МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Механико-математический факультет

“*УТВЕРЖДАЮ*”

____

«_____»__________________201__ г.

Рабочая программа дисциплины

«Уравнения математической физики»

Направление подготовки
01.03.01 Математика

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения очная

Новосибирск 2014

Программа дисциплины «Уравнения математической физики» составлена в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного бакалавра по «профессиональному циклу дисциплин, базовая часть», определенными в ООП по направлению подготовки **01.03.01.- Математика**, а также в соответствии с задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ.

Автор: Васкевич Владимир Леонтьевич, д.ф.-м.н.

Механико-Математический Факультет
Кафедра дифференциальных уравнений

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Уравнения математической физики» реализует общие цели ООП в части подготовки выпускников в области математических и естественнонаучных знаний для успешного выполнения разработок, ориентированных на научные исследования и их приложения.

Цели освоения дисциплины обучающимися - научиться использовать предметную теорию при изучении дисциплин профессионального цикла и выработать правильные представления о связи абстрактных математических моделей с реальными процессами.

Овладение материалом курса означает, во-первых, освоение слушателями основных положений теории и, во-вторых, умение применить изученные методы при решении задач, аналогичных рассмотренным в курсе.

Основная цель преподавания дисциплины состоит в обучении правилам постановок задач для уравнений с частными производными (в основном, второго порядка) и для систем уравнений с частными производными первого порядка, а также в обучении основным методам решения правильно поставленных задач. Важно кроме того выработать у обучающихся устойчивые навыки правильного математического моделирования реальных физических процессов.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина входит в базовую часть профессионального цикла образовательной программы бакалавра. Дисциплина «Уравнения математической физики» опирается на следующие дисциплины образовательной программы:

- Линейная алгебра и аналитическая геометрия;
- Математический анализ;
- Обыкновенные дифференциальные уравнения;
- Теория функций комплексной переменной.

Результаты освоения дисциплины «Уравнения математической физики» используются в следующих дисциплинах образовательной программы:

- Численные методы;
- Математическое моделирование;
- Физика;
- Функциональный анализ.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

- Общекультурные компетенции: ОК-6, ОК-7, ОК-8, ОК-10, ОК-11, ОК-12;
- Профессиональные компетенции: ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-13, ПК-22

.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- уметь выводить, а также классифицировать основные уравнения и системы уравнений математической физики,
- уметь правильно ставить и решать задачу Коши и смешанные краевые задачи для уравнений второго порядка гиперболического типа (волновое уравнение),
- уметь правильно ставить и решать задачу Коши и смешанные краевые задачи для уравнений второго порядка параболического типа (уравнение теплопроводности),
- уметь правильно ставить и решать краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнений второго порядка эллиптического типа (уравнения Лапласа и Пуассона),

- владеть сопутствующими вопросами теории обобщенных функций и теории специальных функций.

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц. Распределение учебных часов по разделам дисциплины представлено в таблице.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекция	**Семинары**	**Самост. работа**	**Контр. работа**	**Зачет**	
1.	Некоторые уравнения и системы математической физики.	5	1	3	4	7			
2.	Системы дифференциальных уравнений и их характеристические поверхности.	5	2	2	4	6			
3.	Классификация и приведение к каноническому виду линейных уравнений и их характеристические поверхности.	5	3	4	4	8			
4.	Задачи для волнового уравнения.	5	5	6	4	10			
5.	Интегралы энергии для решений волнового уравнения.	5	8	2	2	4			
6.	Свойства решений волнового уравнения.	5	9	2	2	4			
7.		5	7				2		**контрольная**
8.	Понятие о корректных и некорректных задачах математической физики.	5	10	4	2	6			
9.	Метод Фурье для уравнений второго порядка.	5	11	4	6	10			
10.	Задача Коши для уравнения теплопроводности.	5	13	4	4	8			
11.	Обобщенные функции и решения задач математической физики	5	15	5	2	6			
12.		5	16				2		**контрольная**
13.		5	17					2	**зачет**
14.	Решения уравнений Лапласа и Пуассона	6	1	2	2	4			
15.	Функция Грина задачи Дирихле.	6	2	2	2	4			
16.	Свойства гармонических функций.	6	3	2	2	4			
17.	Уравнение Лапласа в ортогональных криволинейных координатах.	6	4	2	4	6			

