Национальный исследовательский университет
Новосибирский государственный университет
Китайско–Российский Институт

В. Л. Васкевич

Слайды к курсу обыкновенных дифференциальных уравнений

Направление «Математика и прикладная математика»
Вспомогательный материал для студентов

Харбин 2017 г.

Материалы, отраженные на слайдах, содержат наиболее универсальные понятия и методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, формулировки основных модельных задач этой теории, а также основные подходы к их решению. Основное внимание уделяется наиболее содержательным и ценным для приложений разделам линейной теории, а также нелинейным уравнениям. Излагаются сопутствующие вопросы теории уравнений с частными производными первого порядка. Материалы являются обязательными для освоения курса и включают все элементы курса, требуемые для выполнения заданий и решения задач.

Необходимость разработки данного комплекта слайдов обусловлена специальными требованиями к методическому сопровождению учебных курсов, предлагаемых студентам КРИ, включающему наличие рабочих тетрадей, содержащих слайды и предполагающих возможность самостоятельной их проработки и комментирования. Предлагаемый вариант слайдов отражает вопросы и комментарии студентов, адаптирован к особенностям аудитории и увязан с общей программой обучения.

Основное содержание слайдов разбивается на 15 занятий, отражающих теоретические и прикладные аспекты предметной области.

Автор: Васкевич Владимир Леонтьевич, д.ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений

Механико-Математический Факультет
Кафедра дифференциальных уравнений

Тема : Основные понятия и определения теории обыкновенных дифференциальных уравнений

$\mathbf{1^0}$. Обыкновенные дифференциальные уравнения произвольного порядка. Общее решение. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши. $\mathbf{2^0}$. Простейшие классы интегрируемых уравнений. $\mathbf{3^0}$. Дифференциальные уравнения и дифференциальные модели. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

1^0. Пусть x есть одномерная вещественная переменная. *Обыкновенным дифференциальным уравнениям порядка* n *называется уравнение*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (\mathbf{Eq_n})$$

относительно неизвестной функции $y(x)$. Отличительной по сравнению с алгебраическими уравнениями особенностью обыкновенных дифференциальных уравнений является то, что ОДУ обязательно содержит производные неизвестной функции.

Порядок старшей содержащейся в уравнении производной неизвестной функции называется *порядком уравнения*.

Функция $y = \varphi(x)$ *называется решением дифференциального уравнения* $(\mathbf{Eqn})$ *если данное уравнение обращается в тождество по-*

сле замены в нем y *на* $\varphi(x)$, y' *на* $\varphi'(x)$, ..., $y^{(n)}$ *на* $\varphi^{(n)}(x)$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение может иметь бесконечно много решений.

Как правило, решение дифференциального уравнения порядка n зависит, помимо переменной x, еще от n произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n$.

Определение. *Семейство решений уравнения* ($\mathbf{Eqn}$), *зависящее от произвольных постоянных* $C_1, \ldots, C_n$ *и задаваемое равенством*

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n),$$

называют общим решением этого уравнения.

Преобразуя уравнение ($\mathbf{Eqn}$) путем интегрирования и каких-либо ещё математических операций, мы часто получаем не общее решение исходного уравнения, а лишь соотношение вида

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$$

между независимой переменной x, функцией y и постоянными $C_1, \ldots, C_n$.

Используя теорему о неявной функции, от данного соотношения мы можем перейти к общему решению, но, вообще говоря, такой переход имеет локальный характер и может быть неоднозначным.

Если дифференциальное уравнение порядка n записано в *виде, разрешённом относительно старшей производной, т.е. как*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

то говорят, что оно записано *в нормальной форме*.

Пусть $y = \varphi(x)$ есть некоторое решение дифференциального уравнения ($\mathbf{Eqn}$). График этого решения представляет собой некоторую кривую на плоскости OXY; называется эта кривая *интегральной кривой*.

Рассмотрим произвольное уравнение первого порядка, записанное в нормальной форме

$$y' = f(x, y).$$

Через каждую точку (x, y) области определения функции $f(x, y)$ проведем прямую, тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен $f(x, y)$.

Множество всех прямых такого вида определяют на плоскости *поле направлений*, соответствующее уравнению $y' = f(x, y)$. Величина y' определяет тангенс угла наклона касательной к кривой $y = y(x)$.

Следовательно, *в каждой точке интегральной кривой поле её касательных совпадает* *с полем направлений.* Иными словами, интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений, соответствующего функции $f(x, y)$.

Для уравнения порядка n также имеется геометрическое истолкование семейства интегральных кривых, но осуществляется это истолкование на языке геометрических характеристик более высокого порядка. Так, например, уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

можно переписать в эквивалентном виде

$$F\left(x, y, y', (1 + y'^2)^{3/2}\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}\right) = 0.$$

Как известно, величина

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

представляет собой кривизну кривой $y = y(x)$.

Таким образом, *всякая интегральная кривая для уравнения второго порядка определяется связью между координатами точек этой кривой, наклоном касательной и кривизной в каждой её точке.*

Отождествление решения дифференциального уравнения с интегральной кривой и возможность представления кривой в параметрическом виде позволяет и решение дифференциального уравнения представить в параметрическом виде

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Это замечание нам понадобится в дальнейшем.

Совокупность уравнений

$$F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0,$$

$$F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0,$$

$$\ldots$$

$$F_k(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0,$$

называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений.*

В каждое уравнение этой системы входят независимая переменная x, n неизвестных функций

$$y_1(x), \quad \ldots, \quad y_n(x)$$

и их производные, причем производные функции y_i имеют максимальный порядок m_i.

Совокупность функций

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad \ldots, \quad y_n = \varphi_n(x)$$

называется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений, если все уравнения этой системы обратятся в тождество после замены

$$y_1 \text{ на } \varphi_1(x),\ y_1' \text{ на } \varphi_1'(x),\ \ldots,\ y_1^{(m_1)} \text{ на } \varphi_1^{(m_1)}(x),$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$y_n \text{ на } \varphi_n(x),\ y_n' \text{ на } \varphi_n'(x),\ \ldots,\ y^{(m_n)} \text{ на } \varphi_n^{(m_n)}(x).$$

Ограничимся изучением *систем первого порядка в нормальной форме, а именно, систем вида*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (\mathrm{S}_1)$$

Семейство решений системы (S_1)

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \dots, y_n = \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n),$$

каждое из которых зависит от n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$, называют общим решением этой системы.

Функция $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ называется интегралом системы (S_1) в окрестности точки

$$(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0),$$

если в этой окрестности она имеет непрерывные первые частные производные и при этом имеет место равенство

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) +$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_2} f_2(x, y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \ldots, y_n) = 0.$$

Система из n интегралов называется общим интегралом системы (S_1) в окрестности точки $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, если от равенств

$$\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \ldots, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n$$

можно перейти к эквивалентной системе равенств

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n)$$

и при этом правые части этой эквивалентной системы дают в той же окрестности общее решение исходной.

Одной из основных задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений и в приложениях этой теории является задача Коши.

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения порядка n *состоит в том, что среди всех решений этого уравнения требуется найти такое решение* $y = y(x)$*, которое вместе со своими производными до* *порядка* $n-1$ *включительно принимает заданные значения*

$$y_0^0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_{n-1}^0$$

при заданном значении x_0 *независимой переменной*:

$$y(x_0)=y_0^0,\ y'(x_0)=y_1^0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}^0.$$

Числа y_0^0, ..., y_{n-1}^0 называются *начальными значениями* задачи Коши, число x_0 — *на-*

чальной точкой. Вся совокупность параметров x_0, y_0^0, ..., y_{n-1}^0 называется *начальными данными задачи Коши*.

Для системы уравнений (S_1) *обыкновенных уравнений первого порядка задача Коши состоит в нахождении таких функций*

$$y_1(x), \ldots, y_n(x),$$

которые в заданной начальной точке x_0 *при-нимают заданные начальные значения*:

$$y_1(x_0) = y_{10}, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Числа x_0, y_{10}, ..., y_{n0} вместе называются *начальными значениями задачи Коши* для системы ($\mathbf{S_1}$).

Условия Коши для одного уравнения или же для системы уравнений позволяют среди совокупности всех его решений выделить некоторое частное (возможно, не одно) решение.

Частное решение можно выделить и с помощью других условий. Например, частное решение можно выделить с помощью условий заданного поведения решения в той или иной точке, с помощью условий типа периодических, в случае уравнений порядка выше первого — с помощью краевых условий (то есть условий, задаваемых в разных точках).

Дадим механическое истолкование решений нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В механике принято независимую переменную обозначать через t, подразумевая, что t

— это время. Тогда решением системы ОДУ является система функций

$$y_1 = \varphi_1(t), \quad \dots, \quad y_n = \varphi_n(t).$$

Эти функции порождают в n - мерном пространстве с координатами $(y_1, \dots, y_n)$ кривую, которую при изменении времени описывает точка

$$(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

Каждая такая кривая называется *траекторией системы* ОДУ. Задача Коши для системы ОДУ состоит в том, что среди всех траекторий данной системы требуется найти ту, которая проходит через заданную точку $(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$.

Важнейшей характеристикой задачи Коши, важнейшим её свойством как с точки зрения математической теории, так и с точки зрения приложений является свойство этой задачи иметь решение и при этом единственное.

Не всякое уравнение и не всякая задача Коши обладают этим свойством. Например, задача Коши

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = 0$$

имеет два разных решения

$$y(x) = \frac{1}{4}(x - x_0)^2 \quad \text{и} \quad y(x) \equiv 0.$$

Эта же задача Коши, но с ненулевым начальным условием

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(x_0) = y_0 > 0$$

имеет в окрестности точки (x_0, y_0) лишь одно решение.

Существуют уравнения, для которых на плоскости (x, y) можно выделить такое множество, что при начальных данных из этого множества задача Коши имеет неединственное решение, а при начальных данных из оставшейся части плоскости решение задачи Коши единственно. В некоторых случаях подобное множество (множество неединственности) может само по себе представлять решение исходного дифференциального уравнения.

Решение, в каждой точке (x_0, y_0) которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым.

В рассмотренном примере решение $y(x) \equiv 0$ как раз и является особым.

Некоторые уравнения имеют “частично” особые решения — решения, склеенные из "хорошего"и особого.

Например, уравнение $y' = \sqrt{y}$ помимо решений

$$y(x) \equiv 0 \quad \text{и} \quad y(x) = \frac{1}{4}(x - x_0)^2$$

имеет следующие:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le x_0, \\ \frac{1}{4}(x - x_0)^2 & \text{при } x > x_0. \end{cases}$$

Между системами дифференциальных уравнений первого порядка для n функций и одним дифференциальным уравнением порядка n имеется тесная связь. Покажем это.

Пусть дано уравнение порядка n в нормальной форме

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Обозначим неизвестную функцию y через y_1 и введем новые неизвестные

$$y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \ldots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Имеют место равенства

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad \ldots, \quad y_{n-1}' = y_n,$$

$$y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Другими словами, функции $y_1, \ldots, y_n$ связаны системой

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \ldots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (\mathrm{S}_2)$$

Если известно решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ данной системы, то тем самым известно и решение исходного дифференциального уравнения.

Верно и обратное — всякое решение $y(x)$ исходного дифференциального уравнения порядка n в нормальной форме дает решение $(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ системы ($\mathbf{S_2}$), если определить функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ через функцию $y(x)$ указанным выше способом.

Другими словами, *дифференциальное уравнение порядка* n *в нормальной форме и система* $(\mathbf{S_2})$ *равносильны.*

Пусть теперь дана система из n уравнений первого порядка в нормальной форме. Оказывается, что при определенных условиях всякую такую систему можно свести к одному дифференциальному уравнению порядка n. В общем случае делается это весьма громоздким образом. Продемострируем алгоритм сведения на примере системы из двух уравнений — именно, системы

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2),$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2).$$

Пусть первое уравнение этой системы таково, что функцию y_2 можно выразить через величины (x, y_1, y_1'), т.е. получить соотношение вида

$$y_2 = g_1(x, y_1, y_1').$$

Дифференцируя первое уравнение рассматриваемой системы по переменной x по правилу дифференцирования сложной функции, получаем соотношение

$$y_1'' = f_{1x}(x, y_1, y_2) + \\ f_{1y_1}(x, y_1, y_2)y_1' + f_{1y_2}(x, y_1, y_2)y_2'.$$

Подставляя вместо y_2 функцию $g_1(x, y_1, y_1')$, а вместо y_2' — функцию $f_2(x, y_1, g_1(x, y_1, y_1'))$, получим следующее содержащее только функцию $y_1(x)$ уравнение:

$$y_1'' = f_{1x}(x, y_1, g_1(x, y_1, y_1'))+$$

$$+f_{1y_1}(x, y_1, g_1(x, y_1, y_1'))y_1'+$$

$$+f_{1y_2}(x, y_1, g_1(x, y_1, y_1'))f_2(x, y_1, g_1(x, y_1, y_1')),$$

или в сокращенном виде $y_1'' = f(x, y_1, y_1')$.

Другими словами, от исходной системы мы перешли к одному дифференциальному уравнению в нормальной форме.

Решив это уравнение, найдем функцию $y_1(x)$. Используя же равенство $y_2 = g_1(x, y_1, y_1')$, находим и функцию $y_2(x)$.

Как видно из выше изложенного, условиями, при выполнении которых возможно сведение системы уравнений первого порядка к одному уравнению второго порядка, является условие существования либо функции g_1, определяющей величину y_2 (либо функции g_2, определяющей величину y_1), а также условие существования всех частных производных первого порядка либо у функции $f_1(x, y_1, y_2)$, либо у функции $f_2(x, y_1, y_2)$. Во многих реальных ситуациях эти условия выполняются.

Действуя по алгоритму сведения уравнения к системе, можно систему с производными более высокого порядка нежели первый свести к системе первого порядка.

Пусть дана система

$$
\begin{aligned}
z_1'' &= g_1(x, z_1, z_2, z_1', z_2'),\\
z_2'' &= g_2(x, z_1, z_2, z_1', z_2').
\end{aligned}
$$

Здесь неизвестные — это функции $z_1(x)$, $z_2(x)$. Введем новые неизвестные функции:

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2, \quad y_3 = z_1', \quad y_4 = z_2'.$$

Тогда исходная система может быть записана в виде

$$y_1' = y_3 \equiv f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4),$$

$$y_2' = y_4 \equiv f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4),$$

$$y_3' = g_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_4),$$

$$y_4' = g_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv f_4(x, y_1, y_2, y_3, y_4),$$

то есть в виде системы первого порядка в нормальной форме.

2^0. Опишем некоторые простейшие классы уравнений, общие решения которых (в явной или неявной форме) удается найти с помощью интегрирования и некоторых элементарных преобразований.

Начнем с уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной. Эти уравнения будем рассматривать в одном из следующих видов

$$y' = f(x, y), \qquad f_1(x, y)y' = f_2(x, y).$$

Формально на множестве точек (x, y), для которых выполняется $f_1(x, y) \neq 0$, второе уравнение можно свести к первому. Обратно, если функция $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)},$$

то после умножения на $f_1(x, y)$ первое уравнение сводится ко второму.

При таких действиях в первом случае мы сужаем множество точек (x, y), на которых рассматриваем уравнение, во втором случае

— расширяем. Другими словами, при переходе от второго уравнения к первому мы можем потерять решение, а при переходе от первого ко второму — приобрести лишние решения. Сказанное означает, что *рассматриваемые уравнения неравносильны*.

Всюду выше по умолчанию предполагается, что решение того или иного уравнения есть функция, зависящая от x. Но если возможно перейти от этих уравнений к соотношению

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

то переменные x и y становятся равноправными. Если выразить x как функцию y и C, то эта функция будет решением либо уравнения

$$x' = \frac{1}{f(x, y)},$$

либо соответственно уравнения

$$f_2(x,y)x' = f_1(x,y).$$

В некоторых случаях эти уравнения интегрируются (решаются) легче, чем исходные.

Во многих случаях дифферениальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, удобно записывать через дифференциалы в симметричной форме

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

При переходе от дифференциального уравнения, записанного в нормальной форме, к уравнению в симметричной форме необходимо следить за эквивалентностью переходов.

Первый интегрируемый класс дифференциальных уравнений, который мы исследуем, есть *класс уравнений с разделяющимися переменными.* К таковым относятся уравнения вида

$$y' = f(x)g(y),$$

$$f_1(x)g_1(y)y' = f_2(x)g_2(y).$$

Чтобы найти решение таких уравнений, необходимо перейти к уравнению в симметричной форме и разделить в нем переменные. В результате получися уравнение одного из видов

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

Предположим, что функция $y = \varphi(x)$ является решением второго из них. Имеет место соотношение $dy = \varphi'(x)dx$. С учётом этого соотношения получаем равенство

$$\left[\frac{g_1(\varphi(x))}{g_2(\varphi(x))}\varphi'(x) - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right] dx = 0,$$

которое после интегрирования преобразуется к равенству

$$\int \frac{g_1(\varphi(x))}{g_2(\varphi(x))}\varphi'(x)dx = \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx + C.$$

В интеграле слева сделаем замену переменной, положив $y = \varphi(x)$. Получим равенство

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)} dx + C.$$

Это равенство и представляет собой конечное соотношение, которому удовлетворяют почти все решения исходного уравнения. Другими словами, чтобы найти решение уравнения с разделяющимися переменными, требуется *перейти к уравнению в симметричной* *форме, далее разделить переменные и выполнить интегрирование так, как если бы x и y были бы независимы.*

При разделении переменных выполнялась операция деления в предположении, что $g(y)$ (либо $g_2(y)$ и $f_1(x)$) не обращается в нуль. Но в исходных уравнениях функции $g(y)$, $g_2(y)$ или $f_1(x)$ вполне могут обращаться в нуль. Игнорирование этого факта может привести к потере решений. Для того чтобы потери все же не было, требуется отдельно исследовать, являются ли решениями корни уравнений

$$g(y) = 0, \qquad g_2(y) = 0, \qquad f_1(x) = 0.$$

Корни $y = b$ уравнения $g(y) = 0$ или же уравнения $g_2(y) = 0$ порождают функцию $y = y(x)$, являющуюся решением первого или второго исходного уравнения. Решения же $x = a$ уравнения $f_1(x) = 0$, рассматриваемые как функции $x = x(y)$, не дают новых решений. *Но если дифференциальное уравнение сразу записано в симметричной форме*

$$f_1(x)g_1(y)dy - f_2(x)g_2(y)dx = 0,$$

то решения $x = a$, очевидно, дают дополнительные решения.

Пример.

Решить дифференциальное уравнение

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0.$$

Решение. Разделяем переменные, для чего делим обе части уравнения на

$$(y^2 - 1)(x^2 - 1),$$

получаем

$$\frac{xdx}{x^2-1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0.$$

Интегрируем сумму двух дифференциалов:

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|C|,$$

или

$$(x^2-1)(y^2-1)=C.$$

Равенства $y^2-1=0$ и $x^2-1=0$ дают кривые, которые тоже могут быть решением уравнения. Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся, что прямые $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ входят в общее решение при $C = 0$.

К уравнениям с разделяющимися переменными сводятся уравнения следующих двух видов:

$$y' = f(ax + by + c);$$

$$f_1(ax + by + c)y' = f_2(ax + by + c) \qquad b \neq 0.$$

Если перейти от неизвестной функции $y(x)$ к новой неизвестной функции $z = ax + by + c$, то указанные уравнения преобразуются к виду

$$z' bf(z) + a, \qquad f_1(z)z' = bf_2(z) + af_1(z).$$

Полученные уравнения уже допускает разделение переменных.

Следующим интегрируемым классом дифференциальных уравнений первого порядка являются *класс однородных уравнений.*

Определение. *Говорят, что функция* $F(x, y)$ *однородна степени* k, *если для всех положительных чисел* λ *и для всех чисел* x, y *из* ее области определения выполняется равенство

$$\boldsymbol{F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y).}$$

Примеры однородных степени 0, 1, 2 функций приведены ниже:

$$\frac{x-y}{x+y}, \qquad \frac{x^2+xy}{x-y}, \qquad x^2+y^2-xy.$$

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется *однородным, если* $f(x,y)$ *является однородной функцией степени нуль*.

Дифференциальные уравнения

$$f_1(x,y)y' = f_2(x,y),$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называются *однородными, если* $f_1(x, y)$ *и* $f_2(x, y)$, $M(x, y)$ *и* $N(x, y)$ *являются однородными функциями одной и той же степени*.

Перейдем от неизвестной функции $y(x)$ к новой неизвестной функции $z(x)$, положив $y = xz$. При такой замене однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными. Построив решение $z(x)$ полученного уравнения и вернувшись к функции

$y(x)$, получим решение исходного дифференциального уравнения.

Приведем выкладки, подтверждающие сказанное, на примере уравнения в симметричной форме.

При замене $y = xz$ имеет место равенство

$$dy = xdz + zdx.$$

Тогда дифференциальное уравнение в симметричной форме преобразуется к виду

$$M(x, xz)dx + N(x, xz)(xdz + zdz) = 0.$$

Далее, приводя подобные члены и используя свойство однородности, получим уравнение

$$x^{k}[M(1, z) + N(1, z)z]dx + x^{k+1}N(1, z)dz = 0.$$

Сокращая на x^k и разделяя переменные, приходим к интегрируемому виду

$$\frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz = -\frac{dx}{x}.$$

Наконец, после интегрирования получим

$$x = Ce^{\psi(z)},$$

где $\psi(z)$ есть функция

$$\psi(z) = -\int \frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz.$$

Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем для однородного дифференциального уравнения, записанного в симметричной форме

$$x = Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Эта функция и определяет общее решение в неявной форме.

При разделении переменных мы могли потерять решения $z = a$, где a — корень уравнения

$$M(1, z) + zN(1, z) = 0.$$

Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем, что к общему решению, определённому выше, необходимо присоединить функции $y = ax$.

По ходу выкладок мы производили также деление на x^k. Если число $x = 0$ входит в область определения функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$, то функция $x = 0$ также будет решением исходного уравнения. Но ее нет необходимости дополнительно присоединять к ответу, поскольку прямая $x = 0$ содержится в формуле общего решения (при $C = 0$).

Если же число $x = 0$ не входит в область определения функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$, то деление на x^k возможно и не приведет к потере решений.

Однородные уравнения, записанные в нормальной форме через производную y', решаются путем приведения их к симметричной форме. При этом следует помнить о нулях выражений, на которые делится уравнение.

К однородным уравнениям сводятся уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

в случае, если прямые

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

пересекаются. Если (x_0, y_0) — координаты их точки пересечения, то заменой

$$x = x_0 + t, \quad y = y_0 + z,$$

где t — новая независимая переменная, а $z = z(t)$ — новая неизвестная функция, уравнение преобразуется к виду

$$z' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_2 t + b_2 z}\right),$$

которое является однородным.

Если же в рассматриваемом уравнении прямые $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ и $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ не пересекаются (то есть они параллельны), то путем арифметических действий это уравнение сводится к следующему

$$y' = \tilde{f}(a_1 x + b_1 y).$$

Полученное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^m$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Требуя, чтобы уравнение стало однородным, находим число m. Если же число m определить не удается, то с помощью указанной замены уравнение не приводится к однородному.

Близким к однородным уравнениям являются уравнения, называемые *обобщённо–однородными*.

Уравнение называется *обобщенно–однородным*, если существует такая постоянная α, что после замены $y = z^{\alpha}$ оно становится однородным.

<u>**Пример.**</u> Найти общее решение уравнения

$$2x^2y' = y^3 + xy.$$

Решение. Положим $y = z^{\alpha}$. Требуя, чтобы уравнение было однородным, найдем α. Имеем после подстановки

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1}z' = z^{3\alpha} + xz^{\alpha},$$

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1}dz-(z^{3\alpha}+xz^{\alpha})dx=0.$$

Функции $2\alpha x^2 z^{\alpha-1}$ и $z^{3\alpha}+xz^{\alpha}$ однородны лишь при условии

$$\alpha+1=3\alpha=\alpha+1,$$

т.е. при $\alpha=\frac{1}{2}$. Таким образом, в случае $y\geq 0$ применяем замену

$$y=\sqrt{z}.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$x^2dz - (z^2 + xz)dx = 0.$$

Получили однородное уравнение.

Замена $z = xu(x)$ преобразует последнее уравнение в уравнение с разделяющимися переменными

$$x^2(xdu - u^2dx) = 0.$$

Если $u(x) \neq 0$, $x \neq 0$, $(z \neq 0)$, то интегрируя его, получим

$$\frac{x}{y^2} + \ln|x| = C.$$

Если $z = 0$, то $y = 0$ удовлетворяет исходному уравнению и также является решением. Можно заметить, что решение $y = 0$ входит в полученное семейство при $C \to \infty$. Отметим, что $x = 0$ также является решением.

Пример.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Решение. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases},$$

получим $x_1 = 1$, $y_1 = 2$. Полагая $x = X + 1$, $y = Y + 2$, имеем в новых переменных уравнение

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

Замена переменных $z = \frac{Y}{X}$ или $Y = zX$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$z + X\frac{dz}{dX} = \frac{1 - z}{1 + z},$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2} = \frac{dX}{X}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2| = \ln|X| - \frac{1}{2}\ln C,$$

$$(1-2z-z^2)X^2 = C,$$

$$X^2 - 2XY - Y^2 = C.$$

Возвращаясь к переменным x, y, запишем решение исходного уравнения в виде равенства

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1.$$

Определение. *Уравнение*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется обобщенно-однородным, если для некоторых чисел m *и* k *и для всех чисел* λ *выполняются тождества*

$$M(\lambda x, \lambda^k y) = \lambda^m M(x, y), \; N(\lambda x, \lambda^k y) = \lambda^m N(x, y).$$

При $k = 1$ обобщенно–однородное уравнение является просто однородным.

Обобщенно–однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными для функции $z = z(x)$, определяющейся из соотношения $y = zx^k$. Это уравнение имеет вид

$$[M(1,z) + kN(1,z)z]dx + xN(1,z)dz = 0.$$

Дополнительными решениями могут быть функции $x = 0$ и $y = ax^k$, где число a — корень уравнения $M(1,z) + kzN(1,z) = 0$.

Следующий класс интегрируемых уравнений — линейные уравнения.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называется *линейным*. Выпишем его общее решение с помощью алгоритма, называемого *методом Лагранжа*, или *методом вариации постоянной*.

Решаем вначале уравнение с тождественно нулевой правой частью

$$y' + p(x)y = 0.$$

В этом уравнении переменные разделяются и его общее решение имеет вид

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Решение неоднородного линейного уравнения будем искать в виде

$$y_*(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

т.е. предполагая, что C — не постоянная, а функция переменной x.

Подберем эту функцию так, чтобы $y_*(x)$ являлось решением исходного неоднородного уравнения. После подстановки получаем соотношение

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} +$$

$$C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Для того чтобы это соотношение превратилось в тождество, необходимо выполнение равенства

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Это равенство представляет собой простейшее дифференциальное уравнение для функции $C(x)$.

Решая его, находим

$$C(x) = \int q(x) e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau} dx + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Функция

$$y(x) = \left(\int q(x) e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau) d\tau} dx + C_1 \right) e^{-\int p(x) dx}$$

задает *общее решение исходного уравнения*.

Линейное уравнение, записанное в симметричной форме, имеет вид

$$p_0(x) dy + [p_1(x) y - q(x)] dx = 0.$$

Для того чтобы найти общее решение этого уравнения, достаточно перейти к его нормальной форме, записав уравнение через производную (путем деления на $p_0(x)dx$). Затем следует выписать общее решение полученного линейного уравнения и присоединить к ответу решения вида $x = a$, где a — корень уравнения $p_0(x) = 0$.

Некоторые уравнения становятся линейными, если x считать функцией, а y — независимой переменной. Таковыми, например, являются уравнения следующего вида:

$$A(y) + [B(y)x - C(y)]y' = 0.$$

Если перейти к функции $x(y)$, то это уравнение преобразуется к линейному

$$x' + p(y)x = q(y),$$

где штрих означает дифференцирование по y, а коэффициенты находятся из соотношений $p(y) = \dfrac{B(y)}{A(y)}$, $q(y) = \dfrac{C(y)}{A(y)}$.

Решение полученного уравнения записывается с помощью формулы общего решения линейного уравнения, в которой переменные x и y следует поменять местами.

Пример.

Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Решение. Интегрируем соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C, \qquad y = Cx.$$

Будем искать решение исходного уравнения в виде

$$y = C(x)x,$$

где $C(x)$ неизвестная функция, тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}x + C(x).$$

Подставляя в исходное уравнение, после упрощения получаем

$$\frac{dC}{dx}x = x^2,$$

или

$$dC = x dx, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Следовательно, общее решение

$$y = C_1 x + \frac{x^3}{2}, \qquad (3.18)$$

здесь $C_1 x$ — общее решение линейного однородного уравнения, а $\frac{x^3}{2}$ — частное решение неоднородного уравнения.

Пример.

Найти общее решение уравнения

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

Решение. Уравнение линейно относительно переменной x. Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

то уравнение можно записать в виде

$$2e^y - x = x'.$$

Общим решением однородного уравнения

$$x' + x = 0$$

является функция $x = Ce^{-y}$. Частное решение $x_* = x_*(y)$ неоднородного найдем методом вариации постоянной. Полагаем

$$x_* = C(y)e^{-y}$$

и подставив x_* в решаемое уравнение, получим

$$2e^y - Ce^{-y} = C'e^{-y} - Ce^{-y},$$

$$C' = 2e^{2y}, \qquad C(y) = e^{2y} + C_0.$$

Окончательно находим

$$x = Ce^{-y} + e^y.$$

К линейным уравнениям приводятся также уравнения вида

$$f'(y)y' + a(x)f(y) = b(x).$$

Здесь штрих у функции y означает производную по переменной x, штрих у функции f — производную этой функции по переменной y. Если от неизвестной функции $y(x)$ перейти к новой неизвестной функции $z = f(y)$, то придем к линейному уравнению

$$z' + a(x)z = b(x).$$

Найдя же функцию $z(x)$, нетрудно получить затем и функцию $y(x)$.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\frac{dy}{dx} + \sqrt{y^2+1} = x^2+1.$$

Решение. Произведем замену

$$z(x) = \sqrt{y^2+1}.$$

Тогда получим

$$z' = \frac{yy'}{\sqrt{y^2+1}}, \qquad z' + z = x^2+1.$$

Последнее уравнение линейно относительно z. Решаем его с помощью метода вариации постоянной. Находим

$$z = C(x)e^{-x},$$

где

$$C(x) = e^{x}(x^2 - 2x + 3) + C_0.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\sqrt{y^2+1} = x^2 - 2x + 3 + Ce^{-x}.$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$3dy + (1 + e^{x+3y})dx = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$3\frac{dy}{dx} + 1 = -e^x e^{3y}.$$

Сделаем замену переменных $z(x) = e^{-3y}$, тогда получим

$$z'(x) = -3e^{-3y}y', \qquad -\frac{z'}{z} + 1 = -\frac{e^x}{z},$$

$$z' - z = e^x.$$

Находим общее решение линейного уравнения

$$z(x) = Ce^x + xe^x.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = -\frac{1}{3}\ln(C + x) - \frac{x}{3}.$$

К линейному уравнению сводится *уравнение Бернулли*, имеющее следующий вид:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}.$$

Здесь $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ (при $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ уравнение Бернулли превращается в линейное).

Для того чтобы решить уравнение Бернулли, от неизвестной функции $y(x)$ переходят к новой неизвестной функции $z(x)$ с помощью замены

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x).$$

Здесь $\alpha \neq 1$. Для функции $z(x)$ получается линейное уравнение

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Найдя его решение и затем возвращаясь к функции $y(x)$, получаем общее решение уравнения Бернулли.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}.$$

Решение. Это уравнение является уравнением Бернулли, $\alpha = \frac{1}{2}$. Делим обе части на произведение $x\sqrt{y}$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Вводя новую переменную $z = \sqrt{y}$, имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}.$$

Получили линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Сначала решаем однородное линейное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}, \quad \ln z = 2\ln x + \ln C, \quad z = Cx^2.$$

Затем применяем метод вариации постоянной, то есть ищем частное решение неоднородного уравнения в виде $z = C(x)x^2$. Имеем

$$\frac{dz}{dx} = 2Cx + x^2\frac{dC}{dx}.$$

Подставляя в неоднородное уравнение, получаем

$$2Cx + x^2\frac{dC}{dx} - \frac{2Cx^2}{x} = \frac{x}{2},$$

или

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2x}, \quad C = \frac{1}{2}\ln x + C_1.$$

Следовательно,

$$z = x^2(C_1 + \frac{1}{2}\ln x)$$

и, наконец,

$$y = x^4(C_1 + \frac{1}{2}\ln x)^2.$$

Это формула общего решения исходного уравнения Бернулли.

Кроме того, при $\alpha > 0$ уравнение Бернулли имеет дополнительное решение $y = 0$.

Уравнение вида $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ называется *уравнением Риккати.*

В общем случае это уравнение не решается в элементарных функциях.

Однако, если известно какое-либо его частное решение $y = y_1(x)$, то уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли с помощью замены $y = y_1 + z$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Имеют место равенства

$$y_1' + z' + a(x)y_1 + a(x)z +$$

$$b(x)y_1^2 + 2b(x)y_1 z + b(x)z^2 = c(x),$$

$$y_1' + a(x)y_1 + b(x)y_1^2 = c(x).$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем, что функция $z(x)$ должна быть решением следующего уравнения Бернулли

$$z' + [a(x) + 2b(x)y_1]z = -b(x)z^2.$$

Заменой $u(x) = \dfrac{1}{z(x)}$ последнее уравнение сводится к линейному уравнению для $u(x)$.

Решив это уравнение, находим сначала функцию $z(x)$, а затем и функцию $y(x)$, то есть решение исходного уравнения Риккати.

Следующий интегрируемый класс дифференциальных уравнений первого порядка образуют *уравнения в полных дифференциалах*.

Уравнение вида

$$\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $\boldsymbol{F(x,y)}$.

