

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра вычислительной математики

А. В. Войтишек

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ
О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ
СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Учебное пособие

Новосибирск
2007

ББК 22.19
УДК 519.245
В 654

Войтишек А. В. Дополнительные сведения о численном моделировании случайных элементов: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007. 92 с.

ISBN 978-5-94356-595-3

Данное пособие содержит конспективное изложение первой части лекций специального курса «Дополнительные сведения о моделировании случайных элементов и численном стохастическом интегрировании», который в течение 10 лет читается автором для студентов старших курсов механико-математического факультета НГУ.

Работа над пособием выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 06-01-00046а, 07-01-00024а), Программы № 14 Президиума РАН, Президентской программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-4774.2006.1).

Все замечания и предложения читателей по содержанию данной работы будут приняты автором с благодарностью (контактный телефон (8-383)-330-07-28; e-mail: vav@osmf.sccc.ru).

Рецензент
чл.-корр. РАН Г. А. Михайлов

© Новосибирский государственный университет, 2007
© Войтишек А. В., 2007

ISBN 978-5-94356-595-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
1. Свойства стандартных случайных чисел	6
2. Равномерность и корреляция соседних членов последовательности метода вычетов	10
3. Свойство периодичности и тестирование метода вычетов	12
4. Оптимизация стандартного метода моделирования дискретных случайных величин	15
5. Использование алгоритма моделирования равномерного дискретного распределения	19
6. Квантильный метод	22
7. Специальные методы моделирования дискретных случайных величин (на примере геометрического распределения)	23
8. Элементарные распределения непрерывных случайных величин	25
9. Моделирование случайных величин, имеющих составные плотности распределения	30
10. Построение элементарных плотностей	32
11. Построение моделируемых плотностей двумерных случайных векторов с зависимыми компонентами	35
12. Построение плотностей случайных величин, при моделировании которых целесообразно использовать методы суперпозиции	39
13. Модифицированный метод суперпозиции	46
14. Метод суперпозиции для составных плотностей	48
15. Построение плотностей случайных величин, при моделировании которых целесообразно использовать мажорантный метод исключения	53
16. Двусторонний метод исключения. Моделирование усеченных распределений	57
17. Применение полиномиальных и кусочно-полиномиальных плотностей	59
18. Моделируемость аппроксимации Стрэнга – Фикса	64
19. Моделируемость аппроксимации Бернштейна	68
20. Моделирование полиномиального распределения	71

21. Моделирование гамма-распределения	74
22. Моделирование бета-распределения	79
23. Моделирование нормального распределения	86
24. Моделирование изотропного вектора	88
Библиографический список	91

ПРЕДИСЛОВИЕ

С развитием вычислительной техники возрастает интерес к численным методам решения прикладных задач, в частности к статистическому моделированию (или методу Монте-Карло) [1–24].

Ключевым моментом при разработке методов Монте-Карло является возможность эффективной реализации выборочных значений случайных величин и случайных векторов на ЭВМ. Эта реализация состоит из двух этапов:

1) численно моделируются значения $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ стандартного случайного числа α , равномерно распределенного в интервале $(0, 1)$, с помощью специальной программы или устройства, которое называется *генератором случайных (псевдослучайных) чисел*;

2) с помощью некоторых преобразований полученных чисел $\{\alpha_j\}$ вычисляются значения случайных величин с более сложными законами распределения.

В связи с этим первые три раздела пособия посвящены вопросам построения генераторов стандартных случайных чисел. Далее последовательно рассматриваются вопросы моделирования дискретных случайных величин (стандартный алгоритм и его модификации – квантильный метод, метод Уолкера и др.), непрерывных случайных величин (метод обратной функции распределения, метод суперпозиции, метод исключения, специальные методы), случайных векторов.

Следует отметить, что в пособии представлены технологии построения «моделируемых» распределений, позволяющие создавать по сути неограниченные наборы вероятностных распределений (одномерных и многомерных), для которых существуют эффективные численные алгоритмы получения соответствующих выборочных значений. Эти распределения могут быть использованы в приложениях метода Монте-Карло.