18.		6	4				2		**контрольная**
19.	Сферические функции в многомерном пространстве.	6	5	4	0	4			
20.	Обобщенное дифференцирование.	6	6	2	2	4			
21.	Операция усреднения.	6	7	2	2	4			
22.	Пространства Соболева.	6	8	2	6	8			
23.	Вариационный подход к решению задач Дирихле и Неймана.	6	9	2	4	6			
24.	Предмет и эффекты теории нелинейных волн.	6	10	4	2	6			
25.	Метод обратной задачи для уравнения КДФ: введение.	6	11	2	2	4			
26.	Метод обратной задачи для уравнения КДФ: обоснование.	6	12	2	2	5			
27.	Солитонные решения уравнения КДФ.	6	13	2	2	4			
28.	Нелинейные волны в средах с диссипацией: уравнение Бюргерса.	6	14	2	2	4			
29.		6	15					8	**Консультация, Экзамен**
	Всего			**68**	**68**	**136**	**6**	**10**	

Лекции.

ТЕМА 1: Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Понятие о начальных данных и краевых условиях. Вывод системы уравнений гидродинамики, уравнения теплопроводности, стационарный случай.

ТЕМА 2: Общий вид линейных и квазилинейных систем дифференциальных уравнений. Характеристический полином, характеристическое направление, уравнение конуса характеристических нормалей, определение характеристической поверхности системы. Системы уравнений первого порядка. Симметрические гиперболические системы. Система уравнений акустики. Одномерная система уравнений газодинамики.

ТЕМА 3: Общий вид линейного уравнения второго порядка, уравнения конуса характеристических нормалей и характеристик. Тип уравнения в точке и области, канонический вид уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные уравнения в случае двух независимых переменных. Приведение к каноническому виду.

ТЕМА 4: Формула общего решения одномерного уравнения, ее графическая интерпретация. Формула Даламбера. Принцип Дюамеля. Задача в квадранте с простейшим краевым условием. Использование формулы Даламбера для решения смешанной задачи. Задача Коши для трехмерного волнового уравнения с данными на плоскости $t=0$. Сферическое среднее, формула Кирхгофа. Вывод формулы Пуассона методом спуска Адамара. Принцип Гюйгенса.

ТЕМА 5: Конические характеристические поверхности многомерного волнового уравнения. Энергетическая оценка. Единственность решения задачи Коши. Принцип конечной зависимости решений от начальных условий.

ТЕМА 6: Единственность решения смешанной задачи с нулевыми краевыми условиями. Закон сохранения энергии. Принцип Дюамеля, запаздывающий потенциал. Сферические, цилиндрические и плоские волны.

ТЕМА 7: Примеры и определение корректных задач. Некорректность задачи Коши для волнового уравнения с данными на плоскости $x = 0$. Пример Адамара для системы Коши-Римана. Теорема Коши-Ковалевской. Критерий корректности задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и данными на плоскости. Корректность задачи Коши для волнового уравнения с данными на плоскости.

ТЕМА 8: Постановка смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка. Схема метода Фурье. Свободные колебания прямоугольной мембраны. Свободные колебания круглой мембраны.

ТЕМА 9: Постановка задачи Коши. Инвариантность множества решений уравнения теплопроводности относительно специальных преобразований плоскости. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона. Пример Ковалевской. Принцип максимума. Единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций. Класс $M_{\sigma}(T)$, теорема Тихонова. Принцип Дюамеля.