Для полного дифференциала функции имеет место равенство

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Если исходное уравнение — в полных дифференциалах, то должно выполняться равенство

$$dF = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

что возможно лишь при условии

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y).$$

Для того чтобы чтобы выполнялись эти равенства, необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Если это тождество имеет место, то функцию $F(x, y)$ находим с помощью интегрирования. Именно, интегрируя равенство

$$F_x(x, y) = M(x, y)$$

по переменной x (предполагая при этом, что y величина постоянная), определим функцию $F(x, y)$ с точностью до произвольного слагаемого, которое может зависеть от y:

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y) = \Phi(x, y) + \varphi(y).$$

Дифференцируя полученное равенство по переменной y и учитывая, что $F_y(x,y) = N(x,y)$, получаем для функции $\varphi(y)$ следующее уравнение:

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}.$$

Правая часть здесь обязательно окажется функцией, зависящей только от y.

Интегрируя полученное уравнение по переменной y, находим функцию $\varphi(y)$. Подставляя результат в соотношение

$$F(x, y) = \Phi(x, y) + \varphi(y),$$

находим в итоге и функцию $F(x, y)$. Общее решение уравнения в полных дифференциалах определяется теперь формулой

$$F(x, y) = C.$$

Это равенство задает неявно y как функцию от x.

Пример. Решить уравнение

$$(3x^2 - y^2)dx - (3y^2 - 2xy)dy = 0.$$

Решение. Для этого уравнения имеем

$$M(x, y) = 3x^2 - y^2; \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -2y;$$

$$N(x, y) = 3y^2 - -2xy; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y.$$

Таким образом, это уравнение в полных дифференциалах во всей плоскости.

Найдем соответствующую функцию $F(x, y) = \Phi(x, y)$. По условию должно быть

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3y^2 - 2xy.$$

Интегрируя, получаем

$$\Phi = \int_0^y (3\xi^2 - 2x\xi) d\xi + C(x) =$$

$$\left[\xi^3 - x\xi^2\right]_0^y + C(x) = y^3 - xy^2 + C(x).$$

Учитывая еще, что должно выполняться равенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2 - y^2,$$

получаем

$$-y^2 + C'(x) = 3x^2 - y^2, \qquad C'(x) = 3x^2.$$

Имеем далее $C(x) = x^3 + C_1$ и, следовательно,

$$\Phi(x, y) = y^3 - xy^2 + x^3.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения неявно задается равенством

$$y^3 - xy^2 + x^3 = C.$$

Эта же формула называется *полным интегралом* уравнения.

Условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

выполняется не всегда. Поэтому не всякое дифференциальное уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Но оказывается, почти всегда существует такая функция $\mu(x, y)$, что после умножения на эту функцию уравнение превратится в уравнение в полных дифференциалах.

Другими словами, существует такая функция $\mu(x, y)$, что выполняется тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)N(x, y)).$$

Определение. *Функция $\mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем для исходного уравнения в симметричной форме.*

Если интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ известен и не обращается в нуль, то после умножения уравнения на $\mu(x, y)$ общее решение полученного уравнения находится по изложенной выше схеме.

Общее решение домноженного уравнения

$$\boldsymbol{\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0}$$

задает и общее решение исходного уравнения.

В общем случае нахождение интегрирующего множителя представляет собой весьма трудную задачу. Приведем пример, когда ее удается решить.

Пусть есть линейное уравнение первого порядка

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Умножим обе его части на функцию

$$\mu = e^{\int P(x)dx},$$

а результат запишем его в виде

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Интегрируя, получим

$$y(x)e^{\int P(x)dx} = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

или, явно выражая переменную y:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right].$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$(4 - x^2)y' + xy = 4$$

Решение. Это линейное уравнение первого порядка. Применим к нему метод интегрирующего множителя. Интегрирующий множитель в данном случае имеет вид

$$\mu(x) = \frac{1}{4-x^2}\, e^{\int \frac{x}{4-x^2}\,dx} =$$

$$= \frac{1}{4-x^2} e^{-\frac{1}{2}\ln(4-x^2)} = \frac{1}{(\sqrt{4-x^2})^3}.$$

Умножив на μ обе части исходного уравнения, приведем его к виду

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dy + \frac{xy-4}{(\sqrt{4-x^2})^3}\,dx = 0.$$

Левая часть полученного уравнения представляет собой полный дифференциал. Интегрируя коэффициент при dy по переменной y, находим

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{y}{\sqrt{4-x^2}} + \varphi(x).$$

Производная по x от полученного выражения должна совпадать с функцией при dx в симметричной записи уравнения:

$$\frac{xy}{(\sqrt{4-x^2})^3}+\varphi'(x)=\frac{xy-4}{(\sqrt{4-x^2})^3}.$$

Следовательно,

$$\varphi'(x)=-\frac{4}{(\sqrt{4-x^2})^3},$$

и далее

$$\varphi(x) = -4\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$\frac{y}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = C,$$

или

$$y = x + C\sqrt{4-x^2}.$$

Пример. Найти интегрирующий множитель для уравнения

$$(2xy - x^2 y - \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$$

Решение. Это уравнение в симметричном виде с коэффициентами

$$M(x,y) = 2xy - x^2 y - \frac{y^3}{3}; \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x - x^2 - y^2;$$

$$N(x,y) = x^2 + y^2; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x.$$

Это не уравнение в полных дифференциалах. Найдем соответствующий ему интегрирующий множитель $\mu(x, y)$.

Выпишем уравнение для интегрирующего множителя:

$$\frac{(\partial \mu M)}{\partial y} = \frac{(\partial \mu N)}{\partial x},$$

или в развернутом виде:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}.$$

После деления на μ и переноса некоторых членов в другую часть равенства уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Подставляя сюда явные выражения функций $M(x,y)$ и $N(x,y)$, получаем

$$(x^2+y^2)\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - (2xy - x^2y - \frac{y^3}{3})\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} =$$

$$= -(x^2+y^2).$$

Будем искать решения этого уравнения, которые зависят только от x. В этом случае имеем уравнение

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -(x^2 + y^2), \qquad \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -1.$$

Следовательно, $\mu(x) = e^{-x}$. Домножая на e^{-x} исходное уравнение, получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$e^{-x}(2xy - x^2y - \frac{y^3}{3})dx + e^{-x}(x^2 + y^2)dy = 0.$$

Пусть известна какая-нибудь функция $w(x, y)$, для которой выполняется тождество

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)}{N(x, y)\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) - M(x, y)\frac{\partial w}{\partial y}(x, y)} = \psi(w(x, y)).$$

Тогда интегрирующий множитель задается равенством

$$\mu(x, y) = e^{\int \psi(t)dt}\Big|_{t=w(x,y)}.$$

Возможны следующие частные случаи.

а) Если функция

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

есть функция $\psi(x)$, то и интегрирующий множитель зависит только от x. Более того, этот множитель $\mu(x)$ имеет вид

$$\mu(x) = e^{\int \psi(x) dx}.$$

б) Если функция

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{-M(x,y)}$$

есть функция $\psi(y)$, то и интегрирующий множитель зависит только от y. Этот множитель $\mu(y)$ имеет вид

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y) dy}.$$

в) Если функция

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{yN(x,y) - xM(x,y)}$$

зависит только от произведения xy, то и интегрирующий множитель зависит только от этого произведения. Этот множитель имеет вид

$$\mu(xy) = e^{\int \psi(t)dt}|_{t=x\cdot y}.$$

г) Если функция

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y) - M(x,y)}$$

зависит только от суммы $x + y$, то и интегрирующий множитель зависит только от суммы. Этот множитель имеет вид

$$\mu(x + y) = e^{\int \psi(t)dt}\big|_{t=x+y}.$$

При умножении уравнения на интегрирующий множитель область определения его коэффициентов может сузиться.

Для того чтобы при этом не потерять решения, необходимо непосредственно на исходном уравнении проверить, являются ли его решениями функции, порожденные исключенными точками.

Например, если интегрирующий множитель — это функция $\frac{1}{xy}$, то необходимо отдельно проверить, являются ли решениями уравнения функции $x = x(y) \equiv 0$ и $y = y(x) \equiv 0$.

Тема : Уравнения первого порядка неразрешенные относительно производной

$\mathbf{1^0}$. Уравнения, допускающие разложение на множители. $\mathbf{2^0}$. Метод параметризации. $\mathbf{3^0}$. Уравнения Лагранжа и Клеро.

1^0. Перейдём к исследованию уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Общий вид уравнений этого класса:

$$F(x, y, y') = 0.$$

В простейшем случае левая часть данного уравнения элементарным образом представляется в виде произведения некоторых выражений, разрешенных относительно производной:

$$F(x, y, y') = (y' - f_1(x, y)) \cdot \ldots \cdot (y' - f_m(x, y)).$$

При этом исходное дифференциальное уравнение распадается на m уравнений

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad \ldots, \; y' = f_m(x, y).$$

Решение каждого из них представляет собой решение всего уравнения, то есть ветвь общего решения.

Уточним, что если одно из указанных уравнений имеет особое решение, то и исходное уравнение будет иметь это решение в качестве особого. Кроме того, заметим, что помимо решений, порожденных уравнениями $y' = f_k(x, y)$, решениями могут быть функции, склеенные из решений различных уравнений $y' = f_k(x, y)$ и $y' = f_l(x, y)$, то есть из различных ветвей общего решения.

Рассмотрим простейший частный случай неразрешённых относительно производной уравнений:

$$F(y') = 0.$$

Пусть алгебраическое уравнение $F(\xi) = 0$ имеет конечное или бесконечное счётное число вещественных корней

$$\xi = a_i, \quad i = 1, \ldots.$$

В этом случае общее решение определяется из соотношения

$$\boldsymbol{F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0}.$$

В случае, если решения уравнения $\boldsymbol{F(\xi)=0}$ заполняют некоторый интервал, этой формулой определяются вообще говоря, не все решения.

Более сложным для исследования представляется уравнение вида

$$F(x, y') = 0.$$

Это уравнение можно разрешить относительно производной и тем самым перейти к конечной или бесконечной совокупности уравнений $y' = f_k(x)$. Общим решением тогда будет совокупность функций

$$y = \int f_k(x)dx + C.$$

2^0. В элементарных функциях уравнение не всегда легко разрешить. Иногда бывает легче воспользоваться иным методом, дающим представление решения в параметрической форме.

Изложим *метод параметризации* в применении к общему уравнению

$$F(x, y, y') = 0.$$

Предположим, что это уравнение *допускает параметрическое представление*. Это означает что существуют функции

$$\varphi(u,v), \quad \psi(u,v) \quad \text{и} \quad \chi(u,v)$$

параметров u и v такие, что имеет место тождество

$$F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)) \equiv 0.$$

Для любого решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения первого порядка выполняется основное соотношение

$$dy = y' dx.$$

Заменим в этом соотношении величины x, y и y' их параметрическими представлениями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

Тогда получим равенство

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \chi(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right). \qquad (\mathbf{P})$$

Относительно переменных (u,v) это равенство представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, записанное в симметричной форме.

Пусть решение уравнения ($\mathbf{P}$) найдено в форме $v = w(u,C)$. Тогда решение исходного дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ допускает задание в следующем параметрическом виде:

$$x = \varphi(u, w(u, C)), \qquad y = \psi(u, w(u, C)).$$

Если же решение уравнения (**P**) найдено в форме $u = w(v, C)$, то параметрическое задание решения исходного дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ имеет следующий вид

$$x = \varphi(w(v, C), v), \qquad y = \psi(w(v, C), v).$$

Если окажется, что параметр u (или соответственно v) явно представим как функция переменной x, то от параметрического представления решения можно перейти к обычному:

$$y = \psi(x, C).$$

Практическое применение метода введения параметра связано с очевидной трудностью

— нахождением функций $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ и $\chi(u, v)$, обеспечивающих параметризацию уравнения $F(x, y, y') = 0$. Опишем два случая, когда указанную трудность легко преодолеть.

Пусть исходное уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо относительно неизвестной функции, то есть пусть его можно преобразовать к виду

$$y = \psi(x, y').$$

В этом случае в качестве параметров u и v рекомендуется брать переменные x и y'. С учетом этого выбора имеем соотношения

$$x = \varphi(u, v) \equiv u, \;\; y = \psi(u, v), \;\; y' = \chi(u, v) \equiv v.$$

Уравнение (**P**) при этом принимает вид

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - v\right) du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = 0.$$

Пусть $v = w(u, C)$ — это решение последнего уравнения. Тогда общее решение исходного уравнения $y = \psi(x, y')$ допускает следующее параметрическое задание:

$$y = \psi(u, v) \quad \text{или} \quad y = \psi\big(x, w(x, C)\big).$$

Если дифференциальное уравнение в переменных u и v имеет дополнительное решение $v = \alpha(u)$, то соответствующая ему функция $y = \psi(x, \alpha(x))$ может оказаться дополнительным решением исходного уравнения.

Рассмотрим теперь случай, когда исходное уравнение разрешимо относительно независимой переменной, то есть может быть записано в виде

$$x = \varphi(y, y').$$

В качестве параметров u и v тогда рекомендуется брать переменные y и y'. При этом соответствующее параметрическое представление имеет вид

$$x = \varphi(u, v), \;\; y = \psi(u, v) \equiv u, \;\; y' = \chi(u, v) \equiv v.$$

Уравнение (P) при этом записывается следующим образом:

$$\left(1 - v\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) du - v\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv = 0.$$

Пусть $v = w(u, C)$ — это решение последнего уравнения. Тогда общее решение исходного уравнения $x = \varphi(y, y')$ допускает следующее параметрическое задание:

$$x = \varphi(u, v) \quad \text{или} \quad x = \varphi\big(y, w(y, C)\big).$$

Если дифференциальное уравнение в переменных u и v имеет дополнительное решение $v = \alpha(u)$, то соответствующая ему функция $x = \varphi(y, \alpha(y))$ может оказаться дополнительным решением исходного уравнения.

3^0. Рассмотрим два конкретных класса уравнений неразрешенных относительно производной, встречающих в приложениях.

Уравнением Лагранжа называется следующее линейное относительно переменной x и функции y равенство

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

в котором $\varphi(\xi) \not\equiv \xi$ ни на каком интервале.

Это уравнение соответствует первому из рассмотренных выше случаев.

В переменных $u = x$ и $v = y'$ имеем следующее соотношение

$$[\varphi(v) - v]du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]dv = 0.$$

Предполагая, что $\varphi(v) - v \neq 0$, перейдем здесь к уравнению относительно производной $\frac{du}{dv}$:

$$\frac{du}{dv} + \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v) - v} u = -\frac{\psi'(v)}{\varphi(v) - v}.$$

Это уравнение является линейным относительно функции $u = u(v)$. Пусть его решение задается функцией $u = w(v, C)$.

Тогда *общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде* запишется следующим образом:

$$x = w(v, C), \qquad y = \varphi(v) w(v, C) + \psi(v).$$

Если уравнение

$$\varphi(v) - v = 0$$

имеет конечное или бесконечное (но счетное) семейство решений $v = v_i$, $i = 1, \ldots$, то функции

$$y = v_i x + \psi(v_i)$$

также будут решениями уравнения Лагранжа.

Пусть теперь в уравнении Лагранжа выполняется тождество $\varphi(v) \equiv v$. Тогда оно принимает вид

$$y = xy' + \psi(y')$$

и называется *уравнением Клеро*.

В параметрах u и v сопутствующее уравнение имеет распавшийся вид

$$[u + \psi'(v)]dv = 0.$$

Это соотношение будет выполнено если

$$dv = 0 \quad \text{или} \quad u + \psi'(v) = 0.$$

Первое из этих уравнений имеет решение $v = C$, которое задаёт общее решение уравнения Клеро в виде семейство прямых:

$$y = Cx + \psi(C).$$

Второе же совместно с параметризацией исходного уравнения даёт решение в параметрической форме

$$x = -\psi'(v), \quad y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Это особое решение уравнения Клеро.

Тема : Методы построения общего решения уравнений высокого порядка

$\mathbf{1^0}$. Общая постановка задачи. $\mathbf{2^0}$. Уравнения, не содержащие искомой функции и нескольких её последовательных производных. $\mathbf{3^0}$. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной. $\mathbf{4^0}$. Уравнения, однородные относительно переменных $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y'}$, $\boldsymbol{\ldots}$, $\boldsymbol{y^{(n)}}$. $\mathbf{5^0}$. Уравнения обобщенно–однородные. $\mathbf{6^0}$. Уравнения, левая часть которых представляет собой точную производную.

1^0. Опишем некоторые методы, с помощью которых можно построить общее решение обыкновенного дифференциального уравнения заданного порядка n.

Пусть уравнение записано в виде неразрешенном относительно старшей производной:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Неизвестная функция здесь $y = y(x)$.

Методы построения общего решения уравнений высокого порядка основаны на приёмах, позволяющих свести их к тому или иному интегрируемому уравнению — уравнению первого порядка одного из известных типов, описанных выше.

В качестве целевых уравнений могут также выступать простейшие уравнения вида

$$y^{(k)} = f(x),$$

либо более общие линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \ldots + a_k y = f(x),$$

или же иные уравнения, приемы интегрирования которых заведомо известны.

Суть этих приемов преобразования уравнений высокого порядка заключена в *последовательном понижении порядка уравнения*.

Опишем некоторые классы уравнений, для которых понижение порядка возможно, а также сами приемы, с помощью которых это делается.

2^0. Уравнения, не содержащие искомой функции и нескольких её последовательных производных.

Этому признаку удовлетворяют уравнения следующего вида:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \quad \text{где} \quad 1 \le k < n.$$

Порядок уравнения понижается на k единиц с помощью замены $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Для функции $z(x)$ имеем уравнение

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Если это уравнение удается решить, то в результате получится промежуточное уравнение простейшего вида

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}).$$

Последовательно интегрируя его несколько раз, получим

$$y(x) = \int (\dots (\int \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) dx) \dots) dx +$$

$$+ C_{n-k+1} x^{k-1} + C_{n-k+2} x^{k-2} + \dots + C_n.$$

Это и есть итоговая формула общего решения, содержащая n произвольных постоянных.

3^0. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Соответствующие этому признаку уравнения имеют вид

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Предположим, что в этом уравнении независимой переменной является y, производные же y', $y'', \ldots, y^{(n)}$ являются функциями от y. Имеем при таком предположении

$$y' = z(y), \quad y'' = z'(y)z(y),$$

$$y''' = z''y'z + z'^2y' = z''z^2 + zz'^2,$$

и так далее, вплоть до производной порядка n. Здесь штрихи функции z означают взятие производных по переменной y, а у функции y — по переменной x.

После подстановки пересчитанных производных в рассматриваемое уравнение оно преобразуется в уравнение порядка $n-1$ относительно функции $z(y)$.

Решив это уравнение, сможем найти затем функцию $y(x)$ как решение уравнения первого порядка $y' = z(y)$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

При выполнении описанных преобразований необходимо контролировать процесс обращения в нуль того или иного знаменателя: в результате могут появиться дополнительные решения.

4^0. Уравнения, однородные по переменным y, y', ..., $y^{(n)}$.

Определение. *Однородными называются уравнения вида*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

с функцией F в левой части такой, что

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

где величина λ вещественна.

С помощью замены $y' = yz$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция, порядок однородного уравнения понижается на единицу. Имеем

$$y' = yz, \qquad y'' = yz' + y'z = yz' + yz^2,$$
$$y''' = yz'' + y'z' + 2yzz' + y'z^2 =$$
$$= yz'' + 3yzz' + yz^3,$$

и т. д., вплоть до производной порядка n.

После подстановки пересчитанных производных в рассматриваемое уравнение оно преобразуется в уравнение порядка $n-1$ для функции $z(x)$.

Вследствие свойства однородности функции F преобразованное уравнение принимает вид

$$y^m F(x, z, z' + z^2, z'' + 3zz' + z^3, \ldots) = 0.$$

Отыскав решение этого уравнения — функцию $z = z(x)$, рассмотрим затем уравнение первого порядка

$$y' = yz(x)$$

с разделяющимися переменными.

Разрешив это уравнение, получим тем самым формулу общего решения исходного однородного уравнения порядка n.

5^0. Уравнения, обобщенно–однородные по переменным y, y', …, $y^{(n)}$.

Определение. *Обобщенно-однородными называются уравнения вида*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

с функцией F *в левой части такой, что*

$$F(\lambda x, \lambda^k y, \lambda^{k-1} y', \ldots, \lambda^{k-n} y^{(n)}) =$$
$$= \lambda^m F(x, y, y', \ldots, y^{(k)}),$$

где величина λ *вещественна.*

Для того чтобы решить обобщенно–однородное уравнение, перейдем в нем к новой независимой переменной t и новой неизвестной функции $z = z(t)$, положив

$$x = e^{t}, \quad y = ze^{kt}.$$

Пересчитаем производные $y', y'', \ldots$:

$$y' = (z' + kz)e^{kt},$$

$$y'' = [z'' + (2k-1)z' + k(k-1)z]e^{(k-1)t}.$$

Индукцией по n можно установить, что формула для производной порядка n имеет вид

$$y^{(n)} = \omega(z, z', \ldots, z^{(n)})e^{(k-n)t}.$$

Подставляя найденные представления в исходное уравнение, используя условие обобщеной однородности и сокращая на множитель e^{mt}, приходим к уравнению вида

$$\widetilde{F}\left(z, z', \ldots, z^{(n)}\right) = 0.$$

Это уравнение не содержащит явно независимой переменной. Его порядок понижается с помощью уже рассмотренной замены

$$y' = z(y).$$

6^0. Уравнения, левая часть которых представляет собой точную производную от известной функции.

Уравнениями с этим признаком являются уравнения вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

функция в левой части которых допускает представление в виде полной производной от известной функции $\Phi\Big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\Big)$.

Иначе говоря, должно выполняться равенство

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\Big).$$

Порядок уравнений с указанным признаком понижается на единицу однократным интегрированием.

Не всегда требуемое представление в виде полной производной легко обнаружить

— иногда необходимы некоторые предварительные преобразования. Следует иметь ввиду, что при выполнении этих преобразований можно как потерять решения, так и приобрести лишние.

На примере обобщенно–однородных уравнений видно, что процедура понижения порядка может осуществляться последовательно в несколько различных шагов.

При построении решения задачи Коши для уравнений высокого порядка целесообразно находить появляющиеся в процессе выкладок произвольные постоянные сразу же после каждого интегрирования.

Тема : Линейные уравнения с переменными коэффициентами

$\mathbf{1^0}$. Общие свойства линейных уравнений. $\mathbf{2^0}$. Линейная зависимость и независимость систем функций. Определитель Вронского. $\mathbf{3^0}$. Фундаментальная система решений. Общее решение однородного и неоднородного уравнения. $\mathbf{4^0}$. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. $\mathbf{5^0}$. Дополнительные сведения о линейно зависимых и линейно независимых системах функций. $\mathbf{6^0}$. Замечание об уравнениях, сводящихся к линейным.

1^0. *Линейным дифференциальным уравнением порядка* n называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x). \qquad (1)$$

Пусть в дальнейшем коэффициенты

$$p_1(x), \quad \ldots, \quad p_n(x)$$

и правая часть $f(x)$ этого уравнения *непрерывны на интервале* (a, b).

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется *однородным*; в противном случае — *неоднородным*.

Задача Коши с начальными данными

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{2}$$

для уравнения (1) *имеет единственное решение*, какова бы не была точка x_0 из интервала (a, b). Это решение определено на всем интервале (a, b).

Пусть $y(x)$ — это n раз непрерывно дифференцируемая на (a, b) функция. Будем обозначать через $L(y)$ следующее дифференциальное выражение

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y.$$

Оператор $L(y)$ обладает следующим свойством линейности:

1. $L(Cy) = CL(y)$, $(C = const)$;

2. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

Из свойства линейности получаем очевидные следствия:

$1'$. Если функция $y(x)$ есть решение однородного уравнения (1), то функция $y_1(x) = Cy(x)$, где $C = const$, также будет решением того же однородного уравнения (1).

$2'$. Если функции $y(x), \ldots, y_m(x)$ есть *решения однородного уравнения* (1), то функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, \dots, C_n$ — постоянные, также будет решением того же однородного уравнения (1).

2^0. Функции $y(x), \dots, y_m(x)$ называются *линейно независимыми функциями на множестве E числовой оси*, если равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) = 0$$

где $\alpha, \dots, \alpha_m$ — некоторые постоянные, выполняется одновременно для всех чисел x из

E тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

В противном случае функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ называются *линейно зависимыми на множестве* E.

Приведём примеры линейно независимых и линейно зависимых систем функций.

1. Функции

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad \ldots, \quad y_n(x) = x^{n-1}$$

линейно независимы на всей числовой оси и вообще на любом интервале. Действительно, равенство

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1} = 0$$

может выполняться для всех x из некоторого интервала лишь в случае, если все коэффициенты полинома в левой части нулевые.

2. Функции $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ линейно независимы на любом интервале. Если бы эти функции были линейно зависимы, то должно было бы выполняться равенство

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = C$$

одновременно для всех чисел x из выбранного интервала. Очевидно, что это не так.

3. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — попарно различные числа. Функции

$$e^{\lambda_1 x}, \quad x e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad x^n e^{\lambda_1 x},$$

$$e^{\lambda_2 x}, \quad x e^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad x^n e^{\lambda_2 x}, \ldots,$$

$$e^{\lambda_m x}, \quad x e^{\lambda_m x}, \quad \ldots, \quad x^n e^{\lambda_m x}$$

линейно независимы на любом интервале.

4. Функции

$$y_1(x) = \cos^2 x, \qquad y_2(x) = \sin^2 x, \qquad y_3(x) = 1$$

линейно зависимы на любом интервале. Достаточно взять $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0.$$

Пусть функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ имеют производные до порядка $n-1$ включительно на

(a, b). Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* для системы функций

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad \dots, \quad y_n(x)$$

в точке x.

Теорема. *Если функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависимы на (a, b), то их определитель Вронского $W(x)$ равен нулю в каждой точке этого интервала.*

Доказательство. Так как система функций $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависима на интервале (a, b), то найдутся постоянные α, …, α_n, не все равные нулю, что для каждой точки

x из (a, b) выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0. \qquad (3)$$

Предположим, что $\alpha_n \neq 0$. Тогда из (3) можем выразить функцию $y_n(x)$:

$$y_n(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2(x) - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x).$$

Дифференцируя это равенство последовательно $n - 1$ раз и подставляя найденные значения $y_n(x)$, $y_n'(x)$, ..., $y_n^{(n-1)}(x)$ в определитель Вронского, получим определитель, последний столбец которого представляет собой линейную комбинацию предыдущих его столбцов. Как известно, такой определитель равен нулю. $\square$

Обратное теореме утверждение неверно. Например, следующие две функции

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ x^2, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

линейно независимы на интервале $(-a, a)$, но их определитель Вронского равен нулю в каждой точке.

Теорема. *Пусть функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно независимы на (a, b) и при этом каждая из них является решением однородного уравнения (1). Тогда соответствующий этим функциям определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке (a, b).*

Доказательство. Предположим противное — что найдётся точка x_0 из (a, b), в которой определитель Вронского равен нулю. Составим систему из n уравнений относительно чисел C_1, ..., C_n:

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0,$$

$$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Определитель этой системы равен нулю (он как раз и равен значению определителя Вронского в точке x_0). Следовательно, эта система имеет ненулевое решение C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0.

Определим функцию

$$y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x).$$

Функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ являются решениями однородного уравнения (1), поэтому и функция $y(x)$ будет решением того же уравнения. Для $y(x)$ имеют место равенства

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Другими словами, функция $y(x)$ является решением задачи Коши для однородного уравнения (1) с нулевыми условиями (2).

Но и функция $y^*(x) \equiv 0$ также является решением задачи Коши для однородного уравнения (1) с нулевыми условиями (2). В силу теоремы единственности для задачи Коши эти функции обязаны совпадать всюду на (a, b). Другими словами, для любого числа x из интервала (a, b) выполняется равенство

$$C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x) = 0.$$

Но это означает, что функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависимы на (a, b). Полученное противоречие с условием теоремы обусловлено исходным предположением о существовании точки, в которой определитель Вронского равен нулю. Следовательно, такой точки не существует. $\square$

Следствие. *Если определитель Вронского n решений однородного уравнения (1) равен нулю хотя бы в одной точке интервала (a, b), то он равен нулю во всех точках этого интервала.*

Доказательство. Действительно, если в точке x_0 интервала (a, b) выполняется равенство

$$W(x_0) = 0,$$

то система функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ обязана быть линейно зависимой на (a, b). Но тогда по теореме об определителе Вронского он будет равен нулю на всём (a, b). $\square$

Следствие. *Если определитель Вронского* n *решений однородного уравнения* (1) *отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала* (a, b), *то он отличен от нуля во всех точках этого интервала.*

Следствие. *Для линейной независимости* n *решений однородного уравнения* (1) *на интервале* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был отличен от нуля хотя бы в одной точке этого интервала.*

Для вычисления определителя Вронского применяется *формула Остроградского — Лиувилля*.

Теорема (формула Остроградского-Лиувилля). *Пусть функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ являются решениями однородного уравнения* (1). *Тогда имеет место равенство*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt},$$

где x и x_0 из интервала (a,b) .

Доказательство. При дифференцировании определителя порядка n, элементами которого являются функции, его производная равна сумме n определителей, получающихся из него поочерёдной заменой элементов 1-й, 2-й и т. д. строк их производными. Но все такие определители, кроме последнего, равны нулю (в каждом из них имеются две одинаковые строки). Отсюда получаем

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Умножая элементы первых $n-1$ строк этого определителя соответственно на

$$p_n(x), \quad p_{n-1}(x), \quad \dots, \quad p_2(x)$$

и прибавляя к элементам последней строки, мы, вследствие выполнения для функций $y_i(x)$ однородного уравнения (1), получим для производной $W'(x)$ следующее выражение

$$-p_1(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Согласно свойствам определителей, отсюда следует равенство

$$W'(x) = -p_1(x)W(x).$$

Заменим здесь переменную x на переменной t и умножим справа и слева на функцию

$$e^{-\int\limits_{x_0}^{t} p_1(s)ds}.$$

После несложных преобразований получаем соотношение

$$\left(e^{-\int\limits_{x_0}^{t} p_1(s)ds} W(t) \right)' = 0.$$

Интегрируя это соотношение от x_0 до x, получаем требуемую формулу. $\square$

3^0. В пространстве решений линейного однородного уравнения принято выделять специальные базисные системы функций.

Определение. *Совокупность n решений линейного однородного уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0,$$

определённых и линейно независимых на (a, b), называется фундаментальной системой решений для рассматриваемого уравнения.

Теорема (существование фундаментальной системы). *Для любого уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0,$$

с коэффициентами, непрерывными на интервале (a, b), *существует фундаментальная система решений на этом интервале.*

Доказательство. Возьмём произвольную точку x_0 интервала (a, b) и построим функцию

$y_1(x)$ — решение однородного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad y_1^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Согласно теореме существования для уравнения порядка n, функция y_1 существует и определена для всех точек интервала (a, b). Далее, построим функцию $y_2(x)$ как решение рассматриваемого однородного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1, \quad \ldots, \quad y_2^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

На последнем шаге мы построим функцию $y_n(x)$ как решение однородного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$y_n(x_0) = 0, \quad y_n'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = 1.$$

Определитель Вронского построенной системы функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \ldots & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \ldots & \ldots & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \ldots & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель равен 1. Но тогда система решений $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ обязана быть линейно независимой на интервале (a, b). Следовательно, она образует фундаментальную систему. $\square$

Теорема. *Пусть* $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ — *фундаментальная система решений уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0.$$

Тогда всякая функция

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x),$$

где C_1, ..., C_n — *произвольные постоянные, решает рассматриваемое однородное уравнение. Обратно, если* $y(x)$ *есть произвольное* *решение однородного уравнения, то найдутся постоянные* C_1, ..., C_n, *такие что для всех* x *из* (a, b) *будет выполняться равенство*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Доказательство. Первая часть теоремы вытекает из линейности уравнения. Докажем вторую. Пусть $y(x)$ есть произвольное решение рассматриваемого однородного уравнения, x_0 есть произвольная точка интервала

(a, b). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y(x_0), \\ \\ C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y'(x_0), \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \tag{4}$$

Определитель этой системы — это определитель Вронского функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ в точке x_0.

Система функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ — фундаментальная система решений, и соответствующий ей определитель Вронского не равен нулю. Следовательно, система (4) имеет единственное решение C_1^0, ..., C_n^0. Докажем, что именно эти числа и будут искомыми.

Рассмотрим следующую линейную комбинацию

$$y^*(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x).$$

Эта функция решает однородное уравнение и удовлетворяет условиям

$$y^*(x_0) = y(x_0), \quad y^{*\prime}(x_0) = y'(x_0), \quad y^{*\prime\prime}(x_0) = y''(x_0),$$

$$\ldots, \quad y^{*(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$

В силу единственности решения задачи Коши функции $y^*(x)$ и $y(x)$ обязаны совпадать всюду на (a, b). $\square$

Теорема. *Однородное уравнение*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

не может иметь более n линейно независимых решений.

Доказательство. Предположим противное — пусть однородное уравнение имеет $n+1$ линейно независимое решение

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n(x), \quad y_{n+1}(x).$$

Рассмотрим первые n решений. Если они линейно зависимы, то найдутся числа α_1, α_2, ..., α_n, не все одновременно равные нулю и такие, что для всех чисел x из (a, b) выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Но тогда и вся система $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_{n+1}(x)$ будет линейно зависимой, поскольку будет выполняться равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) + 0 \cdot y_{n+1}(x) = 0,$$

а среди чисел α_1, α_2, ..., α_n, 0 не все одновременно равны нулю.

