, \mu$.

Мы теперь готовы построить аппроксимационное решение.

Лемма 3.7. *Пусть начальные данные* (3.9) *удовлетворяют условиям согласования вплоть до порядка μ и предположениям теоремы 3.1 (т.е.* (1.10) *и* (3.12) *выполнены). Тогда существует такая вектор-функция $(U^a, \varphi^a) \in H^{\mu+1}(\Omega_T) \times H^{\mu+1}(\partial\Omega_T)$ (далее она называется аппроксимационным решением задачи* (3.7)–(3.9)*), что*

$$\partial_t^j \mathbb{L}(U^a, \Psi^a)|_{t=0} = 0 \quad \text{при } j = 0, \ldots, \mu - 1, \tag{3.56}$$

и она удовлетворяет граничным условиям (3.8)*, где $\Psi^a = \chi(x_1)\varphi^a$. Более того, аппроксимационное решение подчиняется оценке*

$$\|U^a\|_{H^{\mu+1}(\Omega_T)} + \|\varphi^a\|_{H^{\mu+1}(\partial\Omega_T)} \leq C_1(M_0) \tag{3.57}$$

и удовлетворяет условию гиперболичности (1.10) *в $\overline{\Omega_T}$, а также условию* (3.12) *на $\partial\Omega_T$, где $C_1 = C_1(M_0) > 0$ — постоянная, зависящая от M_0 (см.* (3.54)*). Причем $\rho^a - \epsilon_1 = \rho(p^a, S^a) - \epsilon_1 \in H^{\mu+1}(\Omega_T)$.*

Доказательство. Рассмотрим функции $U^a \in H^{\mu+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3_+)$ и $\varphi^a \in H^{\mu+1}(\mathbb{R}^3)$ такие, что

$$\partial_t^j U^a|_{t=0} = U_j \in H^{\mu-j}(\mathbb{R}^3_+), \quad \partial_t^j \varphi^a|_{t=0} = \varphi_j \in H^{\mu-j}(\mathbb{R}^2)$$

при $j = 0,\dots,\mu$, где U_j и φ_j определены в лемме 3.6. Благодаря (3.52) и (3.55) мы выбираем U^a и φ^a, удовлетворяющие граничным условиям (3.8). Используя C_0^∞-функцию срезки, мы можем считать, что (U^a,φ^a) равно нулю вне отрезка $[-T,T]$, т.е. $(U^a,\varphi^a) \in H^{\mu+1}(\Omega_T)\times H^{\mu+1}(\partial\Omega_T)$. Применяя вложения Соболева, мы переписываем оценку (3.53) так:

$$\sum_{j=1}^{\mu}\Big(\|U_j\|_{H^{\mu-j}(\mathbb{R}^3_+)} + \|\varphi_j\|_{H^{\mu-j}(\mathbb{R}^2)}\Big) \leq C(M_0), \tag{3.58}$$

где $C = C(M_0) > 0$ — постоянная, зависящая от M_0. Оценка (3.57) следует из (3.58) и непрерывности «поднимающего» оператора с $t = 0$ на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3_+$ (это оператор, в некотором смысле обратный оператору следа [13]). Условия (3.56) выполняются благодаря свойствам (U_j,φ_j) из леммы 3.6. Наконец, так как (U^a,φ^a) удовлетворяет условию гиперболичности (1.10) и условию (3.12) при $t = 0$, в описанной выше процедуре мы можем выбрать (U^a,φ^a) так, что (1.10) и (3.12) выполнены при всех $t\in[-T,T]$. ■

Не нарушая общности, можем считать, что

$$\|U_0\|_{H^\mu(\mathbb{R}^3_+)} + \|\varphi_0\|_{H^\mu(\mathbb{R}^2)} \leq 1, \quad \|\varphi_0\|_{H^\mu(\mathbb{R}^2)} \leq 1/2. \tag{3.59}$$

Тогда для достаточно малого отрезка времени $[0,T]$ гладкое решение, чье существование нам предстоит доказать, удовлетворяет неравенству $\|\varphi\|_{L_\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)} \leq 1$, что влечет $\partial_1\Phi \geq 1/2$ (напомним, что $\|\chi'\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < 1/2$, см. п. 3.2). Пусть μ — целое число, которое появится в предположении о регулярности начальных данных в теореме существования для задачи (3.7)–(3.9). Забегая вперед, мы берем $\mu = m+7$ с $m \geq 6$ (см. теорему 3.1). В следующем параграфе мы увидим, что это подходящий выбор. Учитывая (3.59), переписываем (3.57) так:

$$\|U^a\|_{H^{m+8}(\Omega_T)} + \|\varphi^a\|_{H^{m+8}(\partial\Omega_T)} \leq C_*, \tag{3.60}$$

где $C_* = C_1(1)$.

Введем в рассмотрение

$$f^a = \begin{cases} -\mathbb{L}(U^a, \Psi^a) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \tag{3.61}$$

Поскольку $(U^a, \varphi^a) \in H^{m+8}(\Omega_T) \times H^{m+8}(\partial\Omega_T)$, используя (3.56), получаем $f^a \in H^{m+7}(\Omega_T)$ и

$$\|f^a\|_{H^{m+7}(\Omega_T)} \leq \delta_0(T), \tag{3.62}$$

где постоянная $\delta_0(T) \to 0$ при $T \to 0$. Решающее значение для доказательства того факта, что f^a принадлежит пространству Соболева, имеет *наличие гравитационного поля* (см. замечание 3.2). Для доказательства оценки (3.62) мы используем неравенства типа Мозера, вложения Соболева и тот факт, что $f^a = 0$ при $t < 0$.

Тогда для аппроксимационного решения, определенного в лемме 3.7, $(U, \varphi) = (U^a, \varphi^a) + (\widetilde{U}, \tilde{\varphi})$ является решением исходной задачи (3.7)–(3.9) в $[0, T] \times \mathbb{R}^3_+$, если $(\widetilde{U}, \tilde{\varphi})$ удовлетворяет следующей задаче в Ω_T («волны» опущены):

$$\mathcal{L}(U, \Psi) = f^a \quad \text{в } \Omega_T, \tag{3.63}$$

$$\mathcal{B}(U, \varphi) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_T, \tag{3.64}$$

$$(U, \varphi) = 0 \quad \text{при } t < 0, \tag{3.65}$$

где

$$\mathcal{L}(U, \Psi) = \mathbb{L}(U^a + U, \Psi^a + \Psi) - \mathbb{L}(U^a, \Psi^a), \quad \mathcal{B}(U, \varphi) = \mathbb{B}(U^a + U, \varphi^a + \varphi).$$

С этого момента мы сконцентрируемся на доказательстве существования решений задачи (3.63)–(3.65).

3.5. Итерации Нэша-Мозера

Мы будем «решать» задачу (3.63)–(3.65) подходящей итерационной схемой типа Нэша-Мозера. Подробное описание метода Нэша-Мозера, а также ссылки на оригинальные работы можно найти в [16]. Идея этого метода состоит в решении нелинейного уравнения $\mathcal{F}(u) = 0$ итерационной схемой

$$\mathcal{F}'(S_{\theta_n}u_n)(u_{n+1}-u_n) = -\mathcal{F}(u_n),$$

где $\mathcal{F}'$ — линеаризация (первая вариация) функционала $\mathcal{F}$, а S_{θ_n} — последовательность сглаживающих операторов со свойством $S_{\theta_n} \to I$ при $n \to \infty$. Эта схема является классической схемой Ньютона, если $S_{\theta_n} = I$.

Ошибками классической схемы Нэша-Мозера являются «квадратичная» ошибка схемы Ньютона и «подстановочная» ошибка, вызванная применением сглаживающих операторов S_θ. Как и в работах [12, 27], для нашей задачи реализация метода Нэша-Мозера является не совсем стандартной, поскольку мы будем иметь дополнительную ошибку, вызванную введением некого промежуточного (модифицированного) состояния $u_{n+1/2}$, удовлетворяющего некоторым нелинейным ограничениям. Основным таким ограничением будет условие (3.16), которое должно было выполняться для основного состояния (3.13). Также еще одна дополнительная ошибка вызвана выкидыванием из рассмотрения младшего члена по Ψ в системе линеаризованных уравнений, записанной в терминах «хорошего неизвестного» (см. (3.18)–(3.20)). Однако данные отличия от классической схемы Нэша-Мозера не являются принципиальными. Перечислим вначале без доказательства следующие важные свойства сглаживающих операторов [16].

Утверждение 3.1. *Существует такое семейство $\{S_\theta\}_{\theta\geq 1}$ сглаживающих операторов в $H^s(\Omega_T)$, действующее на класс функций, равных нулю при отрицательных временах, что*

$$\|S_\theta u\|_{H^\beta(\Omega_T)} \leq C\theta^{(\beta-\alpha)_+}\|u\|_{H^\alpha(\Omega_T)}, \qquad \alpha,\beta\geq 0, \tag{3.66}$$

$$|S_\theta u - u\|_{H^\beta(\Omega_T)} \leq C\theta^{\beta-\alpha}\|u\|_{H^\alpha(\Omega_T)}, \qquad 0\leq\beta\leq\alpha, \tag{3.67}$$

$$\Big\|\frac{d}{d\theta}S_\theta u\Big\|_{H^\beta(\Omega_T)} \leq C\theta^{\beta-\alpha-1}\|u\|_{H^\alpha(\Omega_T)}, \qquad \alpha,\beta\geq 0, \tag{3.68}$$

где $C>0$ — постоянная и $(\beta-\alpha)_+ = \max(0,\beta-\alpha)$. Более того, существует другое семейство сглаживающих операторов, также обозначаемое S_θ, действующее на функции, определенные на границе, $\partial\Omega_T$, и удовлетворяющее свойствам (3.66)*)–*(3.68) *с нормами* $\|\cdot\|_{H^\alpha(\partial\Omega_T)}$.