ТЕМА 10: Пространство распределений на финитных бесконечно дифференцируемых функциях. Пространство обобщенных функций медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций. Обобщенные решения дифференциальных уравнений. Фундаментальные решения дифференциальных операторов.

ТЕМА 11: Гармонические функции, фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формулы Грина. Лемма об интегральном представлении произвольной гладкой функции суммой потенциалов. Определение ньютоновского потенциала, потенциалов простого и двойного слоев. Простейшие свойства гармонических функций. Теорема о среднем. Принцип максимума. Постановки основных краевых задач для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле.

ТЕМА 12: Определение функции Грина задачи Дирихле, теорема об интегральном представлении гладкого решения через функцию Грина. Построение функции Грина для шара методом изображений. Внутренняя задача Дирихле для шара. Интеграл Пуассона.

ТЕМА 13: Лемма о гармоничности функции, удовлетворяющей теореме о среднем. Первая теорема Гарнака. Неравенства Гарнака. Вторая теорема Гарнака. Теорема Лиувилля. Внешняя задача Дирихле для шара. Лемма о поведении гармонической функции на бесконечности. Теоремы единственности решения внутренней и внешней задач Неймана.

ТЕМА 14: Преобразование оператора Лапласа при переходе к криволинейным координатам. Определение и свойства многомерных сферических координат. Уравнение Лапласа в сферических координатах.

ТЕМА 15: Решения задачи на собственные значения для угловой части оператора Лапласа. Ортогональность сферических гармоник разного порядка. След шарового многочлена на единичной сфере. Теорема о представлении Гаусса. Полнота последовательности сферических функций, соответствующих шаровым многочленам. Теорема о последовательности собственных чисел угловой части оператора Лапласа. Сферические гармоники в трехмерном пространстве. Базис в пространстве сферических гармоник данного порядка. Теорема об ограниченных решениях уравнения Лежандра. Присоединенные функции Лежандра.

ТЕМА 16: Локально суммируемые функции. Пространства $L_p(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$. Регулярная обобщенная производная данного порядка от локально суммируемой функции. Лемма дю Буа-Реймонда. Функция, имеющая обобщенную производную, но не дифференцируемая в обычном смысле. Свойства оператора обобщенного дифференцирования. Слабая замкнутость оператора обобщенного дифференцирования.

ТЕМА 17: Ядра усреднения. Средняя функция, ее свойства. Теорема о сходимости средних функций к исходной в равномерной норме. Теорема о невозрастании нормы в $L_p(Q)$ при усреднении. Сходимость средних к исходной функции по норме $L_p(Q)$. Лемма о перестановочности операторов обобщенного дифференцирования и взятия средней функции.

ТЕМА 18: Определение и свойства пространства Соболева $W_p^{(m)}(Q)$. Эквивалентные нормировки. Теорема о продолжимости через гладкую границу с сохранением класса. Теорема о плотности бесконечно дифференцируемых функций в пространстве Соболева. След функции из пространства Соболева на гладкой границе области.

ТЕМА 19: Множество допустимых функций, заданных на границе области. Интеграл Дирихле. Постановка обобщенной задачи Дирихле и соответствующей вариационной задачи. Единственность решения вариационной задачи. Теорема о минимизирующей последовательности. Теорема о гармоничности решения вариационной задачи. Единственность решения обобщенной задачи Дирихле. Принцип Дирихле. Пример Адамара недопустимой функции. Постановка обобщенной задачи Неймана. Теорема существования слабого решения задачи Неймана. Теорема о слабом решении задачи Неймана класса $C^2(\Omega)$.

ТЕМА 20: Предмет теории нелинейных волн, примеры. Эффекты, характерные для теории нелинейных волн. Дисперсия волн: дисперсионное соотношение для линейных уравнений и систем, примеры, размывание профиля волны в среде с дисперсией, нелинейный случай. Разрушение волны: задача Коши для уравнения простых волн, ее решение методом характеристик. Обобщенное решение уравнения простых волн. Условия на разрыве и поиск точки разрыва.