Представляемый в пособии учебный курс следует рассматривать как дополнительный к курсу «Методы Монте-Карло», который многие годы читается для студентов 4-го курса механико-математического факультета НГУ. Поэтому основные «классические» результаты, касающиеся численного моделирования случайных элементов (см., например, гл. 1 из учебника [16]), изложены в этом пособии конспективно, без подробных обоснований и доказательств.

1. Свойства стандартных случайных чисел

1.1. Свойства случайной величины α . Основным инструментом для моделирования случайных величин на ЭВМ является подходящий генератор стандартных случайных чисел, дающий выборочные значения α_i случайной величины α , равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$. Перечислим вероятностные характеристики случайной величины α . Распределение этой величины является абсолютно непрерывным с плотностью

$$f(u) \equiv 1, \quad 0 < u < 1. \quad (1.1)$$

Функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, 0]; \\ x & \text{при } x \in (0, 1); \\ 1 & \text{при } x \in [1, +\infty). \end{cases} \quad (1.2)$$

Несложно вычислить математическое ожидание и дисперсию

$$\mathbf{E}\alpha = \int_0^1 u f(u) du = 1/2; \quad \mathbf{D}\alpha = \mathbf{E}\alpha^2 - (\mathbf{E}\alpha)^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12. \quad (1.3)$$

Для обоснования алгоритмов метода Монте-Карло важным является следующее свойство равномерно распределенных точек.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Если l -мерная точка α равномерно распределена в области $G_1 \subset R^l$ конечного объема $\bar{G}_1 = \int_{G_1} d\mathbf{u}$, то она также равномерно распределена в произвольной подобласти $G \subseteq G_1$ объема \bar{G} при условии попадания в эту подобласть; при этом $\mathbf{P}(\alpha \in G) = \bar{G}/\bar{G}_1$.

Отметим, что в дальнейшем эквивалентными будут считаться понятия случайного вектора, имеющего плотность распределения $f(\mathbf{u})$ в R^l , и случайной точки, распределенной согласно плотности $f(\mathbf{u})$ в R^l . В качестве следствия утверждения 1.1 сформулируем

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Пусть имеется интервал $(a, b) \subseteq (0, 1)$. Тогда случайная величина α равномерно распределена в (a, b) при условии попадания в этот интервал и $\mathbf{P}(\alpha \in (a, b)) = b - a$.

1.2. Теорема о двоичном представлении стандартного случайного числа. Важным для построения и тестирования генераторов стандартных случайных чисел является следующее рассуждение. Поскольку $\alpha \in (0, 1)$, двоичное представление каждого выборочного зна-

чения этой случайной величины имеет вид

$$\alpha = 0, \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(k)} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)} 2^{-k}, \quad (1.4)$$

причем каждый разряд $\alpha^{(k)}$ мантиссы числа (1.4) равен нулю или единице.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. *Для того чтобы случайная величина α была равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы двоичные цифры $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}, \dots$ из соотношения (1.4) представляли собой последовательность независимых бернуллиевских случайных величин с вероятностью успеха $1/2$: $\mathbf{P}(\alpha^{(k)} = 1) = \mathbf{P}(\alpha^{(k)} = 0) = 1/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Поскольку случайная величина (1.4) равномерно распределена в $(0, 1)$, то $\alpha^{(k)} = 0$ при

$$0, \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(k-1)} 0 \leq \alpha < 0, \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(k-1)} 1, \quad (1.5)$$

причем $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k-1)}$ в (1.5) могут принимать значения 0 и 1. Длина интервала (1.5) равна 2^{-k} , и интервалы (1.5) для разных наборов $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k-1)}$ не пересекаются, поэтому, используя утверждение 1.2, получаем

$$\mathbf{P}(\alpha^{(k)} = 0) = \sum_{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k-1)}=0}^1 2^{-k} = 2^{k-1} 2^{-k} = 1/2. \quad (1.6)$$

Тогда $\mathbf{P}(\alpha^{(k)} = 1) = 1 - \mathbf{P}(\alpha^{(k)} = 0) = 1/2$.