Опишем теперь итерационную схему для задачи (3.63)–(3.65). Мы выбираем

$$U_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0$$

и предполагаем, что (U_k, φ_k) уже определены при $k = 0, \ldots, n$. Причем (U_k, φ_k) равно нулю при отрицательных временах, т.е. выполнено (3.65). Определим теперь

$$U_{n+1} = U_n + \delta U_n, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \delta\varphi_n,$$

где разности δU_n и $\delta\varphi_n$ решают линейную задачу

$$\begin{cases} \mathbb{L}'_e(U^a + U_{n+1/2}, \Psi^a + \Psi_{n+1/2})\delta\dot{U}_n = f_n & \text{в } \Omega_T, \\ \mathbb{B}'_{n+1/2}(\delta\dot{U}_n, \delta\varphi_n) = g_n & \text{на } \partial\Omega_T, \\ (\delta\dot{U}_n, \delta\varphi_n) = 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \tag{3.69}$$

Здесь

$$\delta\dot{U}_n = \delta U_n - \frac{\delta\Psi_n}{\partial_1(\Phi^a + \Psi_{n+1/2})}\,\partial_1(\check{U} + U^a + U_{n+1/2}) \tag{3.70}$$

— «хорошее неизвестное» (см. (3.18)),

$$\mathbb{B}'_{n+1/2} = \mathbb{B}'_e((U^a + U_{n+1/2})|_{x_1=0}, \varphi^a + \varphi_{n+1/2}),$$

операторы $\mathbb{L}'_e$ и $\mathbb{B}'_e$ определены в (3.20), (3.21), а $(U_{n+1/2}, \varphi_{n+1/2})$ — гладкое модифицированное состояние такое, что $(U^a + U_{n+1/2}, \varphi^a + \varphi_{n+1/2})$ удовлетворяет ограничениям (3.15)–(3.17) (Ψ_n, $\Psi_{n+1/2}$ и $\delta\Psi_n$ определяются по аналогии с Ψ). Правые части f_n и g_n будут ниже определены через суммарные ошибки на шаге n.

Ошибки итерационной схемы определяются из следующей цепочки разложений:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(U_{n+1}, \Psi_{n+1}) - \mathcal{L}(U_n, \Psi_n) \\
&\quad = \mathbb{L}'(U^a + U_n, \Psi^a + \Psi_n)(\delta U_n, \delta\Psi_n) + e'_n \\
&\quad = \mathbb{L}'(U^a + S_{\theta_n} U_n, \Psi^a + S_{\theta_n}\Psi_n)(\delta U_n, \delta\Psi_n) + e'_n + e''_n \\
&\quad = \mathbb{L}'(U^a + U_{n+1/2}, \Psi^a + \Psi_{n+1/2})(\delta U_n, \delta\Psi_n) + e'_n + e''_n + e'''_n \\
&\quad = \mathbb{L}'_e(U^a + U_{n+1/2}, \Psi^a + \Psi_{n+1/2})\delta\dot{U}_n + e'_n + e''_n + e'''_n + D_{n+1/2}\delta\Psi_n
\end{aligned}$$

и

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}(U_{n+1}|_{x_1=0}, \varphi_{n+1}) - \mathcal{B}(U_n|_{x_1=0}, \varphi_n)\\
&\quad = \mathbb{B}'((U^a + U_n)|_{x_1=0}, \varphi^a + \varphi_n)(\delta U_n|_{x_1=0}, \delta\varphi_n) + \tilde{e}'_n\\
&\quad = \mathbb{B}'((U^a + S_{\theta_n} U_n)|_{x_1=0}, \varphi^a + S_{\theta_n}\varphi_n)(\delta U_n|_{x_1=0}, \delta\varphi_n) + \tilde{e}'_n + \tilde{e}''_n\\
&\quad = \mathbb{B}'_{n+1/2}(\delta\dot{U}_n, \delta\varphi_n) + \tilde{e}'_n + \tilde{e}''_n + \tilde{e}'''_n,
\end{aligned}
$$

где S_{θ_n} — сглаживающие операторы, удовлетворяющие свойствам из утверждения 3.1, а последовательность (θ_n) определяется так:

$$
\theta_0 \geq 1, \quad \theta_n = \sqrt{\theta_0 + n}.
$$

Мы используем также обозначение

$$
D_{n+1/2} = \frac{1}{\partial_1(\Phi^a + \Psi_{n+1/2})}\, \partial_1 \left\{ \mathbb{L}(U^a + U_{n+1/2}, \Psi^a + \Psi_{n+1/2}) \right\}.
$$

Ошибки e'_n и $\tilde{e}'_n$ — обычные квадратичные ошибки метода Ньютона, а e''_n, $\tilde{e}''_n$ и e'''_n, $\tilde{e}'''_n$ — первая и вторая подстановочные ошибки соответственно.

Пусть

$$
e_n = e'_n + e''_n + e'''_n + D_{n+1/2}\delta\Psi_n, \quad \tilde{e}_n = \tilde{e}'_n + \tilde{e}''_n + \tilde{e}'''_n, \tag{3.71}
$$

тогда суммарные ошибки на шаге $n \geq 1$ равны

$$
E_n = \sum_{k=0}^{n-1} e_k, \quad \widetilde{E}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{e}_k, \tag{3.72}
$$

где $E_0 = 0$ и $\widetilde{E}_0 = 0$. Правые части f_n и g_n определяются рекурсивно из уравнений

$$
\sum_{k=0}^{n} f_k + S_{\theta_n} E_n = S_{\theta_n} f^a, \quad \sum_{k=0}^{n} g_k + S_{\theta_n} \widetilde{E}_n = 0, \tag{3.73}
$$

где $f_0 = S_{\theta_0} f^a$ и $g_0 = 0$. Так как $S_{\theta_N} \to I$ при $N \to \infty$, то можно показать, что мы формально получаем решение задачи (3.63)–(3.65) из того, что $\mathcal{L}(U_N, \Psi_N) \to f^a$ и $\mathcal{B}(U_N|_{x_1=0}, \varphi_N) \to 0$, если $(e_N, \tilde{e}_N) \to 0$.

Для доказательства сходимости итераций Нэша-Мозера будет использован метод математической индукции. Сформулируем индуктивное предположение.

Индуктивное предположение. Для заданного малого числа $\delta > 0$, целого $\alpha = m+1$ и целого $\tilde{\alpha}$ индуктивное предположение имеет вид

$$(H_{n-1}) \quad \begin{cases} a) & \forall\, k = 0,\dots,n-1, \quad \forall s \in [3,\tilde{\alpha}] \cap \mathbb{N}, \\ & \|\delta U_k\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\delta\varphi_k\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq \delta\theta_k^{s-\alpha-1}\Delta_k, \\ b) & \forall\, k = 0,\dots,n-1, \quad \forall s \in [3,\tilde{\alpha}-2] \cap \mathbb{N}, \\ & \|\mathcal{L}(U_k,\Psi_k) - f^a\|_{H^s(\Omega_T)} \leq 2\delta\theta_k^{s-\alpha-1}, \\ c) & \forall\, k = 0,\dots,n-1, \quad \forall s \in [4,\alpha] \cap \mathbb{N}, \\ & \|\mathcal{B}(U_k|_{x_1=0},\varphi_k)\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq \delta\theta_k^{s-\alpha-1}, \end{cases}$$

где $\Delta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$. Заметим, что последовательность (Δ_n) убывает и стремится к нулю, причем

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{3\theta_n} \leq \Delta_n = \sqrt{\theta_n^2+1} - \theta_n \leq \frac{1}{2\theta_n}.$$

Напомним, что (U_k,φ_k) при $k = 0,\dots,n$ удовлетворяют (3.65). Немного забегая вперед, заметим, что нам понадобятся неравенства (3.60) и (3.62) с $m = \tilde{\alpha} - 4$, т.е. мы выбираем $\tilde{\alpha} = m+4$. Наша цель — доказать, что из (H_{n-1}) следует (H_n) для подходящего выбора параметров $\theta_0 \geq 1$ и $\delta > 0$, а также для достаточно малого времени $T > 0$. После этого мы докажем базис индукции (H_0). С этого момента будем предполагать, что (H_{n-1}) выполнено. Могут быть выведены следующие следствия из (H_{n-1}), доказательства которых мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Лемма 3.8. *Если θ_0 достаточно большое, то для каждого $k = 0,\dots,n$ и каждого целого $s \in [3,\tilde{\alpha}]$ имеем*

$$\|U_k\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\varphi_k\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq \delta\theta_k^{(s-\alpha)_+}, \quad \alpha \neq s, \tag{3.74}$$

$$\|U_k\|_{H^\alpha(\Omega_T)} + \|\varphi_k\|_{H^\alpha(\partial\Omega_T)} \leq \delta\log\theta_k, \tag{3.75}$$

$$\|(I - S_{\theta_k})U_k\|_{H^s(\Omega_T)} + \|(1 - S_{\theta_k})\varphi_k\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq C\delta\theta_k^{s-\alpha}. \tag{3.76}$$

Для каждого $k = 0,\dots,n$ и каждого целого $s \in [3,\tilde{\alpha}+4]$ имеем:

$$\|S_{\theta_k}U_k\|_{H^s(\Omega_T)} + \|S_{\theta_k}\varphi_k\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq C\delta\theta_k^{(s-\alpha)_+}, \quad \alpha \neq s, \tag{3.77}$$

$$\|S_{\theta_k}U_k\|_{H^\alpha(\Omega_T)} + \|S_{\theta_k}\varphi_k\|_{H^\alpha(\partial\Omega_T)} \leq C\delta\log\theta_k. \tag{3.78}$$

Оценки (3.76)–(3.78) следуют из (3.74), (3.75) и утверждения 3.1. Причем оценки (3.76) и (3.77) выполнены для всех целых $s \geq 3$, но ниже они нам понадобятся только при $s \in [3, \tilde{\alpha}]$ и $s \in [3, \tilde{\alpha}+4]$ соответственно.