ТЕМА 21: Канонический вид и законы сохранения уравнения КдФ. Постановки прямой и обратной задач рассеяния. Схема решения задачи Коши для уравнения КдФ методом обратной задачи.

ТЕМА 22: Свойства одномерного оператора Шредингера с быстроубывающим потенциалом. Определение пары Лакса. Критерий унитарной эквивалентности реализаций оператора Шредингера при разных значениях времени. Примеры операторов, образующих пары Лакса. Следствия о собственных числах. Уравнение для собственных функций оператора с постоянными во времени собственными числами. Зависимость от времени данных рассеяния в случае быстроубывающего потенциала. Функции Йоста. Матрица рассеяния, связь ее элементов с коэффициентами отражения и прохождения. Связь между потенциалом и ядром в треугольном представлении первой функции Йоста. Связь ядра в треугольном представлении первой функции Йоста с данными рассеяния (уравнение ГЛМ).

ТЕМА 23: Задача Коши для уравнения КдФ со специальными начальными данными (постановка, решение прямой задачи рассеяния с начальным потенциалом, зависимость данных рассеяния от времени). Построение и решение уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко для положительного значения временной переменной. Определение солитона, качественный характер взаимодействия двух солитонов. Общий вид решения уравнения КдФ типа безотражательного потенциала. Определение N-солитонного решения уравнения КдФ. Асимптотика такого решения на бесконечности.

ТЕМА 24: Точные решения уравнения Бюргерса. Преобразование Коула–Хопфа. Поведение решений уравнения Бюргерса при малой вязкости. Стационарная ударная волна.

Семинары

На семинары отводится то же количество часов, что и на лекции. Это подтверждает практическую направленность курса.

Содержание семинарских занятий соответствует разделам лекционного материала. Каждое семинарское занятие предусматривает как выполнение заданий теоретического плана для проверки степени освоения лекционного материала, так и выполнение заданий для овладения навыками и методами, необходимыми при решении практических задач.

Рекомендуемые *темы семинарских занятий*:

Уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши. Уравнение Гамильтона ─ Якоби (2 занятия).

Классификация уравнений и систем, характеристические поверхности. (1занятие.) Приведение к каноническому виду уравнений и систем. Общее решение. (2 занятия.)

Одномерное волновое уравнение, задача Коши, формула Даламбера, принцип Дюамеля, задачи в квадранте. (1 занятие.) Многомерное волновое уравнение, его характеристики, задача Коши, формулы Кирхгофа и Пуассона, принцип Дюамеля. (1 занятие.)

Корректность задач математической физики. Пример Адамара. (1 занятие.)

Смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов. Решение методом Фурье. (3 занятия.)

Уравнение теплопроводности, задача Коши, формула Пуассона, принцип Дюамеля, принцип максимума. (1 занятие.)

Пространство обобщенных функций действия с обобщенными функциями. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. (2 занятия.)

Краевые задачи для уравнения Лапласа. Метод разделения переменных (квадрат, круг, кольцо). (1 занятие.)

Уравнение Лапласа в ортогональных криволинейных координатах, коэффициенты Ламе. Уравнение Лапласа в сферических координатах, сферические гармоники. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. (2 занятия.)

Функция Грина. Метод изображений. (1 занятие.)

Свойства гармонических функций (формула Пуассона, теорема о среднем, неравенства Гарнака, теорема Лиувилля). (1 занятие.)

Смешанная задача для гиперболических систем с двумя переменными: постановка, приходящие и уходящие характеристики, соответствующие им римановы инварианты, интеграл энергии, диссипативные краевые условия, априорные оценки. (3 занятия.)

Функциональные пространства $L_p(\Omega)$, L_{loc}, $C_0^\infty(\Omega)$. Регулярная обобщенная производная локально суммируемой функции. Пространства Соболева. (1 занятие)

Ядра усреднения, свойства оператора усреднения, решение одномерных линейных дифференциальных уравнений в соболевских классах. (1 занятие.)