Докажем теперь независимость $\alpha^{(s)}$ и $\alpha^{(k)}$, где $1 \leq s < k$. Для этого рассмотрим вероятность $\mathbf{P}\{(\alpha^{(k)} = i) \cap (\alpha^{(s)} = j)\}$. Это число, очевидно, можно рассматривать как условную вероятность того, что выполнено (1.5), при условии, что $\alpha^{(s)}$ фиксировано. Тогда по аналогии с равенством (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(\alpha^{(k)} = i) \cap (\alpha^{(s)} = j)\} &= \sum_{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s-1)}, \alpha^{(s+1)}, \dots, \alpha^{(k-1)}=0}^1 2^{-k} = \\ &= 2^{k-2} 2^{-k} = 1/4 = \mathbf{P}(\alpha^{(k)} = i) \times \mathbf{P}(\alpha^{(s)} = j). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathbf{P}\{(\alpha^{(k_1)} = i_1) \cap \dots \cap (\alpha^{(k_q)} = i_q)\} = 2^{-q} = \mathbf{P}(\alpha^{(k_1)} = i_1) \times \dots \times \mathbf{P}(\alpha^{(k_q)} = i_q),$$

а это и означает независимость случайных цифр числа (1.4).

Достаточность. Очевидно, что дробь из правой части соотношения (1.4) принадлежит интервалу $(0, 1)$, поэтому

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)} 2^{-k} < x\right) = 0 \quad \text{при } x \leq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)} 2^{-k} < x\right) = 1$$

при $x \geq 1$. Возьмем произвольное $x = 0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$ из интервала $(0, 1)$ и покажем, что $\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)} 2^{-k} < x) = x$.

Если $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)} 2^{-k} < x$, то либо $\alpha^{(1)} < a_1$, либо $\alpha^{(1)} = a_1$ и $\alpha^{(2)} < a_2$, либо $\alpha^{(1)} = a_1$, $\alpha^{(2)} = a_2$ и $\alpha^{(3)} < a_3$ и т. д. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)} 2^{-k} < x\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{(\alpha^{(1)} = a_1) \cap \dots \cap (\alpha^{(k-1)} = a_{k-1}) \cap (\alpha^{(k)} < a_k)\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\alpha^{(1)} = a_1) \times \dots \times \mathbf{P}(\alpha^{(k-1)} = a_{k-1}) \times \mathbf{P}(\alpha^{(k)} < a_k); \end{aligned}$$

здесь использована независимость случайных цифр $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(k)}$. Легко видеть, что $\mathbf{P}(\alpha^{(k)} < a_k) = a_k/2$. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)} 2^{-k} < x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} a_k 2^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k} = x.$$

Таким образом, функция распределения случайной дроби из правой части соотношения (1.4) совпадает с функцией (1.2). Утверждение 1.3 доказано.

1.3. Два типа генераторов стандартных случайных чисел.

С одной стороны, доказанное утверждение 1.3 может повергнуть исследователя в некоторое уныние, так как оно говорит о том, что «настоящее» стандартное случайное число (1.4) имеет *бесконечную* мантиссу, воспроизвести которую на ЭВМ невозможно. С другой стороны, можно отметить, что в вычислительной математике машинные ошибки, связанные с конечностью мантиссы, часто не учитываются (в качестве примера можно указать использование форматов вещественных чисел на ЭВМ). Для используемых на практике генераторов случайных чисел эффекты, связанные с конечностью мантиссы, как правило, незначительны.

Утверждение 1.3 обосновывает принцип работы так называемых *физических датчиков случайных чисел*. Это технические устройства (чаще всего «шумящие» радиоэлектронные приборы), которые вырабатывают случайную последовательность двоичных цифр (условно: лампочка горит или не горит с вероятностью $1/2$; если вероятность не равна $1/2$, можно брать пары событий да–нет и нет–да, а события да–да, нет–нет отбрасывать). К преимуществам такого способа получения случайных чисел относят быстроту реализации и неограниченность запаса случайных чисел. Недостатком датчиков случайных чисел является то, что периодически требуется статистическая проверка вырабатываемых случайных чисел (поскольку даже сверхнадежное техническое устройство дает сбой). Кроме того, нет возможности воспроизвести расчеты. Следует тем не менее заметить, что существует немало вычислителей, которые предпочитают именно датчики случайных чисел, и работы по конструированию таких устройств продолжаются.