Если же решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно независимы, то они образуют фундаментальную систему. Но тогда, согласно основной теореме, решение $y_{n+1}(x)$ выражает-ся через эти функции:

$$y_{n+1}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x), \;\; x \in (a, b).$$

Следовательно, система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, $y_{n+1}(x)$ снова будет линейно зави-симой. $\square$

5^0. Рассмотрим теперь *неоднородное* уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x). \qquad (5)$$

Пусть $y_0(x)$ — это какое-либо частное решение этого неоднородного уравнения, а функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0.$$

Теорема. *Всякая линейная комбинация вида*

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, решает неоднородное уравнение (5). Обратно, если $y(x)$ есть решение неоднородного уравнения (5), то найдутся постоянные $C_1, \ldots, C_n$ такие, что для всех x из (a, b) будет *выполняться равенство*

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна. Докажем вторую. Представим функцию $y(x)$ в виде

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x). \qquad (6)$$

Тогда функция $\tilde{y}(x)$ будет решением однородного уравнения. Согласно основной теореме, найдутся постоянные $C_1, \ldots, C_n$, что для всех точек x из (a, b) будет выполняться равенство

$$\tilde{y}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Вместе с равенством (6) это и даёт требуемое. $\square$

Таким образом, чтобы построить общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x),$$

а, значит, и решение задачи Коши, необходимо построить фундаментальную систему решений однородного уравнения и найти какое-нибудь одно частное решение неоднородного уравнения.

Если построена фундаментальная система решений однородного уравнения, то частное решение неоднородного можно найти с помощью *метода вариации постоянных*. Будем искать частное решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$

в виде

$$y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — функции фундаментальной системы. Для того чтобы функция $y_0(x)$ решала рассматриваемое неоднородное уравнение, функции $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$ должны быть выбраны специальным образом. Имеет место равенство

$$y_0'(x) = C_1(x)y_1'(x) + \ldots + C_n(x)y_n'(x) +$$

$$+ C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x).$$

Пусть для функций $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$ выполняется равенство

$$C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0.$$

Учитывая это равенство, вычислим вторую производную от искомой функции:

$$y_0''(x) = C_1(x)y_1''(x) + \ldots + C_n(x)y_n''(x) +$$

$$+ C_1'(x)y_1'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x).$$

Вновь потребуем, чтобы n последних слагаемых в сумме дали нуль:

$$C_1'(x)y_1'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Вычисляя таким образом последовательно производные

$$y_0'''(x), \quad \ldots, \quad y_0^{(n-1)}(x)$$

и требуя каждый раз, чтобы последние n слагаемых в сумме давали нуль, получаем для функций $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$, систему равенств

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ \\ C_1'(x)y_1'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0. \end{cases}$$

Кроме того, для производных

$$y_0'(x), \quad y_0''(x), \quad \ldots, \quad y_0^{(n-1)}(x), \quad y_0^{(n)}(x)$$

имеют место последовательные представления

$$\begin{cases} y_0'(x) = C_1(x)y_1'(x) + \ldots + C_n(x)y_n'(x), \\ y_0''(x) = C_1(x)y_1''(x) + \ldots + C_n(x)y_n''(x), \\ \ldots \\ y_0^{(n-1)}(x) = C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x). \end{cases}$$

Дифференцируя последнее из равенств этой системы, получим для производной порядка n от искомой функции следующее равенство

$$y_0^{(n)}(x) = C_1(x)y_1^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x)y_n^{(n)}(x)+$$

$$+C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x).$$

Подставим функцию $y_0(x)$ и найденные значения её производных в исходное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x).$$

Учитывая, что каждая из функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ является решением соответствующего однородного уравнения, в результате получим равенство

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Добавляя это уравнение к предыдущим, получаем для функций $C_1'(x)$, ..., $C_n'(x)$ следующую систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+\ldots+C_n'(x)y_n(x)=0, \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0, \\ \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases}$$

Определитель этой системы в каждой точке x интервала (a,b) представляет собой определитель Вронского $W(x)$ линейно независимой системы функций

$$y_1(x), \quad \ldots, \quad y_n(x),$$

каждая из которых решает однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

Этот определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке из (a, b). Следовательно, полученная система имеет единственное решение, которое можно найти, например, по правилу Крамера. В результате получим в каждой точке из (a, b) значения производных:

$$C_1'(x) = g_1(x), \quad \ldots, \quad C_n'(x) = g_n(x).$$

Интегрируя эти уравнения, находим *искомое частное решение* $y_0(x)$.

Для линейного неоднородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{7}$$

реализация метода вариации постоянных приводит к частному решению следующего вида

$$y_0(x) = y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt - y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt.$$

Здесь x_0 — произвольная точка из (a, b), а функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения (7).

Для построения общего решения уравнения (7) достаточно найти одно ненулевое решение однородного уравнения (7). Второе же решение всегда можно получить, используя формулу Остроградского — Лиувилля.

Если правая часть $f(x)$ в уравнении

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$

представима в виде суммы нескольких слагаемых

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x),$$

то частное решение всего уравнения можно найти как сумму частных решений

$$y_0(x) = y_{01}(x) + \ldots + y_{0m}(x).$$

Здесь каждая из функций $y_{0i}(x)$, $i = 1, \ldots, m$, решает неоднородное уравнение с правой частью $f_i(x)$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f_i(x)$$

6^0. Перейдем к рассмотрению линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \alpha_2 y^{(n-2)} + \ldots + \alpha_n y = f(x).$$

Здесь α_1, α_2, ..., α_n — заданные вещественные постоянные, функция $f(x)$ — заданная правая часть уравнения.

Задача Коши для такого линейного уравнения всегда имеет единственное решение на любом таком интервале, где непрерывна функция $f(x)$.

Сначала рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \alpha_2 y^{(n-2)} + \ldots + \alpha_n y = 0. \quad (8)$$

Покажем, как можно найти (построить) фундаментальную систему решений для уравнения (8).

Вместе с уравнением (8) с постоянными коэффициентами рассмотрим следующий многочлен

$$\boldsymbol{P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n.}$$

Определение. *Многочлен* $\boldsymbol{P(\lambda)}$ *называется характеристическим многочленом для дифференциального уравнения (8).*

Из курса алгебры известно, что уравнение

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0$$

имеет ровно n корней, действительных или комплексных, возможно кратных. Кроме того, поскольку все коэффициенты характеристического многочлена — действительные числа, то уравнение $P(\lambda) = 0$ вместе с любым комплексным корнем $a + bi$ имеет своим корнем и комплексно-сопряжённое число $a - bi$, причём кратности корней $a+bi$ и $a-bi$ совпадают.

Пусть уравнение $P(\lambda)=0$ имеет своими корнями действительные числа

$$\lambda_1, \quad \dots, \quad \lambda_l,$$

причём кратность корня λ_k равна α_k. Пусть также корнями являются взаимно сопряженные комплексные числа

$$\lambda_{l+1},\ \overline{\lambda_{l+1}},\quad \lambda_{l+2},\ \overline{\lambda_{l+2}},\quad \ldots,\quad \lambda_{l+m},\ \overline{\lambda_{l+m}}.$$

Пусть при этом кратность каждого корня λ_{l+k} или $\overline{\lambda_{l+k}}$ равняется β_k.

Каждому действительному корню λ_k, $k = 1, \ldots, l$, поставим в соответствие α_k функций

$$e^{\lambda_k x},\quad xe^{\lambda_k x},\quad \ldots,\quad x^{\alpha_k - 1}e^{\lambda_k x}.$$

Далее, каждой паре комплексных корней λ_{l+k}, $\overline{\lambda_{l+k}}$, где $\lambda_{l+k} = \mu_k + i\nu_k$, поставим в соответствие $2\beta_k$ функций

$$e^{\mu_k x}\cos\nu_k x, \quad xe^{\mu_k x}\cos\nu_k x, \ \ldots, \ x^{\beta_k - 1}e^{\mu_k x}\cos\nu_k x,$$

$$e^{\mu_k x}\sin\nu_k x, \quad xe^{\mu_k x}\sin\nu_k x, \ \ldots, \ x^{\beta_k - 1}e^{\mu_k x}\sin\nu_k x.$$

Общее число функций, сопоставленных характеристическому многочлену, определяется равенством

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_l + 2\beta_1 + \ldots + 2\beta_m = n.$$

Сопоставленные характеристическому полиному функции в совокупности *линейно независимы на всей числовой оси*. Кроме того все они являются решениями уравнения

$$y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \alpha_2 y^{(n-2)} + \ldots + \alpha_n y = 0,$$

что проверяется непосредственной их подстановкой в уравнение.

Именно функции из этого, построенного по корням характеристического полинома множества, образуют фундаментальную систему решений исходного линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x).$$

Для построения общего решения этого уравнения достаточно найти фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения.

Зная эту фундаментальную систему решений, частное решение неоднородного уравнения можно найти *методом вариации постоянных*.

Общее же решение уравнения получается как сумма найденного частного решения и общего решения однородного уравнения (8).

В некоторых случаях частное решение неоднородного уравнения можно найти иным методом — *методом неопределённых коэффициентов.* Опишем эти случаи.

а) функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x},$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m.

Если число α не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищется в виде

$$y_0(x) = Q_m(x)\, e^{\alpha x},$$

где $Q_m(x)$ есть многочлен степени m:

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m$$

с неопределёнными пока коэффициентами.

Подставляя функцию $y_0(x)$ в исходное неоднородное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим алгебраическую систему из $(m+1)$ уравнения для нахождения q_0, q_1, ..., q_m. Отыскав эти коэффициенты, найдём искомое частное решение.

Если число α является корнем характеристического многочлена кратности k, то частное решение ищется в виде

$$y_0(x) = x^k Q_m(x)\, e^{\alpha x},$$

где вновь $Q_m(x)$ — многочлен степени m с неопределёнными коэффициентами.

Подставляя $y_0(x)$ в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, вновь получаем алгебраическую систему для чисел q_0, ..., q_m. Отыскав решение этой системы, находим и искомое частное решение.

б) функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \left(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x\right) e^{\alpha x},$$

где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степеней m и l соответственно.

Если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищется в виде

$$y_0(x) = \left(R_p(x)\cos\beta x + T_p(x)\sin\beta x\right) e^{\alpha x},$$

где $R_p(x)$ и $T_p(x)$ — многочлены степени p с неопределёнными коэффициентами, причем $p = \max(m, l)$.

Если число $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического многочлена кратности k, то частное решение ищется в виде

$$y_0(x) = x^k[R_p(x)\cos\beta x + T_p(x)\sin\beta x]\, e^{\alpha x}.$$

В обоих случаях коэффициенты многочленов $R_p(x)$ и $T_p(x)$ определяются с помощью непосредственной подстановки функции $y_0(x)$ в исходное уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых функциях.

Частное решение в указанном виде всегда можно найти также для функций $f(x)$ вида

$$P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{или} \quad Q_l(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

В этом случае $p = m$ или $p = l$.

в) функция $f(x)$ есть сумма различных функций вида а) или б).

В этом случае частное решение получается как сумма частных решений, построенных для каждого слагаемого, входящего в представление правой части $f(x)$.

7^0. Имеются критерии линейной зависимости (независимости) систем функций, которые не используют понятие определителя Вронского. Приведем некоторые из этих критериев.

Пусть на (a, b) заданы непрерывные функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$.

Рассмотрим ассоциированную с ними матрицу интегралов

$$\alpha_{ij} = \int\limits_a^b y_i(x) y_j(x)\, dx, \qquad i, j = 1, \ldots, m.$$

Определение. *Определитель матрицы интегралов*

$$\Gamma(y_1, \ldots, y_m) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

называется определителем Грама системы функций $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$.

Система непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ линейно независима на этом отрезке тогда и только тогда, когда ее определитель Грама отличен от нуля.

Лемма. *Пусть $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ — линейно независимая на интервале (a, b) система функций. Тогда и любая её подсистема из k функ-*

ций, $1 \leqslant k \leqslant m$*, также линейно независима на том же интервале.*

Доказательство. Рассмотрим подсистему из первых k функций $y_1(x)$, ..., $y_k(x)$. Предположим, что она линейно зависима. Тогда найдутся числа α_1, ..., α_k, не все одновременно равные нулю, что для всех x из интервала (a, b) выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_k y_k(x) = 0.$$

Рассмотрим набор чисел

$$\alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_k, \quad \alpha_{k+1} = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_m = 0.$$

В этом наборе по-прежнему не все числа одновременно равны нулю. При этом для всех точек x из интервала (a, b) выполняется равенство

$$\alpha_1 y(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) = 0.$$

Но тогда вся система функций $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ должна быть линейно зависимой на интервале (a, b), а это не так. Получили противоречие с предположением о линейной зависимости системы $y_1(x)$, ..., $y_k(x)$. Следовательно, эта система линейно независима. $\square$

Лемма. *Пусть подсистема* $y_1(x)$, ..., $y_k(x)$ *системы функций* $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$, $1 < k < m$, *линейно зависима на интервале* (a, b). *Тогда и* *вся система* $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ *линейно зависима на интервале* (a, b).

Доказательство. Предположим, что система $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ линейно независима на интервале (a, b). Но тогда, согласно предыдущему, и любая её подсистема, в том числе подсистема $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, должна быть линейно независимой. А это противоречит условию. $\square$

Пусть функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ линейно независимы на интервале (a, b). Следует ли отсюда, что они линейно независимы на любом интервале (c, d), где $a \leq c < d \leq b$?

Не следует. Например, функции x и $|x|$ линейно независимы на интервале $(-1, 1)$, и в то же время линейно зависимы на $(0, 1)$.

Лемма. *Пусть функции $y_1(x)$, …, $y_m(x)$ линейно независимы на интервале (a, b). Тогда они линейно независимы на любом интервале (c, d), где $c \le a$, $d \ge b$.*

Доказательство. Предположим противное — что функции $y_1(x)$, …, $y_m(x)$ линейно зависимы на интервале (c, d). Тогда найдутся числа α_1, …, α_m, не все одновременно равные нулю, что для всех точек x из интервала (c, d)

будет выполняться равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x) = 0.$$

Но тогда это же равенство будет выполняться и для точек x из интервала (a, b). Это означает, что функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ линейно зависимы на интервале (a, b). Получили противоречие. $\square$

Пусть есть система n раз непрерывно дифференцируемых линейно независимых на интервале (a, b) функций $y_1(x)$, …, $y_n(x)$, определитель Вронского которой не равен нулю ни в одной точке этого интервала. Тогда существует одно и только одно (с точностью до постоянного множителя) однородное линейное уравнение, для которого эта система является фундаментальной системой решений на (a, b).

Коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ искомого уравнения должны удовлетворять системе

$$y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y_1 = 0,$$

$$y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y_2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y_n = 0$$

в каждой точке x интервала (a, b).

Определитель рассматриваемой системы с точностью до знака есть определитель Вронского системы функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$. Следовательно, система имеет решение в каждой точке. Решениями системы и будут искомые коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$.

Лемма. *Если функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ — линейно независимые на интервале (a, b) решения линейного однородного уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0,$$

где $n \geq m$, то эти же функции линейно независимы и на любом интервале (c, d), где $a \leq c < d \leq b$.

Доказательство. Предположим противное: пусть функции $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ линейно зависимы на интервале (c, d). Тогда для любой точки этого интервала имеем

$$\alpha_1 y(x) + \ldots \alpha_m y_m(x) = 0,$$

где среди чисел α_1, ..., α_m не все нулевые. Для функции $y_0(x) = \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x)$ выполняется исходное уравнение

$$y_0^{(n)} + p_1(x) y_0^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y_0 = 0.$$

Далее, для любой точки x_0 интервала (c, d) выполняются равенства

$$y_0(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y_0^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Другими словами, функция $y_0(x)$ является решением задачи Коши для линейного однородного уравнения с нулевыми начальными условиями. По теореме единственности функция $y_0(x)$ тождественно нулевая на интервале (a, b). Но это противоречит линейной независимости системы функций $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ на данном интервале. $\square$

Задача. *Пусть известно одно частное решение* $y_1(x)$ *линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Требуется найти второе решение этого уравнения, линейно независимое с первым.

Решение. Согласно формуле Остроградского — Лиувилля имеем

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x} p_1(y)\,dy}$$

или, что то же самое,

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x} p_1(y)\,dy}.$$

Относительно функции $y_2(x)$ это равенство представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решая это уравнение, находим функцию $y_2(x)$.

Заметим, что в случае уравнения порядка n формула Остроградского — Лиувилля позволяет построить общее решение, если известны лишь $n-1$ функция из фундаментальной системы решений.

8^0. В некоторых случаях с помощью подходящей замены уравнение можно привести к более простому виду.

Перейдём от независимой переменной x к новой независимой переменной t по формуле $t = \psi(x)$.

Функция $y(x)$ при такой замене перейдёт в функцию $u(t) = y(\psi^{-1}(t))$, для производных же y', y'', ..., $y^{(n)}$ справедливы формулы

$$y' = u' \cdot \psi'(x),$$

$$y'' = u'' \cdot \psi'^2(x) + u' \cdot \psi''(x),$$

$$y''' = u''' \cdot \psi'^3(x) + 3u'' \cdot \psi'(x) \cdot \psi''(x) + u' \cdot \psi'''(x).$$

Подставляя значения y', y'', ... в уравнение и заменяя переменную x на выражение $\psi^{-1}(t)$, получим для функции $u(t)$ новое дифференциальное уравнение.

В некоторых случаях с помощью подходящей замены уравнение с переменными коэффициентами можно преобразовать в уравнение с постоянными коэффициентами.

Например, *уравнение Эйлера*

$$x^n y^{(n)} + \alpha_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1} x y' + \alpha_n y = f(x)$$

заменой

$$t = \ln x \quad \text{при} \quad x > 0, \qquad t = \ln(-x) \quad \text{при} \quad x < 0$$

сводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Уравнение Чебышева

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0,$$

где n — натуральное число, при x из $(-1,1)$ заменой $x = \cos t$ или $t = \arccos x$ также сводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Тема : Линейные системы первого порядка с переменными коэффициентами

$\mathbf{1^0}$. Общие свойства линейных систем первого порядка. $\mathbf{2^0}$. Линейная зависимость и независимость систем вектор-функций. Определитель Вронского. $\mathbf{3^0}$. Фундаментальная система решений. Общее решение. $\mathbf{4^0}$. Линейные системы первого порядка с постоянными коэффициентами.

1^0. *Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка — это системы вида*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{1.6}$$

В дальнейшем коэффициенты $a_{ij}(x)$ и правые части $f_i(x)$ системы предполагаются непрерывными на интервале (a,b) функциями.

Общая теория линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка во многом аналогична общей теории линейных уравнений n-го порядка.

В частности, для любой точки x_0 из (a,b) задача Коши с условиями

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \dots, y_n(x_0) = y_{n0} \tag{2.6}$$

имеет единственное решение, продолжимое на весь интервал (a, b).

Если все функции $f_i(x)$ — тождественно нулевые, то система (1.6) называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной.*

Матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$ из коэффициентов уравнений в (1.6) называется *матрицей си-*

стемы. Вместе с матрицей $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ рассматриваются вектор-столбцы

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{f_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

С помощью этих обозначений система (1.6) записываются в матричном виде

$$\frac{\boldsymbol{dY}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

Далее будем использовать обозначение

$$\boldsymbol{LY = \frac{dY}{dx} - A(x)Y.}$$

Это выражение задает оператор, определенный на множестве непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b) функций. Этот оператор линеен.

2^0. Пусть $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ — вектор-функции, определенные на (a, b). *Эти вектор-функции* *называются линейно независимыми на интервале* (a, b), если тождество

$$\alpha_1 Y_1(x) + \ldots + \alpha_m Y_m(x) \equiv 0, \qquad x \in (a, b)$$

выполняется лишь для

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

Если же среди чисел α_1, ..., α_m найдется хотя бы одно ненулевое, то система вектор-функций $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ называется линейно зависимой на интервале (a, b) системой.

Пусть даны n вектор-функций

$$\boldsymbol{Y}_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{Y}_n(\boldsymbol{x}),$$

определенных на $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Детерминант

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского для системы вектор-функций* $\boldsymbol{Y}_1(\boldsymbol{x})$, $\ldots$, $\boldsymbol{Y}_n(\boldsymbol{x})$.

Теорема. *Если вектор-функции* $\boldsymbol{Y}_1(x), \ldots, \boldsymbol{Y}_n(x)$ *линейно зависимы в интервале* (a, b), *то их определитель Вронского — тождественно нулевая на этом интервале функция.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для одного уравнения.

Теорема. *Пусть вектор-функции*

$$\boldsymbol{Y_1(x), \ldots, Y_n(x)}$$

линейно независимы в интервале $(\boldsymbol{a, b})$, *и пусть каждая из них является решением однородной системы*

$$\frac{\boldsymbol{dY}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{A(x)Y}.$$

Тогда их определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке данного интервала.

Доказательство. Пусть существует точка x_0 из интервала (a, b), для которой выполняется равенство $W(x_0) = 0$. Тогда векторы $Y_1(x_0)$, ..., $Y_n(x_0)$ линейно зависимы: найдутся числа α_1, ..., α_n, не все равные нулю, и такие что выполняется равенство

$$\alpha_1 Y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n Y_n(x_0) = 0.$$

Определим вектор-функцию

$$Y(x) = \alpha_1 Y_1(x) + \ldots + \alpha_n Y_n(x).$$

Эта функция является решением рассматриваемой однородной системы. При этом она удовлетворяет данным Коши с нулевыми начальными условиями в точке x_0.

В силу единственности решения задачи Коши функция $Y(x)$ тождественно нулевая на интервале (a, b). Это означает, что система вектор-функций $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ линейно зависима на интервале (a, b), что противоречит условию. Полученное противоречие опровергает предположение о том, что существует точка x_0, в которой определитель Вронского обращается в нуль. $\square$

Как и для одного уравнения, из указанных теорем можно легко вывести некоторые следствия.

Следствие 1. *Если определитель Вронского решений* $\boldsymbol{Y_1}(x)$, ..., $\boldsymbol{Y_n}(x)$ *однородной системы равен нулю хотя бы в одной точке интервала* (a, b), *то он равен нулю во всех точках этого интервала.*

Следствие 2. *Если определитель Вронского решений* $\boldsymbol{Y_1}(x)$, ..., $\boldsymbol{Y_n}(x)$ *однородной системы отличен от нуля хотя бы в одной точке* *интервала* (a, b), *то он отличен от нуля и во всех остальных точках этого интервала.*

Следствие 3. *Для линейной независимости решений* $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ *однородной системы на интервале* (a, b) *необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был отличен от нуля хотя бы в одной точке этого интервала.*

Теорема (формула Остроградского — Лиувилля для систем). *Пусть вектор-функции* $\boldsymbol{Y_1(x)}$, ..., $\boldsymbol{Y_n(x)}$ *являются решениями однородной системы*

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dx} = \boldsymbol{A(x)Y}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\boldsymbol{W(x) = W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x}[a_{11}(t)+\ldots+a_{nn}(t)]dt}}.$$

Доказательство. Воспользуемся известной формулой для производной определителя и получим равенство

$$\boldsymbol{W'(x) = \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \cdots & y'_{1n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} +}$$

$$\boldsymbol{+ \ldots + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & & \\ y'_{n1} & y'_{n2} & \cdots & y'_{nn} \end{vmatrix}.} \qquad (3.6)$$

Рассмотрим первое слагаемое. Преобразуем его первую строку (то есть строку из производных), исходя из уравнений системы:

$$y'_{1k} = a_{11}(x)y_{1k} + \ldots + a_{1n}(x)y_{nk}.$$

Умножим вторую строку на функцию $-a_{12}(x)$ и прибавим к первой, далее умножим третью строку на функцию $-a_{13}(x)$ и вновь прибавим к первой, и т.д. В результате первое слагаемое правой части равенства (3.6) приобретет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x)y_{11} & a_{11}(x)y_{12} & \cdots & a_{11}(x)y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Заменяя далее во втором и в следующих слагаемых правой части равенства (3.6) строку из производных, на строку, представляющую собой правую часть соответствующей строки однородной системы, преобразуя полученный определитель указанных выше образом, придём к равенству

$$\boldsymbol{W'(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\right] W(x).}$$

Интегрируя это уравнение, получаем требуемое равенство. $\square$

3^0. *Совокупность* n *решений — вектор-функций* $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ *— однородной системы, определенных и линейно независимых на интервале* (a, b), *называется фундаментальной системой решений на этом интервале.*

Теорема (существование фундаментальной системы). *Для любой системы*

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y.$$

с непрерывными на интервале (a, b) коэффициентами существует фундаментальная система решений на этом интервале.

Доказательство. Возьмем произвольную точку x_0 интервала (a, b) и построим вектор-функцию $Y_k(x)$ как решение задачи Коши для рассматриваемой однородной системы с начальными условиями

$$y_{ik}(x_0) = \delta_i^k, \quad i = 1, \ldots, n$$

(δ_i^k — символ Кронекера). Согласно теореме Пикара, функция $Y_k(x)$ существует и определена на всём интервале (a, b).

Определитель Вронского системы вектор-функций $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ отличен от нуля. Поэтому эта система линейно независима на всём интервале (a, b). Следовательно, она образует фундаментальную систему. $\square$

Теорема. *Пусть* $\boldsymbol{Y}_1(x)$, ..., $\boldsymbol{Y}_n(x)$ *— фундаментальная система решений для*

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dx} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}.$$

Тогда всякая вектор-функция

$$\boldsymbol{Y}(x) = C_1\boldsymbol{Y}_1(x) + \ldots + C_n\boldsymbol{Y}_n(x)$$

($C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные) будет решением той же однородной системы.

Обратно, если $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x})$ *есть произвольное решение однородной системы, то найдутся постоянные* $\boldsymbol{C_1, \ldots, C_n}$*, что для всех* $\boldsymbol{x}$ *из интервала* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *будет выполняться равенство*

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C_1 Y_1(x) + \ldots + C_n Y_n(x)}.$$

Доказательство. Первая часть теоремы справедлива вследствие линейности оператора $\boldsymbol{L}$.

Докажем вторую. Пусть вектор-функции

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}_k(x) = \begin{pmatrix} y_{1k}(x) \\ \vdots \\ y_{nk}(x) \end{pmatrix},$$

где $k = 1, \ldots, n$, это соответственно произвольное решение однородной системы и функции фундаментальной системы решений.

Возьмем произвольную точку x_0 из интервала (a, b) и рассмотрим следующую систему:

$$C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{12}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0) = y_1(x_0),$$

$$C_1 y_{21}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0) = y_2(x_0),$$

$$\vdots$$

$$C_1 y_{n1}(x_0) + C_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0) = y_n(x_0).$$

Ее определитель — это определитель Вронского функций $Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$, и он не равен нулю. Следовательно, данная система имеет единственное решение

$$\boldsymbol{C_1^0}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{C_n^0}.$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\boldsymbol{Y^*(x) = C_1^0 Y_1(x) + \ldots + C_n^0 Y_n(x)}.$$

Эта функция решает однородную систему и удовлетворяет условиям

$$y_1^*(x_0) = y_1(x_0),\ y_1^*(x_0) = y_2(x_0), \ldots, y_n^*(x_0) = y_n(x_0).$$

В силу единственности решения задачи Коши функции $Y(x)$ и $Y^*(x)$ совпадают всюду на интервале (a, b). А это и означает требуемое. $\square$

Следствие. *Однородная система не может иметь более чем n линейно независимых решений.*

Доказательство данного следствия проводится полностью аналогично доказательству соответствующего следствия для одного уравнения.

Рассмотрим теперь неоднородную систему

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{d\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

Пусть $\boldsymbol{Y_0}(\boldsymbol{x})$ — это какое-либо частное решение неоднородной системы, а вектор-функции

$Y_1(x)$, ..., $Y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

Теорема. *Всякая функция $Y(x)$ вида*

$$Y(x) = Y_0(x) + c_1 Y_1(x) + \ldots + C_n Y_n(x),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, решает неоднородную систему. Обратно, если $Y(x)$ решает неоднородную систему, то найдутся постоянные C_1, ..., C_n, такие что *для всех точек* x *из интервала* (a, b) *будет выполняться равенство*

$$Y(x) = Y_0(x) + C_1 Y_1(x) + \ldots + C_n Y_n(x).$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы для одного уравнения.

Покажем, как построить частное решение неоднородной системы *методом вариации постоянных.*

Будем искать компоненты $y_{k0}(x)$ частного решения $Y_0(x)$ системы в виде

$$y_{k0}(x) = C_1(x)y_{k1}(x) + \ldots + C_n(x)y_{kn}(x), \quad (4.6)$$

где $y_{ik}(x)$, $i, k = 1, \ldots, n$ — компоненты вектор-функций $Y_k(x)$ из фундаментальной системы решений, $C_i(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые на интервале (a, b) функции.

Для того чтобы вектор-функция $Y_0(x)$ была решением неоднородной системы, функции $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$ требуется выбрать специальным образом.

Из равенств (4.6) вытекают равенства

$$y'_{k0}(x) = C'_1(x)y_{k1}(x) + \ldots + C'_n(x)y_{kn}(x) +$$

$$+C_1(x)y'_{k1}(x) + \ldots + C_n(x)y'_{kn}(x). \qquad (5.6)$$

Далее, поскольку вектор функция $Y_0(x)$ есть решение неоднородной системы, то должны выполняться равенства

$$y'_{k0}(x) = a_{k1}(x)y_{10}(x) + \ldots + a_{kn}(x)y_{n0}(x) + f_k(x),$$

где $k = 1, \ldots, n$. Эти равенства можно продолжить, используя (4.6):

$$y'_{k0}(x) = a_{k1}(x)[C_1(x)y_{11}(x) + \ldots + C_n(x)y_{1n}(x)]+$$

$$\ldots + a_{kn}(x)[C_1(x)y_{n1}(x) + \ldots + C_n(x)y_{nn}(x)]. \quad (6.6)$$

Из (5.6) и (6.6) следуют равенства

$$C_1'(x)y_{k1}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{kn}(x) +$$

$$C_1(x)y_{k1}'(x) + \ldots + C_n(x)y_{kn}'(x) =$$

$$= a_{k1}(x)[C_1(x)y_{11}(x) + \ldots + C_n(x)y_{1n}(x)] + \ldots$$

$$+ a_{kn}(x)[C_1(x)y_{n1}(x) + \ldots + C_n(x)y_{nn}(x)] + f_k(x), \quad (7.6)$$

где $k = 1, \ldots, n$. Для функций $y_{ki}(x)$ выполняются равенства

$$y'_{ki}(x) = a_{k1}(x)y_{1i}(x) + \ldots + a_{kn}(x)y_{ni}(x), \quad (8.6)$$

где $k, i = 1, \ldots, n$. Запишем (7.6) в эквивалентном виде

$$C'_1(x)y_{k1}(x) + \ldots + C'_n(x)y_{kn}(x) +$$
$$C_1(x)y'_{k1}(x) + \ldots + C_n(x)y'_{kn}(x) =$$

$$C_1(x)[a_{k1}(x)y_{11}(x)+\ldots+a_{kn}(x)y_{n1}(x)]+\ldots$$
$$+C_n(x)[a_{k1}(x)y_{1n}(x)+\ldots+a_{kn}(x)y_{nn}(x)].$$

Используя (8.6), получаем, что для функций $C_1'(x)$, ..., $C_n'(x)$ должны выполняться соотношения $(k=1,\ldots,n)$:

$$C_1'(x)y_{k1}(x)+C_n'(x)y_{kn}(x)=f_k(x). \qquad (9.6)$$

Равенства (9.6) представляют собой систему линейных относительно функций

$$C_1'(x), \quad \ldots, \quad C_n'(x)$$

уравнений.

Определитель этой системы есть определитель Вронского системы функций

$$Y_1(x), \ldots, Y_n(x).$$

Эти функции — линейно независимые решения однородной системы и соответствующий им определитель Вронского отличен от нуля.

Тем самым система (9.6) однозначно разрешима. Решив ее (например, по правилу Крамера), получим

$$C_1'(x) = g_1(x), \quad \ldots, \quad C_n'(x) = g_n(x).$$

Интегрируя, находим сами функции $C_i(x)$, а тем самым — искомое частное решение

$$Y_0(x) = C_1(x)Y_1(x) + \ldots + C_n(x)Y_n(x).$$

4^0. Пусть все коэффициенты системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x). \end{cases}$$

представляют собой постоянные вещественные числа. Задача Коши для этой системы с постоянными коэффициентами имеет единственное решение на любом интервале (a, b), на котором функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$

непрерывны одновременно.

Покажем, как строится фундаментальная система решений для линейных систем с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейную систему с постоянными действительными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \qquad (1.6')$$

Этой системе сопоставим многочлен

$$\boldsymbol{P(\lambda) = \det(A - \lambda E)}$$

где $\boldsymbol{A}$ — матрица $(\boldsymbol{a_{ij}})$ системы $(\mathbf{1.6'})$.

Определение. *Многочлен* $\boldsymbol{P(\lambda)}$ *называется характеристическим многочленом для рассматриваемой системы.*

Пусть действительный корень $\boldsymbol{\lambda}$ характеристического многочлена $\boldsymbol{P(\lambda)}$ имеет кратность

m. Определим функции

$$y_1(x) = P_1(x)e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = P_2(x)e^{\lambda x},$$

$$y_3(x) = P_3(x)e^{\lambda x}, \ldots, y_n(x) = P_n(x)e^{\lambda x}, \quad (10.6)$$

где $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ — многочлены степени $(m-1)$ с неопределенными пока коэффициентами.

Предполагая, что эти функции представляют собой решение системы $(1.6')$, подставляя их в систему и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получим линейную однородную алгебраическую систему относительно коэффициентов многочленов

$$P_1(x), \ldots, P_n(x).$$

Однако среди указанных коэффициентов будет лишь m независимыхых, все остальные коэффициенты будут однозначно выражены через независимые.

Найдя эти базисные коэффициенты и полагая поочередно один из них равным единице, остальные нулю, построим для системы $(1.6')$ m линейно независимых решений вида (10.6).

Пусть теперь характеристический многочлен $P(\lambda)$ имеет комплексный корень λ кратности m.

Поскольку коэффициенты многочлена $P(\lambda)$ действительны, то его корнем будет и комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}$, причём с той же кратностью m.

Вновь определим функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ по формулам (10.6), предполагая теперь, что коэффициенты многочленов $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ могут быть и комплексными числами.

Подставляя функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ в систему $(1.6')$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, вновь получим линейную однородную систему (с комплексными коэффициентами) относительно коэффициентов многочленов $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ и вновь среди неизвестных коэффициентов окажутся лишь m независимых, остальные же будут определяться через независимые.

Полагая поочередно один из этих независимых коэффициентов равным единице, остальные же — нулю, получим m комплексных решений системы $(\mathbf{1.6'})$ вида (10.6). Выделяя у каждого из этих решений действительную и мнимую часть, получим $\mathbf{2}m$ действительных решений системы $(\mathbf{1.6'})$.