Одномерные теоремы вложения, операторы продолжения в классах Соболева. След функции из пространства Соболева. (1 занятие.)

Вариационные методы решения краевых задач для уравнения Лапласа. Допустимые и недопустимые функции. Принцип Дирихле. (1 занятие.)

5. Образовательные технологии

Используется традиционная лекционно-семинарская система обучения. Лекции читаются с использованием медиа-проектора и ноутбука. Проведение семинаров включает обязательную работу студентов у доски для публичного/коллективного решения задач по теме под управлением преподавателя. Курс подразумевает также выполнение студентами домашних заданий. При возникновении у студентов конкретных вопросов или затруднений решения одной/двух задач из числа заданных на дом разбираются у доски.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Перечень примерных контрольных вопросов для самостоятельной работы:

1. Дать определение характеристик уравнения (системы уравнений) с частными производными. Привести примеры.

2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными.

3. Уравнения характеристик. Канонические формы уравнений.

4. Классификация уравнений второго порядка со многими независимыми

5. Вывод основных уравнений математической физики. Уравнение колебаний струны.

6. Уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле.

7. Задачи, приводящие к уравнениям Пуассона и Лапласа.

8. Постановка основных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка.

9. Задача Коши.

10. Краевые задачи для уравнений эллиптического типа.

11. Смешанная краевая задача.

12. Корректность постановки задач математической физики.
13. Теорема Ковалевской. Пример Адамара.

14. Первая и вторая формулы Грина для оператора Лапласа.

15. Задача на собственные значения. Свойства собственных значений и собственных функций.

16. Метод Фурье. Метод разделения переменных для решения первой начально-краевой задачи для уравнения колебания струны.

17. Метод разделения переменных для решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

18. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера.

19. Задача Коши для трехмерного волнового уравнения. Формула Кирхгофа.

20. Задача Коши для двумерного волнового уравнения. Формула Пуассона.

21. Принцип Гюйгенса.

22. Неоднородное уравнение. Принцип Дюамеля.

23. Задача Коши. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши.

24. Единственность решения начально-краевых задач для волнового уравнения.

25. Интеграл энергии.

26. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона.

27. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.

28. Единственность решения первой начально-краевой задачи для уравнения

Примерные задания для самостоятельной работы:

- Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & +2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}=0, \\ u\Big|_{t=0} & =(x-1)^2+y^2. \end{cases}$$

- Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & +\dfrac{\partial u}{\partial y}-2\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}=0, \\ u\Big|_{t=0} & =3x+y-1. \end{cases}$$

- Привести к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

- Найти общее решение уравнения:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

- Найти общее решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2y\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2x^2yu=0.$$

- Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & =\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xyz, \\ u\Big|_{t=0} & =x^2+y^2-2z^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} & =1. \end{cases}$$

- Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + t^2x^2, \\ u\Big|_{t=0} &= y^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= z^2. \end{cases}$$

- Найти решение краевой задачи методом Фурье:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + 2\sin\, 3x \sin x \text{ при } 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ t > 0, \\ u_x\Big|_{x=0} &= u_x\Big|_{x=\pi/2} = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0, \\ u\Big|_{t=0} &= 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Найти решение краевой задачи методом Фурье:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - x + 2\sin\, 2x \cos x \text{ при } 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ t > 0, \\ u\Big|_{x=0} &= 0, \quad u_x\Big|_{x=\pi/2} = 1 \quad \text{при} \quad t \geq 0, \\ u\Big|_{t=0} &= x \quad \text{при} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Найти решение краевой задачи методом Фурье:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2t + 2\cos^2 x, \\ u_x\Big|_{x=0} &= 0, \quad u_x\Big|_{x=\pi} = 2\pi t \quad \text{при} \quad t \geq 0, \\ u\Big|_{t=0} &= 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