Большинство расчетов по методу Монте-Карло произведено и производится с помощью генераторов псевдослучайных чисел, представляющих из себя некоторые вычислительные подпрограммы (чаще всего такие подпрограммы называются *RAND* или *RANDOM*). Аргументами в пользу применения псевдослучайных чисел являются возможность воспроизводить расчеты, быстрота получения чисел, отсутствие внешних устройств и необходимости многократной проверки качества получаемых чисел, малая загруженность памяти ЭВМ. Большинство известных алгоритмов реализации псевдослучайных чисел имеют вид

$$\alpha_{n+1} = \psi(\alpha_n), \quad (1.7)$$

где начальное число α_0 задано. Областью значений функции ψ должен являться интервал $(0, 1)$.

Одно из соображений о том, каким образом следует выбирать функцию ψ из соотношения (1.7), состоит в следующем. Пары точек

$$(\alpha_1, \alpha_2 = \psi(\alpha_1)), (\alpha_3, \alpha_4 = \psi(\alpha_3)), (\alpha_5, \alpha_6 = \psi(\alpha_5)), \dots \quad (1.8)$$

с одной стороны, должны располагаться на кривой $y = \psi(x)$, а с другой – эти же точки должны (по свойствам «настоящих» стандартных случайных чисел) быть равномерно распределены в квадрате $Q_2 = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Поэтому график функции $\psi(x)$ должен достаточно плотно заполнять квадрат Q_2 . Примером такой функции $\psi(x)$ может служить

$$\psi(x) = \{Mx\} \quad (1.9)$$

для большого множителя M ; здесь $\{A\}$ обозначает дробную часть числа A . Алгоритм (1.7) с функцией (1.9) называется *мультипликативным методом вычетов* и является одним из наиболее часто употребляемых алгоритмов при моделировании псевдослучайных чисел.

2. Равномерность и корреляция соседних членов последовательности метода вычетов

2.1. Теорема о воспроизведении распределения. Отметим следующее свойство преобразования (1.9).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Случайная величина $\beta = \{M\alpha\}$ равномерно распределена в интервале $(0, 1)$ для любого целого положительного числа M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем функцию распределения $F_\beta(x) = \mathbf{P}(\beta < x)$. Согласно определению дробной части числа, имеем $\beta \in (0, 1)$, и поэтому $F_\beta(x) = 0$ при $x \leq 0$ и $F_\beta(x) = 1$ при $x \geq 1$. Если $x \in (0, 1)$, то, используя утверждение 1.2, получаем

$$\begin{aligned} F_\beta(x) &= \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{P}(k \leq M\alpha < k+x) = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{P}\left(\frac{k}{M} \leq \alpha < \frac{k+x}{M}\right) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{x}{M} = x. \end{aligned}$$

Из формулы (1.2) следует, что случайная величина β равномерно распределена в интервале $(0, 1)$. Утверждение 2.1 доказано.

2.2. Теорема о коэффициенте корреляции. Одним из существенных сомнений, связанных с использованием мультипликативного метода вычетов (1.7), (1.9), является то обстоятельство, что члены последовательности $\{\alpha_n\}$ зависимы между собой. Поэтому весьма важным является следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. *Коэффициент корреляции*

$$r(\alpha, \beta^{(s)}) = \mathbf{E}\left(\left(\frac{\alpha - \mathbf{E}\alpha}{\sqrt{\mathbf{D}\alpha}}\right)\left(\frac{\beta^{(s)} - \mathbf{E}\beta^{(s)}}{\sqrt{\mathbf{D}\beta^{(s)}}}\right)\right)$$

случайных величин α и

$$\beta^{(s)} = \{M\beta^{(s-1)}\}, \quad \beta^{(0)} = \alpha; \quad s = 1, 2, \dots$$