В целом ставя в соответствие указанным выше способом каждому действительному корню кратности m столько же действительных решений, а каждой паре комплексно сопряженных корней кратности m ровно $2m$ действительных решений, получим в итоге ровно n решений системы $(1.6')$.

Все эти решения линейно независимы на числовой оси и тем самым образуют фундаментальную систему решений.

Взяв линейную комбинацию функций этой системы по столбцам с одними и теми произвольными постоянными $C_1, \ldots, C_n$, мы получим общее решение системы $(1.6')$.

Рассмотрим теперь неоднородную систему с постоянными действительными коэффициентами:

$$\frac{dY}{dx} = AY + F(x).$$

Частное решение неоднородной системы можем построить, пользуясь методом вариации постоянных. Однако, как и для одного уравнения, в случае, когда правые части системы имеют специальный вид, частное решение можно построить и иным методом — методом неопределенных коэффициентов.

Пусть правые части системы — функции $f_k(x)$

имеют вид

$$f_k(x) = P^k_{m_k}(x) e^{\gamma x}, \qquad (11.6)$$

где $P^k_{m_k}(x)$ есть многочлены степени m_k. Компоненты y_{k0} частного решения $Y_0(x)$ в этом случае можно искать в виде

$$y_{k0}(x) = Q^k_{m+s}(x) e^{\gamma x},$$

где $Q^k_{m+s}(x)$ есть многочлены степени $m+s$ с неопределенными пока коэффициентами, $m = \max m_k$.

Число s равно нулю, если γ не является корнем характеристического многочлена.

Если же γ является корнем характеристического многочлена кратности l, то $s = l$.

Подставляя функции $y_{k0}(x)$ в исходную систему (1.6) и приравнивая выражения при одинаковых функциях, получим линейную алгебраическую систему относительно неизвестных коэффициентов, решив которую находим искомые компоненты частного решения.

Аналогично ищется частное решение в случае, если правые части $f_k(x)$ системы имеют вид

$$f_k(x) = [P_{m_k}^{k,1}(x)\cos\beta x + P_{l_k}^{k,2}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}. \quad (12.6)$$

Именно, функции $y_{k0}(x)$ в этом случае следует искать в виде

$$y_{k0}(x) = [Q_{m+s}^{k,1}(x) \cos \beta x + Q_{m+s}^{k,2}(x) \sin \beta x] e^{\alpha x},$$

где

$$m = \max\{m_1, \ldots, m_n, l_1, \ldots, l_n\}.$$

Число s равно нулю, если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического многочлена, и $s = l$, если $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического многочлена кратности l.

Пусть одна или несколько функций $f_k(x)$ состоит из слагаемых разного рода (например, содержат множители $e^{\gamma_1 x}$ и $e^{\gamma_2 x}$, где $\gamma_1 \neq \gamma_2$). Тогда систему необходимо разделить на компоненты с правыми частями вида (11.6) или (12.6), которые должны быть однородны по показателям γ или α и по коэффициентам β. Затем следует по отдельности найти частные решения каждой такой сопутствующей системы.

Совокупное частное решение можно получить просуммировав найденные частные решения.

Метод построения общего решения однородной системы (1.6), изложенной в настоящей лекции, не является единственно возможным. Например, данную линейную систему можно свести к линейному же дифференциальному уравнению порядка n (путем последовательных дифференцирований и исключений). Затем следует построить общее решение полученного уравнения и с его помощью найти общее решение исходной однородной системы.

Ещё один метод построения общего решения однородной системы с постоянными коэффициентами основан на использовании понятия *матричной экспоненты*. Точнее, используется тот факт, что матричная экспонента $X(t) = e^{tA}$ обладает следующим свойством

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad X(0) = E.$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots a_{1n}y_n + b_1(t),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots a_{nn}y_n + b_n(t),$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые функции,

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ — заданные постоянные действительные коэффициенты,

$b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)$ — заданные непрерывные функции.

Если $b_1(t) \equiv b_2(t) \equiv \ldots \equiv b_n(t) \equiv 0$, то система называется *однородной.*

Систему удобно записывать в векторной форме. Пусть

$$\overrightarrow{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \cdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{y}' = A(t)\overrightarrow{y} + \overrightarrow{b}(t). \tag{3.1}$$

Рассмотрим случай $\overrightarrow{b} \equiv 0$.

Пусть G — пространство решений системы (3.1) на промежутке (a, b). Фундаментальной системой решений для уравнений (3.1) называется любой базис в пространстве G.

Пусть найдены следующие решения однородной системы:

$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x_1}(t), \quad \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x_2}(t), \quad \cdots, \quad \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x_n}(t).$$

Если эти решения линейно независимы, то они составляют фундаментальную систему решений. Общее решение при этом можно записать в виде

$$y(t, \overrightarrow{C}) = C_1\overrightarrow{x_1}(t) + C_2\overrightarrow{x_2}(t) + \ldots + C_n\overrightarrow{x_n}(t). \quad (3.2)$$

Матрица, столбцами которой являются векторы фундаментальной системы решений, называется *фундаментальной матрицей* системы (3.1). Пусть это матрица

$$\boldsymbol{Y(t) = (\overrightarrow{x_1}(t), \overrightarrow{x_2}(t), \ldots, \overrightarrow{x_n}(t)).}$$

Любой столбец матрицы $\boldsymbol{Y(t)}$ — это частное решение системы (3.1).

Общее решение рассматриваемой системы с помощью фундаментальной матрицы можно записать в виде

$$\overrightarrow{y}(t,\overrightarrow{C}) = Y(t)\overrightarrow{C},$$

где $\overrightarrow{C}$ — это вектор-столбец произвольных постоянных:

$$\overrightarrow{C} = \uparrow (C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Для построения $Y(t)$ необходимо найти n линейно независимых решений системы (3.1).

Пусть известны n линейно независимых собственных вектора матрицы A:

$$\overrightarrow{x_1}, \quad \overrightarrow{x_2}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{x_n}.$$

Этим собственным векторам соответствуют собственные значения матрицы A (не обязательно различные):

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n.$$

Определение. *Если у матрицы A размеров $n \times n$ имеется ровно n линейно независимых собственных векторов, то говорят, что матрица A имеет простую структуру.*

Любая матрица простой структуры подобна диагональной.

Используя введенные обозначения для собственных векторов и собственных чисел матрицы простой структуры, фундаментальную систему решений для матрицы простой структуры можно записать в виде

$$\overrightarrow{x_1}(t) = \overrightarrow{x_1} e^{\lambda_1 t}; \quad \overrightarrow{x_2}(t) = \overrightarrow{x_2} e^{\lambda_2 t}; \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad \overrightarrow{x}_{n-1}(t) = \overrightarrow{x}_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t}, \quad \overrightarrow{x_n}(t) = \overrightarrow{x_n} e^{\lambda_n t}.$$

Таким образом, построение фундаментальной системы решений осуществляется нахождением собственных векторов и собственных значений матрицы $\boldsymbol{A}$.

Дополнительно необходимо исследовать, являются ли полученные собственные векторы линейно независимыми.

Фундаментальная матрица для рассмотренного случая имеет вид

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}) = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x_1}}e^{\boldsymbol{\lambda_1 t}}, \overrightarrow{\boldsymbol{x_2}}e^{\boldsymbol{\lambda_2 t}}, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{x_n}}e^{\boldsymbol{\lambda_n t}}\right). \qquad (3.3)$$

Из курса линейной алгебры известно, что если все собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$ различны, то соответствующие им собственные векторы образуют линейно независимую систему векторов, то есть матрица $\boldsymbol{A}$ имеет простую структуру.

Простую структуру имеет также любая симметричная матрица $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$.

Простую структуру имеет также любая нормальная матрица, то есть матрица, удовлетворяющая условию $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A}$.

Для определения собственных значений матрицы $\boldsymbol{A}$ следует составить характеристическую матрицу $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица, $\boldsymbol{\lambda}$ — комплексная переменная.

Далее необходимо найти определитель матрицы $A - \lambda E$. Этот определитель имеет вид

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

и называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

Корни характеристического многочлена — это по определению собственные значения матрицы A.

Собственный вектор $\vec{x}_k$, отвечающий собственному значению λ_k, по определению представляет собой нетривиальное решение уравнения

$$(A - \lambda_k E)\vec{x} = 0. \tag{3.4}$$

Нетривиальное решение этой однородной системы линейных уравнений существует потому, что определитель матрицы этой системы равен нулю.

Решение однородной системы линейных уравнений (3.4) неединственно. Для того чтобы выписать какое-нибудь нетривиальное решение системы (3.4) можно действовать по следующему правилу:

в качестве компонент искомого ненулевого вектора $\vec{x}_{\boldsymbol{k}}$ следует взять алгебраические дополнения к какой-нибудь строке матрицы $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_k} \boldsymbol{E}$.

При этом следует придерживаться двух рекомендаций:

1) строку надо выбирать так, чтобы подсчет алгебраических дополнений был максимально простым;

2) алгебраические дополнения не должны все обращаться в нуль (иначе получим тривиальное решение).

Если собственное значение λ_k матрицы A комплексное, то и собственный вектор $\overrightarrow{x_k}$, а также вектор-функция $\overrightarrow{x_k}e^{\lambda_k t}$ будут комплексными. При этом система

$$(A - \lambda_k E)\overrightarrow{x} = 0.$$

имеет в качестве решения вектор, комплексно сопряженный собственному вектору $\overrightarrow{x_k}$. Вместо двух комплексно сопряженных вектор-функций, решающих рассматриваемую систему дифференциальных уравнений,

$$\overrightarrow{x_k}e^{\lambda_k t} \quad \text{и} \quad \overline{\overrightarrow{x}_k}e^{\overline{\lambda_k}t}$$

можно взять два вещественных решения этой системы, а именно: действительную и мнимую части вектор-функции $\overrightarrow{x_k}e^{\lambda_k t}$.

<u>Пример</u>. Найти фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу и общее решение системы

$$y_1' = 2y_1 + y_2,$$

$$y_2' = 3y_1 + 4y_2.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы — это характеристический многочлен:

$$\boldsymbol{P(\lambda) = |A - \lambda E| = (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5.}$$

Корни этого многочлена различны: $\boldsymbol{\lambda_1 = 5}$ и $\boldsymbol{\lambda_2 = 1}$. Эти корни — собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$. Соответствующие собственные векторы – это решения двух систем уравнений:

$$\boldsymbol{(A - \lambda_k E)x = 0, \qquad k = 1, 2.}$$

При $k = 1$ и $\lambda_1 = 5$ имеем

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Компоненты вектора $\vec{x}_1$ находим как алгебраическое дополнение к элементам первой строки. Получаем в результате $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Тогда решение исходной системы дифференциальных уравнений задается равенством

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}.$$

При $k = 2$ и $\lambda_2 = 1$ получим

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты вектора $\vec{x}_2$ находим как алгебраическое дополнение к элементам первой строки. Получаем в результате $\overrightarrow{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная матрица решений имеет вид

$$\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{t} \\ 3e^{5t} & -e^{t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной записывается как

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \boldsymbol{Y}(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{5t} + C_2 e^{t} \\ 3C_1 e^{5t} - C_2 e^{t} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти фундаментальную матрицу и общее решение системы

$$\frac{dy_1}{dt} = -7y_1 + y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -2y_1 - 5y_2.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 37$$

имеет два комплексно сопряженных корня

$$\lambda_1 = -6 + i \quad \text{и} \quad \lambda_2 = -6 - i.$$

Эти корни — собственные значения матрицы A. Соответствующие собственные векторы – это решения двух систем уравнений:

$$(A - \lambda_k E)x = 0, \qquad k = 1, 2.$$

При $\boldsymbol{k = 1}$ и $\boldsymbol{\lambda_1 = -6 + i}$ имеем

$$\boldsymbol{A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{pmatrix}}.$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\vec{x}_1}$ находим как алгебраическое дополнение к элементам второй строки. Получаем в результате

$$\boldsymbol{\vec{x}_1^{\,*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_1^{\,*}(t) = \begin{pmatrix} e^{it} \\ (1+i)e^{it} \end{pmatrix} e^{-6t}}.$$

Учитывая, что $e^{it} = \cos t + i \sin t$, получаем

$$\overrightarrow{x}^{*}_{1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t - \sin t + i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} e^{-6t}.$$

Решение, соответствующее $\lambda_2 = -6 - i$, имеет вид

$$\overrightarrow{x}^{*}_{2}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - i \sin t \\ \cos t - \sin t - i(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} e^{-6t},$$

то есть комплексно сопряжено с $\overrightarrow{x}^{*}_{1}(t)$.

Берем действительную и мнимую части векторов $\overrightarrow{x}_1^*(t)$ и $\overrightarrow{x}_2^*(t)$ в качестве вещественных решений $\overrightarrow{x}_1(t)$ и $\overrightarrow{x}_2(t)$ исходной системы:

$$\overrightarrow{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{-6t},$$

$$\overrightarrow{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-6t}$$

Фундаментальная матрица при этом имеет

следующий вид

$$\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^{-6t}\cos t & e^{-6t}\sin t \\ e^{-6t}(\cos t - \sin t) & e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

С помощью фундаментальной матрицы общее решение $\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C})$ запишется как следующая вектор-функция

$$\begin{pmatrix} C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\sin t \\ C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

В случае кратных корней построение фундаментальной системы решений осложняется.

В этом случае матрица $\boldsymbol{A}$ может не иметь полной системы собственных векторов, составляющих базис рассматриваемого векторного пространства.

Пусть $\boldsymbol{\lambda_k}$ — корень $\boldsymbol{P(\lambda)}$ кратности $\boldsymbol{r}$, а ранг матрицы $\boldsymbol{A-\lambda_k E}$ равен $\boldsymbol{m}$. Число линейно независимых собственных векторов A в этом случае равно $n-m$ (числу линейно независимых решений системы $(A-\lambda_k E)\overrightarrow{x}=0$).

Пусть $n-m=r$. Тогда λ_k соответствуют r линейно независимых собственных векторов. Эти векторы могут быть приняты за основу при построении базиса в R^n, а затем и фундаментальной системы решений.

Действительно, из системы линейных уравнений

$$(A - \lambda_k E)\overrightarrow{x} = 0$$

получаем уже r независимых решений

$$\overrightarrow{x}_1^{(k)}, \quad \overrightarrow{x}_2^{(k)}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{x}_r^{(k)}.$$

Фундаментальная система решений системы $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ включает в себя функции

$$\overrightarrow{x}_1^{(k)} e^{\lambda_k t}, \quad \overrightarrow{x}_2^{(k)} e^{\lambda_k t}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{x}_r^{(k)} e^{\lambda_k t}.$$

Общее их число равно кратности корня $\boldsymbol{\lambda_k}$.

Пример. Найти фундаментальную систему решений и общее решение для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}, \quad P(\lambda) = (1-\lambda)^2.$$

Характеристический многочлен имеет корень $\lambda_{1,2} = 1$ кратности два.

Ранг матрицы $A - \lambda E$ равен 0, следовательно, для $\lambda_1 = 1$ существует два линейно независимых собственных вектора, они находятся как решения системы

$$\begin{pmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1-\boldsymbol{\lambda}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_1 \\ \boldsymbol{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Эти два линейно независимых вектора задаются равенствами

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x}_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Итак, фундаментальная система решений –

$$\overrightarrow{x_1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad \overrightarrow{x_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Фундаментальная матрица решений

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Общее решение задается формулой

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^t \end{pmatrix}.$$

Если $n - m < r$, то есть число $n - m$ линейно независимых решений системы

$$(A - \lambda_k E)\overrightarrow{x} = 0$$

меньше кратности r корня λ_k, то возникает необходимость дополнить базис из собственных векторов матрицы A.

Для этого каждому собственному вектору $\vec{h}_1^k$, соответствующему числу λ_k, сопоставляется серия присоединенных векторов

$$\vec{h}_1^k, \quad \vec{h}_2^k, \quad ..., \quad \vec{h}_r^k.$$

Здесь $\vec{h}_1^k \neq 0$ — собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_k кратности r. Остальные векторы $\vec{h}_j^k \neq 0$ последовательно определяются по формулам

$$A\vec{h}_2^k = \lambda_k \vec{h}_2^k + \vec{h}_1^k, \quad A\vec{h}_3^k = \lambda_k \vec{h}_3^k + \vec{h}_2^k, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad A\vec{h}_r^k = \lambda_k \vec{h}_r^k + \vec{h}_{r-1}^k,$$

или, что то же самое, по формулам

$$\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_k E}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{h}}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{k})} = \overrightarrow{\boldsymbol{h}}_{\boldsymbol{i-1}}^{(\boldsymbol{k})}; \qquad \boldsymbol{i = 2, 3, \ldots, r.}$$

Если $\boldsymbol{\lambda_k}$ — простой корень, то уравнение для $\overrightarrow{\boldsymbol{h}}_{\boldsymbol{2}}^{(\boldsymbol{k})}$ не совместно, то есть не имеет решений. При этом серия обрывается на первом векторе.

Серии построенных присоединенных векторов матрицы соответствует следующий набор решений исходной системы дифференциальных уравнений

$$\vec{h}_1^k e^{\lambda_k t}; \quad (\vec{h}_2^k + t\vec{h}_1^k) e^{\lambda_k t}; \quad \left(\vec{h}_3^k + t\vec{h}_2^k + \frac{t^2}{2!}\vec{h}_1^k\right) e^{\lambda_k t},$$

$$\ldots, \quad \left(\vec{h}_r^k + t\vec{h}_{r-1}^k + \ldots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\vec{h}_1^k\right) e^{\lambda_k t}.$$

Все эти вектор-функции следует включить в фундаментальную систему решений.

После дополнения каждого собственного вектора матрицы A присоединенной к нему серией векторов получим линейно независимую систему векторов всего пространства. С помощью этого базиса и строится затем фундаментальная система решений.

Пример. Найти фундаментальную систему решений и общее решение для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad P(\lambda) = \lambda^2.$$

Характеристический многочлен имеет $\lambda_{1,2} = 0$ корнем кратности два.

Ранг матрицы $A - \lambda_1 E$ равен 1, поэтому существует только один линейно независимый собственный вектор $\overrightarrow{h_1}$. Этот вектор получается как решение системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

откуда получаем $h_{11}=0, \quad h_{12}=1$. Итак,

$$\overrightarrow{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Присоединенный вектор $\overrightarrow{h}_2$ удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем $h_{21}=1$, вторую координату h_{22} можно взять произвольной, но так чтобы векторы $\overrightarrow{h}_1$ и $\overrightarrow{h}_2$ были линейно независимы. Пусть $h_{22} = 0$. Тогда

$$\overrightarrow{h_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений имеет вид

$$\overrightarrow{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x}_2(t) = (\vec{h}_2 + t\vec{h}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Общее решение задается формулой

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 + C_2 t \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = 10y_1 - 9y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = y_1 + 4y_2.$$

Решение. Здесь $A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 14\lambda + 49 = (\lambda - 7)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda_{1,2} = 7$ кратности два.

Ранг матрицы

$$\boldsymbol{A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}$$

равен 1. Поэтому корню $\boldsymbol{\lambda_1 = 7}$ соответствует лишь один собственный вектор $\boldsymbol{\overrightarrow{h}_1}$, и надо искать присоединенный вектор $\boldsymbol{\overrightarrow{h}_2}$.

Вектор $\boldsymbol{\overrightarrow{h}_1}$ — это собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A}$, получаем его как нетривиальное решение системы $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_1 E})\overrightarrow{\boldsymbol{h}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$. Имеем

$$\overrightarrow{\boldsymbol{h}_{\mathbf{1}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Для присоединенного вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{h}}_{\mathbf{2}}$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_{\mathbf{21}} \\ \boldsymbol{h}_{\mathbf{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

из которой видно, что первое уравнение есть следствие второго: $\boldsymbol{h}_{\mathbf{21}} - \mathbf{3}\boldsymbol{h}_{\mathbf{22}} = \mathbf{1}$. Итак, искомая серия имеет вид

$$\overrightarrow{h}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система имеет вид

$$\overrightarrow{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t};$$

$$\overrightarrow{x}_2(t) = (\overrightarrow{h}_2 + t\overrightarrow{h}_1)e^{7t} = \begin{pmatrix} 3t+1 \\ t \end{pmatrix} e^{7t}.$$

Общее решение задается формулой

$$\overrightarrow{y}(t, \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} 3C_1 + (3t+1)C_2 \\ C_1 + tC_2 \end{pmatrix} e^{7t}.$$

В общем случае кратному λ_k может соответствовать несколько собственных векторов и их присоединенных серий. При этом каждая из таких серий будет состоять меньше, чем из r векторов.

Итак, процедура определения решений, соответствующая кратным корням, состоит в следующем:

1) определяется число собственных векторов, соответствующих λ_k и находятся сами векторы;

2) если это число равно r, то далее построение фундаментальной системы ведется так, как и для матрицы простой структуры;

3) если число собственных векторов меньше r, то к каждому добавляется серия присоединенных векторов и выписываются частные решения по приведенным выше формулам;

4) совокупность всех частных решений по известному правилу дает фундаментальную систему решений.

Найти общее решение системы:

1. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z - y \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} \\ z = (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-2x} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + z = 0 \\ \dfrac{dz}{dx} + 4y = 0 \end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \\ z = -2(C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}) \end{cases}$

Покажем, как построить частное решение неоднородной системы *методом вариации постоянных.*

Будем искать компоненты $y_{k0}(x)$ частного решения $Y_0(x)$ системы в виде

$$y_{k0}(x) = C_1(x)y_{k1}(x) + \ldots + C_n(x)y_{kn}(x), \quad (4.6)$$

где $y_{ik}(x)$, $i, k = 1, \ldots, n$ — компоненты вектор-функций $Y_k(x)$ из фундаментальной системы решений, $C_i(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые на интервале (a, b) функции.

Для того чтобы вектор-функция $Y_0(x)$ была решением неоднородной системы, функции $C_1(x)$, ..., $C_n(x)$ требуется выбрать специальным образом.

Из равенств (4.6) вытекают равенства

$$y'_{k0}(x) = C'_1(x) y_{k1}(x) + \ldots + C'_n(x) y_{kn}(x) +$$

$$+C_1(x)y'_{k1}(x)+\ldots+C_n(x)y'_{kn}(x). \qquad (5.6)$$

Далее, поскольку вектор функция $Y_0(x)$ есть решение неоднородной системы, то должны выполняться равенства

$$y'_{k0}(x)=a_{k1}(x)y_{10}(x)+\ldots+a_{kn}(x)y_{n0}(x)+f_k(x),$$

где $k=1,\ldots,n$. Эти равенства можно продолжить, используя (4.6):

$$y'_{k0}(x)=a_{k1}(x)[C_1(x)y_{11}(x)+\ldots+C_n(x)y_{1n}(x)]+$$

$$\ldots + a_{kn}(x)[C_1(x)y_{n1}(x) + \ldots + C_n(x)y_{nn}(x)]. \quad (6.6)$$

Из (5.6) и (6.6) следуют равенства

$$C_1'(x)y_{k1}(x) + \ldots + C_n'(x)y_{kn}(x) +$$

$$C_1(x)y_{k1}'(x) + \ldots + C_n(x)y_{kn}'(x) =$$

$$= a_{k1}(x)[C_1(x)y_{11}(x) + \ldots + C_n(x)y_{1n}(x)] + \ldots$$

$$+ a_{kn}(x)[C_1(x)y_{n1}(x) + \ldots + C_n(x)y_{nn}(x)] + f_k(x), \quad (7.6)$$

где $k = 1, \ldots, n$. Для функций $y_{ki}(x)$ выполняются равенства

$$y'_{ki}(x) = a_{k1}(x)y_{1i}(x) + \ldots + a_{kn}(x)y_{ni}(x), \quad (8.6)$$

где $k, i = 1, \ldots, n$. Запишем (7.6) в эквивалентном виде

$$C'_1(x)y_{k1}(x) + \ldots + C'_n(x)y_{kn}(x) +$$
$$C_1(x)y'_{k1}(x) + \ldots + C_n(x)y'_{kn}(x) =$$

$$C_1(x)[a_{k1}(x)y_{11}(x)+\ldots+a_{kn}(x)y_{n1}(x)]+\ldots$$
$$+C_n(x)[a_{k1}(x)y_{1n}(x)+\ldots+a_{kn}(x)y_{nn}(x)].$$

Используя (8.6), получаем, что для функций $C_1'(x)$, ..., $C_n'(x)$ должны выполняться соотношения $(k=1,\ldots,n)$:

$$C_1'(x)y_{k1}(x)+C_n'(x)y_{kn}(x)=f_k(x). \qquad (9.6)$$

Равенства (9.6) представляют собой систему линейных относительно функций

$$C_1'(x), \quad \ldots, \quad C_n'(x)$$

уравнений.

Определитель этой системы есть определитель Вронского системы функций

$$\boldsymbol{Y_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{Y_n}(\boldsymbol{x}).$$

Эти функции — линейно независимые решения однородной системы и соответствующий им определитель Вронского отличен от нуля.

Тем самым система (9.6) однозначно разрешима. Решив ее (например, по правилу Крамера), получим

$$C_1'(x) = g_1(x), \quad \ldots, \quad C_n'(x) = g_n(x).$$

Интегрируя, находим сами функции $C_i(x)$, а тем самым — искомое частное решение

$$Y_0(x) = C_1(x)Y_1(x) + \ldots + C_n(x)Y_n(x).$$

4^0. Пусть все коэффициенты системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x). \end{cases}$$

представляют собой постоянные вещественные числа. Задача Коши для этой системы с постоянными коэффициентами имеет единственное решение на любом интервале (a, b), на котором функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$

непрерывны одновременно.

Покажем, как строится фундаментальная система решений для линейных систем с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейную систему с постоянными действительными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{1.6'}$$

Этой системе сопоставим многочлен

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

где A — матрица (a_{ij}) системы $(1.6')$.
Определение. *Многочлен* $P(\lambda)$ *называется характеристическим многочленом для рассматриваемой системы.*

Пусть действительный корень λ характеристического многочлена $P(\lambda)$ имеет кратность

m. Определим функции

$$y_1(x) = P_1(x)e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = P_2(x)e^{\lambda x},$$

$$y_3(x) = P_3(x)e^{\lambda x}, \ldots, y_n(x) = P_n(x)e^{\lambda x}, \quad (10.6)$$

где $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ — многочлены степени $(m-1)$ с неопределенными пока коэффициентами.

Предполагая, что эти функции представляют собой решение системы $(1.6')$, подставляя их в систему и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получим линейную однородную алгебраическую систему относительно коэффициентов многочленов

$$P_1(x), \ldots, P_n(x).$$

Однако среди указанных коэффициентов будет лишь m независимыхых, все остальные коэффициенты будут однозначно выражены через независимые.

Найдя эти базисные коэффициенты и полагая поочередно один из них равным единице, остальные нулю, построим для системы $(1.6')$ m линейно независимых решений вида (10.6).

Пусть теперь характеристический многочлен $P(\lambda)$ имеет комплексный корень λ кратности m.

Поскольку коэффициенты многочлена $P(\lambda)$ действительны, то его корнем будет и комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}$, причём с той же кратностью m.

Вновь определим функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ по формулам (10.6), предполагая теперь, что коэффициенты многочленов $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ могут быть и комплексными числами.

Подставляя функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ в систему $(1.6')$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, вновь получим линейную однородную систему (с комплексными коэффициентами) относительно коэффициентов многочленов $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ и вновь среди неизвестных коэффициентов окажутся лишь m независимых, остальные же будут определяться через независимые.

Полагая поочередно один из этих независимых коэффициентов равным единице, остальные же — нулю, получим m комплексных решений системы $(\mathbf{1.6'})$ вида (10.6). Выделяя у каждого из этих решений действительную и мнимую часть, получим $2m$ действительных решений системы $(\mathbf{1.6'})$.

В целом ставя в соответствие указанным выше способом каждому действительному корню кратности m столько же действительных решений, а каждой паре комплексно сопряженных корней кратности m ровно $2m$ действительных решений, получим в итоге ровно n решений системы $(1.6')$.

Все эти решения линейно независимы на числовой оси и тем самым образуют фундаментальную систему решений.

Взяв линейную комбинацию функций этой системы по столбцам с одними и теми произвольными постоянными $C_1, \ldots, C_n$, мы получим общее решение системы $(1.6')$.

Рассмотрим теперь неоднородную систему с постоянными действительными коэффициентами:

$$\frac{dY}{dx} = AY + F(x).$$

Частное решение неоднородной системы можем построить, пользуясь методом вариации постоянных. Однако, как и для одного уравнения, в случае, когда правые части системы имеют специальный вид, частное решение можно построить и иным методом — методом неопределенных коэффициентов.

Пусть правые части системы — функции $f_k(x)$

имеют вид

$$f_k(x) = P^k_{m_k}(x)e^{\gamma x}, \qquad (11.6)$$

где $P^k_{m_k}(x)$ есть многочлены степени m_k. Компоненты y_{k0} частного решения $Y_0(x)$ в этом случае можно искать в виде

$$y_{k0}(x) = Q^k_{m+s}(x)e^{\gamma x},$$

где $Q^k_{m+s}(x)$ есть многочлены степени $m+s$ с неопределенными пока коэффициентами, $m = \max m_k$.

Число s равно нулю, если γ не является корнем характеристического многочлена.

Если же γ является корнем характеристического многочлена кратности l, то $s = l$.

Подставляя функции $y_{k0}(x)$ в исходную систему (1.6) и приравнивая выражения при одинаковых функциях, получим линейную алгебраическую систему относительно неизвестных коэффициентов, решив которую находим искомые компоненты частного решения.

Аналогично ищется частное решение в случае, если правые части $f_k(x)$ системы имеют вид

$$f_k(x) = [P_{m_k}^{k,1}(x)\cos\beta x + P_{l_k}^{k,2}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}. \quad (12.6)$$

Именно, функции $y_{k0}(x)$ в этом случае следует искать в виде

$$y_{k0}(x) = [Q^{k,1}_{m+s}(x)\cos\beta x + Q^{k,2}_{m+s}(x)\sin\beta x]e^{\alpha x},$$

где

$$m = \max\{m_1, \ldots, m_n, l_1, \ldots, l_n\}.$$

Число s равно нулю, если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического многочлена, и $s = l$, если $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического многочлена кратности l.

Пусть одна или несколько функций $f_k(x)$ состоит из слагаемых разного рода (например, содержат множители $e^{\gamma_1 x}$ и $e^{\gamma_2 x}$, где $\gamma_1 \neq \gamma_2$). Тогда систему необходимо разделить на компоненты с правыми частями вида (11.6) или (12.6), которые должны быть однородны по показателям γ или α и по коэффициентам β. Затем следует по отдельности найти частные решения каждой такой сопутствующей системы.

Совокупное частное решение можно получить просуммировав найденные частные решения.

Метод построения общего решения однородной системы (1.6), изложенной в настоящей лекции, не является единственно возможным.

Тема : Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Задача Штурма-Лиувилля

$\mathbf{1^0}$. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка. $\mathbf{2^0}$. Задача Штурма-Лиувилля. Функция Грина. $\mathbf{3^0}$. Сведение неоднородной задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению. $\mathbf{4^0}$. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма — Лиувилля. $\mathbf{5^0}$. О представлении решений задачи Коши и краевых задач рядами.

1^0. Наряду с задачей Коши важное значение в теории дифференциальных уравнений и в приложениях имеют *краевые*, или *граничные, задачи.*

В этих задачах значения искомой функции и (или) ее производных задаются не в одной, а в двух точках — как правило, в точках, ограничивающих отрезок, на котором требуется определить решение.

Пусть функции $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ заданы и непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Для функции $y(x)$ из пространства $C^n([\alpha, \beta])$ определим *дифференциальное выражение*

$$l(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y.$$

Пусть кроме того имеются две прямоугольные матрицы действительных чисел

$$\{a_{ij}\}, \quad \{b_{ij}\}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 0, \ldots, n-1.$$

Обозначим через $U_i(y)$ следующую линейную форму

$$U_i(y) = a_{i,0}y(\alpha) + \ldots + a_{i,n-1}y^{(n-1)}(\alpha) +$$

$$+ b_{i,0}y(\beta) + \ldots + b_{i,n-1}y^{(n-1)}(\beta).$$

Определим следующее множество функций:

$$D = \Big\{ y(x) \in C^n([\alpha, \beta]) : U_i(y) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \Big\}.$$

Множество D образует в $C^n([\alpha,\beta])$ линейное подпространство, причем $D = C^n([\alpha,\beta])$ тогда, когда все числа $a_{i,j}$ и b_{ij} равны нулю.

Определение. *Краевыми условиями для дифференциального уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$

на отрезке $[\alpha,\beta]$ *называется система равенств вида*

$$U_i(y) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Определение. *Оператор L, ставящий в соответствие каждой функции $y(x)$ из D функцию $l(y)$, называется дифференциальным оператором, порожденным дифференциальным выражением $l(y)$ и краевыми условиями*

$$U_i(y) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Некоторые из линейных форм $U_i(y)$ могут оказаться линейными комбинациями остальных. Тогда соответствующее условие $U_i(y) =$

$\mathbf{0}$ может быть исключено из набора краевых условий как излишнее.

Другими словами, формы $U_i(y)$, входящие в краевые условия, изначально можно считать линейно независимыми. Как известно из курса алгебры, это означает, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов форм $U_i(y)$ должен быть равен m.

Определение. *Краевой задачей для дифференциального выражения l называется задача об отыскании функции $y(x)$ из D, удовлетворяющей уравнению $l(y) = f(x)$ и условиям*

$$U_i(y) = \varphi_i(x), \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $f(x)$ и $\varphi_i(x), \ldots, \varphi_m(x)$ — заданные функции. Если $f(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ — тождественно нулевые функции, то краевая задача называется однородной.

Всякая однородная краевая задача имеет по крайней мере одно решение — тождественно нулевое. Выясним, при каких условиях однородная краевая задача имеет нетривиальные решения.

Пусть система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ есть фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения $l(y) = 0$.