- Найти решение краевой задачи методом Фурье:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3x - 2t \text{ при } 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi} = \pi t \quad \text{при} \quad t \geq 0, \\ u\Big|_{t=0} = e^{-x}\sin x, \quad u_t\Big|_{t=0} = x \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

- Найти решение краевой задачи методом Фурье:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8u - 9e^t \text{ при } 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ t > 0, \\ u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=\pi/2} = e^t \quad \text{при} \quad t \geq 0, \\ u\Big|_{t=0} = u_t\Big|_{t=0} = 1 + \cos 3x \quad \text{при} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Найти решение задачи Коши при $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \\ u\Big|_{t=0} = \sin \alpha_1 x_1 + \cos \alpha_n x_n, \end{cases}$$

где α_1, α_n — заданные константы.

- Найти решение задачи Коши при $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \\ u\Big|_{t=0} = \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 x_2 \ldots \sin \alpha_n x_n, \end{cases}$$

где α_1, α_2, ..., α_n — заданные константы.

- Найти решение задачи Коши при $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = \dfrac{1}{8}\,\Delta u + \dfrac{1}{8}, \\ u\Big|_{t=0} & = e^{-(x-y)^2}. \end{cases}$$

- Найти решение задачи Коши при $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = a^2\Delta u + \cos t, \\ u\Big|_{t=0} & = 2xye^{-x^2-y^2}. \end{cases}$$

- Найти решение задачи Коши при $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = a^2\Delta u + \cos(x+y-z), \\ u\Big|_{t=0} & = e^{-(x+y-z)^2}. \end{cases}$$

- Найти решение задачи Коши при $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = a^2\Delta u, \\ u\Big|_{t=0} & = e^{-(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)^2}. \end{cases}$$

- Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(x,0) = u(x,b) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = y(b-y),\ u(a,y) = \sin\dfrac{\pi y}{b} \quad \text{при} \quad 0 \le y \le b. \end{cases}$$

- Найти стационарное распределение температуры $u(x, y, z)$ внутри бесконечного цилиндра $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < R^2,\ -\infty < z < +\infty\}$, если известно, что на поверхности цилиндра поддерживается температура Ay.

- Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le a, \\[2ex] u(0, y) = y(b - y), \quad u(a, y) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le y \le b. \end{cases}$$

- Найти стационарное распределение температуры $u(x, y, z)$ внутри бесконечного цилиндра $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < R^2,\ -\infty < z < +\infty\}$, если известно, что на половине поверхности цилиндра поддерживается температура T_0, в то время как температура другой его половины равна $-T_0$.

- Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12(x^2 - y^2) \quad \text{при} \quad a^2 < x^2 + y^2 < b^2, \\[2ex] u(x, y)\Big|_{x^2+y^2=a^2} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x, y)\Big|_{x^2+y^2=b^2} = 0. \end{cases}$$

- Найти стационарное распределение температуры $u(x, y, z)$ внутри полусферы заданного радиуса, если на основании полусферы температура нулевая, а на остальной части полусферы температура постоянна и не равна нулю.

- Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 < a^2, \\[2ex] u(x, y)\Big|_{x^2+y^2=a^2} = 0. \end{cases}$$

Образцы задач для подготовки к экзамену:

- Поставить правильно краевую задачу с начальными данными на отрезке $[a, b]$ числовой прямой для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

- При каких вещественных α функция

$$f(x) = |x|^{-\alpha} \sin |x|, \quad \text{где} \quad x = (x_1, x_2),$$

принадлежит пространству Соболева $W_2^2(|x| < 1)$?

- Является ли краевая задача для уравнения Лапласа в круге радиуса R и с одним из краевых условий

$$a) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma} = A(x^2 - y^2), \quad b) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma} = Ay + By^3,$$

$$\text{где} \quad \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\},$$

правильно поставленной? Если да, то решить ее.