Оценка квадратичных ошибок. Квадратичные ошибки

$$e'_k = \mathcal{L}(U_{k+1}, \Psi_{k+1}) - \mathcal{L}(U_k, \Psi_k) - \mathcal{L}'(U_k, \Psi_k)(\delta U_k, \delta\Psi_k),$$

$$\tilde{e}'_k = \big(\mathcal{B}(U_{k+1}, \varphi_{k+1}) - \mathcal{B}(U_k, \varphi_k) - \mathcal{B}'(U_k, \varphi_k)(\delta U_k, \delta\varphi_k)\big)|_{x_1=0}$$

можно переписать в виде

$$e'_k = \int_0^1 (1-\tau)\mathbb{L}''(U^a + U_k + \tau\delta U_k, \Psi^a + \Psi_k + \tau\delta\Psi_k)\big((\delta U_k, \delta\Psi_k), (\delta U_k, \delta\Psi_k)\big)d\tau, \tag{3.79}$$

$$\tilde{e}'_k = \frac{1}{2}\,\mathbb{B}''\big((\delta U_k|_{x_1=0}, \delta\varphi_k), (\delta U_k|_{x_1=0}, \delta\varphi_k)\big) \tag{3.80}$$

используя вторые производные операторов $\mathbb{L}$ и $\mathbb{B}$

$$\mathbb{L}''(\widehat{U}, \widehat{\Psi})((U', \Psi'), (U'', \Psi'')) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathbb{L}'(U_\varepsilon, \Psi_\varepsilon)(U', \Psi')|_{\varepsilon=0},$$

$$\mathbb{B}''((W', \varphi'), (W'', \varphi'')) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathbb{B}'(W_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)(W', \varphi')|_{\varepsilon=0},$$

$$\mathbb{L}'(\widehat{U}, \widehat{\Psi})(U'', \Psi'') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathbb{L}(U_\varepsilon, \Psi_\varepsilon),$$

$$\mathbb{B}'(\widehat{U}|_{x_1=0}, \hat{\varphi})(W'', \varphi'') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathbb{B}(W_\varepsilon, \varphi_\varepsilon),$$

где $U_\varepsilon = \widehat{U} + \varepsilon U''$, $W_\varepsilon = \widehat{U}|_{x_1=0} + \varepsilon W''$, $\varphi_\varepsilon = \hat{\varphi} + \varepsilon\varphi''$, а Ψ' и Ψ'' определяются аналогично Ψ. Нетрудно вычислить точный вид $\mathbb{B}''$. Он не зависит от $(\widehat{U}, \hat{\varphi})$:

$$\mathbb{B}''((W',\varphi'),(W'',\varphi''))=(v_2'\partial_2\varphi''+v_3'\partial_3\varphi''+v_2''\partial_2\varphi'+v_3''\partial_3\varphi',0)$$

Для того чтобы оценить квадратичные ошибки с помощью представлений (3.79) и (3.80), нам нужны оценки для $\mathbb{L}''$ и $\mathbb{B}''$. Их легко получить, используя точные представления для $\mathbb{L}''$ и $\mathbb{B}''$ и применяя неравенства типа Мозера (см. гл. 1), а также вложение Соболева. Опуская подробные рассуждения, приходим к следующему результату.

Утверждение 3.2. *Пусть $T>0$ и $s\in\mathbb{N}$ с $s\geq 3$. Предположим, что $(\widehat{U},\hat{\varphi})\in H^{s+1}(\Omega_T)\times H^{s+1}(\partial\Omega_T)$ и*

$$\|\widehat{U}\|_{H^3((\Omega_T)}+\|\hat{f}\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\leq\widetilde{K}.$$

Тогда существует положительная постоянная $\widetilde{K}_0$, не зависящая от s и T, и существует постоянная $C(\widetilde{K}_0)>0$ такая, что если $\widetilde{K}\leq\widetilde{K}_0$ и (U',φ'), $(U'',\varphi'')\in H^{s+1}(\Omega_T)\times H^{s+1}(\partial\Omega_T)$, то

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{L}''(\widehat{U},\widehat{\Psi})((U',\Psi'),(U'',\Psi''))\|_{H^s(\Omega_T)}\\&\qquad\leq C(\widetilde{K}_0)\Big\{\langle\!\langle(\widehat{U},\hat{f})\rangle\!\rangle_{s+1}\langle\!\langle(U',\varphi')\rangle\!\rangle_3\langle\!\langle(U'',\varphi'')\rangle\!\rangle_3\\&\qquad+\langle\!\langle(U',\varphi')\rangle\!\rangle_{s+1}\langle\!\langle(U'',\varphi'')\rangle\!\rangle_3+\langle\!\langle(U'',\varphi'')\rangle\!\rangle_{s+1}\langle\!\langle(U',\varphi')\rangle\!\rangle_3\Big\},\end{aligned}$$

где $\langle\!\langle(U,\varphi)\rangle\!\rangle_\ell=\|U\|_{H^\ell(\Omega_T)}+\|\varphi\|_{H^\ell(\partial\Omega_T)}$. Если (W',φ'), $(W'',\varphi'')\in H^s(\partial\Omega_T)\times H^{s+1}(\partial\Omega_T)$, то

$$\begin{aligned}\|\mathbb{B}''((W',\varphi'),(W'',\varphi''))\|_{H^s(\partial\Omega_T)}&\leq C(\widetilde{K}_0)\Big\{\|W'\|_{H^s(\partial\Omega_T)}\|\varphi''\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\\&+\|W'\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\|\varphi''\|_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)}+\|W''\|_{H^s(\partial\Omega_T)}\|\varphi'\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\\&+\|W''\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\|\varphi'\|_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)}+\|W'\|_{H^s(\partial\Omega_T)}\|W''\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\\&+\|W'\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\|W''\|_{H^s(\partial\Omega_T)}\Big\}.\end{aligned}$$

Не нарушая общности, полагаем, что константа $\widetilde{K}_0=2C_*$, где C_* — постоянная из (3.60). Используя (3.79), (3.80) и утверждение 3.2, приходим к следующему результату.

Лемма 3.9. *Пусть* $\alpha \geq 4$. *Существуют достаточно малое число* $\delta > 0$ *и достаточно большое число* $\theta_0 \geq 1$ *такие, что для всех* $k = 0, \dots n-1$ *и всех целых* $s \in [3, \widetilde{\alpha} - 1]$ *справедливы оценки*

$$\|e_k'\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\delta^2 \theta_k^{L_1(s)-1} \Delta_k, \tag{3.81}$$

$$\|\tilde{e}_k'\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq C\delta^2 \theta_k^{L_1(s)-1} \Delta_k, \tag{3.82}$$

где $L_1(s) = \max\{(s+1-\alpha)_+ + 4 - 2\alpha, s + 2 - 2\alpha\}$.

Доказательство. В силу (3.60) (напомним, что $m = \tilde{\alpha} - 4$), (H_{n-1}) и (3.74) мы оцениваем «коэффициент» в $\mathbb{L}''$ из (3.79) так:

$$\sup_{\tau \in [0,1]} \langle\!\langle (U^a + U_k + \tau\delta U_k, \varphi^a + \varphi_k + \tau\delta\varphi_k) \rangle\!\rangle_3$$
$$\leq C_* + \delta\theta_k^{(3-\alpha)_+} + \delta\theta_k^{2-\alpha}\Delta_k \leq C_* + C\delta \leq 2C_*$$

для достаточно малого числа δ. Следовательно, мы можем применять утверждение 3.2:

$$\|e_k'\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\Big(\delta^2\theta_k^{4-2\alpha}\Delta_k^2\big(C_* + \langle\!\langle (U_k, \varphi_k) \rangle\!\rangle_{s+1} +$$
$$\langle\!\langle (\delta U_k, \delta\varphi_k) \rangle\!\rangle_{s+1}\big) + \delta^2\theta_k^{s+2-2\alpha}\Delta_k^2\Big)$$

для $s \in [3, \widetilde{\alpha} - 1]$. Если $s + 1 \neq \alpha$, то из (3.74) следует, что

$$\|e_k'\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\delta^2\Delta_k^2 \left\{\theta_k^{(s+2-\alpha)_+ + 12 - 2\alpha} + \theta_k^{s+7-2\alpha}\right\} \leq C\delta^2\theta_k^{L_1(s)-1}\Delta_k$$

(здесь мы использовали неравенство $\theta_k\Delta_k \leq 1/2$). Если $s + 1 = \alpha$ и $\alpha \geq 4$,

$$\|e_k'\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\delta^2\Delta_k^2 \left\{(C_* + \delta\log\theta_k + \delta\theta_k^{-1}\Delta_k)\theta_k^{4-2\alpha} + \theta_k^{1-\alpha}\right\}$$
$$\leq C\delta^2\Delta_k^2\theta_k^{1-\alpha} \leq C\delta^2\theta_k^{L_1(\alpha-1)-1}\Delta_k.$$

Аналогично, используя (3.80), утверждение 3.2 и теорему о следе, получаем (3.82). ■

Оценка первых подстановочных ошибок. Первые подстановочные ошибки можно записать так:

$$
\begin{aligned}
e_k'' &= \mathcal{L}'(U_k,\Psi_k)(\delta U_k,\delta\Psi_k) - \mathcal{L}'(S_{\theta_k}U_k,S_{\theta_k}\Psi_k)(\delta U_k,\delta\Psi_k)\\
&= \int_0^1 \mathbb{L}''\big(U^a + S_{\theta_k}U_k + \tau(I-S_{\theta_k})U_k, \Psi^a + S_{\theta_k}\Psi_k\\
&\quad + \tau(I-S_{\theta_k})\Psi_k\big)\big((\delta U_k,\delta\Psi_k),((I-S_{\theta_k})U_k,(I-S_{\theta_k})\Psi_k)\big)d\tau, \quad (3.83)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{e}_k'' &= \big(\mathcal{B}'(U_k,\varphi_k)(\delta U_k,\delta\varphi_k) - \mathcal{B}'(S_{\theta_k}U_k,S_{\theta_k}\varphi_k)(\delta U_k,\delta\varphi_k)\big)|_{x_1=0}\\
&= \mathbb{B}''\big((\delta U_k|_{x_1=0},\delta\varphi_k),((U_k - S_{\theta_k}U_k)|_{x_1=0},\varphi_k - S_{\theta_k}\varphi_k)\big). \quad (3.84)
\end{aligned}
$$

Лемма 3.10. *Пусть $\alpha \geq 4$. Существуют достаточно малое число $\delta > 0$ и достаточно большое число $\theta_0 \geq 1$ такие, что для всех $k = 0,\dots n-1$ и всех целых $s \in [6,\widetilde{\alpha}-2]$ имеем*

$$
\|e_k''\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\delta^2\theta_k^{L_2(s)-1}\Delta_k, \quad (3.85)
$$

$$
\|\tilde{e}_k''\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq C\delta^2\theta_k^{L_2(s)-1}\Delta_k, \quad (3.86)
$$

где $L_2(s) = \max\{(s+1-\alpha)_+ + 6 - 2\alpha, s+5-2\alpha\}$.