Тогда, как известно, всякое другое этого уравнения может быть представлено в виде линейной комбинации

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Однородные краевые условия приводят к равенствам

$$C_1 U_i(y_1) + \ldots + C_n U_i(y_n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_n$ эти равенства представляют собой систему линейных уравнений.

Если существуют числа $C_1, \ldots, \ldots, C_n$ такие, что $C_1^2 + \ldots + C_n^2 > 0$, то существует и нетривиальная функция $y(x)$, являющаяся решением однородной краевой задачи.

Матрица системы линейных уравнений для определения $C_1, \ldots, C_n$ имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) \ldots U_1(y_n) \\ \vdots \\ U_m(y_1) \ldots U_m(y_n) \end{pmatrix}.$$

Из линейной алгебры известно, что не тождественно нулевое решение $C_1, \ldots, C_n$ системы $UC = 0$ существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы U меньше n.

В частности, однородная краевая задача будет иметь ненулевые решения при $m < n$.

Если $m = n$, то однородная краевая задача имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель (в этом случае квадратной) матрицы U равен нулю.

Ранг матрицы U не зависит от выбора фундаментальной системы $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Действительно, переход от одной такой системы к другой $\hat{y}_1(x), \ldots, \hat{y}_n(x)$ осуществляется линейным преобразованием

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \hat{y}_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Матрица $C = (c_{ij})$ этого преобразования невырождена. При этом матрица U умножается на невырожденную матрицу. Поэтому ранг новой матрицы, задающей краевые условия, останется прежним.

2^0. Пусть на отрезке $[0, a]$ числовой прямой заданы две функции $p(x)$ и $q(x)$ из $C^1([0, a])$ и $C([0, a])$ соответственно.

Пусть кроме того заданы действительные числа h_1, h_2, H_1 и H_2 такие, что

$$h_1^2 + h_2^2 > 0, \qquad H_1^2 + H_2^2 > 0.$$

Задача (Штурма — Лиувилля). *Найти те значения λ, при которых уравнение*

$$l(y) \equiv -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < a, \quad (1.7)$$

имеет нетривиальные решения $y(x)$, удовлетворяющие краевым условиям

$$h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0, \quad H_1 y(a) + H_2 y'(a) = 0. \quad (2.7)$$

Задача (1.7), (2.7) называется *задачей Штурма — Лиувилля* или задачей на собственные значения для оператора $\boldsymbol{l(y)}$.

Всюду далее предполагаются выполненными следующие ограничения на коэффициенты в уравнении и в краевых условиях:

$$\left.\begin{aligned}
&p(x) \geq p_0 > 0,\ \ q(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [0, a],\\
&h_1 \geq 0, \quad h_2 \geq 0, \quad H_1 \geq 0, \quad H_2 \geq 0,\\
&h_1 + h_2 > 0, \quad H_1 + H_2 > 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

Теорема. *Пусть выполняются условия (3.7) и пусть либо функция $q(x)$ не является тождественно нулевой, либо одно из чисел h_1 или H_1 строго положительно. Тогда краевая задача (1.7), (2.7) имеет при $\lambda = 0$ лишь тривиальное решение.*

Доказательство. Умножим уравнение (1.7), в котором $\lambda = 0$, на функцию $y(x)$ и полученное равенство проинтегрируем по отрезку $(0, a)$. Учитывая краевые условия (2.7), получаем равенство

$$p(0)y'(0)y(0) - p(a)y'(a)y(a) +$$

$$+ \int_0^a p(x)y'^2(x)dx + \int_0^a q(x)y^2(x)dx = 0. \quad (4.7)$$

Пусть h_1 положительно. Если при этом и H_1

положительно, то из (2.7) и (4.7) получаем

$$\frac{p(0)h_2}{h_1}y'^2(0) + \frac{p(a)H_2}{H_1}y'^2(0) + \\ + \int\limits_0^a p(x)y'^2(x)dx + \int\limits_0^a q(x)y^2(x)dx = 0.$$

Если же $H_1 = 0$, то из (4.7) получаем

$$\frac{p(0)h_2}{h_1}y'^2(0) + \int\limits_0^a p(x)y'^2(x)dx + \int\limits_0^a q(x)y^2(x)dx = 0.$$

Во всех случаях получаем соотношения

$$h_2 y'^2(0) = 0, \;\; H_2 y'(a) = 0, \;\; y'(x) \equiv 0, \;\; q(x)y(x) \equiv 0,$$

где $x \in (0, a)$.

Третье соотношение $y'(x) \equiv 0$ означает, что $y(x)$ постоянная функция, первое же из условий (2.7) дает равенство $y(0) = 0$. Но тогда функция $y(x)$ будет тождественно нулевой функцией всюду на $[0, a]$.

Если H_1 положительно, то аналогичный анализ равенства (4.7) приводит к заключению, что функция $y(x)$ и в этом случае обязана быть тождественно нулевой.

Пусть теперь выполняются соотношения

$$h_1 = H_1 = 0, \quad q(x) \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, a].$$

Равенство (4.7) и краевые условия дают соотношения

$$y'(0) = 0, \quad y'(a) = 0, \quad y'(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 0,$$

где $x \in (0, a)$.

Условия $q(x) \geq 0$, $q(x) \not\equiv 0$, $q(x) \in C([0, a])$ означают, что на отрезке $[0, a]$ найдется точка, в окрестности которой функция $q(x)$ строго положительна. Но тогда в этой окрестности должно выполняться равенство $y(x) = 0$.

Вместе с постоянством $y(x)$ последнее равенство означает, что функция $y(x)$ обязана быть тождественно нулевой на $[0, a]$. $\square$

Задача. *Найти функцию $y(x)$, являющуюся на интервале $(0, a)$ решением неоднородного уравнения*

$$l(y) \equiv -(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \qquad (1.7')$$

и удовлетворяющую краевым условиям

$$h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0, \qquad H_1 y(a) + H_2 y'(a) = 0.$$

Правая часть $f(x)$ в уравнении — это заданная непрерывная функция.

Решение. Предположим, что решение рассматриваемой краевой задачи определяется единственным образом. Для этого достаточно потребовать, чтобы соответствующая однородная краевая задача имела только нулевое решение.

Пусть найдены две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, образующие фундаментальную систему решений однородного уравнения

$$l(y) \equiv -(p(x)y')' + q(x)y = 0.$$

Выберем какие-нибудь ненулевые числа A_1 и A_2 так, чтобы на левом краю отрезка выполнялось равенство

$$A_1[h_1 y_1(0) - h_2 y_1'(0)] + \\ + A_2[h_1 y_2(0) - h_2 y_2'(0)] = 0. \quad (5.7)$$

Кроме того выберем ненулевые числа B_1 и B_2 так, чтобы на правом краю выполнялось аналогичное условие

$$B_1[H_1 y_1(a) + H_2 y_1'(a)] + \\ + B_2[H_1 y_2(a) + H_2 y_2'(a)] = 0. \quad (5.7')$$

Используя выбранные числа, образуем следующие два решения однородного уравнения $l(y) = 0$:

$$\begin{cases} v_1(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x), \\ v_2(x) = B_1 y_1(x) + B_2 y_2(x). \end{cases} \tag{6.7}$$

Первая из этих функций $v_1(x)$ удовлетворяет краевому условию в нуле:

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0,$$

а вторая $v_2(x)$ — краевому условию в правой точке отрезка:

$$H_1 v_2(a) - H_2 v_2'(a) = 0.$$

Функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ линейно независимы на отрезке $[0, a]$. Действительно, если предположить, что эти функции линейно зависимы, то найдется число μ такое, что на отрезке $[0, a]$ выполняется равенство

$$v_1(x) = \mu v_2(x).$$

Но тогда для функции $v_1(x)$ будут выполняться краевые условия как на левом, так и на правом краю отрезка. Иными словами, функция $v_1(x)$ является решением однородной краевой задачи.

В силу сделанных выше предположений это возможно лишь в случае, если $v_1(x) \equiv 0$. Это означает, что

$$A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) = 0 \quad x \in [0, a],$$

то есть, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы. Но это противоречит изначальному выбору этих функций как фундаментальной системы решений. Следовательно, функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ линейно независимы.

Определитель Вронского $W(x)$ функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$ не обращается в нуль на отрезке $[0, a]$, что следует из доказанных ранее свойств этого определителя. Кроме того, из формулы Остроградского — Лиувилля вытекает равенство

$$\boldsymbol{p(x)W(x) = p(0)W(0) \quad x \in [0, a].} \tag{7.7}$$

Используем найденные функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ для построения решения рассматриваемой краевой задачи методом вариации постоянных.

Функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения $l(y) = 0$. Поэтому решение $y(x)$ неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x).$$

В соответствии с общей схемой метода вариации постоянной для функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$

должны выполняться равенства

$$\begin{cases} C_1'(x)v_1(x) + C_2'(x)v_2(x) = 0, \\ C_1'(x)v_1'(x) + C_2'(x)v_2'(x) = -\dfrac{f(x)}{p(x)}. \end{cases} \qquad (8.7)$$

Разрешив эту систему относительно неизвестных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, а затем используя равенство $p(x)W(x) = p(0)W(0)$, получим

$$C_1'(x) = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)W(0)}, \quad C_2'(x) = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)W(0)}. \qquad (9.7)$$

Потребуем, чтобы для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ выполнялись условия следующего вида

$$C_1(a) = 0, \qquad C_2(0) = 0. \tag{10.7}$$

Оказывается, что при таком выборе условий Коши функция $y(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0, \qquad H_1 y(a) + H_2 y'(a) = 0.$$

Убедимся, что это действительно так. Для левого края отрезка по определению имеем

$$h_1 y(0) - h_2 y'(0) =$$

$$= h_1[C_1(0)v_1(0) + C_2(0)v_2(0)] -$$

$$- h_2[C_1(0)v_1'(0) + C_1'(0)v_1(0) +$$

$$+ C_2(0)v_2'(0) + C_2'(0)v_2(0)].$$

Произведя в правой части перегруппировку слагаемых, получим

$$h_1 y(0) - h_2 y'(0) =$$

$$= C_1(0)[h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0)] +$$

$$+ C_2(0)[h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0)] -$$

$$- h_2[C_1'(0) v_1(0) + C_2'(0) v_2(0)].$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль вследствие выбора функции $v_1(x)$, которая удовлетворяет исходному краевому условию в левой точке отрезка. Второе слагаемое обращается в нуль в силу условия $C_2(0) = 0$. Наконец, третье слагаемое обращается нуль в силу уравнения

$$C_1'(x)v_1(x) + C_2'(x)v_2(x) = 0,$$

которому функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ удовлетворяют по своему построению. Таким образом, имеем окончательно

$$h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0.$$

Аналогично показывается, что функция $y(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x)$ удовлетворяет и второму граничному условию на правом краю отрезка.

Вернемся к полученной выше системе равенств

$$C_1'(x) = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)W(0)}, \quad C_2'(x) = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)W(0)}.$$

Интегрируя их с учетом условий

$$C_1(a) = 0, \qquad C_2(0) = 0,$$

находим функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \int\limits_x^a v_2(\xi) f(\xi) d\xi,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \int\limits_0^x v_1(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Подставляя $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в исходную формулу, находим решением рассматриваемой краевой задачи

$$y(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)}\left[v_2(x)\int\limits_0^x v_1(\xi)f(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. +v_1(x)\int\limits_x^a v_2(\xi)f(\xi)d]\right]. \quad (11.7)$$

Этому равенству можно придать более компактный вид, если воспользоваться обозначением

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(\xi) \text{ при } 0 \le x \le \xi, \\ \\ v_2(x)v_1(\xi) \text{ при } \xi \le x \le a. \end{cases}$$

В этом случае полученная для решения $y(x)$ формула принимает вид

$$y(x) = \int_0^a G(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

Определение. *Функция двух переменных* $G(x, \xi)$, *определяемая равенством*

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(\xi) & \text{при } 0 \le x \le \xi, \\ \\ v_2(x)v_1(\xi) & \text{при } \xi \le x \le a, \end{cases}$$

называется функцией Грина краевой задачи

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x),$$

$$h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0, \qquad H_1 y(a) + H_2 y'(a) = 0.$$

Теорема (об интегральном представлении решения). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[0, a]$. Тогда решение краевой задачи*

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x),$$

$$h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0, \qquad H_1 y(a) + H_2 y'(a) = 0$$

существует, единственно и определяется с *помощью функции Грина по формуле*

$$y(x) = \int\limits_0^a G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Доказательство. Для непрерывной на отрезке функции $f(x)$ коэффициенты $C_1(x)$ и $C_2(x)$, полученные методом вариации постоянной, определены корректно: интегралы в соответствующих формулах заведомо существуют.

Но тогда и функция $y(x)$ определяется корректно. Выполнение же неоднородного уравнения и краевых условий на краях для функции $y(x)$ вытекает из ее построения. Единственность решения вытекает из начального предположения о тривиальности решения однородной краевой задачи. $\square$

Перечислим свойства функции Грина, вытекающие непосредственно из ее определения.

1). Функция Грина $G(x, \xi)$ симметрична:

$$G(x, \xi) = G(\xi, x), \qquad (x, \xi) \in [0, a] \times [0, a].$$

2). Функция Грина $G(x, \xi)$ непрерывна в квадрате $[0, a] \times [0, a]$.

3). Функция Грина $G(x, \xi)$ имеет непрерывные вторые производные всюду в верхнем треугольнике

$$\{(x,\xi) : 0 \le x \le \xi \le a\},$$

а также всюду в нижнем треугольнике

$$\{(x,\xi) : 0 \le \xi \le x \le a\}.$$

4). На диагонали $x = \xi$ квадрата $[0,a] \times [0,a]$ производная функции Грина $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}$ имеет разрыв, задаваемый равенством

$$\frac{\partial G(\xi+0,\xi)}{\partial x}-\frac{\partial G(\xi-0,\xi)}{\partial x}=-\frac{1}{p(\xi)}.$$

5). Вне диагонали $x=\xi$ функция Грина $G(x,\xi)$ является решением однородного уравнения:

$$l(G(x,\xi))=0 \quad \text{при} \quad x\neq\xi,\ (x,\xi)\in[0,a]\times[0,a].$$

6). Функция Грина $G(x,\xi)$ при фиксированном ξ из $[0,a]$ удовлетворяет по первому аргументу краевым условиям задачи:

$$h_1 G(0,\xi) - h_2 \frac{\partial G(0,\xi)}{\partial x} = 0,$$

$$H_1 G(a,\xi) + H_2 \frac{\partial G(a,\xi)}{\partial x} = 0.$$

3^0. С помощью функции Грина решение неоднородной задачи Штурма — Лиувилля сводится к интегральному уравнению.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на замкнутом отрезке* $[0, a]$. *Тогда решение краевой задачи*

$$\begin{cases} ly = \lambda y(x) + f(x), \\ \\ h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0, \\ \\ H_1 y(a) + H_2 y'(a) = 0, \end{cases} \qquad (\text{ВР})$$

является также решением следующего ин-

тегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^a G(x,\xi)y(\xi)d\xi + \int\limits_0^a G(x,\xi)f(\xi)d\xi. \quad (13.7)$$

Всякое непрерывное на замкнутом отрезке решение этого интегрального уравнения является также решением рассматриваемой краевой задачи.

Доказательство. Пусть функция $y(x)$ является решением краевой задачи (BP) и принадлежит классу

$$\mathcal{M} = \{y(x) : y(x) \in C^2((0,a)) \cap C^1([0,a]), \\ y''(x) \in L_2([0,a])\}.$$

Применяя теорему об интегральном представлении решения краевой задачи с заменой в интегральной формуле правой части

$f(x)$ на $\lambda y(x) + f(x)$, получаем равенство

$$y(x) = \int\limits_0^a G(x, \xi)[\lambda y(\xi) + f(\xi)]d\xi.$$

Это и означает, что функция $y(x)$ является решением интегрального уравнения (13.7).

Пусть теперь функция $\bar{y}(x)$ из пространства $C([0, a])$ является решением следующего интегрального уравнения:

$$\bar{y}(x) = \int\limits_0^a G(x,\xi)\Big[\lambda \bar{y}(\xi) + f(\xi)\Big] d\xi.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$ly = \lambda \bar{y}(x) + f(x),$$

$$h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0, \quad H_1 y(a) + H_2 y'(a) = 0.$$

Эта краевая задача имеет единственное решение $y(x)$ из класса $\mathcal{M}$, причем это решение представимо равенством

$$\boldsymbol{y(x) = \int\limits_0^a G(x,\xi)\Big[\lambda\bar{y}(\xi) + f(\xi)\Big]d\xi.}$$

Из этого равенства получаем $\boldsymbol{y(x) \equiv \bar{y}(x)}$. Таким образом, функция $\boldsymbol{\bar{y}(x)}$ является решением краевой задачи (BP) из класса $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. $\square$

Краевая задача (BP) в случае $\boldsymbol{f(x) \equiv 0}$ превращается в задачу Штурма — Лиувилля.

Следовательно, решения задачи Штурма — Лиувилля совпадают с собственными функциями интегрального оператора

$$\boldsymbol{Ay(x) = \int\limits_0^a G(x,\xi)y(\xi)d\xi}$$

с непрерывным и симметричным ядром — функцией Грина $\boldsymbol{G(x,\xi)}$.

4^{0}. Для собственных чисел и собственных функций задачи Штурма — Лиувилля справедливы следующие утверждения:

1. *Собственные значения неотрицательны.*

2. *Множество собственных чисел счётно.*

3. *Каждое собственное число — простое.*

4. Собственная функция $\mathbf{X}_m(x)$, отвечающая простому собственному числу $\boldsymbol{\lambda}_m$, определяется с точностью до произвольного постоянного сомножителя (ненулевого). Для обеспечения однозначности выбора собственной функции применяют условие нормировки:

$$\int\limits_0^a X_m^2(x)\,dx = 1.$$

5. Если собственные функции $X_m(x)$ и $X_l(x)$ соответствуют различным собственным значениям λ_m и λ_l, то они ортогональны:

$$\int_0^a X_m(x) X_l(x)\, dx = 0, \qquad \lambda_m \neq \lambda_l.$$

6. Для любой функции $f(x)$ из множества

$$\mathcal{M} = \{y(x) : y(x) \in C^2((0,a)) \cap C^1([0,a]), \\ y''(x) \in L_2([0,a])\}.$$

выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X_k(x),$$

где $X_k(x)$ — собственная функция задачи Штурма — Лиувилля, а коэффициенты разложения α_k вычисляются по формулам

$$\alpha_k = \int\limits_0^a f(x) X_k(x) dx.$$

Ряд, представляющий функцию $f(x)$, сходится на отрезке $[0, a]$ абсолютно и равномерно.

Тема : Представление решений обыкновенных дифференциальных уравнений рядами

$\mathbf{1^0}$. Определение голоморфной функции многих переменных. $\mathbf{2^0}$. Теорема существования и единственности голоморфного решения задачи Коши для неоднородной системы с голоморфными коэффициентами. $\mathbf{3^0}$. Примеры. $\mathbf{4^0}$. Решения в виде обобщенных степенных рядов для линейных дифференциальных уравнений второго полрядка. $\mathbf{5^0}$. Примеры.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n),\ i = \overline{1, n}, \qquad (4.1)$$

где функции f_i — голоморфные в окрестности точки

$$(t_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0).$$

Определение. *Функция* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *называ-ется* голоморфной *в окрестности точки*

$$(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

функцией, если она в этой окрестности пред-ставляется сходящимся степенным рядом

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n}(x_1 - x_1^0)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x_n - x_n^0)^{k_n},$$

где $|k| = k_0 + k_1 + \ldots + k_n$.

Голоморфная функция имеет частные производные любых порядков по всем переменным.

Задача Коши (4.1) с начальными условиями

$$y_i(t_0) = y_i^0, \quad i = \overline{1, n} \tag{4.2}$$

имеет единственное решение, голоморфное в окрестности точки $t = t_0$.

Теорема. *Пусть есть неоднородная система линейных уравнений*

$$\frac{dy_i}{dt} = f_{i0}(t)+f_{i1}(t)y_1(t)+f_{i2}(t)y_2(t)+\ldots+f_{in}(t)y_n(t), \tag{4.3}$$

причем ее коэффициенты $f_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$ *и компоненты* $f_{i0}(t)$, $i = 1, \ldots, n$, *ее правой части — это голоморфные в* $|t - t_0| < r$ *функции. Тогда существует единственное решение задачи (4.3), (4.2), также голоморфное во всей области* $|t - t_0| < r$.

Согласно этой теореме решение задачи Коши (4.3), (4.2) можно искать в виде степенного ряда

$$y_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{ik}(t-t_0)^k, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{4.4}$$

Заметим, что если ряд (4.4) сходится абсолютно и равномерно в любой замкнутой области $|t-t_0| \leq r_0 < r$, то его можно почленно дифференцировать любое число раз.

Пример. Решить задачу Коши

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \qquad (4.5)$$

Будем искать решение в виде ряда, опираясь на сформулированную выше теорему.

Линейное уравнение второго порядка (4.5) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y \end{cases} \qquad (4.6)$$

с начальными данными

$$\boldsymbol{y(0) = 1, \qquad z(0) = 0.} \tag{4.7}$$

Система (4.6) – линейная с голоморфной правой частью, и для задачи (4.6), (4.7) существует единственное решение, голоморфное на всей числовой прямой $|t| < \infty$.

Будем искать решение рассматриваемой задачи Коши в виде степенного ряда

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k.$$

После подстановки в дифференциальное уравнение найдем

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k t^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k = 0. \qquad (4.8)$$

Оба слагаемых в уравнения (4.8) — это степенные ряды. Известно, что если два степенных ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t-t_0)^n$$

сходятся в круге $|t-t_0| < R$ и в этом же круге выполняется равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t-t_0)^n,$$

то коэффициенты при одинаковых степенях рядов совпадают: $a_n = b_n,\ n = 0, 1, \ldots.$

Следовательно, из (4.8) имеем $2C_2 + C_0 = 0$, $6C_3 + C_1 = 0$, $\ldots$, $k(k-1)C_k + C_{k-2} = 0$.

Решая эту систему, получим

$$C_k = \frac{(-1)^n C_0}{(2n)!}, \quad \text{если} \quad k = 2n, \; n = 1, 2, \ldots$$

$$C_k = \frac{(-1)^n C_1}{(2n+1)!}, \quad \text{если} \quad k = 2n+1, \; n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$y(t) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

или, что то же самое:

$$y(t) = C_0 \cos t + C_1 \sin t.$$

Это формула общего решения. Начальные же данные задачи позволяют определить коэффициенты ряда (4.4):

$$y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k \Big|_{t=0} = C_0 = 1,$$

$$y'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} k C_k t^{k-1} \Big|_{t=0} = C_1 = 0.$$

Учитывая это, получим решение задачи (4.5) в виде равномерно сходящегося в области $|t| < \infty$ ряда

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 \ldots = \cos t.$$

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка в общем виде

$$y''(x) + p(x)y' + q(x) = 0. \qquad (4.9)$$

Пусть $x = x_0$ является *особой точкой* для уравнения (4.9). Это означает, что функции $p(x)$ и $q(x)$ в окрестности $x = x_0$ представимы в следующем виде:

$$p(x) = \frac{1}{x - x_0}\tilde{p}(x), \qquad q(x) = \frac{1}{(x - x_0)^2}\tilde{q}(x). \quad (4.10)$$

Здесь $\tilde{p}(x)$ и $\tilde{q}(x)$ — голоморфные функции в окрестности точки x_0:

$$\tilde{p}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$
$$\tilde{q}(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots. \quad (4.11)$$

Пусть условие (4.10) выполнено в окрестности точки $x = x_0$, тогда заменив $x - x_0$ на x, получим (4.10) в окрестности начала $x_0 = 0$.

Будем искать решение уравнения (4.9) в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = x^{\rho}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ...) = \\ = x^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \qquad \rho \neq 0, 1, \ldots. \quad (4.12)$$

Ряд (4.12) предполагается сходящимся в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$, причем первый коэффициент $C_0 \neq 0$.

Подставляя равенства (4.10)-(4.12) в уравнение (4.9), получаем тождество.

Приравнивая нулю коэффициенты при последовательно возрастающих степенях x в этом тождестве, получим последовательные уравнения для нахождения чисел ρ и C_i, $i = 0, 1, \dots$. Для младшей степени x, равной ρ, из тождества имеем уравнение

$$[\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0]C_0 = 0.$$

По условию $C_0 \neq 0$. Поэтому для выполнения последнего равенства необходимо, чтобы степень ρ удовлетворяла следующему уравнению, которое называют определяющим:

$$d(\rho) \equiv \rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0. \tag{4.13}$$

Относительно переменной ρ это квадратное уравнение. У него может быть только два действительных корня.

Возьмем в (4.12) $\rho = \widetilde{\rho}$, где $\widetilde{\rho}$ — корень уравнения (4.13), а в качестве C_0 можно взять любое число, поскольку для любого решения $y(x)$ уравнения (4.9) всякая функция вида $Cy(x)$ — это снова решение этого же уравнения.

Последовательно приравнивая нулю коэффициенты при степенях $x^{\widetilde{\rho}+n}$, $n = 1, 2, \ldots$, в получившемся после подстановки тождестве, получим последовательность уравнений следующего вида:

$$C_n d(\widetilde{\rho}+n)+P_{n-1}=0. \qquad (4.14)$$

Здесь P_{n-1} обозначает некоторый многочлен от совокупности коэффициентов $C_1, \cdots, C_{n-1}$, $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_0,\ \cdots,\ b_n$.

Коэффициент $d(\widetilde{\rho}+n)$ при C_n может оказаться равным нулю только в том случае, если корни определяющего уравнения отличаются друг от друга на целое число.

Например, если $\rho_1 = \rho_2 + m$, то в качестве коэффициента при C_m в уравнении (4.14) получим величину

$$d(\rho_2 + m) = d(\rho_1) = 0.$$

Однако в этом случае $d(\rho_1 + n) \neq 0$ для всех n.

Таким образом, для каждого корня ρ определяющего уравнения (4.13) при условии, что $\rho_1 \neq \rho_2+m$, где m — целое положительное число или нуль, получаем два разных ряда, имеющих вид

$$y(x) = x^{\rho}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ...).$$

В случае, если эти ряды сходятся, они определят два линейно независимых решения уравнения (4.9). Таким образом, построена фундаментальная система решений исходного уравнения (4.9) с особой точкой.

Пусть теперь определяющее уравнение имеет кратный корень

$$\rho_1 = \rho_2 = r.$$

В этом случае невозможно получить два различных решения вида

$$y_1(x) = x^r(1 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots),$$
$$(4.15)$$
$$y_2(x) = x^r(1 + C_1' x + C_2' x^2 + \dots),$$

где не все C_k равны C_k'. Если функции (4.15) – это решения уравнения (4.8), то решением этого же уравнения является и их разность

$$y_1 + y_2 = x^{r'}(h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots),$$

где $r' = r + k$ (k — целое положительное число) и $h_0 \neq 0$. Но это означает, что определяющее уравнение кроме корня r должно также иметь другой корень r', что невозможно.

Таким образом, если уравнение

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0.$$

имеет один корень кратности два, то исходное дифференциальное уравнение

$$y''(x) + p(x)y' + q(x) = 0$$

может иметь только одно решение вида

$$y_1(x) = x^r(1 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots).$$

В случае, когда корни определяющего уравнения связаны соотношением $\rho_1 = \rho_2 + m$, где

m — целое число или ноль, найдется только одно решение в виде обобщенного степенногот ряда. Второе решение, дающее в объединении с первым фундаментальную систему для однородного уравнения

$$x^2 y'' + x\widetilde{p}(x)y' + \widetilde{q}(x) = 0, \qquad (4.16)$$

следует искать в виде

$$y_2(x) = y_1(x)z(x). \qquad (4.17)$$

Подставляя (4.17) в (4.16), получим

$$x^2(y_1''z+2y_1'z'+y_1z'')+\widetilde{p}(x)x(y_1'z+y_1z')+\widetilde{q}(x)y_1z = 0,$$

или, производя перегруппировку слагаемых,

$$(x^2y_1'' + x\widetilde{p}(x)y_1' + \widetilde{q}(x)y_1)z+ \\ + x^2y_1z'' + 2(y_1'x^2 + \widetilde{p}(x)xy_1)z' = 0,$$

Учитывая, что y_1 — это решение (4.16), получаем уравнение для z:

$$x^2y_1z'' + 2(y_1'x^2 + \widetilde{p}(x)xy_1)z' = 0. \qquad (4.18)$$

Умножая (4.18) на $y_1(x)$ и разделяя перемен-
ные, получаем

$$\frac{1}{y_1^2 z'} d(y_1^2 z') = -\frac{\widetilde{p}(x)}{x} dx,$$

или

$$y_1^2 z'(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\widetilde{p}(\xi)}{\xi} d\xi}, \qquad C = const.$$

Выбирая $C = 1$ и еще раз интегрируя, по-
лучим второе линейно независимое с $y_1(x)$

решение уравнения (4.16):

$$y_2(x) = y_1(x) \int_\xi^x \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int_\xi^t \frac{\widetilde{p}(\tau)}{\tau} d\tau} dt. \qquad (4.19)$$

Здесь ξ — любая точка окрестности нуля. Выясним, как ведет себя решение $y_2(x)$ при стремлении x к нулю.

Пусть ρ_1 и $\rho_2 = \rho_1 - m$ — это корни определяющего уравнения. Тогда

$$\rho_1 + \rho_2 = -(a_0 - 1).$$

Следовательно, $2\rho_1 + a_0 = m + 1$ есть целое положительное число.

Из (4.19), учитывая, что $\widetilde{p}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$, получим

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{\xi}^{x} \frac{dt}{y_1^2(t)} e^{-\int_{\xi}^{t} \frac{\widetilde{p}(\tau)}{\tau} d\tau} =$$

$$= y_1(x) \int_{x_0}^{x} t^{-(2\rho_1 + a_0)} \frac{\varphi(t)}{\left[1 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots\right]^2} dt.$$

Поскольку $\varphi(x)$ — голоморфная функция, она представима в виде ряда (4.11) с коэффициентами g_i. Тогда

$$y_2(x) = y_1(x)\int_\xi^x \Big(\frac{g_0}{t^{m+1}} + \frac{g_1}{t^m} + \ldots + \frac{g_m}{t} +$$

$$+ g_{m+1} + g_{m+2}t + \ldots\Big)\, dt =$$

$$= y_1(x)(\ln|x| g_m + \chi(x)).$$

Таким образом, в случае, когда корни определяющего уравнения различаются на целое число, $y_2(x)$ имеет логарифмическую особенность в точке $x = 0$, если $g_m \neq 0$. Функция $\chi(x)$ голоморфна в окрестности $x = 0$, если $m = 0$, и имеет вид

$$\chi(x) = \frac{1}{x^m}\widetilde{\chi}(x)$$

при $m \neq 0$. Здесь $\widetilde{\chi}(x)$ — голоморфная функция в окрестности нуля.

Итак, мы нашли два линейно независимых решения уравнения (4.16) $y_1(x)$ и $y_2(x)$, образующих фундаментальную систему.

Пример. Найти решение уравнения

$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$

Решение. В окрестности точки $x = 0$ имеем

$$p(x) = \frac{2}{x}, \quad a_0 = 2, \; q(x) = 1, \quad b_0 = 0.$$

Ищем решение в виде

$$y(x) = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k.$$

Выпишем определяющее уравнение:

$$d(\rho) = \rho(\rho - 1) + 2\rho + 0 = 0,$$

$$\rho^2 + \rho = 0, \qquad \rho = 0, \qquad \rho = -1.$$

Следовательно, решение возможно найти в

виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k.$$

Имеем

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k C_k x^{k-1}, \; y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) C_k x^{k-2}.$$

Подставим y, y' и y'' в исходное уравнение, записанное в следующем виде:

$$x^2 y'' + 2xy' + x^2 y = 0.$$

Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k k(k-1)x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} C_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+2} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем систему для определения коэффициентов

$$2 \cdot C_1 = 0,$$

$$2 \cdot C_2 + 4 \cdot C_2 + C_0 = 0,$$

$$3 \cdot 2 \cdot C_3 + 2 \cdot 3 \cdot C_3 + C_1 = 0,$$

$$4 \cdot 3 \cdot C_4 + 2 \cdot 4 \cdot C_4 + C_2 = 0,$$

$$5 \cdot 4 \cdot C_5 + 2 \cdot 5 \cdot C_5 + C_3 = 0,$$

$$\ldots$$

Следовательно, все коэффициенты с нечетными номерами равны нулю. Для четных номеров имеем формулу

$$C_2 = -\frac{C_0}{6} = \frac{-C_0}{3!}, \qquad C_4 = -\frac{C_0}{6 \cdot 20} = \frac{C_0}{5!}.$$

Следовательно, ряд имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k C_0}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

Проверим, сходится ли этот ряд в окрестности точки $x = 0$.

Используем признак Даламбера:

если $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, то $\sum |a_n|$ сходится.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^{n+1}C_0x^{2(n+1)}|(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!|(1)^nC_0x^{2n}|}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}<1$$

для всех x. Следовательно, одно решение получили:

$$y_1(x)=C_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k}=C_0(1-\frac{x^2}{3!}+\ \dots). \tag{4.20}$$

Пусть $C_0 = 1$. Тогда полученное частное решение имеет вид

$$y_1(x) = \frac{1}{x}\sin x.$$

В рассматриваемом случае $\rho_1 = \rho_2 + 1$, то есть ρ_1 отличается от ρ_2 на целое число. Для определения второй функции фундаментальной системы воспользуемся полученной выше формулой

$$y_2(x) = y_1(x)\int_\xi^x \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int_\xi^t \frac{\widetilde{p}(\tau)}{\tau} d\tau} dt.$$

Согласно формуле Остроградского — Лиувилля для однородного уравнения второго порядка

$$y''(x) + a(x)y' + b(x)y = 0$$

имеем

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}. \qquad (4.21)$$

Здесь C — это начальное значение определителя Вронского, при $x = x_0$. Пусть функция

$y_2(x)$ неизвестна , а $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ — найденное решение. Раскрывая определитель в (4.21), получим

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{\int -\frac{2}{x} dx} = Cx^{-2}.$$

Разделив правую и левую часть на y_1^2, получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = C\frac{x^2}{x^2 \sin^2 x}.$$

Интегрируя и полагая $C = -1$, получим

$$\frac{y_2}{y_1} = -\int \frac{1}{\sin x^2}dx = \frac{\cos x}{\sin x} + C_1.$$

Взяв здесь $C_1 = 0$, найдем

$$y_2 = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{x}.$$

Таким образом, фундаментальную систему для рассматриваемого линейного уравнения образуют функции

$$\frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad \frac{\cos x}{x}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

Иначе говоря, решением уравнения является линейная комбинация двух рядов

$$y(x) = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} + \\ + C_2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \dots \right).$$

Тема : Функции Бесселя и другие специальные функции

1$^{\mathbf{0}}$. О свойствах гамма-функции. **2**$^{\mathbf{0}}$. Уравнение Бесселя и функции Бесселя. **3**$^{\mathbf{0}}$. Краевая задача для уравнения Бесселя. **4**$^{\mathbf{0}}$. Другие цилиндрические функции. **5**$^{\mathbf{0}}$. Уравнение Гаусса. **6**$^{\mathbf{0}}$. Уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра. Присоединенные функции Лежандра.