равен $1/M^s$ для любого целого положительного M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение доказывается индукцией по s . Основание индукции дает соотношение $r(\alpha, \beta) = 1/M$, которое обосновывается следующим образом. Из утверждения 2.1 следует, что случайная величина β является также стандартной и коэффициент корреляции равен

$$\begin{aligned} r(\alpha, \beta) &= \mathbf{E} \left(\left(\frac{\alpha - 1/2}{\sqrt{1/12}} \right) \left(\frac{\beta - 1/2}{\sqrt{1/12}} \right) \right) = \mathbf{E} \left(\left(\frac{M\alpha - M/2}{M\sqrt{1/12}} \right) \left(\frac{\beta - 1/2}{\sqrt{1/12}} \right) \right) = \\ &= \mathbf{E} \left(\left(\frac{[M\alpha] + \{M\alpha\} - (M/2 - 1/2) - 1/2}{M\sqrt{1/12}} \right) \left(\frac{\beta - 1/2}{\sqrt{1/12}} \right) \right) = \\ &= \mathbf{E} \left(\left(\frac{\gamma - (M/2 - 1/2)}{M\sqrt{1/12}} \right) \left(\frac{\beta - 1/2}{\sqrt{1/12}} \right) \right) + \mathbf{E} \left(\left(\frac{\beta - 1/2}{M\sqrt{1/12}} \right) \left(\frac{\beta - 1/2}{\sqrt{1/12}} \right) \right), \end{aligned}$$

где $\gamma = [M\alpha]$; здесь использованы соотношения (1.3). Случайная величина γ , принимающая значения $0, 1, \dots, M-1$ с равными вероятностями $1/M$, и непрерывная величина β независимы. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\gamma = k \cap (\beta \in (c, d))\} &= \mathbf{P}(k + c < M\alpha < k + d) = \\ &= \mathbf{P} \left(\frac{k + c}{M} < \alpha < \frac{k + d}{M} \right) = \frac{c - d}{M} = \mathbf{P}(\gamma = k) \times \mathbf{P}(\beta \in (c, d)); \end{aligned}$$

здесь $k = 0, 1, \dots, M-1$ и $0 < c < d < 1$. Таким образом,

$$r(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\mathbf{D}\gamma}}{M\sqrt{1/12}} r(\gamma, \beta) + \frac{1}{M} r(\beta, \beta) = \frac{1}{M}.$$

Индуктивный переход обосновывается аналогично. Утверждение 2.2 доказано.

Из утверждения 2.2 следует, что при $M \gg 1$ коэффициент корреляции между зависимыми величинами α_{n+s} и α_n невелик. Отметим также, что утверждения 2.1 и 2.2 сформулированы для «настоящего» стандартного случайного числа α . Можно сформулировать аналоги этих утверждений в случае применения метода (1.7), (1.9) для чисел α_n с ограниченной мантиссой длины m . При этом для достаточно большого m при удачном подборе множителя M статистические свойства членов последовательности (1.7), (1.9) и «настоящего» стандартного числа α близки (это показывают соответствующие статистические тесты).

3. Свойство периодичности и тестирование метода вычетов

3.1. Периодичность метода вычетов. Предположим, что начальный элемент последовательности (1.7), (1.9) равен $\alpha_0 = 2^{-m}$, а множитель имеет вид $M = 5^{2p+1}$, где p – целое положительное число. Такой выбор объясняется, в частности, тем, что многие специалисты использовали и проверяли последовательности с множителями M именно такого вида. Справедливо представление

$$\alpha_n = k_n 2^{-m}; \quad k_0 = 1, \quad k_n \equiv k_{n-1} 5^{2p+1} \pmod{2^m}. \quad (3.1)$$

Существенный недостаток мультипликативного метода вычетов (3.1) связан с тем, что количество чисел, имеющих мантиссу длины m и принадлежащих интервалу $(0, 1)$, является конечным, и поэтому последовательность (3.1) является *периодической*, т. е. рано или поздно какое-нибудь значение α_L совпадет со значением α_0 , и тогда, в силу соотношения (1.7), имеем

$$\alpha_{L+i} = \alpha_i \quad \text{при } i = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Наименьшее число L , удовлетворяющее соотношению (3.2), называется *длиной периода*. Обычно для расчетов не рекомендуют использовать больше чем $L/2$ чисел последовательности (1.7), (1.9).