Доказательство. Из (3.60), (H_{n-1}), (3.76) и (3.77) следует, что

$$
\sup_{\tau\in[0,1]} \langle\!\langle (U^a + S_{\theta_k}U_k + \tau(I-S_{\theta_k})U_k, \varphi^a + S_{\theta_k}\varphi_k + \tau(I-S_{\theta_k})\varphi_k)\rangle\!\rangle_3 \leq 2C_*
$$

для достаточно большого числа δ. То есть мы можем использовать предположение утверждения 3.2 для оценивания $\mathbb{L}''$ в (3.83). Снова используя (3.60), (H_{n-1}), (3.76) и (3.77), для $s+1 \neq \alpha$ и $s+1 \leq \tilde{\alpha}$ получаем

$$
\|e_k''\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\Big\{\delta^2\theta_k^{5-2\alpha}\Delta_k\big(C_* + \delta\theta_k^{(s+1-\alpha)_+} + \delta\theta_k^{s+1-\alpha}\big) + \delta^2\theta_k^{s+3-2\alpha}\Delta_k\Big\} \leq C\delta^2\theta_k^{L_2(s)-1}\Delta_k.
$$

Аналогично, используя (3.78) вместо (3.77), для случая $s+1=\alpha$ выводим

$$
\begin{aligned}
\|e_k''\|_{H^s(\Omega_T)} &\le C\Big\{\delta^2\theta_k^{5-2\alpha}\Delta_k(C_*+\delta\log\theta_k+\delta)+\delta^2\theta_k^{2-\alpha}\Delta_k\Big\}\\
&\le C\delta^2\Delta_k\left\{\theta_k^{6-2\alpha}+\theta_k^{2-\alpha}\right\}\le C\delta^2\theta_k^{L_2(\alpha-1)-1}\Delta_k
\end{aligned}
$$

для $\alpha \ge 4$.

В силу (3.84), теоремы о следе и утверждения 3.2 имеем

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{e}_k''\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\Big\{&[\delta U_k]_{s+1,*,T}\|(1-S_{\theta_k})\varphi_k\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\\
&+\|\delta U_k\|_{H^3(\Omega_T)}\|(1-S_{\theta_k})\varphi_k\|_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)}\\
&+\|(I-S_{\theta_k})U_k]_{H^{s+1}(\Omega_T)}\|\delta\varphi_k\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\\
&+\|(I-S_{\theta_k})U_k\|_{H^3(\Omega_T)}\|\delta\varphi_k\|_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)}\\
&+\|\delta U_k\|_{H^{s+1}(\Omega_T)}\|(I-S_{\theta_k})U_k\|_{H^3(\Omega_T)}\\
&+\|\delta U_k\|_{H^3(\Omega_T)}\|(I-S_{\theta_k})U_k\|_{H^{s+1}(\Omega_T)}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Тогда из (H_{n-1}) и (3.76) следует (3.86). ■

Построение модифицированного состояния и его оценка. Так как аппроксимационное решение удовлетворяет строгим неравенствам (1.10) и (3.12) (см. лемму 3.7) и мы требуем, чтобы гладкое модифицированное состояние равнялось нулю при отрицательных временах, то состояние $(U^a+U_{n+1/2},\varphi^a+\varphi_{n+1/2})$ будет удовлетворять (1.10) и (3.12) для достаточно малого времени $T>0$. Поэтому при построении модифицированного состояния мы можем сконцентрироваться только на ограничении (3.16), т.е. на первом граничном условии в (3.8).

Утверждение 3.3. *Пусть $\alpha \ge 4$. Существуют функции $U_{n+1/2}$ и $\varphi_{n+1/2}$, которые равны нулю при $t<0$ и такие, что $(U^a+U_{n+1/2},\varphi^a+\varphi_{n+1/2})$ удовлетворяет* (3.16), *неравенствам* (1.10) *и* (3.12) *для достаточно малого времени T. Причем эти функции определяются так:*

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{n+1/2}=S_{\theta_n}\varphi_n,\quad p_{n+1/2}=S_{\theta_n}p_n,\\
&v_{j,n+1/2}=S_{\theta_n}v_{j,n}\quad (j=2,3),\quad S_{n+1/2}=S_{\theta_n}S_n
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

и

$$\|U_{n+1/2} - S_{\theta_n} U_n\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\delta\theta_n^{s+1-\alpha} \quad \textit{for } s \in [3, \tilde{\alpha}+3]. \qquad (3.88)$$

для достаточно малых $\delta > 0$ и $T > 0$ и достаточно большого числа $\theta_0 \geq 1$.

Доказательство. Оценка (3.88), которую мы собираемся доказать, выполняется для всех $s \geq 3$, но ниже она нам понадобится только при $s \in [3, \tilde{\alpha}+3]$. Пусть $\varphi_{n+1/2}$, давление $p_{n+1/2}$, энтропия $S_{n+1/2}$ и тангенциальные компоненты скорости $v_{n+1/2}$ определены по формулам в (3.87). Определим теперь $v_{1,n+1/2}$ так:

$$v_{1,n+1/2} = S_{\theta_n} v_{1,n} + \mathcal{R}_T \mathcal{G},$$

где

$$\mathcal{G} = \partial_t \varphi_{n+1/2} - (S_{\theta_n} v_{1,n})|_{x_1=0} \\ + \sum_{j=2}^{3} \big((v_j^a + v_{j,n+1/2}) \partial_j \varphi_{n+1/2} + v_{j,n+1/2} \partial_j \varphi^a \big)\big|_{x_1=0}$$

и $\mathcal{R}_T : \ H^s(\partial\Omega_T) \longrightarrow H^{s+1}(\Omega_T)$ — «поднимающий» оператор с границы на всю область ($(\mathcal{R}_T u)|_{x_1=0} = u$, см. [13]). Чтобы оценить $v_{1,n+1/2} - S_{\theta_n} v_{1,n}$, мы используем разложения

$$\mathcal{G} = S_{\theta_n} \mathcal{B}_1 (U_n|_{x_1=0}, \varphi_n) - \partial_t (1 - S_{\theta_n}) \varphi_n + (1 - S_{\theta_n}) \partial_t \varphi_n \\ + \sum_{j=2}^{3} \big((v_j^a + S_{\theta_n} v_{j,n}) \partial_j S_{\theta_n} \varphi_n \\ - S_{\theta_n} ((v_j^a + v_{j,n}) \partial_j \varphi_n) + (S_{\theta_n} v_{j,n}) \partial_j \varphi^a - S_{\theta_n} (v_{j,n} \partial_j \varphi^a) \big)\big|_{x_1=0}$$

и

$$\mathcal{B}_1 (U_n|_{x_1=0}, \varphi_n) = \mathbb{B}_v (U_{n-1}|_{x_1=0}, \varphi_{n-1}) + \partial_t (\delta\varphi_{n-1}) \\ + \sum_{j=2}^{3} \big((v_j^a + v_{j,n-1}) \partial_j (\delta\varphi_{n-1}) + \delta v_{j,n-1} \partial_j (\varphi^a + \varphi_n) - \delta v_{1,n-1} \big)\big|_{x_1=0},$$

где $\mathcal{B}_1$ обозначает первую строку в граничном операторе $\mathcal{B}$ в (3.64).

Используя c) из (H_{n-1}), получаем

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}_T(S_{\theta_n}\mathcal{B}_1(U_{n-1}|_{x_1=0},\varphi_{n-1}))\|_{H^s(\Omega_T)}\\
&\qquad\qquad \le C\|S_{\theta_n}\mathcal{B}_1(U_{n-1}|_{x_1=0},\varphi_{n-1})\|_{H^s(\partial\Omega_T)}\\
&\le \begin{cases} C\theta_n^{s-\alpha}\|\mathcal{B}_1(U_{n-1}|_{x_1=0},\varphi_{n-1})\|_{H^\alpha(\partial\Omega_T)} & \text{для } s\in[\alpha,\tilde{\alpha}+3],\\ C\|\mathcal{B}_1(U_{n-1}|_{x_1=0},\varphi_{n-1})\|_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)} & \text{для } s\in[3,\alpha-1]\end{cases}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \le C\delta\theta_n^{s-\alpha}
\end{aligned}
$$

для $s\in[3,\tilde{\alpha}+3]$. Используя (3.66) и a) из (H_{n-1}), оцениваем:

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}_T(S_{\theta_n}\partial_t(\delta\varphi_{n-1}))\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\|S_{\theta_n}\partial_t(\delta\varphi_{n-1})\|_{H^s(\partial\Omega_T)}\\
&\qquad \le C\theta_n^{s-2}\|\delta\varphi_{n-1}\|_{H^3(\partial\Omega_T)} \le C\theta_n^{s-2}\delta\theta_{n-1}^{2-\alpha}\theta_{n-1}^{-1} \le C\delta\theta_n^{s-\alpha-1}
\end{aligned}
$$

для $s\in[3,\tilde{\alpha}+3]$. Мы также получаем

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}_T\big(S_{\theta_n}((v_j^a+v_{j,n-1})|_{x_1=0}\,\partial_j(\delta\varphi_{n-1}))\big)\|_{H^s(\Omega_T)}\\
&\qquad \le C\theta_n^{s-3}\|(v_j^a+v_{j,n-1})|_{x_1=0}\,\partial_j(\delta\varphi_{n-1})\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\\
&\qquad \le C\theta_n^{s-3}\Big\{\|\delta\varphi_{n-1}\|_{H^4(\partial\Omega_T)}\|U^a+U_{n-1}\|_{H^3(\Omega_T)}\\
&+\|\delta\varphi_{n-1}\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\|U^a+U_{n-1}\|_{H^7(\Omega_T)}\Big\} \le C\theta_n^{s-3}\delta\theta_n^{2-\alpha}C_* \le C\delta\theta_n^{s-\alpha-1}
\end{aligned}
$$

для $j=2,3$ и $s\in[3,\tilde{\alpha}+3]$. Оценивая аналогично остальные слагаемые в $\mathcal{R}_T(S_{\theta_n}\mathcal{B}_1(U_n|_{x_1=0},\varphi_n))$, мы окончательно получаем, что

$$
\|\mathcal{R}_T(S_{\theta_n}\mathcal{B}_1(U_n|_{x_1=0},\varphi_n))\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\delta\theta_n^{s-\alpha},\quad s\in[3,\tilde{\alpha}+3].
$$