1^0. Гамма-функция $\Gamma(s)$ определяется равенством

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx. \qquad (1.8)$$

Нетрудно проверить, что интеграл, стоящий в правой части этого равенства, сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leq 0$. Простейшими свойствами гамма-функции являются следующие

1) $\Gamma(s) > 0$;

2) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$;

3) $\Gamma(n+1) = n!$ для натуральных чисел n.

Второе из приведенных свойств позволяет определить гамма-функцию для отрицательных значений s. Именно, для чисел s из интервала $(-1,0)$ положим

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}. \tag{2.8}$$

Далее, для чисел s из интервала $(-n,-(n-1))$, $n\in N$, $\Gamma(s)$ определим так

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+n-1)}. \tag{3.8}$$

Заметим, что из формул (2.8) и (3.8) следует что гамма-функция положительна, если

$s \in (-n, -(n-1))$ и число n - четное, и гамма-функция отрицательна, если $s \in (-n, -(n-1))$ и число n — нечетное.

Формулы (2.8) и (3.8) определяют значение гамма-функции для нецелых отрицательных значений s. Для $s = 0$ имеем

$$\Gamma(-0) = \lim_{s \to -0} \frac{\Gamma(s+1)}{s} = -\infty,$$

$$\Gamma(+0) = \lim_{s \to +0} \frac{\Gamma(s+1)}{s} = +\infty.$$

В формуле (3.8) положим $s = -n + t$, $0 < t < 1$.

Получим равенство

$$\Gamma(-n+t) = (-1)^n \frac{\Gamma(t)}{(1-t)(2-t) \cdot \ldots \cdot (n-t)}.$$

Отсюда вытекают соотношения

$$\Gamma(-n+0) = (-1)^n \lim_{t \to +0} \frac{\Gamma(t)}{(1-t) \cdot \ldots \cdot (n-t)} = \pm\infty, \tag{4.8}$$

$$\boldsymbol{\Gamma(-n-0) = \lim_{t\to 1-0} \Gamma(-(n+1)+t) =}$$

$$\boldsymbol{= (-1)^{n+1} \lim_{t\to 1-0} \frac{\Gamma(t)}{(1-t)\cdot\ldots\cdot(n+1-t)} = \mp\infty.} \tag{5.8}$$

В формуле (4.8) подразумевается, что значение $\boldsymbol{\Gamma(-n+0)}$ принимается равным $+\infty$, если число $\boldsymbol{n}$ четное, и $-\infty$, если число $\boldsymbol{n}$ нечетное, и соответственно в формуле (5.8) значение $\boldsymbol{\Gamma(-n-0)}$ есть $-\infty$, если $\boldsymbol{n}$ четное, и $+\infty$, если $\boldsymbol{n}$ нечетное.

Итак, гамма-функцию $\Gamma(s)$ *определяемую эйлеровым интегралом (1.8) сходящимся при* $s > 0$, *можно доопределить для нецелых отрицательных значений* s *с помощью формул (2.8) и (3.8). В целых же неположительных точках* s *поведение гамма-функции определяется формулами (4.8) и (5.8).*

Для продолженной гамма-функции на всей ее области определения сохраняется свойство 2.

Приведем без доказательства некоторые дополнительные свойства гамма-функции.

4) *на всей области определения гамма-функции выполняется равенство*

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^s}{1 + \frac{s}{n}}$$

(представление гамма-функции в виде бесконечного произведения);

5) *на всей области определения гамма-функции выполняется равенство*

$$\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

(формула дополнения);

6) *на всей области определения гамма-функции выполняется равенство (теорема умножения)*

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma(s+\frac{n-1}{n})=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-ns}\Gamma(ns).$$

Здесь n — натуральное.

7) *при* $s \geq 0$ *выполняется соотношение*

$$\Gamma(s+1) = s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}(1+\varepsilon_s),$$

где для величины ε_s *имеет место равенство*

$$\lim_{s\to+\infty} \varepsilon_s = 0$$

(формула Стирлинга).

2^0. Линейное дифференциальные уравнение второго порядка

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \qquad \text{(B)}$$

называется *уравнением Бесселя*. Здесь ν — заданный числовой параметр.

Всякое решение уравнения Бесселя, не равное тождественно нулю, называется *цилиндрической функцией*. Это объясняет второе его название — *уравнение цилиндрических функций*.

Для того чтобы найти общее решение уравнения (B), рассмотрим следующую функцию

$$\boldsymbol{\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu + k + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}.$$

Ряд в правой части этого равенства сходится по признаку Даламбера на положительной части вещественной прямой.

Производя дифференцирование ряда, получаем всюду на области определения функции $\Phi(x)$ следующие равенства:

$$x^2\Phi''(x) + x\Phi'(x) - \nu^2\Phi(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[(2k+\nu)(2k+\nu-1)+2k+\nu-\nu^2]}{\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} =$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k)\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} =$$

$$-x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} = -x^2\Phi(x).$$

Таким образом, мы проверили, что задаваемая обобщенным степенным рядом функция $\Phi(x)$ является решением уравнения Бесселя.

Пусть $\nu > 0$. Для функции $\Phi(x)$ в этом случае имеется стандартное обозначение $J_\nu(x)$.

Иными словами, для $\nu > 0$ имеет место равенство

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

Ряд в правой части сходится по признаку Даламбера.

Определение. *Функция $J_\nu(x)$, где $\nu > 0$, называется бесселевой функцией первого рода и порядка ν.*

Пусть теперь $\nu > 0$ и ν не является целым числом. Тогда определен следующий ряд

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-\nu + k + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}.$$

Определение. *Функция $J_{-\nu}(x)$ называется бесселевой функцией первого рода и отрицательного порядка $-\nu$.*

Эти две функции линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя. Таким образом, в случае нецелого положительного ν общее решение уравнения Бесселя (B) имеет вид

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Для целых $\nu = n$ функция $J_{-\nu}(x)$ определяется равенством

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x), \qquad \nu = n.$$

Таким образом, функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ при натуральных n линейно зависимы.

Для бесселевых функций имеет место следующее рекуррентное соотношение

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

При дифференцировании бесселевых функций удобно пользоваться следующими формулами

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x),$$
$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x).$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}},$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x).$$

3^0.

Задача. *Найти те значения λ, при которых дифференциальное уравнение*

$$-(xy')' + \frac{\nu^2}{x}y = \lambda xy, \tag{6.8}$$

имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие следующим краевым условиям:

$$\begin{cases} y(x) = O(x^\gamma) \quad \text{при} \quad x \to +0, \\ \alpha y(1) + \beta y'(1) = 0. \end{cases} \tag{7.8}$$

Здесь степень γ *равна единице при* $\nu \geqslant 1$ *равна* ν *при* $0 \leqslant \nu < 1$; α *и* β *заданные неотрицательные числа, одновременно не равные нулю.*

Всюду далее предполагается, что

$$\nu > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0. \qquad (8.8)$$

Левая часть уравнения (6.8) вместе с краевыми условиями (7.8) определяют некоторый оператор, который обозначим через L_ν.

Область определения $\mathcal{M}_\nu$ оператора L_ν задается равенством

$$\mathcal{M} = \{y(x) : y(x) \in C^2((0,1]),$$
$$y(x) = O(x^\gamma), \qquad \alpha y(1) + \beta y'(1) = 0,$$
$$x^{-\frac{1}{2}}[-(xy')' + \frac{\nu^2}{x} y] \in L_2[0,1]\}.$$

Определение. *Пространство $L_{2,x}([0,1])$ совпадает с множеством функций $f(x)$, для которых интеграл $\int\limits_0^1 x f^2(x) dx$ конечен.*

Пространство $L_{2,x}([0,1])$ гильбертово со скалярным произведением

$$(f,g)_{L_{2,x}([0,1])} = \int\limits_0^1 xf(x)g(x)dx.$$

1. *Все собственные значения краевой задачи (6.8), (7.8) — положительные и простые.*

2. *Краевая задача (6.8), (7.8) имеет счётное*

множество собственных чисел $\{\lambda_n^{(\nu)}\}$; *соответствующие им собственные функции образуют ортогональную систему в пространстве* $L_{2,x}([0,1])$.

Пусть λ — собственное значение рассматриваемой сингулярной задачи на собственные значения. Дифференциальное уравнение задачи перепишем в виде

$$x^2y'' + y' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0. \qquad (\mathrm{B}_\lambda)$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что функции

$$J_\nu(\sqrt{\lambda}x) \quad \text{и} \quad J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}x)$$

являются решениями рассматриваемого уравнения. Эти функции линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения (B_λ) имеет вид

$$y(x) = C_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + C_2 J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}x).$$

Из краевого условия в нуле и полученного представления бесселевых функций в виде рядов заключаем, что коэффициент C_2 должен обращаться в нуль. Таким образом, собственные функции рассматриваемой краевой задачи — это функции Бесселя $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$. Собственные значения задачи определяются из краевого условия в единице:

$$\alpha J_\nu(\sqrt{\lambda}) + \beta J'_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0. \qquad (9.8)$$

Теорема (о разложении). *Пусть функция $f(x)$ принадлежит множеству $\mathcal{M}_\nu$. Тогда имеет место равенство*

$$\sqrt{x} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(\nu)} \sqrt{x} J_\nu \left(\mu_k^{(\nu)} x \right),$$

где $\mu_k^{(\nu)} = \sqrt{\lambda_k^{(\nu)}}$, а коэффициенты

$$c_k^{(\nu)} = \frac{\left(f(x), J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) \right)_{L_{2,x}[0,1]}}{||J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)||_{L_{2,x}[0,1]}}.$$

Здесь $\lambda_k^{(\nu)}$ *— собственные числа рассматриваемой сингулярной задачи на собственные числа, то есть положительные корни уравнения*

$$\alpha J_\nu(\sqrt{\lambda}) + \beta J'_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

4^0. Наряду с функциями Бесселя в приложениях распространены другие цилиндрические функции.

Определение. *Для нецелого значения* ν *функция Неймана определяются соотношением*

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi\nu}\Big[J_\nu(x)\cos \pi x - J_{-\nu}(x)\Big].$$

Если же $\nu = n$ *— целое число, то функция Неймана* $N_n(x)$ *задается соотношением*

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}.$$

Функция Неймана $N_\nu(x)$ при любых ν (целых или нецелых) представляет собой линейно независимое с функцией $J_\nu(x)$ решение уравнения Бесселя.

Следовательно, общее решение уравнения Бесселя можно записать в следующем виде

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x).$$

С помощью функций Бесселя и Неймана определим функции Ханкеля первого и второго рода соответственно:

$$\boldsymbol{H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x),}$$

$$\boldsymbol{H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x).}$$

Функции Бесселя, Неймана и Ханкеля относятся к классу цилиндрических специальных функций.

5^0. Рассмотрим еще одно важное для приложений дифференциальное уравнение.

Определение. *Линейное дифференциальное уравнение вида*

$$\boldsymbol{x(x-1)y'' + [(\alpha+\beta+1)x-\gamma]y' + \alpha\beta y = 0,} \quad (10.8)$$

называется гипергеометрическим уравнением, или уравнением Гаусса. Здесь α, β, γ — это заданные числа.

Решение этого уравнения можно представить в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{\rho+k}, \qquad A_0 \neq 0.$$

Числа A_k находят, подставляя предполагаемое решение в уравнение (10.8) и приравнивая к нулю коэффициенты при всех последовательных степенях x.

В частности, из равенства нулю коэффициента при $x^{\rho-1}$ получается определяющее уравнение

$$A_0\rho(\rho-1)+\gamma A_0\rho=0.$$

Учитывая, что $A_0\neq 0$, получаем квадратное уравнение относительно ρ, имеющее два вещественных корня

$$\rho_1=0,\qquad \rho_2=1-\gamma.$$

Частные решения уравнения Гаусса, соответствующие корням ρ_1 и ρ_2, обозначим как $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Полагая $A_0 = 1$, получаем для коэффициентов A_k в разложении функции $y_1(x)$ следующие рекуррентные соотношения

$$A_{k+1} = \frac{(\alpha + k)(\beta + k)}{(k+1)(\gamma + k)} A_k, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Учитывая эти равенства, получаем далее

$$A_k = \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k}, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Через $(\cdot)_k$ здесь обозначено произведение, известное как *символ Похгаммера*:

$$(\alpha)_j = \alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + j - 1),$$

$$(\beta)_j = \beta(\beta + 1) \ldots (\beta + j - 1),$$

$$(\gamma)_j = \gamma(\gamma + 1) \ldots (\gamma + j - 1).$$

Пусть параметр γ *не является целым отрицательным числом*. Тогда пространство ограниченных на $0 \leqslant x \leqslant 1$ решений уравнения Гаусса одномерно. Базис в этом пространстве состоит из единственного нетривиального решения. В качестве такового годится следующая функция

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!(\gamma)_k} x^k. \tag{11.8}$$

Ряд, стоящий в правой части (11.8), называется *гипергеометрическим*.

В силу признака Даламбера ряд (11.8) сходится при $|x| < 1$. Более того, на любом отрезке $[a, b]$ таком, что $-1 < a < b < 1$ этот ряд можно почленно дифференцировать любое число раз.

Определение. *Сумма гипергеометрического ряда, представляющая первое частное решение уравнения Гаусса, обозначается через* $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ *и называется гипергеометрической функцией.*

Еще одно решение $y_2(x)$ уравнения (10.8) будем искать в виде

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} u(x).$$

Пересчитывая $y_2'(x)$ и $y_2''(x)$ через функцию $u(x)$, получаем, что $u(x)$ должна решать гипергеометрическое уравнение с параметрами

$$\alpha + 1 - \gamma, \qquad \beta + 1 - \gamma, \qquad 2 - \gamma.$$

Следовательно, функция $y_2(x)$ будет иметь вид

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x).$$

При этом $2-\gamma$ не должно быть целым неположительным числом.

Построенные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Следовательно, общее решение гипергеометрического уравнения (10.8) на интервале $(-1,1)$ можно записать в виде их линейной комбинации

$$C_1 F(\alpha,\beta,\gamma;x)+C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma;x)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Многие функции, как элементарные, так и специальные, могут быть получены из гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ при подходящих значениях параметров α, β, γ. В частности, имеют место равенства

$$F(-n, \beta, \beta; -x) = F(-n, 1, 1; -x) = (1 + x)^n,$$

$$F(-n, \beta, \beta, 1 - x) = F(-n, 1, 1; 1 - x) = x^n,$$

$$F(1,1,2;,-x)=\frac{1}{x}\ln(1+x),$$

$$\lim_{n\to\infty}F\left(1,n,1,\frac{x}{n}\right)=e^{x},$$

$$\lim_{\alpha,\beta\to\infty}F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};-\frac{x^{2}}{4\alpha\beta}\right)=\cos x,$$

$$\lim_{\alpha,\beta\to\infty}F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2};\frac{x^{2}}{4\alpha\beta}\right)=\operatorname{ch}x.$$

Через гипергеометрическую функцию можно выразить также бесселевы функции:

$$J_{\nu}(x) = \lim_{\alpha,\beta\to\infty}\left[\frac{(\frac{x}{2})^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}F\left(\alpha,\beta,\nu+1;-\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)\right]$$

$$J_{-\nu}(x) = \lim_{\alpha,\beta\to\infty}\left[\frac{(\frac{x}{2})^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}F\left(\alpha,\beta,-\nu+1;-\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)\right].$$

6^0. Часто в приложениях возникает еще одно дифференциальное уравнение, которое мы сейчас рассмотрим.

Определение. *Линейное дифференциальное уравнение вида*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \qquad (12.8)$$

называется уравнением Лежандра.

Теорема (об ограниченных решениях уравнения Лежандра). *При любом неотрицательном целом k существует единственное решение следующей задачи*

$$\begin{cases} \Big((1-t^2)y'(t)\Big)' + k(k+1)y(t) = 0, \qquad |t| < 1, \\ \\ \|y(t) \mid C^{(1)}[-1,1]\| < +\infty, \qquad y(+1) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

По переменной t *это решение — полиномом степени* k.

Доказательство. Пусть сначала $k = 0$. Уравнение в этом случае имеет вид

$$\Big((1 - t^2)y'(t)\Big)' = 0$$

и его общее решение задается формулой

$$y(t) = \frac{C_1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} + C_2.$$

Функция $y(t)$ подобного вида может быть ограничена на отрезке $[-1, 1]$ лишь в случае, когда $C_1 = 0$. При этом $y(t)$ тождественно постоянна и условие $y(+1) = 1$ удовлетворяется лишь для тождественно единичной функции. Тем самым решение рассматриваемой задачи единственно и обязано быть тождественно единичной функцией, т.е. полиномом нулевой степени. В существовании решения легко убедиться, рассмотрев полином $P_0(t) \equiv 1$.

Далее, пусть $k \geqslant 1$, а $y(t)$ — решение уравнения Лежандра, $y(t) \in C^{(1)}[-1,1]$. Из уравнения заключаем, что

$$y(t) = -\frac{1}{k(k+1)}\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dy}{dt}(t)\right), \qquad |t| < 1.$$

Проинтегрировав это равенство по отрезку $(-1,\tau)$, где $\tau < 1$, получим

$$\int\limits_{-1}^{\tau} y(t)\,dt = -\frac{1}{k(k+1)}\int\limits_{-1}^{\tau} \frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dy}{dt}(t)\right)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{k(k+1)}(1-t^2)\frac{dy}{dt}(t)\Big|_{t=-1}^{t=\tau} = -\frac{(1-\tau^2)}{k(k+1)}y'(\tau).$$

Последнее равенство справедливо в силу условия, что производная $y'(t)$ имеет конечный предел при $t \to -1$. Таким образом, получаем равенство

$$y'(\tau) = -\frac{k(k+1)}{1-\tau^2}\int\limits_{-1}^{\tau} y(t)\,dt.$$

Из этого соотношения следует, в частности, что $y(t)$ принадлежит $C^{(\infty)}(-1,1)$, т.е. внутри интервала $(-1,+1)$ функция $y(t)$ имеет производные всех порядков. Обозначим их через $v_m(t) = y^{(m)}(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Продифференцировав m раз уравнение Лежандра, получим

$$\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\left((1-t^2)\frac{dy}{dt}(t)\right) + k(k+1)\frac{d^m y}{dt^m}(t) = 0.$$

Применив для вычисления первого слагаемого в левой части этого равенства формулу

Лейбница, придем к соотношению

$$(1-t^2)v''_m - 2(m+1)tv'_m - m(m+1)v_m +$$

$$+k(k+1)v_m = 0. \qquad (5)$$

Домножив обе части полученного уравнения на $(1-t^2)^m$ и введя обозначение

$$\mu_m^k = k(k+1) - m(m+1),$$

получим

$$\Big((1-t^2)^{m+1}v'_m(t)\Big)' + \mu_m^k(1-t^2)^m v_m(t) = 0. \qquad (6)$$

Учитывая, что $\mu_k^k = 0$, как это следует из определения μ_m^k, и полагая в (6) $m = k$, получаем

$$\Big((1-t^2)^{k+1}v_k'(t)\Big)' = 0.$$

Вспоминая, что $v_k(t) = y^{(k)}(t)$, имеем из полученного равенства:

$$y^{(k+1)}(t) = \frac{C_0}{(1-t^2)^{k+1}}, \qquad (7)$$

где C_0 — некоторая постоянная.

Уравнение $y^{(k+1)}(t) = f(t)$ с непрерывной в окрестности нуля правой частью $f(t)$, как хорошо известно, имеет общим решением функцию вида

$$y(t) = \frac{1}{k!} \int_0^t (t-\tau)^k f(\tau)\, d\tau + R_k(t),$$

где $R_k(t)$ — полином степени k. В применении к уравнению (7) эта формула дает следующее равенство

$$y(t) = \frac{C_0}{k!} \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^k}{(1-\tau^2)^{k+1}}\, d\tau + R_k(t). \qquad (8)$$

Найдем предел интеграла в правой части (8) при стремлении t к единице слева. Заметим, что при $0 < t < 1$ имеют место соотношения

$$\int\limits_0^t \frac{(1-\tau)^k}{(1-\tau^2)^{k+1}}\,d\tau = \int\limits_0^t \frac{1}{(1+\tau)^{k+1}}\frac{1}{1-\tau}\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2^{k+1}}\int\limits_0^t \frac{1}{1-\tau}\,d\tau = -\frac{1}{2^{k+1}}\ln(1-t).$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to 1-0}\int\limits_0^t \frac{(1-\tau)^k}{(1-\tau^2)^{k+1}}\,d\tau = +\infty.$$

Следовательно, интеграл в (8) при стремлении t к единице слева неограниченно возрастает:

$$\lim_{t\to 1-0}\int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^k}{(1-\tau^2)^{k+1}}\,d\tau =$$

$$\lim_{t\to 1-0}\int\limits_0^t \frac{(1-\tau)^k}{(1-\tau^2)^{k+1}}\,d\tau = +\infty.$$

Для обоснования последних двух равенств

удобно использовать получаемое из формулы бинома Ньютона разложение:

$$(t-\tau)^k - (1-\tau)^k = \sum_{j=1}^{k} C_k^j (t-1)^j (1-\tau)^{k-j}.$$

Таким образом, задаваемая равенством (8) функция $y(t)$ будет ограничена на отрезке $[-1,1]$ лишь при $C_0 = 0$ и в этом случае имеет место равенство $y(t) = R_k(t)$. Следовательно,

$y(t)$ действительно является полиномом степени k.

Уточним вид полинома $R_k(t)$. С этой целью установим при $j = 1, 2, \ldots k$ следующие соотношения

$$y(t) = \frac{(-1)^j}{\mu_0^k \mu_1^k \ldots \mu_{j-1}^k} \frac{d^j}{dt^j} \left[(1 - t^2)^j v_j \right], \qquad (9)$$

где $v_j(t) = d^j y / dt^j$ и $\mu_i^k = k(k+1) - i(i+1)$.

При $j = 1$ соотношение (9) совпадает с исходным уравнением Лежандра, т.е. заведомо справедливо. Предположив выполнение (9) при некотором $j < k$, воспользуемся при $m = j$ установленным ранее тождеством (6), т.е. равенством

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)^{j+1}\frac{dv_j}{dt}(t)\right) + \mu_j^k(1-t^2)^j v_j(t) = 0.$$

Перепишем его в эквивалентном виде

$$v_j(t) = -\frac{1}{\mu_j^k}\frac{1}{(1-t^2)^j}\frac{d}{dt}\left((1-t^2)^{j+1}v_{j+1}(t)\right).$$

Подставляя это соотношение в (9), находим для $y(t)$ следующее представление

$$\frac{(-1)^{j+1}}{\mu_0^k \ldots \mu_j^k} \frac{d^j}{dt^j} \left[\frac{(1-t^2)^j}{(1-t^2)^j} \frac{d}{dt} \left((1-t^2)^{j+1} v_{j+1} \right) \right],$$

или

$$y(t) = \frac{(-1)^{j+1}}{\mu_0^k \mu_1^k \ldots \mu_j^k} \frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} \left[(1-t^2)^{j+1} v_{j+1} \right],$$

т.е. то же самое равенство (9), но уже для номера $j+1$. По индукции заключаем, что равенство (9) справедливо для всех допустимых значений j.

Заметим теперь, что

$$v_k(t) = d^k y/dt^k = d^k R_k/dt^k \equiv \mathrm{const}.$$

Последнее равенство справедливо в силу условия, что $R_k(t)$ — это полином степени k. Учитывая постоянство функции $v_k(t)$, возьмем в (9) $j = k$. Тогда получим

$$y(t) = B_k \frac{d^k}{dt^k}\left[(1 - t^2)^k\right],$$

где B_k — некоторая константа. Выясним, каким должно быть значение B_k, чтобы выполнялось условие $y(+1) = 1$.

Имеем, пользуясь формулой Лейбница:

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[(1-t^2)^k\right] = \frac{d^k}{dt^k}\left[(1-t)^k(1+t)^k\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{d^j}{dt^j}\left[(1-t)^k\right]\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\left[(1+t)^k\right].$$

При $t = +1$ в правой части полученного равенства остается в точности одно слагаемое, соответствующее индексу $j = k$, т.е.

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[(1-t^2)^k\right]\Big|_{t=+1} = 2^k(-1)^k k!.$$

Таким образом, условию $y(+1) = 1$ заведомо удовлетворяет полином

$$y(t) = P_k(t) \equiv \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} \left[(t^2 - 1)^k \right]. \tag{10}$$

Полином $P_k(t)$, задаваемый равенством (10), называется *полиномом Лежандра* степени k. Сама же формула (10) называется *формулой Родрига* для полиномов Лежандра.

Таким образом, единственность решения уравнения Лежандра в классе $C^{(1)}[-1,1]$ и его полиномиальный вид установлены.

Разложение полинома $P_k(t)$ по степеням t найдем, воспользовавшись формулами Родрига и бинома

$$(t^2-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j k!}{j!(k-j)!} t^{2k-2j}.$$

В итоге получаем равенство

$$P_k(t) = \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{(-1)^j (2k-2j)!}{2^k j!(k-j)!(k-2j)!} t^{k-2j}.$$

Это представление полинома Лежандра позволяет прямыми вычислениями* убедиться, что $P_k(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-t^2)P_k''(t) - 2tP_k'(t) + k(k+1)P_k(t) = 0,$$

*В качестве упражнения проделайте их самостоятельно.

т.е. уравнению Лежандра. Таким образом, существование решения краевой задачи (4) также установлено. $\square$

Покажем, что многочлены

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

называемые *многочленами Лежандра*, удовлетворяют уравнению Лежандра.

Обозначим $w_n(x) = (x^2 - 1)^n$. Имеет место тождество

$$(x^2 - 1)w_n' - 2nxw_n = 0.$$

Дифференцируя это тождественно $n+1$ раз, получаем равенство

$$(x^2 - 1)w_n^{(n+2)} + 2xw_n^{(n+1)} - n(n+1)w_n^{(n)} = 0.$$

Из этого равенства и вытекает, что функция $w_n^{(n)}(x)$ является решением уравнения (12.8).

Для многочленов $P_n(x)$ имеют место следующие рекуррентные соотношения

$$(n+1)P_{(n+1)}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x).$$

Многочлены Лежандра $P_n(x)$ обладают следующим важным свойством.

Теорема. *Любое решение $y(x)$ уравнения Лежандра (12.8), определенное на отрезке $[-1,1]$*

и принадлежащее пространству $C^2([-1,1])$, *имеет вид*

$$y(x) = CP_n(x), \qquad C = const. \tag{13.8}$$

Доказательство. Для всякого решения $y(x)$ из класса $C^2([-1,1])$ в силу формулы Остроградского-Лиувилля на интервале $(-1,1)$ будет выполняться равенство

$$P_n'(x)y(x) - P_n(x)y'(x) = \frac{\mu}{1-x^2}, \qquad \mu = const. \tag{14.8}$$

При $|x| < 1$ и $x \to \pm 1$ левая часть равенства (14.8) конечна, правая же — бесконечна. Следовательно, (14.8) может выполняться лишь при $\mu = 0$. Но тогда определитель Вронского функций $y(x)$ и $P_n(x)$ обращается в нуль тождественно, что возможно лишь при линейной зависимости функций $y(x)$ и $P_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. Это и означает, что справедливо равенство (13.8). $\square$

Многочлены Лежандра являются собственными функциями оператора $-((1-x^2)y')'$, соответствующими простому собственному значению $\lambda = n(n+1)$. Роль граничных условий здесь играют условия ограниченности решения в точках ± 1.

1. *Многочлены Лежандра образуют ортогональную систему в пространстве* $L_2([-1,1])$.

2. *Система* $\{P_n(x)\}$ *многочленов Лежандра полна в пространстве* $L_2([-1,1])$.

3. *Всякая функция* $f(x)$ *из* $L_2([-1,1])$ *представима рядом сходящимся в* $L_2([-1,1])$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \alpha_n P_n(x),$$

$$\alpha_n = \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx.$$

Рассмотрим уравнение

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + [n(n+1) - m(m+1)]y = 0, \quad (15.8)$$

в котором n и m — целые неотрицательные числа. Это уравнение соответствует гипергеометрическому уравнению со следующими параметрами

$$\alpha = m+n+1, \ \beta = m-n, \ \gamma = m+1, \ x = \frac{1-t}{2}.$$

Покажем, что функции

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(x),\ n = 0, 1, \ldots, m = 0, 1, \ldots, n,$$

являются решениями уравнения (15.8).

Преобразуем уравнение (15.8), положив

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} z(x).$$

Для функции $z(x)$ тогда должно выполняться уравнение

$$(1-x^2)z''-2x(m+1)z'+(n^2+n-m^2-m)z = 0. \quad (16.8)$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение Лежандра (12.8) m раз, получаем, что производная $P_n^{(m)}(x)$ удовлетворяет уравнению (16.8). Отсюда следует совпадения функций $z(x)$ и $P_n^{(m)}(x)$ и далее - что решением уравнения (15.8) будут функции $P_n^m(x)$.

Уравнение (15.8) называется дифференциальным уравнением присоединенных функций, решение же его — то есть функции $P_n^m(x)$ *— присоединенными функциями Лежандра.*

Для присоединенных функций Лежандра имеют место следующие утверждения:

1. *При* $n \geq m$ *любое решение уравнения (15.8), определенное на отрезке* $[-1,1]$ *и принадлежащее пространству* $C^2([-1,1])$ *имеет вид*

$$y(x) = CP_n^m(x), \;\; C = const.$$

2. *Для любого неотрицательного целого числа* m *функции* $\{P_n^m(x)\}$, $n = m, m+1, \ldots,$ *образуют в пространстве* $L_2([-1,1])$ *ортогональную систему.*

3. *Для любого неотрицательного целого числа* m *система функций* $\{P_n^m(x)\}$, $n = m, m+1, \ldots$, *полна в пространстве* $L_2([-1,1])$.

Следующими примерами специальных функций являются

многочлены Чебышева

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x);$$

многочлены Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2});$$

многочлены Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha})$$

(α - действительное число).

Все эти многочлены, как и многочлены Лежандра, порождаются некоторыми дифференциальными уравнениями. Системы этих многочленов также обладают некоторыми свойствами ортогональности и полноты.

Тема : Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

$\mathbf{1^0}$. Устойчивость и асимптотическая устойчивость решений дифференциальных уравнений и систем. $\mathbf{2^0}$. Фазовое пространство. $\mathbf{3^0}$. Теоремы Ляпунова и Четаева. $\mathbf{4^0}$. Устойчивость решений систем первого порядка с постоянными коэффициентами. $\mathbf{5^0}$. Точки покоя и их классификация. $\mathbf{6^0}$. Устойчивость по первому приближению.

1^0. Первоисточником задач об устойчивости являлись задачи об эволюции (движении) механических систем. Поэтому независимую переменную в теории устойчивости принято обозначать как t и трактовать ее как время.

Теория устойчивости исследует вопросы поведения множеств решений дифференциальных уравнений и систем при больших значениях времени. Основы этой теории заложил русский математик и механик А.М.Ляпунов в конце девятнадцатого — начале двадцатого века.

Пусть имеется вектор-функция $f(t, y)$, задаваемая равенствами

$$f(t, y) =\uparrow (f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(t, y_1, \ldots, y_n)).$$

Задача (Коши). *Найти решение системы*

$$y' = f(t, y), \qquad (1.9)$$

удовлетворяющие условию

$$\boldsymbol{y(t_0) = y_0.} \qquad (2.9)$$

Здесь t_0 *— начальный момент времени.*

Будем считать, что функции $f_1, \dots, f_n$ таковы, что эта задача имеет решение $\varphi(t)$, определенное на бесконечном полуинтервале $[t_0, +\infty)$.

Определение. *Решение $\varphi(t)$ задачи Коши*

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

называется устойчивым, если для любого положительного числа ε найдется положительное же число δ такое, что для всякого решения $y(t)$ рассматриваемой системы, удовлетворяющего в точке t_0 условию

$$|y(t_0) - \varphi(t_0)| \leqslant \delta, \tag{3.9}$$

при всех t из $[t_0, \infty)$ выполняется неравенство

$$|y(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Определение. *Если решение $\varphi(t)$ задачи Коши $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, устойчиво и дополнительно выполняется условие*

$$\lim_{t \to +\infty} |y_1(t) - \varphi(t)| = 0,$$

то решение $\varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым.

Определение. *Если существует положительное число ε_0 такое, что при выполнении для сколь угодно малого положительного числа δ и решения $y(t)$ системы ОДУ условия*

$$|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$$

найдется число t_1 из интервала $(t_0, +\infty)$, для которого выполняется неравенство

$$|y(t_1) - \varphi(t_1)| > \varepsilon_0,$$

то решение $\varphi(t)$ *задачи Коши (1.9), (2.9) называется неустойчивым.*

Интересно исследовать, является ли заданное решение системы уравнений устойчивым, асимптотически устойчивым или же неустойчивым. В этой связи в теории дифференциальных уравнений рассматривается отдельный и обширный класс задач.

Задача (об устойчивости). *Пусть* $y = \varphi(t)$ — *это решение задачи Коши*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Требуется исследовать это решение на устойчивость.