Стандартными методами теории чисел можно доказать, что для мультипликативного метода вычетов (3.1) период равен $L = 2^{m-2}$. Величина $M = 5^{2p+1}$ в двоичном представлении оканчивается на 01, поэтому все α_n являются m -разрядными двоичными дробями, последние два разряда которых равны 01. Вследствие равенства $L = 2^{m-2}$ остальные $m - 2$ разряда «пробегают» все возможные комбинации. Поэтому в качестве α_0 можно выбрать любую m -разрядную двоичную дробь указанного типа.

Вопрос о пригодности псевдослучайных чисел (3.1) исследуется с помощью специальных статистических тестов (см. далее подразд. 3.2) и решения достаточно сложных тестовых задач. Для некоторых параметров (m, p) получаются удовлетворительные последовательности, для других – плохие. В новосибирской школе методов Монте-Карло для алгоритмов с числом испытаний n порядка 10^9 и меньше долгие годы вполне удовлетворительным считается генератор (3.1) с параметрами $m = 40$ и $p = 8$, прошедший всестороннее многолетнее тестирование.

В последнее время в связи с ростом мощностей современных вычислительных систем возникла потребность в генераторах с увеличенным периодом. В частности, для параллельных вычислений используется генератор (3.1) с параметрами $m = 128$ и $p = 50059$ из работы [15]. Определенные трудности конкретной реализации формул (3.1) на компьютере связаны с тем, что нужно производить действия с числами, имеющими мантиссу длины m , превосходящую стандартный формат ЭВМ.

3.2. Тестирование метода вычетов. Как указано выше, окончательный вывод о качестве того или иного генератора случайных или псевдослучайных чисел следует из результатов тестирования этого генератора. Сразу следует заметить, что никакая, даже самая широкая, система тестов не является достаточной для того, чтобы объявить тот или иной генератор подходящим. Процесс проверки данного генератора, вообще говоря, бесконечен. Более того, каждую задачу с известным решением, при численном решении которой используется генератор случайных (псевдослучайных) чисел, можно рассматривать как очередной тест для этого датчика. Мы упомянем наиболее распространенные тесты для проверки генераторов.

Одной из важнейших характеристик последовательностей $\{\alpha_n\}$ является свойство k -равномерности, смысл которого состоит в том, что векторы

$$\alpha_1^{(k)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \alpha_2^{(k)} = (\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{2k}), \dots, \alpha_n^{(k)} = (\alpha_{k(n-1)+1}, \dots, \alpha_{nk}) \quad (3.3)$$

должны с ростом n с вероятностью единица равномерно заполнять единичный k -мерный куб Q_k . Это означает, что частота попадания в любую прямоугольную подобласть куба стремится к объему этой области при $n \rightarrow \infty$.

Проверку этого свойства можно осуществлять, например, с помощью критерия хи-квадрат. Область Q_k разбивается на $r = s^k$ одинаковых достаточно малых кубов (при этом вводится равномерная сетка шага $1/s$ по каждой координате), подсчитываются частоты $\{\nu_i\}$ попадания векторов (3.3) в эти малые кубы и величина

$$\tilde{\chi}_{r-1}^2(n) = \sum_{i=1}^r \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (3.4)$$

где $\{p_i = 1/r\}$ – «теоретические» вероятности попадания равномерно распределенных векторов (3.3) в соответствующие кубы разбиения.

Согласно теореме Пирсона, справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tilde{\chi}_{r-1}^2(n) < x) = \int_0^x f_{\chi_{r-1}^2}(u) du, \text{ где } f_{\chi_{r-1}^2}(u) = \frac{u^{(r-1)/2-1} e^{-u/2}}{2^{(r-1)/2} \Gamma((r-1)/2)},$$

является плотностью хи-квадрат распределения с $(r-1)$ степенями свободы, а $\Gamma(v) = \int_0^{+\infty} w^{v-1} e^{-w} dw$ – гамма-функция. Задается доверительная вероятность (или коэффициент доверия) ε (чаще всего берут $\varepsilon = 0.95; 0.99; 0.999$) и из уравнения

$$\int_{\chi^2(r-1, 1-\varepsilon)}^{\infty} f_{\chi_{r-1}^2}(u) du = 1 - \varepsilon$$