Теперь нам нужно вывести оценки для остальных слагаемых в $\mathcal{R}_T\mathcal{G}$. Для $s\in[\alpha,\tilde{\alpha}+3]$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}_T(-\partial_t(1-S_{\theta_n})\varphi_n+(1-S_{\theta_n})\partial_t\varphi_n)\|_{H^s(\Omega_T)}\\
&\qquad \le C\big\{\|\partial_t(S_{\theta_n}\varphi_n)\|_{H^s(\partial\Omega_T)}+\|S_{\theta_n}(\partial_t\varphi_n)\|_{H^s(\partial\Omega_T)}\big\}\\
&\qquad \le C\big\{\|S_{\theta_n}\varphi_n\|_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)}+\theta_n^{s-\alpha}\|\varphi_n\|_{H^{\alpha+1}(\partial\Omega_T)}\big\} \le C\delta\theta_n^{s+1-\alpha},
\end{aligned}
$$

в то время как для $s\in[3,\tilde{\alpha}-1]$ получаем (напомним, что $\tilde{\alpha}=\alpha+3$)

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}_T(\partial_t(1-S_{\theta_n})\varphi_n)\big\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\delta\theta_n^{s+1-\alpha},\\
&\|\mathcal{R}_T((1-S_{\theta_n})\partial_t\varphi_n)\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\theta_n^{s-\alpha}\|\varphi_n\|_{H^{\alpha+1}(\partial\Omega_T)} \le C\delta\theta_n^{s+1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Здесь мы, в частности, использовали лемму 3.8. Мы не будем получать оценки для остальных слагаемых в $\mathcal{R}_T\mathcal{G}$ и оставляем соответствующие вычисления читателю. Собирая все оценки, окончательно получаем:

$$\|v_{1,n+1/2} - S_{\theta_n} v_{1,n}\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\delta\theta_n^{s+1-\alpha}, \quad s \in [3, \tilde{\alpha}+3],$$

что эквивалентно (3.88). ■

Оценка вторых подстановочных ошибок. Вторые подстановочные ошибки

$$e_k''' = \mathcal{L}'(S_{\theta_k}U_k, S_{\theta_k}\Psi_k)(\delta U_k, \delta\Psi_k) - \mathcal{L}'(U_{k+1/2}, \Psi_{k+1/2})(\delta U_k, \delta\Psi_k)$$

и

$$\tilde{e}_k''' = \big(\mathcal{B}'(S_{\theta_k}U_k, S_{\theta_k}\varphi_k)(\delta U_k, \delta\varphi_k) - \mathcal{B}'(U_{k+1/2}, \varphi_{k+1/2})(\delta U_k, \delta\varphi_k)\big)|_{x_1=0}$$

можно переписать так:

$$\begin{aligned} e_k''' = \int_0^1 \mathbb{L}''\big(&U^a + U_{k+1/2} + \tau(S_{\theta_k}U_k - U_{k+1/2}),\\ &\Psi^a + S_{\theta_k}\Psi_k\big)\big((\delta U_k, \delta\Psi_k), (S_{\theta_k}U_k - U_{k+1/2}, 0)\big)d\tau, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\tilde{e}_k''' = \mathbb{B}''\big((\delta U_k|_{x_1=0}, \delta\varphi_k), ((S_{\theta_k}U_k - U_{k+1/2})|_{x_1=0}, 0)\big). \quad (3.90)$$

Используя (3.89) и (3.90), приходим к следующему результату.

Лемма 3.11. *Пусть $\alpha \ge 4$. Существуют достаточно малые $\delta > 0$, $T > 0$ и достаточно большое число $\theta_0 \ge 1$ такие, что для всех $k = 0, \dots n-1$ и для всех $s \in [3, \widetilde{\alpha}-1]$ имеем*

$$\|e_k'''\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\delta^2\theta_k^{L_3(s)-1}\Delta_k \quad (3.91)$$

и $\tilde{e}_k''' = 0$, где $L_3(s) = \max\{(s+1-\alpha)_+ + 8 - 2\alpha, s + 5 - 2\alpha\}$.

Доказательство. С учетом леммы 3.8 и утверждения 3.3 получаем оценку

$$\sup_{\tau\in[0,1]} \langle\!\langle (U^a + U_{k+1/2} + \tau(S_{\theta_k}U_k - U_{k+1/2}), \varphi^a + S_{\theta_k}\varphi_k) \rangle\!\rangle_3 \le 2C_*$$

для достаточно малого числа δ, т.е. мы можем применять утверждение 3.2. Аналогично получаем

$$\langle\!\langle (U^a + U_{k+1/2} + \tau(S_{\theta_k}U_k - U_{k+1/2}), \varphi^a + S_{\theta_k}\varphi_k) \rangle\!\rangle_{s+1}$$
$$\le C\bigl\{C_* + \delta\theta_k^{s+2-\alpha} + \delta\theta_k^{(s+1-\alpha)_+ +1}\bigr\} \le C\delta\theta_n^{(s+1-\alpha)_+ +1}.$$

Используя утверждение 3.2, выводим (3.91):

$$\|e_k'''\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\Bigl\{\delta\theta_k^{(s+1-\alpha)_+ +1}\delta\theta_k^{2-\alpha}\Delta_k\delta\theta_k^{4-\alpha} + \delta\theta_k^{s+-\alpha}\Delta_k\delta\theta_k^{4-\alpha}$$
$$+ \delta\theta_k^{2-\alpha}\Delta_k\delta\theta_k^{s+2-\alpha}\Bigr\} \le C\delta^2\theta_k^{L_3(s)-1}\Delta_k.$$

Используя точный вид $\mathbb{B}''$, легко получаем $\tilde{e}_k''' = 0$. ■

Оценка последнего «ошибочного» члена. Оценим теперь последнюю ошибку

$$D_{k+1/2}\delta\Psi_k = \frac{\delta\Psi_k}{\partial_1(\Phi^a + \Psi_{n+1/2})} R_k,$$

где $R_k = \partial_1\left\{\mathbb{L}(U^a + U_{k+1/2}, \Psi^a + \Psi_{k+1/2})\right\}$. Заметим, что

$$|\partial_1(\Phi^a + \Psi_{n+1/2})| = |1 + \partial_1(\Psi^a + \Psi_{n+1/2})| \ge 1/2$$

при условии, что T и δ достаточно малые.

Лемма 3.12. *Пусть $\alpha \ge 5$. Существуют достаточно малые $\delta > 0$, $T > 0$ и достаточно большое число $\theta_0 \ge 1$ такие, что для всех $k = 0, \dots n-1$ и всех целых $s \in [3, \widetilde{\alpha} - 2]$ имеем*

$$\|D_{k+1/2}\delta\Psi_k\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\delta^2\theta_k^{L(s)-1}\Delta_k, \tag{3.92}$$

где $L(s) = \max\{(s+2-\alpha)_+ + 8 - 2\alpha, (s+1-\alpha)_+ + 9 - 2\alpha, s + 6 - 2\alpha\}$.

Доказательство. Используя неравенства типа Мозера (см. гл. 1) и вложение Соболева, получаем

$$\|D_{k+1/2}\delta\Psi_k\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\Big\{\|\delta\varphi_k\|_{H^s(\partial\Omega_T)}\|R_k\|_{H^3(\Omega_T)} + \|\delta\varphi_k\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\big(\|R_k\|_{H^s(\Omega_T)} + \|R_k\|_{H^3(\Omega_T)}\|\varphi^a + \varphi_{k+1/2}\|_{H^s(\partial\Omega_T)}\big)\Big\} \tag{3.93}$$

(заметим, что $\|\partial_1(\Psi^a + \Psi_{n+1/2})\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\|\varphi^a + \varphi_{k+1/2}\|_{H^s(\partial\Omega_T)}$). Чтобы оценить R_k, используем разложение

$$\begin{aligned}\mathbb{L}(U^a + U_{k+1/2}, \Psi^a + \Psi_{k+1/2}) &= \mathcal{L}(U_k, \Psi_k) - f^a \\ &+ \mathbb{L}(U^a + U_{k+1/2}, \Psi^a + \Psi_{k+1/2}) - \mathbb{L}(U^a + U_k, \Psi^a + \Psi_k) \\ &= \mathcal{L}(U_k, \Psi_k) - f^a + \int_0^1 \mathbb{L}'\big(U^a + U_k + \tau(U_{k+1/2} - U_k), \\ &\Psi^a + \Psi_k + \tau(\Psi_{k+1/2} - \Psi_k)\big)(U_{k+1/2} - U_k, \Psi_{k+1/2} - \Psi_k)d\tau.\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\|R\|_{H^s(\Omega_T)} \leq \|\mathcal{L}(U_k, \Psi_k) - f^a\|_{H^s(\Omega_T)} + \sup_{\tau\in[0,1]} \|\mathbb{L}'(\ldots)(\ldots)\|_{H^{s+1}(\Omega_T)} \tag{3.94}$$

(для краткости мы не пишем аргументы $\mathbb{L}'$). Из пункта b) в (H_{n-1}) следует, что

$$\|\mathcal{L}(U_k, \Psi_k) - f^a\|_{H^{s+1}(\Omega_T)} \leq 2\delta\theta_k^{s-\alpha} \tag{3.95}$$

для $s \in [3, \tilde{\alpha} - 3]$. Мы оцениваем $\mathbb{L}'$ аналогично $\mathbb{L}''$ (см. утверждение 3.2). Имеем

$$\sup_{\tau\in[0,1]} \langle\!\langle (U^a + U_k + \tau(U_{k+1/2} - U_k), \varphi^a + \varphi_k + \tau(\varphi_{k+1/2} - \varphi_k))\rangle\!\rangle_3 \leq 2C_*$$

для достаточно малого числа δ. Тогда, опуская подробные вычисления, приходим к оценке

$$\|\mathbb{L}'(\ldots)(\ldots)\|_{H^{s+1}(\Omega_T)} \leq C\delta(\theta_k^{s+3-\alpha} + \theta_k^{(s+2-\alpha)_+ +5-\alpha})$$

для $s \in [3, \tilde{\alpha} - 3]$. Эта оценка, (3.94) и (3.95) дают

$$\|R\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\delta(\theta_k^{s+3-\alpha} + \theta_k^{(s+2-\alpha)_+ +5-\alpha}) \tag{3.96}$$

для $s \in [3, \tilde{\alpha} - 3]$. При $s = \tilde{\alpha} - 2$ оцениваем так:

$$\begin{aligned}\|R\|_{H^s(\Omega_T)} &\leq \|\mathbb{L}(U^a + U_{k+1/2}, \Psi^a + \Psi_{k+1/2})\|_{H^{s+1}(\Omega_T)} \\ &\leq C \langle\!\langle (U^a + (U_{k+1/2} - S_{\theta_n} U_k) + S_{\theta_n} U_k, \varphi^a + S_{\theta_n}\varphi_k) \rangle\!\rangle_{s+2} \\ &\leq C\delta\theta_k^{s+3-\alpha},\end{aligned}$$

т.е. получаем оценку (3.96) для $s \in [3, \tilde{\alpha} - 2]$. Используя затем (3.93), получаем (3.92) при условии, что $\alpha \geq 5$. ■

Сходимость итерационной схемы. Леммы 3.9–3.12 дают оценки для e_n и $\tilde{e}_n$, которые были определены в (3.71) как суммы всех ошибок на k-ом шаге.