Отметим, что исследование на устойчивость какого-либо решения системы дифференциальных уравнений можно свести к исследованию на устойчивость тождественно нулевого решения немного другой системы. Покажем, как осуществить такое сведение.

Пусть $y = \varphi(t)$ — это решение задачи Коши (1.9), (2.9). и пусть функция $z(t)$ определена равенством $z(t) = y(t) - \varphi(t)$. Тогда $z(t)$ является решением следующей задачи:

$$z' = f(t, z + \varphi) - f(t, \varphi), \qquad (1.9')$$

$$z(t_0) = 0. \qquad (2.9')$$

Тождественно нулевая функция $z(t) \equiv 0$ будет решением этой новой задачи Коши. При этом всякое решение $z(t)$ системы (1.9') порождает по формуле $y(t) = z(t) + \varphi(t)$ решение $y(t)$ системы (1.9).

Сопоставляя понятия устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости тождественно нулевого решения задачи Коши (1.9'), (2.9') с аналогичными понятиями для решения $\varphi(t)$ задачи Коши (1.9), (2.9), нетрудно убедиться в их эквивалентности.

Таким образом, вопрос об устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости любого решения $\varphi(t)$ всегда сводится к вопросу об устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости нулевого решения.

2^0. Решение задачи Коши можно рассматривать как кривую в пространстве переменных $(t, y_1, \ldots, y_n)$ из $\boldsymbol{R}^{n+1}$, проходящую через заданную точку (t_0, y_0). Любая такая кривая называется *интегральной*.

Это же решение допускает кинематическое истолкование как траектория (путь) в пространстве R^n переменных $y_1, \ldots, y_n$, по которой движется материальная точка.

Иначе говоря, решение $y(t)$ задачи Коши при каждом значении t определяет в R^n точку, которая при изменении времени t непрерывным образом изменяет свое местоположение все в том же пространстве R^n.

Пространство $\boldsymbol{R}^n$, в котором задаются кривые, соответствующие решениям системы дифференциальных уравнений, называется *фазовым пространством* для этой системы, а сами кривые, по которым происходит движение, называют *фазовыми траекториями*.

В кинематической интерпретации системы

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$$

ее правая часть представляет собой вектор скорости движения точки по траектории. Поэтому вектор-функцию $f(t, y)$ называют также *фазовой скоростью*.

Нулевому решению задачи Коши

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = 0,$$

в фазовом пространстве соответствует начало координат $(0, \ldots, 0)$.

Нулевое решение будет *устойчивым*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любая траектория, начинающаяся в шаре $|y| < \delta$, при всех t из $[t_0, +\infty)$ не выходит за пределы шара $|y| < \varepsilon$.

Нулевое решение *асимптотически устойчиво*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любая траектория, начинающаяся в шаре $|y| < \delta$, при всех t из $[t_0, +\infty)$ не только не выходит за пределы шара $|y| < \varepsilon$, но и неограниченно с ростом t приближается к началу.

3^0. Фундаментальные исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений и систем принадлежат выдающемуся русскому математику и механику А.М. Ляпунову. Приведем здесь некоторые его результаты по рассматриваемой теме.

Пусть функции

$$f_1(t, y_1 \ldots, y_n), \quad \ldots, \quad f_n(t, y_1, \ldots, y_n)$$

определены и непрерывны при $t_0 \le t < +\infty$, $|y| \le \varepsilon_0$, где ε_0 — положительное число, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $|y| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.

Далее, пусть при тех же значениях y определена и непрерывно дифференцируема функция $V(y)$.

Определение. *Производной функции* $V(y)$ *в силу системы дифференциальных уравнений*

$$y' = f(t, y) \tag{I}$$

называется следующее дифференциальное выражение

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\mathrm{I}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} f_j(t, y).$$

Производная функции в силу системы полностью определяется заданием правых частей в уравнениях этой системы.

Определение. *Пусть непрерывно дифференцируемая функция* $\boldsymbol{V(y)}$ *строго положительна при* $|\boldsymbol{y}| > \boldsymbol{0}$ *и* $\boldsymbol{V(0) = 0}$, *а производная функции* $\boldsymbol{V(y)}$ *в силу системы* $(\mathbf{I})$ *неположительна всюду в ее области определения. Тогда* $\boldsymbol{V(y)}$ *называется функцией Ляпунова рассматриваемой системы* $(\mathbf{I})$.

Теорема (Ляпунова). *Пусть для некоторого положительного числа ε_0 функции*

$$f_1(t, y_1 \ldots, y_n), \quad \ldots, \quad f_n(t, y_1, \ldots, y_n)$$

определены и непрерывны при $t_0 \leq t < +\infty$, $|y| \leq \varepsilon_0$, и при этом выполняются тождества

$$f_i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если для системы дифференциальных уравнений

$$y' = f(t, y) \tag{I}$$

существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $V(y)$, то нулевое решение $y = \varphi(t) \equiv 0$ этой системы устойчиво.

Если дополнительно при тех же значениях t и y выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} f_j(t, y) \le -W(y),$$

где $W(y)$ — непрерывная функция, равная нулю в начале и строго положительная при

$y_1^2 + \ldots + y_n^2 > 0$, *то нулевое решение системы* (I) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть число ε положительно и не превосходит числа ε_0. Обозначим

$$S_\varepsilon = \{y \in R^n : |y| = \varepsilon\}, \quad V_\varepsilon = \min_{S_\varepsilon} V(y).$$

Вследствие условий на функцию $V(y)$ имеет место неравенство $V_\varepsilon > 0$.

Выберем число δ из интервала $(0, \varepsilon)$ настолько малым, чтобы на S_δ и всюду внутри S_δ выполнялось неравенство $V(y) < V_\varepsilon$ (такое число δ существует, поскольку функция $V(y)$ непрерывна и обращается в нуль при $y = 0$).

Пусть $y(t)$ есть такое решение, что точка $y(t_0) = (y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0))$ лежит внутри S_δ. Другими словами, $y(t)$ — это такое решение, что $|y(t_0)| < \delta$.

Покажем, что для этого решения всегда будет выполняться неравенство $|y(t)| < \varepsilon$. Предположим, что это не так. Пусть t_1 есть число, большее t_0 и такое, что $|y(t_1)| = \varepsilon$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = V(y(t)) = V(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)).$$

Её производная вычисляется так

$$\Phi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} f_j(t, y).$$

Имеет место неравенство $\Phi'(t) \leq 0$. Интегрируя это неравенство в пределах от точки t_0 до точки t_1, получаем

$$V(y(t_1)) \leq V(y(t_0)). \qquad (2.9)$$

С другой стороны, выполняются неравенства

$$V(y(t_0)) < V_\varepsilon \leq V(y(t_1)).$$

Эти неравенства и неравенство (2.9) приводят к невозможному неравенству

$$V(y(t_1)) < V(y(t_1)).$$

Полученное противоречие опровергает предположение о том, что существует точка t_1, для которой $|y(t_1)| = \varepsilon$.

Другими словами, для всех чисел t таких, что $t \geq t_0$, выполняется неравенство $|y(t)| < \varepsilon$. Это и означает, что нулевое решение устойчиво.

Докажем вторую часть теоремы. Функция $\Phi(t)$ при $t \geq t_0$ монотонно убывает. Следовательно, она имеет предел при $t \to +\infty$. Покажем, что этот предел равен нулю.

Предположим, что это не так, т.е. что предел функции $\Phi(t)$ при $t \to +\infty$ есть положительное число α.

Тогда при $t \geq t_0$ выполняется неравенство $\Phi(t) \geq \alpha$. Отсюда вытекает, что существует такое положительное число β, что при $t \geq t_0$ выполняется неравенство $|y(t)| \geq \beta$. Действительно, если такого числа β нет, то для любого натурального числа m найдётся точка

t_m такая, что $t_m \geq t_0$ и выполняется неравенство $|y(t_m)| < \frac{1}{m}$.

По условию функция $V(y)$ непрерывна и обращается в нуль при $y = 0$. Поэтому при достаточно больших m выполняется неравенство $\Phi(t_m) = V(y(t_m)) < \alpha$. Это противоречит установленной ранее оценке $\Phi(t) \geq \alpha$.

Итак, если предел функции $\Phi(t)$ при $t \to +\infty$ не равен нулю, то найдётся положительное число β такое, что при $t \geq t_0$ выполнена оценка $|y(t)| \geq \beta$. Из этого неравенства следует существование положительного числа γ такого, что при $t \geq t_0$ имеет место оценка $W(y(t)) \geq \gamma$. Это вытекает из непрерывности функции $W(y)$, которая обращается в нуль в начале координат.

Условие из второй части теоремы о функции

V означает справедливость неравенства

$$\Phi'(t) \leq -W(y(t)).$$

Интегрируя обе него части и пользуясь оценкой $W(y(t)) \geq \gamma$, получаем

$$V(y(t)) - V(y(t_0)) \leq -\gamma(t - t_0),$$

или

$$V(y(t)) \leq V(y(t_0)) - \gamma(t - t_0) \qquad (3.9)$$

при $t \geq t_0$. При достаточно больших t правая часть неравенства (3.9) становится отрицательной.

Это противоречит условию $V(y) \geq 0$, выполненному для всех $y = y(t)$ таких, что $|y(t)| < \varepsilon$. Напомним, что именно это неравенство доказано в первой части теоремы.

Полученное противоречие означает, что предположение о том, что предел функции $\Phi(t)$

при $t \to +\infty$ положителен, не верно. Следовательно, искомый предел равен нулю.

Но тогда функция $y(t)$ при $t \to +\infty$ также имеет предел, равный нулю. Действительно, если это не так, то найдётся положительное число ε_1 такое, что для любого натурального m найдётся точка t_m такая, что $t_m > m$,

$y(t_m) > \varepsilon_1$. Но тогда выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty} V(y(t_m)) \neq 0,$$

чего не может быть. Полученное противоречие означает, что предел функции $y(t)$ при $t \to +\infty$ равен нулю. $\square$

Для положительного числа ε положим

$$B_\varepsilon = \{y \in R^n : |y| < \varepsilon\}, \;\; \bar{B}_\varepsilon = \{y \in R^n : |y| \le \varepsilon\}.$$

Теорема (Четаева). *Пусть для некоторого положительного числа* ε_0 *функции*

$$f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \quad \ldots, \quad f_n(t, y_1, \ldots, y_n)$$

определены и непрерывны на множестве

$$\{(t, y) : t_0 \leq t < +\infty, \quad |y| \leq \varepsilon_0\},$$

и пусть при $t \geq t_0$ *выполняются тождества* $f_i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Далее, пусть существует определенная в шаре* $\bar{B}_{\varepsilon_0}$ *непрерывно* дифференцируемая в нем функция $V(y)$, для которой выполняются условия

1. в сколь угодно малой окрестности U начала координат существует область D_U, в которой функция $V(y)$ строго положительна;

2. на части границы области D_U, лежащей в окрестности U, функция $V(y)$ обращается в нуль;

3. в области D_U при $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} f_j(t, y) > 0;$$

4. если для положительного α на подмножестве $D_{U\alpha}$ области D_U выполняется неравенство $V(y) \geq \alpha$, то найдется положительное число β, что на том же множестве $D_{U\alpha}$ при

$t \geq t_0$ *будет выполняться неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} f_j(t, y) \geq \beta.$$

Тогда нулевое решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений неустойчиво.

Доказательство. Зафиксируем число ε_1 из интервала $(0, \varepsilon_0)$. Пусть U есть произвольная окрестность начала координат, лежащая в шаре B_{ε_1}, y_0 есть точка множества D_U, $y(t)$ есть решение системы (1.9), для которого выполняется условие $y(t_0) = y_0$. Покажем, что для этого решения найдется точка t_1 такая, что имеет место равенство $|y(t_1)| = \varepsilon_1$.

Предположим, что точки t_1 с указанным свойством нет. Другими словами, пусть выполняется условие

$$|y(t)| < \varepsilon_1 \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.9}$$

Обозначим $\Phi(t) = V(y(t))$, $\alpha = \Phi(t_0)$. Заметим, что из условия 1 теоремы вытекает, что α есть положительное число.

Покажем, что решение $y(t)$ не может покинуть множества $D_{B_{\varepsilon_1}}$. Пусть это не так, и пусть число t^* есть первое число, для которого выполняется включение $y(t^*) \in \partial D_{B_{\varepsilon_1}}$.

Из условия (4.9) и условия 2 теоремы следует, что в точке t^* имеет место равенство $\Phi(t^*) = 0$. С другой стороны, для чисел t из промежутка $[t_0, t^*)$ справедливо включение $y(t) \in D_{B_{\varepsilon_1}}$.

Из этого включения и из условия 3 теоремы следует, что производная функции $\Phi(t)$ на указанном промежутке будет положительной. Но тогда для функции $\Phi(t)$ выполняется неравенство

$$\Phi(t) > \Phi(t_0), \quad t \in [t_0, t^*). \tag{5.9}$$

Переход к пределу в этом неравенстве при $t \to t^*$ и непрерывность функции $\Phi(t)$ дают неравенство $\Phi(t^*) > 0$, которое противоречит полученному ранее равенству $\Phi(t^*) = 0$.

Противоречие возникло вследствие предположения, что решение $y(t)$ может покинуть множество $D_{B_{\varepsilon_1}}$.

Итак, решение $y(t)$ действительно не может покинуть множество $D_{B_{\varepsilon_1}}$. Более того, для решения $y(t)$ для всех чисел t из промежутка $[t_0, +\infty)$ выполняется неравенство

$$V(y(t)) = \Phi(t) \geq \alpha > 0.$$

Условие 4 теоремы позволяет от последнего неравенства перейти к оценке $\Phi'(t) \geq \beta$ и далее после интегрирования — к неравенству

$$V(y(t)) \geq \alpha + \beta(t - t_0). \qquad (6.9)$$

Неравенство (6.9) противоречит неравенству (4.9). Следовательно, предположение, которое привело к неравенству (4.9), ложно. Но тогда найдется число t_1, для которого выполняется требуемое равенство $|y(t)| = \varepsilon_1$.

Это равенство и означает неустойчивость нулевого решения. $\square$

Приведем пример применения теоремы Ляпунова. Рассмотрим систему

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -g(y_1),$$

где для функции $g(y_1)$ выполняются условие Липшица и условия

$$g(0) = 0, \quad y_1 g(y_1) > 0 \text{ \textit{при} } y_1 \neq 0.$$

Тогда в качестве функции Ляпунова системы можно взять функцию

$$V(y) = \frac{1}{2}y_2^2 + \int\limits_0^{y_1} g(\xi)d\xi.$$

Нетрудно проверить, что все условия теоремы Ляпунова в этом случае выполнены.

В ряде случаев, когда $f_1(y), \ldots, f_n(y)$ представляют собой степенные функции пере-

менных $y_1, \ldots, y_n$, функцию $V(y)$, удовлетво-
ряющую условиям теорем Ляпунова или Че-
таева, удается найти в виде квадратичной формы

$$V(y) = (Hy, y),$$

однородной формы четвертой степени, или же иной формы четной степени.

4^0. Опишем характер поведения траекторий и тем самым проведем исследование устойчивости нулевого решения для линейной системы из двух уравнений

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases} \qquad (7.9)$$

с действительными коэффициентами.

Пусть λ_1 и λ_2 есть корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Возможны следующие случаи

1. *числа* λ_1 *и* λ_2 *действительны и различны,*

2. *числа* λ_1 *и* λ_2 *комплексные (комплексно-сопряженные),*

3. *числа* λ_1 *и* λ_2 *совпадают.*

В первом случае общее решение системы (7.9) имеет вид

$$y_1 = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t},$$

$$y_2 = C_1\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t},$$

где α_i и β_i — постоянные, определяемые как нетривиальное решение системы

$$\begin{cases} (a-\lambda_1)\alpha_1 + b\alpha_2 = 0, \\ c\alpha_1 + (d-\lambda_1)\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

и системы

$$\begin{cases} (a-\lambda_2)\beta_1 + b\beta_2 = 0, \\ c\beta_1 + (d-\lambda_2)\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Если теперь числа λ_1 и λ_2 отрицательны, то точка на любой траектории с ростом t перемещается по направлению к началу координат. Нулевое решение при этом асимптотически устойчиво.

Если числа λ_1 и λ_2 оба положительны, то точка на любой траектории с ростом t перемещается по направлению от начала координат в бесконечность. Нулевое решение при этом неустойчиво.

Пусть числа λ_1 и λ_2 имеют разные знаки. Например, пусть число λ_1 положительно, а число λ_2 отрицательно. Тогда среди траекторий имеются как траектории, приходящие в начало координат, так и траектории, уходящие из начала. Примером приходящих траекторий служат следующие

$$y_1 = C_2\beta_1 e^{\lambda_2 t}, \quad y_2 = C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_2 < 0.$$

Примеры уходящих траекторий таковы

$$y_1 = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_1 \alpha_2 e^{\lambda_1 t}, \qquad \lambda_1 > 0.$$

Нулевое решение в случае, если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, неустойчиво.

Пусть одно из чисел, например, λ_1 , равно нулю, другое же λ_2 отрицательно. Тогда траектории

$$y_1 = C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 e^{\lambda_2 t}, \quad y_2 = C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t}$$

с ростом t будут приходить в $(C_1\alpha_1, C_1\alpha_2)$ (траектории представляют собой семейство прямых). Нулевое решение в указанной ситуации будет устойчивым, но не асимптотически устойчивым.

В случае $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ траекториями будут те же параллельные прямые, но при этом с ростом t они уходят из точек $(C_1\alpha_1, C_1\alpha_2)$. Нулевое решение будет неустойчивым.

Пусть теперь λ_1 и λ_2 — комплексные числа

$$\lambda_1 = p + qi, \qquad \lambda_2 = p - qi, \qquad q \neq 0.$$

Общее решение системы (7.9) в этом случае можно записать в виде

$$\begin{cases} y_1 = e^{pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \\ y_2 = e^{pt}(C_1^* \cos qt + C_2^* \sin qt), \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, C_1^* и C_2^* — некоторые линейные комбинации этих постоянных. Если p отрицательно, то траектории спиралевидно "входят" в начало координат. Если же число p положительно, то траектории уходят от начала координат (так же спиралевидно). В первом случае нулевое решение будет асимптотически устойчиво, во втором — неустойчиво.

Наконец, если p равно нулю, то траектории представляют собой замкнутые кривые, содержащие внутри себя начало координат. Нулевое решение при этом будет устойчивым, но не асимптотически устойчивым.

В случае кратных собственных чисел матрицы системы ее траектории ведут себя по разному в зависимости от того, каким является общее значение чисел λ_1 и λ_2: положительным, отрицательным или нулем.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то общее решение системы (7.9) имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = (C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 t)e^{\lambda_1 t}, \\ y_2 = (C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 t)e^{\lambda_1 t}. \end{cases}$$

Очевидно. что в случае $\lambda_1 > 0$ траектории будут “уходить” от начала координат, и что нулевое решение будет неустойчивым.

Если же $\lambda_1 < 0$, то траектории будут "входить" в начало координат. Нулевое же решение будет устойчивым и даже асимптотически устойчивым.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ имеются две возможности:

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \quad \text{и} \quad \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

В первом из этих случаев траектории представляют собой прямые, и нулевое решение не будет устойчивым. Во втором же случае все траектории вырождаются в точки; нулевое решение при этом будет устойчивым.

Теорема. *Если все собственные числа матрицы A системы*

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно соб-

ственное число матрицы A имеет положительную действительную часть, то нулевое решение неустойчиво.

Данная теорема справедлива и для линейных систем из n уравнений. Доказывается она также с помощью анализа формулы общего решения.

5^0. В исследовании на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений важную роль играет понятие положения равновесия.

Определение. *Если решение системы дифференциальных уравнений*

$$y' = f(t, y),$$

представляет собой точку в соответствующем n-мерном фазовом пространстве, то это *решение называется точкой покоя, или положением равновесия, системы.*

Очевидно, что $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$ тогда и только тогда является точкой покоя системы (1.9), когда y^0 представляют собой стационарное решение алгебраической системы уравнений

$$f_1(t, y_1^0, \ldots, y_n^0) = 0, \quad \ldots, \quad f_n(t, y_1^0, \ldots, y_n^0) = 0.$$

Проведенный анализ поведения траекторий для линейной системы из двух уравнений позволяет провести классификацию точек покоя для общих систем из двух уравнений (не обязательно линейных).

Если траектории системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2) \end{cases} \qquad (8.9)$$

начинающиеся в некоторой фиксированной окрестности *точки покоя* (y_1^0, y_2^0), *"входят" в нее, неограниченно к ней приближаясь вместе с касательной, то такая точка покоя называется устойчивым узлом.*

Если траектории системы (8.9), *начинающиеся в сколь угодно малой окрестности точки* (y_1^0, y_2^0) *"уходят" в бесконечно удаленную* точку вместе с касательными, то такая точка покоя называется неустойчивым узлом.

Если же в первом случае касательные не "входят" в точку покоя и соответственно во втором случае не "уходят"в бесконечно удаленную точку, то такая точка покоя называется устойчивым или соответственно неустойчивым фокусом.

Если среди траекторий, *начинающихся в сколь угодно малой окрестности точки покоя* (y_1^0, y_2^0) *есть как "входящие" в неё, так и "уходящие" в бесконечно-удаленную точку, то такая точка покоя называется седлом.*

Наконец, если все траектории, *начинающиеся в* δ *- окрестности точки покоя, представляют собой замкнутую кривую, не покидающую* ε *- окрестность точки покоя (*ε *- произ-*

вольное положительное число, $\delta = \delta(\varepsilon)\big)$*, то такая точка покоя называется центром.*

Уточним, что поведение траекторий той или иной дифференциальной системы всюду понимается как поведение при $t \to +\infty$.

6^0. Покажем, что в некоторых случаях исследование устойчивости решений дифференциальных систем можно провести алгебраическими методами.

На пространстве всех квадратичных форм от переменных $y_1, \ldots, y_n$ с действительными коэффициентами рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\mathbf{grad\,V(y)\cdot Ay = F(y)}, \tag{9.9}$$

где $F(y)$ — заданная вещественная квадратичная форма, A — заданная вещественная квадратная матрица размерности $n \times n$.

Лемма. *Если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части, то уравнение (9.9) имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 2$, общий же случай рассматривается аналогично.

Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, а квадратичные формы $V(y)$ и $F(y)$ задаются равенствами

$$V(y) = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2,$$

$$F(y) = \lambda y_1^2 + 2\mu y_1y_2 + \nu y_2^2.$$

Коэффициенты a, b, c предполагаются неизвестными, а λ, μ, ν — известными. Равенство (9.9) выполнено тогда и только тогда когда коэффициенты квадратичных форм связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha a + \gamma b &= \frac{\lambda}{2}, \\ \beta a + (\alpha + \delta) b + \gamma c &= \mu, \\ \beta b + \delta c &= \frac{\nu}{2}. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Определитель Δ этой системы имеет вид

$$\Delta = (\alpha + \delta)(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Из условия отрицательности действительных частей всех собственных чисел матрицы $\boldsymbol{A}$ вытекает, что числа $\boldsymbol{\alpha+\delta}$ и $\boldsymbol{\alpha\delta-\beta\gamma}$ не равны нулю. Следовательно, система (10.9) имеет единственное решение $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, что и означает требуемое. $\square$

Лемма. *Если выполняются условия предыдущей леммы и дополнительно квадратичная форма* $\boldsymbol{F(y)}$ *отрицательно определена,* *то форма $V(y)$ будет положительно определенной.*

Доказательство. Предположим, что форма $V(y)$ не является положительно определенной. Тогда найдется вектор $y_0 \neq 0$ такой, что $V(y_0) \leq 0$.

Для системы дифференциальных уравнений

$$y' = Ay \tag{11.9}$$

вида (1.9) выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} f_j(y) = \mathbf{grad\,V(y)\cdot Ay.}$$

Пусть $y(t)$ есть решение системы (11.9), удовлетворяющее условию $y(t_0) = y_0$. Для формы $V(y)$, являющейся решением уравнения (9.9), выполняется неравенство

$$\mathbf{grad\,V(y(t))\cdot Ay(t) = F(y(t)) < 0.}$$

Вспомнив, что левая часть этого неравенства есть производная функции $\Phi(t) = V(y(t))$, получаем, что $V(y(t))$ есть величина отрицательная. Но тогда форма $-V(y)$ на решении $y(t)$ будет, наоборот, принимать положительные значения.

Далее, в силу однородности квадратичная форма $-V(y)$ принимает положительные значения на любом луче, соединяющем точку

$y(t)$ с началом координат, или, другими словами, в любой окрестности начала координат.

Нетрудно убедиться, что и все остальные условия теоремы Четаева выполняются. Следовательно, нулевое решение системы (11.9) должно быть неустойчивым. Но это не так, поскольку вследствие отрицательности действительных частей всех собственных чисел матрицы нулевое решение устойчиво и даже асимптотически устойчиво. Пришли к противоречию с предположением о существовании вектора y_0, для которого выполняются соотношения $y_0 \neq 0$, $V(y_0) \leq 0$. Следовательно, вектора с указанным свойством нет и форма $V(y)$ положительно определена. $\square$

Лемма. *Пусть среди собственных чисел матрицы A есть такие, которые имеют положительную действительную часть. Тогда мож-*

но подобрать неотрицательное число m такое, что уравнение

$$\boldsymbol{grad}\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) \qquad (12.9)$$

имеет единственное решение в классе квадратичных форм. Если дополнительно форма $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$ будет положительно определенной квадратичной формой, то в любой окрестности начала координат найдется область, *в которой функция* $V(y)$ *принимает положительные значения.*

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 2$. Уравнение (12.9) можно записать в виде

$$grad\ V(y) \cdot (A - \frac{m}{2}E)y = F(y), \qquad (12.9')$$

или же в виде системы

$$\left(\alpha - \frac{m}{2}\right) a + \gamma b = \frac{\lambda}{2},$$

$$\beta a + (\alpha + \delta - m)b + \gamma c = \mu,$$

$$\beta b + \left(\delta - \frac{m}{2}\right) c = \frac{\lambda}{2}. \qquad (10.9')$$

Определитель этой системы есть число

$$\Delta(m) = (\alpha + \delta - m) \left[\alpha\delta - \beta\gamma - \alpha + \delta)\frac{m}{2} + \frac{m^2}{4}\right].$$

Если $\Delta(0) = 0$, то выполняется одно из равенств $\alpha + \delta = 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, либо же выполняются оба эти равенства. В последнем случае для любого положительного числа m

определитель $\boldsymbol{\Delta}(m)$ не будет обращаться в нуль.

Если выполняется первое из указанных выше равенств и не выполняется второе, то при достаточно малых положительных m справедливо $\boldsymbol{\Delta}(m) \neq \mathbf{0}$. Аналогично, если выполняется второе равенство и не выполняется первое, то при достаточно малых положительных m выполняется $\boldsymbol{\Delta}(m) \neq \mathbf{0}$.

Наконец, если $\mathbf{\Delta(0) \neq 0}$, то в качестве $\boldsymbol{m}$ можно взять нуль.

Следовательно, во всех случаях для достаточно малых неотрицательных чисел $\boldsymbol{m}$ определитель $\mathbf{\Delta}(\boldsymbol{m})$ системы (10.9') не будет обращаться в нуль. Но тогда эта система будет иметь действительное решение $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Это означает, что уравнение (12.9) для достаточно малых неотрицательных чисел $\boldsymbol{m}$ имеет единственное решение.

Докажем вторую часть леммы. Предположим, что в любой окрестности начала координат нет точек, в которых форма $V(y)$ принимает положительные значения. Это означает, что форма $-V(y)$ есть положительно определенная квадратичная форма. Но тогда для системы

$$y' = \left(A - \frac{m}{2}E\right) y$$

и функции $-V(y)$ выполняются все условия теоремы Ляпунова. Из этого следует, что нулевое решение указанной системы будет асимптотически устойчиво. С другой стороны, для достаточно малых чисел m матрица $A-\frac{m}{2}E$ будет иметь среди собственных чисел хотя бы одно с положительной действительной частью. Как показано ранее, нулевое решение в этом случае обязано быть неустойчивым. Получено противоречие. $\square$

Теорема. *Пусть вектор-функция* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})$ *имеет вид* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})$, *где* $\boldsymbol{A}$ — *постоянная квадратная матрица размерности* $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$, *и при этом выполняется условие*

$$\frac{|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{y}|} \to \boldsymbol{0} \text{ при } |\boldsymbol{y}| \to \boldsymbol{0}, \tag{13.9}$$

причем стремление к нулю здесь равномерное по $\boldsymbol{t}$ *при* $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_0}$. *Если все собственные числа матрицы* $\boldsymbol{A}$ *имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение системы (1.9) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условия (13.9) следует, что имеет место тождество $g(t, 0) \equiv 0$. Это тождество означает, что система (1.9) в анализируемой ситуации действительно обладает нулевым решением.

Согласно доказанным ранее леммам уравнение

$$\operatorname{grad} V(y) \cdot Ay = -(y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

имеет единственное решение. Это решение — положительно определенная квадратичная форма, для которой справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial V(y)}{\partial y_j}\right| \leq K|y|, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (14.9)$$

где постоянная K определяется лишь матрицей A.

Далее, очевидные неравенства

$$|g_j(t,y)| \le |g(t,y)|, \qquad j = 1, \dots, n,$$

дают следующее свойство

для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что при выполнении неравенств $|y| < \delta$, $t \ge t_0$ выполняется неравенство

$$|g_j(t,y)| \le \varepsilon |y|. \tag{15.9}$$

Из неравенств (14.9) и свойства (15.9) вытекает, что для всех точек (t, y) таких, что $|y| < \delta$, $t \geq t_0$, будет выполняться неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \cdot g_j(t, y) \right| \leq \varepsilon n K |y|^2. \qquad (16.9)$$

Зафиксируем число ε так, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon n K \le \frac{1}{2}$. Из равенств

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \cdot f_j(t, y) =$$

$$\operatorname{grad} V(y) \cdot A y + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \cdot g_j(t, y) =$$

$$= -|y|^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \cdot g_j(t, y)$$

и неравенства (16.9) при таком выборе числа ε следует, что для всех точек (y, t) таких, что $|y| < \delta$, $t \geq t_0$, будет выполняться неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \cdot f_j(t, y) \leq -\frac{1}{2}|y|^2.$$

Но тогда для системы (1.9) выполннены все условия теоремы Ляпунова (как первой ее части, так и второй). Из теоремы Ляпунова и вытекает требуемое. $\square$

Теорема. *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})$ имеет вид, указанный в теореме 3.9 и пусть выполняется условие (13.9). Тогда, если хотя бы одно собственное число матрицы $\boldsymbol{A}$ имеет положительную действительную часть, то нулевое решение системы (1.9) неустойчиво.*

Доказательство. Вновь прежде всего заметим, что в теореме утверждается неустойчивость реально существующего решения.

Из ранее доказанной леммы следует, что для достаточно малых неотрицательных чисел m уравнение

$$\operatorname{grad} V(y) \cdot Ay = m\ V(y) + y_1^2 + \ldots + y_n^2$$

имеет решение $V(y)$ в классе квадратичных форм, и что для функции $V(y)$ в любой сколь угодно малой окрестности начала координат найдутся точки, в которых она принимает положительные значения.

Используя неравенство (16.9) и выбирая числа m и ε малыми (возможность выбора числа m малым показана по ходу доказательства леммы 3.9, возможность выбора числа ε малым вытекает из условия (13.9)), нетрудно показать. что для точек (y, t) таких, что $|y| < \delta$ (положительное число δ определяется числом ε), $t \geq t_0$, будет выполняться неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_j} \cdot f_j(t, y) \geq \frac{1}{2}|y|^2.$$

Это неравенство и указанные выше свойства функции $V(y)$ показывают, что для системы (1.9) будут выполняться все условия теоремы Четаева. Из теоремы Четаева и следует требуемое. $\square$

Условия двух предыдущих теорем нарушаются, если у матрицы A имеются собственные числа с нулевой действительной частью и отсутствуют собственные числа с положительной действительной частью. Этот случай требуют отдельного рассмотрения. Например, для систем с постоянными коэффициентами исследование устойчивости нулевого решения в указанном случае можно провести на основе явного представления решения.

При исследовании устойчивости по первому приближению часто применяются алгебраические критерии отрицательности или положительности действительных частей корней многочленов. Приведём один из таких критериев.

Если система (1.9) состоит из n уравнений, то матрица A будет матрицей n -го порядка и, соответственно, уравнение для собственных чисел будет уравнением n -го порядка

$$a_0\lambda^n + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,\ a_0 > 0. \tag{17.9}$$

Для того, чтобы действительные части всех корней уравнения (17.9) были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы все *главные миноры матрицы*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

были положительны.

Приведённый критерий называется критерием Рауса-Гурвица.

Уточним, как строится матрица критерия Рауса-Гурвица: *на главной диагонали стоят числа* a_1, a_2, ..., a_n, *справа от диагонали — элементы с убывающими номерами, слева — с возрастающими, но при этом элементы с номерами* $i > n$ *или* $i < 0$ *заменяются нулями*.

Теоремы об устойчивости или неустойчивости по первому приближению применимы, если система (1.9) имеет специальный вид.

Вместе с тем, если функции f_i *не зависят от времени* t, *имеют по переменным* $y_1, \ldots, y_n$ *непрерывные производные до второго порядка включительно и выполняются равенства* $f_i(0) = 0,\ i = 1, \ldots, n$, то общую систему (1.9) всегда можно привести к требуемому виду. Действительно, вследствие формулы Тейлора имеют место равенства

$$f_i(y) = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n + R_i(y), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0,\ldots,0)}{\partial y_j}$, $R_i(y)$ — *члены второго порядка малости.* Эти равенства и дают возможность записать исходную систему в виде, указанном в предыдущих теоремах; при этом для функции $g(y)$ выполняется неравенство

$$|g(y)| \leq M|y|^2.$$

Тема : Уравнения с частными производными первого порядка

$\mathbf{1^0}$. Интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. $\mathbf{2^0}$. Уравнения с частными производными первого порядка. $\mathbf{3^0}$. Линейные однородные уравнения. $\mathbf{4^0}$. Задача Коши для линейного уравнения. $\mathbf{5^0}$. Квазилинейные неоднородные уравнения.