находят (обычно с помощью соответствующих таблиц) величину $\chi^2(r-1, 1-\varepsilon)$, которую называют *доверительной границей с уровнем значимости* $(1-\varepsilon)$. Доверительная граница сравнивается со значением $\tilde{\chi}_{r-1}^2(n)$ из равенства (3.4), и если $\tilde{\chi}_{r-1}^2(n) < \chi^2(r-1, 1-\varepsilon)$, то исследуемая выборка (3.3) считается удовлетворительной, а если $\tilde{\chi}_{r-1}^2(n) \geq \chi^2(r-1, 1-\varepsilon)$ – неудовлетворительной. Для критерия χ^2 рекомендуется выбирать n и r таким образом, чтобы выполнялось неравенство $n/r \geq 10$.

Для проверки свойства k -равномерности применяется также ряд других тестов. Прежде всего упомянем тест « k -нормальности», основанный на переходе от векторов (3.3) к соответствующим k -мерным векторам независимых стандартных нормальных случайных величин. Весьма широкое применение имеют спектральные тесты, основанные на критерии Вейля (волновой тест и др.).

Учитывая утверждение 1.3, при проверке генераторов можно исследовать случайность цифр стандартных чисел α . Здесь проверяют частоту появления различных цифр в числах, реализуемых генератором (тест «проверка частот»); частоту различных двузначных чисел среди пар цифр, реализуемых подряд генератором (тест «проверка пар»); частоту различных интервалов между двумя последовательными нулями (тест «проверка интервалов»); частоту различных четырехзначных чисел среди четверок цифр, реализуемых подряд (тест «проверка комбинаций»); частоту появления q одинаковых цифр подряд («тест серий» длины q) и др. В упомянутых тестах также активно используется критерий хи-квадрат.

Для проверки качества стандартных случайных и псевдослучайных чисел используют также критерий ω^2 Н. В. Смирнова, корреляционные критерии и др.

Известны эффективные модификации мультипликативного метода вычетов, связанные с использованием операции конгруэнтного (т. е. по модулю 1) суммирования последовательностей вида (3.1), а также с применением физического датчика для получения начального числа α_0 .

3.3. Два важных замечания. В заключение этого раздела сформулируем два важных замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Как правило, генераторы псевдослучайных чисел, представленные в современных версиях языков программирования (*FORTRAN*, *PASCAL*, *СИ++* и др.), достаточно хорошо протестированы и дают статистически удовлетворительные результаты вычислений по методу Монте-Карло (во всяком случае, для задач, в которых используется умеренно большое количество выборочных значений случайных величин). Поэтому, несмотря на сформулированные выше замечания о возможных недостатках датчиков (конечность используемой мантиссы, периодичность и т. п.), в дальнейшем будем полагать, что используемый в расчетах генератор стандартных случайных чисел дает «настоящие» (теоретические) выборочные значения α .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Мультипликативный метод вычетов (3.1), даже реализованный оптимально для используемого языка программирования, является относительно трудоемким (по сравнению, например, с простым умножением чисел). Поэтому при оптимизации алгоритмов метода Монте-Карло целесообразно по-возможности уменьшать число обращений к подпрограмме типа *RANDOM*.

4. Оптимизация стандартного метода моделирования дискретных случайных величин

4.1. Стандартный метод моделирования дискретных случайных величин. Рассмотрим вопрос о моделировании дискретной случайной величины ξ с конечным числом значений x_1, \dots, x_N и распределением вероятностей

$$\mathbf{P}(\xi = x_i) = p_i; \quad p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (4.1)$$

АЛГОРИТМ 4.1. Реализуем значение $Q := \alpha$ (т. е. $Q := \text{RANDOM}$) и полагаем $m := 1$. Производим переприсваивание

$$Q := Q - p_m \quad (4.2)$$

(т. е. заносим новое значение $(\alpha - p_1)$ в ячейку Q). Если новое Q не положительно, то в качестве t выбираем текущее его значение и полагаем $\xi = x_m$, в противном случае производим переприсваивания $t := t+1$ и (4.2) и вновь производим проверку Q на положительность и т. д.