Лемма 3.13. *Пусть $\alpha \geq 5$. Существуют достаточно малые $\delta > 0$, $T > 0$ и достаточно большое число $\theta_0 \geq 1$ такие, что для всех $k = 0, \ldots n - 1$ и всех целых $s \in [3, \widetilde{\alpha} - 2]$ имеем*

$$\|e_k\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\tilde{e}_k\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq C\delta^2\theta_k^{L(s)-1}\Delta_k, \tag{3.97}$$

где $L(s)$ определено в лемме 3.12.

Замечание 3.4. В принципе, мы могли бы попытаться воспользоваться преимуществом того факта, что в «подручной» оценке (3.34) мы не теряем производных от правой части f относительно решения. С этой целью в лемме 3.13 нам нужно было бы оценивать ошибки e_n и $\tilde{e}_n$ отдельно. Однако это не уменьшит число производных, которые мы теряем от начальных данных относительно решения в теореме существования 3.1. Фактически, мы можем даже использовать грубую версию оценки (3.34), в которой мы теряем одну производную от f относительно решения. Строго говоря, именно она и является «подручной» оценкой в смысле линейности по старшим нормам.

Лемма 3.13 дает оценку суммарных ошибок E_n и $\widetilde{E}_n$.

Лемма 3.14. *Пусть $\alpha \geq 7$. Существуют достаточно малые $\delta > 0$, $T > 0$ и достаточно большое число $\theta_0 \geq 1$ такие, что*

$$\|E_n\|_{H^{\alpha+2}(\Omega_T)} + \|\widetilde{E}_n\|_{H^{\alpha+2}(\partial\Omega_T)} \leq C\delta^2\theta_n, \tag{3.98}$$

где $L(s)$ определено в лемме 3.12.

Доказательство. Можно проверить, что $L(\alpha+2) \leq 1$, если $\alpha \geq 7$. Из (3.97) следует, что

$$\langle\!\langle (E_n, \widetilde{E}_n) \rangle\!\rangle_{\alpha+2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \langle\!\langle (e_k, \widetilde{e}_k) \rangle\!\rangle_{\alpha+2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} C\delta^2\Delta_k \leq C\delta^2\theta_n$$

для $\alpha \geq 7$ и $\alpha+2 \in [3, \tilde{\alpha}-2]$, т.е. $\tilde{\alpha} \geq \alpha+4$. Минимальное возможное $\tilde{\alpha}$ — это $\alpha+4$, т.е. выбор $\tilde{\alpha} = \alpha+4$ является подходящим. ■

Получим теперь оценки для правых частей f_n и g_n, определенных в (3.73).

Лемма 3.15. *Пусть $\alpha \geq 7$. Существуют достаточно малые $\delta > 0$, $T > 0$ и достаточно большое число $\theta_0 \geq 1$ такие, что для всех целых $s \in [3, \widetilde{\alpha}+1]$ имеем*

$$\|f_n\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\Delta_n\big\{\theta_n^{s-\alpha-2}\left(\|f^a\|_{H^{\alpha+1}(\Omega_T)} + \delta^2\right) + \delta^2\theta_n^{L(s)-1}\big\}, \tag{3.99}$$

$$\|g_n\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq C\delta^2\Delta_n\big(\theta_n^{L(s)-1} + \theta_n^{s-\alpha-2}\big). \tag{3.100}$$

Доказательство. Из (3.73) следует, что

$$f_n = (S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})f^a - (S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})E_{n-1} - S_{\theta_n}e_{n-1}.$$

Используя (3.66), (3.68), (3.97) и (3.98), получаем оценки

$$\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})f^a\|_{H^s(\Omega_T)} \leq C\theta_{n-1}^{s-\alpha-2}\|f^a\|_{H^{\alpha+1}(\Omega_T)}\Delta_{n-1},$$

$$\begin{aligned}\|(S_{\theta_n} - S_{\theta_{n-1}})E_{n-1}\|&|_{H^s(\Omega_T)} \\ &\leq C\theta_{n-1}^{s-\alpha-3}\|E_{n-1}\|_{H^{\alpha+2}(\Omega_T)}\Delta_{n-1} \leq C\delta^2\theta_{n-1}^{s-\alpha-2}\Delta_{n-1},\end{aligned}$$

$$\|S_{\theta_n}e_{n-1}\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\delta^2\theta_n^{L(s)-1}\Delta_{n-1}.$$

С учетом неравенств $\theta_{n-1} \le \theta_n \le \sqrt{2}\theta_{n-1}$, $\theta_{n-1} \le 3\theta_n$ и $\Delta_{n-1} \le 3\Delta_n$ из этих оценок выводим (3.99). Аналогично получаем (3.100). ■

Мы теперь можем получить оценку решения задачи (3.69), используя «подручную» оценку (3.34). Тогда оценка для $(\delta U_n, \delta\varphi_n)$ следует из формулы (3.70).

Лемма 3.16. *Пусть $\alpha \ge 7$. Существуют достаточно малые $\delta > 0$, $T > 0$ и достаточно большое число $\theta_0 \ge 1$ такие, что для всех целых $s \in [3, \widetilde{\alpha}]$ имеем*

$$\|\delta U_n\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\delta\varphi_n\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \le \delta\theta_n^{s-\alpha-1}\Delta_n. \tag{3.101}$$

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем взять константу K_0 в оценке (3.34) так, что $K_0 = 2C_*$, где C_* — постоянная из (3.60). Чтобы применить теорему 3.3, используя (3.77) и (3.88), мы проверяем, что

$$\|U^a + U_{n+1/2}\|_{H^6(\Omega_T)} + \|\varphi^a + S_{\theta_n}\varphi_n\|_{H^6(\partial\Omega_T)} \le 2C_*$$

для $\alpha \ge 7$ и достаточно малого числа δ, т.е. предположение (3.33) выполняется для коэффициентов задачи (3.69). Применяя «подручную» оценку (3.34), для достаточно малого T имеем

$$\begin{aligned} \|\delta\dot{U}_n\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\delta\varphi_n\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \le C\Big\{ & \|f_n\|_{H^s(\Omega_T)} + \|g_n\|_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)} \\ & + \big(\|f_n\|_{H^3(\Omega_T)} + \|g_n\|_{H^4(\partial\Omega_T)}\big)\big(\|U^a + U_{n+1/2}\|_{H^{s+3}(\Omega_T)} \\ & + \|\varphi^a + S_{\theta_n}\varphi_n\|_{H^{s+3}(\partial\Omega_T)}\big)\Big\}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Используя неравенства типа Мозера, из формулы (3.70) получаем, что

$$\begin{aligned} \|\delta U_n\|_{H^s(\Omega_T)} \le \|\delta\dot{U}_n\|_{H^s(\Omega_T)} + C\big\{ & \|\delta\varphi_n\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \\ & + \|\delta\varphi_n\|_{H^3(\partial\Omega_T)}\|\varphi^a + S_{\theta_n}\varphi_n\|_{H^s(\partial\Omega_T)}\big\}. \end{aligned}$$

Тогда (3.102) влечет

$$
\begin{aligned}
\|\delta U_n\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\delta\varphi_n\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \le C\Big\{ \|f_n\|_{H^s(\Omega_T)} + \|g_n\|_{H^{s+1}(\partial\Omega_T)} \\
+ \big(\|f_n\|_{H^3(\Omega_T)} + \|g_n\|_{H^4(\partial\Omega_T)}\big)\big(\|U^a + U_{n+1/2}\|_{H^{s+3}(\Omega_T)} \\
+ \|\varphi^a + S_{\theta_n}\varphi_n\|_{H^{s+3}(\partial\Omega_T)}\big)\Big\}
\end{aligned} \qquad (3.103)
$$

для всех целых $s \in [6, \widetilde{\alpha}]$. Ниже мы будем использовать грубый вариант оценки (3.103) (см. замечание 3.4). Используя лемму 3.16, (3.77) и утверждение 3.3, из (3.103) выводим оценку

$$
\begin{aligned}
\|\delta U_n\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\delta\varphi_n\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \le C\big\{ \theta_n^{s-\alpha-1}\left(\|f^a\|_{H^{\alpha+1}(\Omega_T)} + \delta^2\right) \\
+ \delta^2\theta_n^{L(s+1)-1}\big\}\Delta_n + C\delta\Delta_n\big\{\theta_n^{2-\alpha}\left(\|f^a\|_{H^{\alpha+1}(\Omega_T)} + \delta^2\right) \\
+ \delta^2\theta_n^{9-2\alpha}\big\}\big\{C_* + \theta_n^{(s+3-\alpha)_+} + \theta_n^{s+4-\alpha}\big\}.
\end{aligned} \qquad (3.104)
$$

Можно убедиться в справедливости неравенств

$$
\begin{aligned}
& L(s+1) \le s-\alpha, \quad (s+3-\alpha)_+ + 2 - \alpha \le s - \alpha - 1, \\
& (s+3-\alpha)_+ + 9 - 2\alpha \le s - \alpha - 1, \\
& s + 6 - 2\alpha \le s - \alpha - 1, \quad s + 13 - 3\alpha \le s - \alpha - 1
\end{aligned} \qquad (3.105)
$$

для $\alpha \ge 7$ и $s \in [3, \tilde{\alpha}]$. Таким образом, (3.104) и (3.62) влекут

$$
\begin{aligned}
& \|\delta U_n\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\delta\varphi_n\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \\
& \qquad \le C\left(\delta_0(T) + \delta^2\right)\theta_n^{s-\alpha-1}\Delta_n \le \delta\theta_n^{s-\alpha-1}\Delta_n
\end{aligned}
$$

для достаточно малых δ и T. ■

Неравенство (3.101) является пунктом a) в (H_n). Осталось доказать пункты b) и c) в (H_n).