1^0. Понятия *интеграла* и *общего интеграла* системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \qquad \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{1.12}$$

уже были определены в первой лекции. Приведём сейчас некоторые результаты об их свойствах.

Пусть на открытом множестве U пространства R^n заданы функции $g_1(x)$, ..., $g_m(x)$, и пусть эти функции непрерывно дифференцируемы на U.

Система функций $g_1(x)$, ..., $g_m(x)$ *называется функционально зависимой в окрестности точки* x_0 *множества* U *системой, если для некоторого положительного числа* δ *и некоторой функции* $\Phi(y_1, \ldots y_m)$, *определенной на* *окрестности* V *точки* $y_0 = (g_1(x_0), \ldots, g_m(x_0))$, *выполняются условия*

1. *если* x *есть точка* δ - *окрестности точки* x_0, *то точка* $(g_1(x), \ldots, g_m(x))$ *лежит в окрестности* V *точки* y_0, *причем для всех точек* x *из указанной* δ - *окрестности выполняется тождество*

$$\Phi(g_1(x), \ldots, g_m(x)) \equiv 0;$$

2. $\Phi(y_1, \ldots, y_m) \in C^1(V)$, $|\nabla\Phi(y)| \neq 0$ *при* $y \in V$.

Если система функций $g_1(x)$, ..., $g_m(x)$ *есть функционально зависимая система в окрестности каждой точки* x *множества* U, *то говорят, что эта система есть функционально зависимая система на всем множестве* U.

Если система функций $g_1(x)$, ..., $g_m(x)$ *не является функционально зависимой системой* *в окрестности точки* x_0 *или же на множестве* U, *то говорят, что эти функции функционально независимы в указанной окрестности или на множестве* U.

Используя теорему о неявной функции, нетрудно показать, что если функции $g_1(x)$, ..., $g_m(x)$ функционально зависимы на множестве U, то в окрестности каждой точки x_0 этого множества одна из функций может быть выражена через остальные:

$$g_k(x) = F(g_1(x), \dots, g_{k-1}(x), g_{k+1}(x), \dots, g_m(x)).$$

Приведем условие функциональной независимости систем функций.

Теорема. *Система из m непрерывно дифференцируемых на открытом множестве U пространства R^n, $n \geq m$, функционально независима на этом множестве тогда и только тогда, когда ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

в каждой точке множества U равен m.

Пусть имеются функции

$$\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \quad \ldots, \quad \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n),$$

которые являются первыми интегралами системы (1.12). Эти функции дают общий интеграл системы лишь в случае их независимости.

Теорема. *Для независимости интегралов* ψ_1, …, ψ_n *на открытом множестве* D *переменных* $(x, y_1, \ldots, y_n)$ *пространства* R^{n+1} *необхо-*

димо и достаточно, чтобы на этом множестве якобиан функций ψ_1, ..., ψ_n по переменным y_1, ..., y_n не обращался в нуль.

Доказательство. Достаточность вытекает из приведенного выше условия независимости. Докажем необходимость.

Возьмём в множестве D точку $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$.

Согласно теореме 1.12, ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x} & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

в этой точке должен равняться n, что означает, что хотя бы один из определителей n -го порядка, составленный из столбцов данной матрицы, будет в этой точке отличен от нуля. Покажем, что отличен от нуля будет именно якобиан системы ψ_1, ..., ψ_n по переменным $y_1, \ldots, y_n$.

Если в точке $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ все частные производные $\frac{\partial \psi_k}{\partial x}$ обращаются в нуль, то требуемое, очевидно, будет выполнено. Пусть хотя бы одна из производных $\frac{\partial \psi_k}{\partial x}$ в указанной точке не обращается в нуль. Так как функции ψ_1, ..., ψ_n суть интегралы системы (1.12), то в точке $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ будут выполняться равенство

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n = 0,$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n = 0.$$

Другими словами, линейная неоднородная алгебраическая система

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\xi_1 + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}\xi_n = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x},$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x}\xi_1 + \ldots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}\xi_n = -\frac{\partial \psi_n}{\partial x}$$

(производные функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$ здесь берутся в точке

$$(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}))$$

имеет нетривиальное решение

$$\xi_1 = f_1(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \ldots,$$

$$\xi_n = f_n(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}).$$

Согласно теореме Кронекера — Капелли о разрешимости линейных алгебраических систем, ранги собственно матрицы данной системы и расширенной матрицы должны совпадать.

Вследствие независимости системы функций ψ_1, ..., ψ_n ранг расширенной матрицы будет равняться n. Тогда и ранг первой матрицы будет равняться n. А это и означает, что искомый якобиан будет отличен от нуля. $\square$

При последовательном нахождении интегралов произвольной системы (1.12) необходимо следить, чтобы каждый раз при добавлении к найденным ранее интегралам нового получалась независимая система; проверка же независимости может осуществляться с помощью теоремы 1.12.

Обсудим теперь вопрос о числе независимых интегралов системы (1.12).

Приведем необходимую теорему из курса математического анализа.

Теорема. *Пусть на открытом множестве U пространства $\mathbf{R}^n$ задана система непрерывно дифференцируемых функций*

$$g_1(x), \quad \ldots, \quad g_n(x),$$

причём якобиан этой системы по переменным $x_1,\ldots,x_n$ всюду на U равен нулю, якобиан же системы $g_1(x)$, …, $g_{n-1}(x)$ по переменным x_1, …, x_{n-1}, наоборот, всюду на U не равен нулю.

Тогда для любой точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ множества U найдется такая её окрестность $\tilde{U}$, что на ней функция $g_n(x)$ может быть выражена через остальные

$$g_n(x) = \Phi(g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x)),$$

причем функция $\Phi = \Phi(y_1, \ldots, y_{n-1})$ имеет непрерывные частные производные по пере-

менным y_1, ..., y_{n-1} *на множестве*

$$V = \{y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in R^{n-1} :$$
$$y_i = g_i(x), \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad x \in \tilde{U}\}.$$

Теорема 3.12 является следствием более общих теорем о функционально зависимых системах функций.

Теорема. *Система (1.12) не может иметь более n независимых интегралов.*

Доказательство. Пусть D есть произвольное открытое множество пространства R^{n+1} переменных $(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$. Докажем, что в достаточно малой окрестности любой точки этого множества произвольные $(n+1)$ интеграла системы (1.12) будут функционально зависимы.

Пусть $\psi_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$, $\ldots$, $\psi_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$, а также $\psi(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$ — это первые интегралы системы (1.12).

Если интегралы ψ_1, $\ldots$, ψ_n зависимы, то и все интегралы ψ_1, $\ldots$, ψ_n, ψ будут зависимы. Если же интегралы ψ_1, $\ldots$, ψ_n независимы, то докажем, что для любой точки $(x_0,\ y_1^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)})$ множества найдется ее окрестность, такая что в ней функция ψ может быть выражена через функции ψ_1, ..., ψ_n:

$$\psi = \Phi(\psi_1, \ldots, \psi_n)$$

Поскольку все функции ψ_1, ..., ψ_n, ψ есть интегралы системы (1.12), то в окрестности точки $(x_0$, $y_1^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)})$ имеют место тождества

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n \equiv 0,$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n \equiv 0.$$

Эти тождества означают, что линейная однородная система

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}\xi_2+\ldots+\frac{\partial\psi_1}{\partial y_n}f_{n+1}=0,$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\xi_1+\frac{\partial\psi_n}{\partial y_1}\xi_2+\ldots+\frac{\partial\psi_n}{\partial y_n}\xi_{n+1}=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\xi_1+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\xi_2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_n}\xi_{n+1}=0$$

имеет нетривиальное решение:

$$\xi_1=1,\quad \xi_2=f_1,\quad \ldots,\quad \xi_{n+1}=f_n.$$

Следовательно, якобиан системы функций $\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi$ по переменным $y_1, \ldots, y_n, x$ обязан обращаться в нуль. С другой стороны, вследствие теоремы 2.12 якобиан системы функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$ по переменным $y_1, \ldots, y_n$ не обращается в нуль. Из теоремы 3.12 заключаем, что в достаточно малой окрестности точки $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ функция ψ выражается через функции $\psi_1, \ldots, \psi_n$. $\square$

2^0. *Уравнение с частными производными первого порядка в общем виде* записывается как следующее равенство

$$F(x, u, u_x) = 0. \tag{2.12}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ и

$$u_x \equiv \nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}).$$

Решением этого уравнения называется функция $u(x)$, обращающая его в тождество.

Задача Коши для уравнения (2.12) состоит в том, что нужно среди всех его решений найти такое, для которого выполняется условие

$$\boldsymbol{u(x)}\Big|_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{\varphi(x)}, \tag{3.12}$$

где $\boldsymbol{S}$ — некоторая поверхность в пространстве $\boldsymbol{R^n}$, $\boldsymbol{\varphi(x)}$ — заданная на поверхности $\boldsymbol{S}$ непрерывная функция.

Пусть $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ — точка поверхности S такая что в окрестности x_0 поверхность S задается уравнением

$$G(x) = 0.$$

Пусть в этой окрестности функция $G(x)$ непрерывно дифференцируема и $|\nabla G(x)| \neq 0$. По теореме о неявной функции заключаем, что в упомянутой окрестности уравнение поверхности S преобразуется к виду

$$x_k = g(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Здесь функция g непрерывно дифференцируема в своей области определения.

Перейдем в окрестности x_0 к новым координатам y_1, ..., y_n по следующим формулам:

$$y_1 = x_1, \quad \ldots, \quad y_{k-1} = x_{k-1},$$

$$y_k = x_k - g(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

$$y_{k+1} = x_{k+1}, \quad \ldots, \quad y_n = x_n.$$

В новых переменных исходное дифференциальное уравнение (2.12) принимает вид

$$\tilde{F}(y, v, v_y) = 0, \qquad (2.12')$$

где функция $v(y)$ совпадает с функцией

$$u\Bigl(y_1,\dots,y_{k-1},\\ y_k+g(y_1,\dots,y_{k-1},y_{k+1},\dots,y_k),\\ y_{k+1},\dots,y_n\Bigr).$$

Условие Коши (3.12) преобразуется к виду

$$v\Big|_{y_k=0}=\tilde{\varphi}(y_1,\dots,y_{k-1},y_{k+1},\dots,y_k).\qquad (3.12')$$

Таким образом, задача Коши (2.12), (3.12) с условием, заданным на произвольной гладкой поверхности, локально преобразована к задаче Коши (2.12'), (3.12') с условием, заданным на гиперплоскости.

Покажем, как теория обыкновенных дифференциальных уравнений помогает в построении общего решения и решения задачи Коши для некоторых классов уравнений с частными производными первого порядка.

3^0. Простейшим и в то же время важнейшим классом уравнений с частными производными первого порядка является класс *линейных однородных уравнений*.

Определение. *Линейным однородным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение*

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \qquad (4.12)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — *независимые переменные, а функции* $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ *известны и непрерывны.*

Каждому линейному уравнению с частными производными первого порядка сопоставляется некоторая система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение. *Система обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.12}$$

называется сопутствующей системой уравнений для линейного однородного уравнения

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Траектории сопутствующей системы в фазовом пространстве R^n называются характ-

теристиками (бихарактеристиками) исходного уравнения.

Учитывая последнее замечание, сопутствующую систему называют также системой характеристик.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} a_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \\ \\ u(x)\Big|_S = \varphi(x). \end{cases}$$

Пусть точка x_0 лежит на поверхности S.

Определение. *Точка x_0 называется нехарактеристической для рассматриваемого линейного уравнения с частными производными, если характеристики, проходящие через x_0, не касаются поверхности S.*

Теорема. *Пусть x_0 — нехарактеристическая точка поверхности S, в окрестности которой поверхность S непрерывно дифференцируема. Пусть в этой же окрестности заданы функции*

$$a_i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{и} \quad \varphi(x)$$

которые также должны быть непрерывно дифференцируемы.

Тогда найдется окрестность точки x_0, в которой задача Коши

$$\begin{cases} a_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \\ u(x)\Big|_S = \varphi(x) \end{cases}$$

имеет непрерывно дифференцируемое решение $u(x)$. В указанной окрестности решение $u(x)$ единственно.

Пусть x_0 есть фиксированная точка пространства R^n, и пусть в некоторой окрестности этой точки коэффициенты $a_i(x)$ уравнения (4.12) непрерывны сами и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Кроме того, пусть в самой точке x_0 функции $a_i(x)$ не обращаются в нуль одновременно (подобные точки называются *неособыми точками* уравнения (4.12)); более того, пусть в точке x_0 не обращается в нуль коэффициент $a_n(x)$.

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n} = \dfrac{a_1(x)}{a_n(x)}, \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} = \dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}. \end{cases} \tag{6.12}$$

При сделанных предположениях в силу теоремы Пикара система (6.12) имеет $n-1$ независимый первый интеграл

$$\psi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = C_1,$$
$$\dots$$
$$\psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = C_{n-1}.$$

Эти независимые интегралы определены и непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в окрестности U точки x_0. С помощью этих интегралов определим в R^{n-1} следующее множество точек:

$$V = \{y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in R^{n-1} :$$

$$y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n),$$

$$\text{где} \quad (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in U\}.$$

Теорема. *Пусть есть произвольная непрерывно дифференцируемая на множестве V функция $\Phi(y_1, \dots, y_{n-1})$. Тогда сложная функция $\Phi\big(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)\big)$ явля-*

ется решением линейного уравнения

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Доказательство. Обозначим через $u(x)$ следующую сложную функцию

$$u(x) = \Phi\Big(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\Big).$$

Имеют место равенства

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} =$$

$$a_1(x)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}\right)+\ldots$$

$$+a_n(x)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}\right)=$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\left(a_1(x)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\ldots+a_n(x)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\right)+\ldots$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial y_{n-1}}\left(a_1(x)\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}+\ldots+a_n(x)\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}\right).$$

По условию каждая из функций $\psi_i(x_1,\ldots,x_n)$ является интегралом системы (6.12). Это означает, что производная функции $\psi_i(x)$ в силу системы (6.12) равна нулю на множестве U, то есть что выполняются тождества

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} + \frac{a_1}{a_n}\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{n-1}} \equiv 0,$$

$$i = 1, \ldots, n-1.$$

Уточним, что окрестность U точки x_0 изначально должна быть выбрана так, чтобы в ней коэффициент $a_n(x)$ уравнения не обращался в нуль. Этот выбор возможен вследствие непрерывности коэффициента $a_n(x)$ и условия $a_n(x_0) \neq 0$.

Из полученных тождеств и предшествующего им равенства заключаем, что рассматриваемая сложная функция $u(x)$ на самом деле является решением исходного линейного уравнения с частными производными. $\square$

Теорема. *Пусть функция* $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ *в окрестности точки* x_0 *удовлетворяет уравнению*

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Тогда найдутся окрестность $\widetilde{U}$ *указанной точки и непрерывно дифференцируемая функция* $\Phi(y_1, \ldots, y_{n-1})$ *такие, что на множестве* $\widetilde{U}$ *имеет место тождество*

$$\psi(x) = \Phi\big(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Доказательство. На множестве U функция $\psi(x)$ является решением уравнения

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Поэтому она же будет на множестве U первым интегралом сопутствующей системы. Требуемое теперь вытекает из теоремы об общем виде первого интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений. $\square$

Из последних двух теорем заключаем, что в их условиях локальное общее решение линейного уравнения с частными производными задается функцией вида

$$\Phi\Big(\psi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)\Big),$$

где функция $\Phi(y_1,\ldots,y_{n-1})$ непрерывно дифференцируема, а в остальном произвольна.

4^0. Рассмотрим теперь задачу Коши с начальным условием на плоскости $x_n = 0$:

$$\begin{cases} a_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \\ \\ u(x)\Big|_{x_n=0} = \tilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Возьмем точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, 0)$, лежащую на плоскости $x_n = 0$, и пусть в некоторой окрестности $x^{(0)}$ коэффициенты исходного линейного уравнения $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$

непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка. Пусть кроме того функция $a_n(x)$ не обращается в нуль в этой же окрестности.

В силу теоремы Пикара у системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.12) в окрестности точки $x^{(0)}$ существует общий интеграл

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)=C_1, \\ \ldots \\ \psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)=C_{n-1}. \end{cases} \tag{7.12}$$

Функции $\psi_1(x_1,\ldots,x_n)$, $\ldots$, $\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)$ — это независимые интегралы системы (6.12).

В соотношениях, определяющих общий интеграл, возьмем $x_n = 0$. Получим совокупность равенств

$$\left\{\begin{array}{c} \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = C_1, \\ \ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = C_{n-1}. \end{array}\right. \qquad (7.12')$$

Разрешим эту систему уравнений относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, выразив их через постоянные в правой части. Тогда получим в окрестности точки $x^{(0)}$ соотношения

$$\begin{cases} x_1 = w_1(C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ \ldots \\ x_{n-1} = w_{n-1}(C_1, \ldots, C_{n-1}). \end{cases} \qquad (8.12)$$

Функции $w_k(y_1, \ldots, y_{n-1})$ в полученных равенствах непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в некоторой окрестности точки

$$y^{(0)} = (C_1^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}),$$

где через $C_i^{(0)}$ обозначены числа

$$C_i^{(0)} = \psi_i\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, 0\right).$$

Рассмотрим суперпозицию функции

$$\tilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

из начальных данных задачи Коши с несколькими полученными в процессе выкладок:

$$\tilde{\varphi}\Big(w_1(C_1,\ldots,C_{n-1}),\ldots,w_{n-1}(C_1,\ldots,C_{n-1})\Big). \tag{9}$$

Подставляя сюда вместо постоянных их выражения как функций независимой переменной x, то есть выражения

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n), \\ \ldots \\ C_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n), \end{cases} \tag{7.12}$$

получим функцию переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, которую обозначим через $u(x)$.

Если функция $\tilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ имеет непрерывные частные производные первого порядка в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)})$, то функция $u(x)$ как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций также имеет в окрестности точки $x^{(0)}$ непрерывные частные производные первого порядка.

5^0. Рассмотрим уравнение более общего вида, нежели линейное уравнение с частными производными первого порядка. Точнее, исследуем множество решений уравнения

$$a_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x, u), \quad (10.12)$$

где $a_k(x, u)$, $k = 1, \ldots, n$, $b(x, u)$ — заданные функции, $u = u(x)$ — искомое решение.

Уравнение (10.12) в случае $a_k(x,u) \equiv a_k(x)$, $k = 1,\ldots,n$ и $b(x,u) \equiv b(x)$ называется *линейным неоднородным уравнением*.

Если хотя бы одна из функций a_k или b зависят от решения, то уравнение (10.12) называется *квазилинейным* .

Точнее, уравнение называется *квазилинейным однородным*, если $b(x,u) \equiv 0$ и при этом хотя бы одна из функций a_k зависит от решения, и *квазилинейным неоднородным*, если хотя бы одна из функций a_k или b зависит от решения и при этом функция $b(x, u)$ не является тождественно нулевой функцией.

Для линейного неоднородного уравнения понятия характеристик и нехарактеристической точки определяются так же, как и для линейного однородного уравнения (4.12). Теорема существования и единственности решения задачи Коши для него имеет такой же вид, как и для однородного. Нужно лишь дополнительно потребовать, чтобы функция $b(x)$, как и функции $a_k(x)$, была бы непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности нехарактеристической точки $x^{(0)}$.

Система уравнений характеристик для квазилинейного уравнения (10.12) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = a_i(x, u), \\ \quad i = 1, \ldots, n; \\ \\ \dfrac{du}{dt} = b(x, u). \end{cases}$$

Условие Коши $u(x)\Big|_S = \varphi(x)$ называется *нехарактеристическим в точке* x_0 поверхности S, если вектор

$$\vec{a}(x_0, u_0) = (a_1(x_0, u_0), \ldots, a_n(x_0, u_0)),$$

где $u_0 = \varphi(x_0)$, не является в точке x_0 касательным вектором к поверхности S.

Теорема. *Пусть условие Коши нехарактеристично в точке x_0, а коэффициенты $a_i(x, u)$, $i = 1, \ldots, n$, и функция $b(x, u)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки (x_0, u_0), функция $\varphi(x)$ и поверхность S непрерывно* *дифференцируемы в окрестности точки x_0. Тогда найдется окрестность точки x_0, в которой задача Коши имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение.*

Вместо уравнения (10.12) рассмотрим следующее линейное однородное уравнение

$$a_1(x,u)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x,u)\frac{\partial z}{\partial x_n} + b(x,u)\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \tag{11.12}$$

в котором независимыми переменными являются переменные $(x_1, \ldots, x_n, u)$, искомым же решением — функция $z = z(x, u)$.

Построим локальное решение этого уравнения, предполагая, что коэффициент $a_n(x, u)$ не обращается в нуль в окрестности некоторой точки (x_0, u_0).

Пусть $\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)$ — первые интегралы сопутствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей уравнению (11.12).

Согласно доказанным выше теоремам, общее решение уравнения (11.12) имеет вид

$$z(x, u) = \Phi(\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)), \tag{12.12}$$

где $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $y_0 = (\psi_1(x_0, u_0), \ldots, \psi_n(x_0, u_0))$ функция. Зададим функцию $u(x)$ неявно соотношением

$$z(x, u) = 0. \tag{13.12}$$

Если это неявное соотношение разрешимо относительно переменной $u = u(x)$, то имеют место равенства

$$z_{x_k} + z_u u_{x_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{14.12}$$

Здесь производные функции $z(x, u)$ существуют вследствие того, что функция Φ, как и функции $\psi_1, \ldots, \psi_n$ непрерывно дифференцируемы по всем своим переменным. Существование же производной u_{x_k} вытекает из теоремы о неявной функции.

Из равенств (14.12) и уравнения (11.12) следует соотношение

$$\Big\{-[a_1(x,u)u_{x_1} + \ldots + a_n(x,u)u_{x_n}] + b(x,u)\Big\}z_u = 0.$$

Таким образом, если для функции $z(x, u)$, определяемой равенством (12.12), выполняется условие $z_u \neq 0$, то функция $u(x)$, определяемая неявно соотношением (13.12), является (по крайней мере, локально) решением уравнения

$$a_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x, u).$$

Таким образом, общее решение рассматриваемого квазилинейного уравнения записывается в виде следующего алгебраического уравнения

$$\Phi\Big(\psi_1(x_1,\ldots,x_n,u),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n,u)\Big)=0.$$

Выразив из этого соотношения u как функцию переменных x, получим решение исходного квазилинейного уравнения.

Рассмотрим теперь задачу Коши для квазилинейного уравнения

$$\begin{cases} a_1(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = b(x,u), \\ \\ u(x)\Big|_{x_n=0} = \widetilde{\varphi}(x_1,\ldots,x_{n-1}). \end{cases}$$

Полагая $x_n = 0$ в совокупности равенств, определяющих общий интеграл сопутствующей уравнению (11.12) системы, получим

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, u) = C_1, \\ \ldots \\ \psi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, u) = C_n. \end{cases} \tag{14.12}$$

Разрешая эту систему относительно переменных $(x_1, \dots, x_{n-1}, u)$, приходим к равенствам

$$\begin{cases} x_1 = w_1(C_1, \dots, C_n), \\ \dots \\ x_{n-1} = w_{n-1}(C_1, \dots, C_n), \\ \\ u = w(C_1, \dots, C_n). \end{cases} \qquad (15.12)$$

Рассмотрим теперь суперпозицию функции

$$\widetilde{\varphi}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

из начальных данных задачи Коши с полученными в процессе выкладок первыми интегралами.

Вместо аргументов x_k, $k = 1, \ldots, n-1$, подставим в $\widetilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ соответствующие первые интегралы $w_k\bigl(C_1, \ldots, C_n\bigr)$, $k = 1, \ldots, n-1$, в которых постоянные $C_1, \ldots, C_n$ заменены на ранее полученные их выражения в виде функций переменных (x, u), то есть на правые части равенств

$$\left\{\begin{array}{c} C_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \\ \ldots \\ C_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n, u), \end{array}\right. \tag{7.12}$$

В результате такой суперпозиции получим функцию переменных $(x_1, \ldots, x_n, u)$, которую обозначим через $\Phi(x, u)$.

Запишем затем нелинейное алгебраическое

уравнение

$$w(\psi_1(x,u),\ldots,\psi_n(x,u)) = \Phi(x,u), \qquad (16.12)$$

в котором $w(C_1,\ldots,C_n)$ — это последний из полученных выше первых интегралов (15.12).

Формула (16.12) задает решение $u(x)$ рассматриваемой задачи Коши в неявном виде.

ТЕМА: Задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби

$\mathbf{1}^0$. Общий вид уравнения Гамильтона—Якоби и сопутствующая система квазилинейных уравнений. $\mathbf{2}^0$. Сопутствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и специальная система ее первых интегралов. $\mathbf{3}^0$. Неявное задание решения задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби. $\mathbf{4}^0$. Два примера.

1^0. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор вещественных переменных, $t > 0$. Рассмотрим уравнение в частных производных первого порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(t, x, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, \tag{HJ}$$

где $H = H(t, x, p_1, \ldots, p_n)$ — дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция. Равенство (**HJ**) называется *уравнени-*

ем Гамильтона—Якоби. Вместе с уравнением рассмотрим начальные данные

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad \forall\, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{ID}$$

Решение задачи Коши (**HJ**)– (**ID**) сводится к решению системы квазилинейных уравнений специального вида.

Последовательно дифференцируя по переменным $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнение (**HJ**), получим следующие n равенств ($j = 1, 2, \ldots, n$):

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{x_j}) + H_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} H_{p_k} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_{x_k}) = 0. \qquad (1)$$

Обозначим производную $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ через p_k, тогда справедливы равенства

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_k}, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставляя эти соотношения в (1), запишем получившиеся равенства в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{x_j}) + \sum_{k=1}^{n} H_{p_k}\frac{\partial}{\partial x_k}(u_{x_j}) = -H_{x_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Добавим сюда уравнение (**HJ**), переписанное в эквивалентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} H_{p_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} H_{p_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} - H(t, x, p).$$

Полученные таким образом $n+1$ уравнение объединим в систему относительно неизвестной вектор-функции

$$\vec{u} =\uparrow \big(u(t,x), p_1(t,x), p_2(t,x), \ldots, p_n(t,x)\big).$$

Получим при этом

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} H_{p_k} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} = \vec{F}, \qquad (2)$$

где вектор-столбец в правой части задается равенством

$$\vec{F} =\uparrow \Big(\sum_{k=1}^{n} H_{p_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} - H, -H_{x_1}, \ldots, -H_{x_n}\Big). \qquad (2')$$

К системе уравнений (2) добавим начальные данные:

$$u(0,x) = \varphi(x),$$

$$p_1(0,x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \ldots, p_n(0,x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x). \qquad (3)$$

Таким образом, получаем задачу Коши (2)–(3) для системы квазилинейных уравнений специального вида.

2^0. Первый шаг алгоритма состоит в формировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений, сопутствующей (2).

Система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = H_{p_j}(t,x,\vec{p}), \qquad j = 1,\ldots,n; \\ \\ \dfrac{dp_j}{dt} = -H_{x_j}(t,x,\vec{p}), \qquad j = 1,\ldots,n; \\ \\ \dfrac{du}{dt} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k H_{p_k}(t,x,\vec{p}) - H(t,x,\vec{p}). \end{cases} \qquad \textbf{(SODE)}$$

Первые $2n$ уравнений системы образуют замкнутый блок относительно неизвестных вектор-функций $\vec{x} = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ и $\vec{p} = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t))$. Запишем их в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = H_{p_j}(t, x, \vec{p}), \quad j = 1, \ldots, n; \\ \dfrac{dp_j}{dt} = -H_{x_j}(t, x, \vec{p}), \quad j = 1, \ldots, n. \end{cases} \qquad \text{(SODE}'\text{)}$$

Эту систему уравнений можно решать независимо от последнего уравнения (**SODE**), в котором присутствует неизвестная функция u.

К системе уравнений (**SODE**) следует добавить данные Коши

$$\begin{cases} x_j\Big|_{t=0} = x_j^0, \qquad j = 1, \ldots, n; \\ p_k\Big|_{t=0} = p_k^0, \qquad k = 1, \ldots, n; \\ u\Big|_{t=0} = u^0. \end{cases} \tag{$\mathbf{Cau_S}$}$$

Присутствующие здесь постоянные параметры с ноликами в качестве верхних индексов должны быть связаны между собой с помощью равенств

$$\boldsymbol{u^0 = \varphi(x^0), \qquad \vec{p^0} = \nabla\varphi(x^0).} \qquad (\mathbf{Cau'_S})$$

Функция $\varphi = \varphi(x)$ здесь та же самая, что и в исходных начальных данных (**ID**).

После того как задача Коши (**SODE**)– (**FI**) поставлена, ее следует решить, т.е. получить выражение вида

$$\begin{cases} x_j = x_j(t, x^0, p^0), \qquad j = 1, \dots, n; \\ \\ p_k = p_k(t, x^0, p^0), \qquad k = 1, \dots, n; \\ \\ \qquad\qquad u = f(t, x^0, p^0, u^0). \end{cases}$$

По теореме о неявных функциях первые $2n$ уравнений полученной системы возможно разрешить относительно переменных x^0 и p^0 в окрестности точки $t = 0$, выразив их через переменные (t, x, p).

В результате получится система равенств вида

$$\begin{cases} x_j^0 = \mathfrak{Y}_j(t, x, \vec{p}), & j = 1, \ldots, n; \\ \\ p_k^0 = \mathfrak{U}_k(t, x, \vec{p}), & k = 1, \ldots, n. \end{cases} \qquad (\mathbf{FI})$$

Найденные функции $\mathfrak{Y}_j(t, x, \vec{p})$ и $\mathfrak{U}_k(t, x, \vec{p})$ представляют собой первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений (**SODE**).

Более того, эти первые интегралы удовлетворяют дополнительным условиям в начальный момент времени

$$\begin{cases} \mathfrak{Y}_j(0, x, \vec{p}) = x_j, \qquad j = 1, \ldots, n; \\ \\ \mathfrak{U}_k(0, x, \vec{p}) = p_k, \qquad k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Еще один первый интеграл системы (**SODE**) найдем из последнего уравнения в (**SODE′**), подставив в него уже полученные представления (**FI**).

Разрешив полученное после указанной подстановки уравнение относительно переменной u^0 в окрестности точки $t = 0$, придем к соотношению

$$u^0 = \mathfrak{U}_0(t, x, \vec{p}, u), \quad \text{где} \quad \mathfrak{U}_0(0, x, \vec{p}, u) = u.$$

Таким образом, найдено множество из $2n + 1$ первого интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений (**SODE**).

В окрестности точки $t = 0$ эти первые интегралы независимы.

С их помощью можно неявным образом задать общее решение сопутствующей уравнению Гамильтона—Якоби системы квазилинейных уравнений (2).

3^0. Запишем теперь систему соотношений, которой заведомо удовлетворяет решение

$$\boldsymbol{u = u(t, x)}$$

исходной задачи Коши (**HJ**)–(**ID**). С этой целью найденные для переменных с ноликами в качестве верхних индексов выражения подставим в соотношения (**Cau$'_{\mathrm{S}}$**):

$$\boldsymbol{u^0 = \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0), \qquad p^0 = \nabla\varphi(x_1^0, \dots, x_n^0).}$$

В результате получим систему, в общем случае нелинейных, уравнений

$$\begin{cases} \mathfrak{U}_0(t,x,\vec{p},u) = \varphi(\mathfrak{Y}_1(t,x,\vec{p}),\ldots,\mathfrak{Y}_n(t,x,\vec{p})), \\ \mathfrak{U}_k(t,x,\vec{p}) = \varphi_{x_k}(\mathfrak{Y}_1(t,x,\vec{p}),\ldots,\mathfrak{Y}_n(t,x,\vec{p})), \\ \quad k=1,\ldots,n. \end{cases} \tag{NonL}$$

Справедливо следующее утверждение, вытекающее из общей теоремы о неявных функциях.

Теорема. *В окрестности точки*

$$(t = 0, x, \varphi(x), \nabla\varphi(x))$$

существует единственная вектор-функция

$$\vec{u} = (u, p_1, \ldots, p_n),$$

удовлетворяющая уравнениям системы (**NonL**) *и являющаяся при этом решением задачи Коши* (**HJ**)–(**ID**).

Выразив из последних n уравнений системы ($\mathbf{NonL}$) переменные p_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, как функции аргументов (t, x), подставим затем эти формулы в первое уравнение той же самой системы ($\mathbf{NonL}$).

В результате получим одно уравнение, в общем случае нелинейное. Именно это уравнение задает неявно решение $u = u(t, x)$ исходной задачи Коши. Следует отметить, что корней у этого уравнения может быть несколько, но только один из них нужный.

Интересен случай, когда функция Гамильтона $H(t, x, \vec{p})$ в уравнении (**HJ**) однородна по переменным $\vec{p}$ со степенью один. В этом случае, как известно, для функции $H(t, x, \vec{p})$ справедливо тождество Эйлера:

$$H(t, x, \vec{p}) = \sum_{k=1}^{n} p_k H_{p_k}(t, x, \vec{p}).$$

Первый интеграл $\mathfrak{U}_0(t, x, \vec{p}, u)$ при этом совпадает со своим последним аргументом

$$\mathfrak{U}_0(t, x, \vec{p}, u) = u.$$

Первое из равенств в итоговой системе (**NonL**) существенно упрощается, принимая в итоге следующий вид

$$u = \varphi(\mathfrak{Y}_1(t, x, \vec{p}), \ldots, \mathfrak{Y}_n(t, x, \vec{p})).$$

4^0. Рассмотрим несколько примеров применения описанного выше алгоритма решения задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби.

Задача. *Найти решение задачи Коши:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = 0, \\ u\Big|_{t=0} = (x-1)^2 + y^2. \end{cases}$$

1. Амандус Н.Е., Кожанов А.И., Шваб И.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Часть1. Основной курс. Новосибирск: НГУ, 2008. 190 с.
2. Амандус Н.Е., Кожанов А.И., Шваб И.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Новосибирск: ВКИ НГУ, 2010. 96 с.
3. Годунов С.К. и др. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Новосибирск: НГУ, 1986.
4. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах. Новосибирск: НГУ, 2014.
5. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высшая школа,1989.
6. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: "РХД 2000.