- Методом Фурье решить следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$$p(-l, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0,$$

$$p(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \sin\frac{\pi x}{l} \quad \text{при} \quad -l \leq x \leq l.$$

- Найти гармонический полином $P_1(x, y, z)$ первой степени и гармонический полином $P_3(x, y, z)$ третьей степени такие, что имеет место равенство

$$x^3 + y^3 + z^3 = P_3(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)P_1(x, y, z).$$

- Выяснить, при каких положительных k существует и единственно решение $u = u(x,t)$ следующей задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad x > \frac{1}{k}t,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \quad \text{при} \quad x > 0,$$
$$u(x,kx) = 0 \quad \text{при} \quad x > 0.$$

  Найти это решение для указанных значений k.

- Методом Фурье решить следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 9\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge 0,$$
$$v(x,0) = 0, \quad u(x,0) = \sin \pi x \quad \text{при} \quad 0 \le x \le 1.$$

- Пусть функция u непрерывна в ограниченной области Ω, разбитой в объединение двух подобластей Ω_1 и Ω_2, имеющих в качестве общей границы некоторую гладкую поверхность γ, лежащую внутри Ω. Известно, что функции $u_1 = u\Big|_{\Omega_1}$ и $u_2 = u\Big|_{\Omega_2}$ гармоничны в Ω_1 и Ω_2 соответственно. Каким условиям на поверхности γ должны удовлетворять функции u_1 и u_2, чтобы функция u была гармонической во всей области Ω? Ответ обосновать.

- При каких значениях числа a, $|a| \le 1$, задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (a^2 - 1)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \end{cases}$$

  с данными Коши на отрезке $[0,\pi]$ прямой $y = 0$ поставлена некорректно? Ответ обосновать.

- Указать, при каких положительных значениях параметров α и β задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & = & a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big), \\ u\Big|_{t=0} & = & (x^2+y^2+z^2)^\alpha, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} & = & (x^2+y^2+z^2)^\beta, \end{cases}$$

имеет в области $t > 0$ дважды непрерывно дифференцируемое решение и найти его.

- Указать, какая из следующих двух функций допустима, а какая — нет:

$$a) \quad u(r,\varphi)\Big|_{r=1} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(4n^2\varphi)}{n^2} & \text{при } \dfrac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi; \end{cases}$$

$$b) \quad u(r,\varphi)\Big|_{r=1} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le \varphi \le \pi, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(3^n\varphi)}{n^3} & \text{при } \pi \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Ответ обосновать.

- Доказать, что любые два однородных гармонических полинома $P(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$ разных степеней ортогональны в скалярном произведении

$$(P,Q) = \frac{3}{4\pi}\int\limits_{B_1} P(x,y,z)Q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

где интеграл берется по единичному шару B_1 в пространстве переменных (x,y,z).

- Доказать, что при любом линейном ортогональном преобразовании независимых переменных шаровой многочлен переходит в шаровой многочлен той же степени.

- Указать при каких положительных значениях параметра α задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) + t\Big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big)^{\alpha},$$
$$u(x,y,z,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = 0,$$

имеет в области $t > 0$ дважды непрерывно дифференцируемое решение и найти его.

- Найти минимум интеграла Дирихле

$$\int\limits_{|x|<1} |\nabla v|^2\,dx, \quad x = (x_1, x_2),$$

на множестве функций $v(x) \in W_2^1(|x| < 1)$, принимающих на границе единичного круга следующие значения

$$v\Big|_{|x|=1} = \varphi(\pi-\varphi)(2\pi-\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

- Может ли заданная на единичной окружности функция $f(\varphi)$ быть граничным значением какой-либо функции $v(x_1, x_2)$ из $W_2^1(|x| < 1)$, если

$$a)\; f(\varphi) = \operatorname{sign}\varphi; \quad b)\; f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^4\varphi}{n^5}?$$

- Пусть $Q = \{(t,x) \mid 0 < x < 1, t > 0\}$ и $u(t,x) \in C^{(2)}(Q) \cap C^{(1)}(\overline{Q})$ — решение следующей задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u \quad \text{при} \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\[2ex] u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Доказать, что имеет место оценка

$$\max_{0\le x\le 1} |u(t,x)| \le Ce^{-6t},$$

где C не зависит от t.