Лемма 3.17. *Пусть $\alpha \ge 7$. Существуют достаточно малые $\delta > 0$, $T > 0$ и достаточно большое число $\theta_0 \ge 1$ такие, что для всех целых $s \in [3, \widetilde{\alpha} - 2]$*

$$
\|\mathcal{L}(U_n, \Psi_n) - f^a\|_{H^s(\Omega_T)} \le 2\delta\theta_n^{s-\alpha-1}. \qquad (3.106)
$$

Причем для всех целых $s \in [4, \alpha]$ имеем

$$\|\mathcal{B}(U_n|_{x_1=0},\varphi_n)\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \le \delta\theta_n^{s-\alpha-1}. \tag{3.107}$$

Доказательство. Можно показать, что

$$\mathcal{L}(U_n,\Psi_n) - f^a = (S_{\theta_{n-1}} - I)f^a + (I - S_{\theta_{n-1}})E_{n-1} + e_{n-1}. \tag{3.108}$$

Для $s \in [\alpha+1, \tilde{\alpha}-2]$, используя (3.66), получаем

$$\begin{aligned}&\|(I - S_{\theta_{n-1}})f^a\|_{H^s(\Omega_T)}\\ &\qquad \le \theta_n^{s-\alpha-1}(C\|f^a\|_{H^{\alpha+1}(\Omega_T)} + \|f^a\|_{H^s(\Omega_T)}) \le C\delta_0(T)\theta_n^{s-\alpha-1},\end{aligned}$$

в то время как для $s \in [3, \alpha+1]$, используя (3.67), имеем

$$\|(I - S_{\theta_{n-1}})f^a\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\theta_{n-1}^{s-\alpha-1}\|f^a\|_{H^{\alpha+1}(\Omega_T)} \le C\delta_0(T)\theta_n^{s-\alpha-1}.$$

Лемма 3.14 и (3.67) дают

$$\|(I - S_{\theta_{n-1}})E_{n-1}\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\theta_{n-1}^{s-\alpha-2}\|E_{n-1}\|_{H^{\alpha+2}(\Omega_T)} \le C\delta^2\theta_n^{s-\alpha-1}$$

для $3 \le s \le \alpha+2 = \tilde{\alpha}-2$. Из (3.97) следует, что

$$\|e_{n-1}\|_{H^s(\Omega_T)} \le C\delta^2\theta_{n-1}^{L(s)-1}\Delta_{n-1} \le C\delta^2\theta_n^{L(s)-2} \le C\delta^2\theta_n^{s-\alpha-1}.$$

Из выписанных оценок и разложения (3.108), выбирая $T > 0$ и $\delta > 0$ достаточно малыми, получаем (3.106). Аналогично, используя разложение

$$\mathcal{B}(U_n|_{x_1=0},\varphi_n) = (I - S_{\theta_{n-1}})\widetilde{E}_{n-1} + \tilde{e}_{n-1},$$

мы можем доказать оценку (3.107). ∎

Как следует из лемм 3.16 и 3.17, мы доказали, что из (H_{n-1}) следует (H_n) при условии, что $\alpha \ge 7$, $\tilde{\alpha} = \alpha + 4$, постоянная $\theta_0 \ge 1$ достаточно большая, а $T > 0$ и $\delta > 0$ достаточно малые. Зафиксируем теперь константы α, δ и θ_0 и докажем базис индукции (H_0).

Лемма 3.18. *Если время $T > 0$ достаточно малое, то имеет место (H_0).*

Доказательство. Напомним, что $(U_0, f_0) = 0$. Тогда по определению аппроксимационного решения в лемме 3.7 состояние $(U^a + U_0, \varphi^a + \varphi_0)$ уже удовлетворяет (1.10), (3.8) и (3.12), т.е. из построения в утверждении 3.3 следует, что $(U_{1/2}, \varphi_{1/2}) = 0$. Поэтому $(\delta\dot{U}_0, \delta\varphi_0)$ является решением линейной задачи (3.22)–(3.24) с коэффициентами $(\widehat{U}, \hat{\varphi}) = (U^a, \varphi^a)$ и правыми частями $f = S_{\theta_0} f^a$ и $g = 0$. Предположение (3.33) выполнено благодаря (3.60) (напомним, что $K_0 = 2C_*$). Используя (3.34), получаем оценку

$$\|\delta\dot{U}_0\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\delta\varphi_0\|_{H^s(\partial\Omega_T)} \leq C\|S_{\theta_0} f^a\|_{H^{s+1}(\Omega_T)}.$$

Вместе с (3.63) и формулой (3.70) эта оценка влечет

$$\begin{aligned}\|\delta U_0\|_{H^s(\Omega_T)} + \|\delta\varphi_0\|_{H^s(\partial\Omega_T)} &\leq C\|S_{\theta_0} f^a\|_{H^{s+1}(\Omega_T)} \\ &\leq C\theta_0^{(s-\alpha)_+}\delta_0(T) \leq \delta\theta_0^{s-\alpha-1}\Delta_0\end{aligned}$$

для всех целых $s \in [3, \tilde{\alpha}]$ при условии, что T достаточно малое. Аналогично можно показать, что пункты b) и c) в (H_0) выполнены для достаточно малого времени $T > 0$. ■

Доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим начальные данные

$$(U_0, \varphi_0) \in H^{m+7}(\mathbb{R}^3_+) \times H^{m+7}(\mathbb{R}^2),$$

удовлетворяющие всем предположениям теоремы 3.1. В частности, они удовлетворяют условиям согласования вплоть до порядка $\mu = m + 7$ включительно (см. определение 3.1). Тогда благодаря леммам 3.6 и 3.7 мы можем построить аппроксимационное решение

$$(U^a, \varphi^a) \in H^{m+8}(\Omega_T) \times H^{m+8}(\partial\Omega_T),$$

удовлетворяющее (3.60). Из лемм 3.16–3.18 следует, что (H_n) выполнено для всех целых $n \geq 0$ при условии, что $\alpha \geq 7$, $\tilde{\alpha} = \alpha + 4$, постоянная $\theta_0 \geq 1$ достаточно большая, а время $T > 0$ и постоянная $\delta > 0$ достаточно малые. В частности, (H_n) влечет

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \|\delta U_n\|_{H^m(\Omega_T)} + \|\delta \varphi_n\|_{H^m(\partial\Omega_T)} \right\} \leq \infty.$$

Следовательно, последовательность (U_n, φ_n) сходится в $H^m(\Omega_T) \times H^m(\partial\Omega_T)$ к некоторому пределу (U, φ). Напомним, что $m = \alpha - 1 \geq 6$. Переходя к пределу в (3.106) и (3.107) с $s = m$, мы получаем (3.63)–(3.65). Поэтому $U = U + U^a$, $\varphi = \varphi + \varphi^a$ — решение задачи (3.7)–(3.9). Таким образом, теорема 3.1 полностью доказана.

Приложение А

Функциональные пространства

В этом приложении мы напоминаем определения и основные свойства функциональных пространств, которые используются в пособии. В частности, мы даем определение пространств Соболева и напоминаем основную теорему вложения. В принципе, информация справочного характера, содержащаяся ниже, достаточна для понимания материала пособия, а для более глубокого изучения рассматриваемых здесь функциональных пространств мы отсылаем читателя к монографиям [5, 6–8, 10] и ссылкам внутри них.

Пусть далее Ω — ограниченное или неограниченное множество из $\mathbb{R}^d$. В пособии в качестве Ω обычно рассматриваются множества $[0,T]$, $\mathbb{R}^n$, $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $[0,T]\times\mathbb{R}^n_+$ и т.д. ($\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0,\ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$).

1) Пространство $L_p = L_p(\Omega)$ при $1 \le p < \infty$ определяется так:

$$L_p(\Omega) = \Big\{u:\ \int_\Omega |u|^p dx < \infty\Big\}, \qquad \|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Заметим, что пространство интегрируемых с квадратом функций L_2 является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega (u,v)dx.$$

Здесь $(\ ,\ )$ — скалярное произведение вектор-функций.

2) Пространство $L_\infty(\Omega)$ — пространство ограниченных на Ω функций:

$$L_\infty(\Omega) = \Big\{u: \sup_\Omega |u| < \infty\Big\}, \qquad \|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_\Omega |u|.$$

3) Пространство $C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, т.е.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega): \ \operatorname{supp} u \text{ — компакт в } \Omega, \quad \operatorname{supp} u \subset \Omega \backslash \partial\Omega\}.$$

Подчеркнем, что носитель функции из $C_0^\infty(\Omega)$ лежит во внутренности множества Ω. Отсюда следует, что даже если само множество Ω является компактом, по определению предполагается, что функции из $C_0^\infty(\Omega)$ равны нулю на его границе. Например, для $u \in C_0^\infty([0,T])$ имеем $u(0) = u(T) = 0$. В теории обобщенных функций используется обозначение $\mathscr{D} = C_0^\infty$.

4) Пространство $\mathscr{D}'(\Omega)$ — пространство обобщенных функций на Ω. Напомним определение обобщенной функции.

Определение A.1. *Обобщенной функцией* f на множестве Ω называется всякий непрерывный линейный функционал (f,φ) на пространстве основных функций $\mathscr{D}(\Omega)$. *Регулярной обобщенной функцией*, порожденной локально интегрируемой функцией $f \in L_{loc}(\Omega)$, называется функционал вида

$$(f,\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

(если f и φ — вектор-функции, то произведение этих функций под интегралом понимается в смысле скалярного произведения).

5) Пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$ определяется так:

$$W_p^l(\Omega) = \big\{u \in L_p(\Omega): \\ \text{обобщенные производные } \partial^\alpha u \in L_p(\Omega) \quad \forall\ |\alpha| \le l\big\},$$

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le l} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Напомним также определение обобщенной производной.

Определение А.2. *Обобщенной производной* $\partial^\alpha f$ функции $f \in L_{loc}(\Omega)$ называется такая функция из $L_{loc}(\Omega)$, что

$$\int_\Omega f(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \partial^\alpha f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Обобщенную производную можно также рассматривать как такую регулярную обобщенную функцию, что

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha\varphi) \qquad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

6) Пространство Соболева

$$H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega)$$

является гильбертовым пространством. В пособии мы имеем дело только с пространствами Соболева H^s. Для H^s важен тот факт, что пространство C_0^∞ всюду плотно в H^s (в частности, в $L_2 = H^0$). Кроме того, в $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно использовать эквивалентную норму

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2d\xi,$$

где

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,x)}u(x)dx$$

— *преобразование Фурье* функции u. Напомним, что преобразование Фурье функции из L_2 определяется как предел в L_2 преобразования Фурье соответствующей аппроксимирующей последовательности из пространства Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Для доказательства эквивалентности норм используется, в частности, *равенство Парсеваля*

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

На самом деле, можно определить пространство Соболева H^s для ненатуральных s, т.е. для произвольного $s \in \mathbb{R}$, как пространство функций, ограниченных по выписанной эквивалентной норме.

7) Пространство $W^l_\infty(\Omega)$ определяется так:

$$W^l_\infty(\Omega) = \left\{u \in L_\infty(\Omega) : \ \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)} < \infty \quad \forall\, |\alpha| \le l\right\},$$

$$\|u\|_{W^l_\infty(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le l} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

8) Пространство $B_1(\Omega_1, B_2(\Omega_2))$ определяется как пространство функций $u(y_1,\cdot) \in B_1(\Omega_1)$ со значениями в $B_2(\Omega_2)$. Например, пространство

$$C^1([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$$

есть пространство функций $u(t,\cdot) \in C^1([0,T])$ со значениями в $H^s(\mathbb{R}^n)$. При этом норма в этом пространстве определяется так:

$$\|u\|_{C^1([0,T],H^s(\mathbb{R}^n))} = \sup_{t\in[0,T]} \left(\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_t u(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Прежде чем сформулировать теорему вложения Соболева, напомним само определение вложения.

Определение A.3. Линейное нормированное пространство B_1 *вложено* в линейное нормированное пространство B_2 (пишем $B_1 \subset B_2$), если

$$\forall\ u \in B_1 \quad \Rightarrow \quad u \in B_2,$$

$$\|u\|_{B_2} \le c\|u\|_{B_1}, \qquad 0 < c = \mathrm{const} < \infty \qquad \forall\ u \in B_1.$$

Теорема A.1 (теорема вложения Соболева). *Имеет место вложение*

$$H^s(\Omega) \subset C^k(\Omega), \quad \text{\textit{если}} \quad s > \frac{d}{2} + k,$$

где $d = \dim\Omega$ (мы здесь не описываем, каким требованиям обязано удовлетворять множество Ω, но примеры областей, приведенные в начале этого приложения, являются подходящими).

Понятно, что также имеет место вложение $H^s(\Omega) \subset W^k_\infty(\Omega)$ при $s > \frac{d}{2} + k$. В силу теоремы вложения под пространством $H^\infty(\Omega)$ естественно понимать пространство бесконечно дифференцируемых функций на Ω, частные производные которых любого порядка принадлежат $L_2(\Omega)$.

Наконец, напомним *теорему о следе*. В пособии она нам нужна для $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ (см. начало приложения) с границей $x_1 = 0$.

Теорема А.2 (о следе). *Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $s > 1/2$. Оператор следа*

$$\mathscr{T} : C^\infty_{(0)}(\mathbb{R}^n_+) \to C^\infty_0(\mathbb{R}^{n-1}),$$

действующий по правилу $(\mathscr{T}u)(x') = u(0, x')$, единственным образом продолжается на непрерывный линейный оператор (снова обозначаемый как $\mathscr{T}$) из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$. При этом имеет место оценка

$$\|u|_{x_1=0}\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = \|\mathscr{T}u\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Здесь $C_s > 0$ — постоянная, зависящая от s, а $C^\infty_{(0)}(\mathbb{R}^n_+)$ — пространство ограничений функций из $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbb{R}^n_+$. Для пространств Соболева с натуральными индексами выше необходимо заменить $s - \frac{1}{2}$ на $s - 1$. При этом имеет место «грубый» вариант оценки следа

$$\|u|_{x_1=0}\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}.$$

В пособии мы используем пространства Соболева только для натуральных индексов. Поэтому, ссылаясь на теорему о следе, мы всегда имеем в виду «грубый» вариант оценки следа функции на границе.

Приложение Б

Три теоремы функционального анализа

В этом приложении мы напоминаем три теоремы функционального анализа (см., например, [6]), которые нам необходимы для доказательства существования решений линейных и нелинейных задач. Прежде всего, это теорема Банаха о неподвижной точке. Вспомним вначале определение сжимающего отображения.

Определение Б.1. Отображение $T : B \to B$, где B — банахово пространство с метрикой d, называется *сжимающим отображением*, если существует q, $0 \leq q < 1$, такое, что

$$d(Tx, Ty) \leq q\, d(x, y) \qquad \forall\ x, y \in B.$$

Теорема Б.1 (Банаха о неподвижной точке). *Пусть K — замкнутое подмножество банахова пространства B и пусть $T : K \to K$ — сжимающее отображение. Тогда существует единственное $z \in K$ такое, что $T(z) = z$.*

Для доказательства существования слабых решений линейных задач (в пособии рассматривается случай задачи Коши) необходимо вспомнить теорему Хана–Банаха и теорему Рисса о представлении непрерывного линейного функционала. Для этого напомним вначале определение ограниченного линейного функционала.

Определение Б.2. Пусть V — векторное пространство и $p : V \to \mathbb{R}_+$ — полунорма. Линейный функционал $f : V \to K$ называется *ограниченным*, если существует такая константа $C \in \mathbb{R}_+$, что

$$|f(u)| < C\,p(u) \qquad \forall u \in V.$$

Если f — линейный ограниченный функционал, то *норма* $\|f\|$ определяется так:

$$\|f\| = \sup_{u \in V} \{|f(u)| \,:\, p(u) = 1\}\,.$$

Теорема Б.2 (Хана–Банаха). *Пусть $f : U \to K$ — ограниченный линейный функционал на подпространстве U векторного пространства V и пусть $\|f\|_U$ — норма f, ассоциированная с ограничением полунормы на U. Тогда существует ограниченное продолжение $F : V \to K$ (на все пространство V) с той же нормой, т.е.*

$$\|F\|_V = \|f\|_U.$$

Теорема Б.3 (Рисса о представлении непрерывного линейного функционала). *Для каждого непрерывного линейного функционала f на гильбертовом пространстве H существует такое единственное $u \in H$, что*

$$f(x) = (x, u)_H \qquad \forall\ x \in H,$$

где $(\ ,\ )_H$ — скалярное произведение в H.

Список литературы

1. *Блохин А. М.* Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986. 240 с.
2. *Блохин А. М.* Элементы теории гиперболических систем и уравнений: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 1995. 104 с.
3. *Блохин А. М., Трахинин Ю. Л.* Устойчивость сильных разрывов в магнитной гидродинамике и электрогидродинамике. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 324 с.
4. *Годунов С. К.* Интересный класс квазилинейных систем // ДАН СССР. 1961. Т. 139. № 3. С. 521–523.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
8. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа к задачам математической физики. Ленинград: ЛГУ, 1950. 256 с.
9. *Уизем Д.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
10. *Adams R. A.* Sobolev spaces. N. Y.: Academic Press, 1975. 286 p.
11. *Alinhac S.* Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels // *Comm. Partial Differential Equations*. 1989. Vol. 14. P. 173–230.
12. *Coulombel J.-F., Secchi P.* Nonlinear compressible vortex sheets in two space dimensions // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 2008. Vol. 41. P. 85–139.
13. *Francheteau J., Métivier G.* Existence de chocs faibles pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels // Astérisque. 2000. Vol. 268. P. 1–198.
14. *Friedrichs K. O.* The identity of weak and strong extensions of differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 55. P. 132–151.

15. *Friedrichs K. O.* Symmetric hyperbolic linear differential equations // Commun. Pure Appl. Math. 1974. Vol. 27. P. 123–131.

16. *Hörmander L.* The boundary problems of physical geodesy // Arch. Ration. Mech. Anal. 1976. Vol. 62. P. 1–52.

17. *Kreiss H.-O.* Initial boundary value problems for hyperbolic systems // Commun. Pure Appl. Math. 1970. Vol. 23. P. 277–296.

18. *Lax P. D., Phillips R. S.* Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // Comm. Pure Appl. Math. 1960. Vol. 13. P. 427–455.

19. *Lindblad H.* Well posedness for the motion of a compressible liquid with free surface boundary // Commun. Math. Phys. 2005. Vol. 260. P. 319–392.

20. *Majda A.* The existence of multi-dimensional shock fronts // Mem. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 43, № 281. P. 1–93.

21. *Majda A.* Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables. N. Y.: Springer-Verlag, 1984. 160 p.

22. *Métivier G.* Stability of multidimensional shocks // Eds. Freistühler H., Szepessy A. Advances in the Theory of Shock Waves. Boston: Birkhäuser Verlag, 2001. P. 25–103.

23. *Schochet S.* The compressible Euler equations in a bounded domain: existence of solutions and the incompressible limit // Comm. Math. Phys. 1986. Vol. 104. P. 49–75.

24. *Rauch J. B., Massey F. J.* Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 189. P. 303–318.

25. *Trakhinin Y.* On existence of compressible current-vortex sheets: variable coefficients linear analysis // Arch. Ration. Mech. Anal. 2005. Vol. 177. P. 331–366.

26. *Trakhinin Y.* Dissipative symmetrizers of hyperbolic problems and their applications to shock waves and characteristic discontinuities // SIAM J. Math. Anal. 2006. Vol. 37. P. 1988–2024.

27. *Trakhinin Y.* The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. 2009. Vol. 191. P. 245–310.