- Пусть $u(t,x,y)$ — решение следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{при} \quad t > 0, \\ u(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

где $\psi(x,y) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ и $\psi(x,y) = 0$ при $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 2$. Во всех остальных точках плоскости функция $\psi(x,y)$ строго положительна. Описать множество всех тех точек (t,x,y), в которых функция $u(t,x,y)$ обращается в нуль. Изобразить это множество графически.

- Пусть $u(t,x)$ — решение следующей задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x) \quad \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Известно также, что $\psi(x) = \psi(1-x)$ и при этом $\int\limits_0^1 \psi^2(x)\,dx = 1$. Найти

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{1/2} [|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + |\frac{\partial u}{\partial x}|^2]\,dx.$$

- Пусть $u(t,x)$ — решение следующей задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin x \cos 5x \sin \omega t \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

Выяснить, при каких ω решение $u(t,x)$ ограничено в полуполосе $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$.

- При каких вещественных a, $|a| \le 1$, краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (a^2-1)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } 0 < x < 1, 0 < y < 1,\ z \ge 0, \\ \\ u(0,y,z) = u(1,y,z) = u(x,0,z) = u(x,1,z) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } 0 < x < 1, 0 < y < 1,\ z \ge 0, \end{cases}$$

  с данными Коши на квадрате $[0,1] \times [0,1]$ плоскости $z = 0$ поставлена некорректно? Ответ обосновать.

- Пусть $u(t,x)$ — решение следующей задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ \\ u(0,x) = \sin^{100} x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le \pi, \\ \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge 0. \end{cases}$$

  Верно ли, что мера множества тех x, для которых $|u_t(\pi/2, x)| > 1$, строго больше единицы?

- Пусть замкнутый угол на плоскости задается равенством $\overline{D} = \{(t,x) \mid kt \le x < +\infty,\ 0 \le t < +\infty\}$, где k — положительное число. Указать, при каких k, α и β существует решение $u(t,x) \in C^{(2)}(\overline{D})$ следующей задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad kt \le x < +\infty,\ t > 0, \\ \\ u(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \quad \text{при} \quad x \ge 0, \\ \\ u(t,x) = \alpha t^\beta \quad \text{при} \quad x = kt,\ t > 0. \end{cases}$$

  Единственно ли оно?

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) **Основные учебники:**

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: ФМЛ, 2000. – 400 с.
2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
3. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2007.
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
5. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992.

б) **Основные задачники:**

1. Владимиров В.С., Михайлов В.П. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики / под редакцией Владимирова В.С. М.: ФМЛ, 2001. 288 с.
2. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: НГУ, 1987.
3. Вентцель Т.Д., Горицкий А.Ю. и др. Сборник задач по уравнениям с частными производными / под редакцией Шамаева А.С. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2005.

в) **Дополнительная литература:**

1. Соболев С.Л. Избранные труды. Т.1-. / Отв. ред. Ю.Г. Решетняк и др.. - Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2003.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 6-е издание, исправленное и дополненное. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
5. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: ФМЛ, 2003.
6. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.

7. Демиденко Г.В. Введение в теорию соболевских пространств. Новосибирск, изд-во НГУ, 1995.
8. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.

в) *Интернет-ресурсы по теме дисциплины:*

Веб-сайт EqWorld – Мир математических уравнений. – url: http://eqworld.ipmnet.ru.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- Аудитория, доска, мел.
- Возможно: ноутбук, медиа-проектор, экран.
- Для электронного/дистанционного обучения необходим доступ к интернет-сайту с необходимым программным обеспечением