Важным примером дискретных случайных величин являются целочисленные случайные величины ξ , для которых

$$x_i = i, \quad \mathbf{P}(\xi = i) = p_i \quad (4.3)$$

для $i = 1, 2, \dots, N$. Алгоритм 4.1 в этом случае имеет следующий вид.

АЛГОРИТМ 4.2. Реализуем значение $Q := \alpha$ и полагаем $t := 1$. Производим переприсваивание (4.2). Если новое значение Q не положительно, то полагаем $\xi = t$, в противном случае производим переприсваивания $t := t + 1$ и (4.2) и вновь производим проверку Q на положительность и т. д.

4.2. Трудоемкость стандартного алгоритма. Легко видеть, что в случае, когда $\xi = x_m$, приходится осуществлять t проверок Q на положительность. В общие затраты δ алгоритма 4.1 входят затраты на моделирование одной стандартной случайной величины (их обозначим a) и реализацию сравнений Q с нулем (затраты на каждое сравнение обозначим b). Тогда средняя трудоемкость t алгоритма равна

$$t = \mathbf{E}\delta = a + \left(\sum_{i=1}^N ip_i \right) \times b. \quad (4.4)$$

Заметим, что для целочисленной случайной величины ξ с распределением (4.3) величина t из соотношения (4.4) представима в виде $t_1 = a + b \mathbf{E}\eta$.

4.3. Расположение вероятностей в порядке убывания. При реализации алгоритмов 4.1 и 4.2 целесообразно (если это возможно) располагать вероятности p_i в порядке их убывания.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Оптимальным распределением вероятностей, при котором средние затраты t из (4.4) минимальны, является*

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_N. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждаем от противного. Пусть для некоторого распределения вероятностей $\{p'_1, \dots, p'_N\}$ соотношение (4.5) не

выполнено, а величина $t' = a + \left(\sum_{i=1}^N ip'_i\right) \times b$ минимальна. Тогда найдутся такие номера s и k , для которых одновременно выполнено

$$s < k \text{ и } p'_s < p'_k. \quad (4.6)$$

Рассмотрим новое распределение вероятностей $\{p''_1, \dots, p''_N\}$, которое получено из распределения $\{p'_1, \dots, p'_N\}$ перестановкой вероятностей p'_s и p'_k , т. е. $p''_j = p'_j$ при $j \neq s, j \neq k$ и $p''_s = p'_k, p''_k = p'_s$. Рассмотрим разность

$$t' - t'' = (sp'_s + kp'_k - sp''_s - kp''_k)b = (sp'_s + kp'_k - sp'_k - kp'_s)b_1 = (k-s)(p'_k - p'_s)b.$$

Из соотношения (4.6) следует, что $t' - t'' > 0$ и $t'' < t'$. Получили противоречие с тем, что величина t' минимальна. Утверждение 4.1 доказано.

4.4. Случай малого и бесконечного числа значений. Отметим, что в алгоритме 4.1 возможна следующая модификация. Если $\alpha - R_{N-1} > 0$, то последнее вычитание можно не производить, так как в этом случае $\alpha \in \Delta_N$. Соответствующий аналог формулы (4.4) имеет вид

$$t = a + \left(\sum_{i=1}^{N-1} ip_i + (N-1)p_N\right) \times b.$$

Однако выигрыш от этой модификации сказывается только для малых N , так как при ее применении требуется проводить сравнение текущего m с $(N-1)$. Рассмотрим, в частности, случай $N = 2$. Здесь алгоритм 4.1 приобретает следующий простой вид.

АЛГОРИТМ 4.3. *Реализуем значение α . Если $\alpha < p_1$, то $\xi = x_1$, иначе $\xi = x_2$.*

В случае $N = \infty$ для задания распределения (4.1) вместо конкретных значений $\{x_i\}$ и вероятностей $\{p_i\}$ используются формулы их вычисления

$$x_i = \varphi(i); \quad p_i = \psi(i). \quad (4.7)$$

Для получения вероятностей часто более удобными (экономичными) являются рекуррентные формулы вида

$$p_{i+1} = z(p_i), \quad \text{а конкретнее } p_{i+1} = p_i r(i+1). \quad (4.8)$$

При реализации алгоритма 4.1 в случае бесконечного числа значений перед вычитанием соответствующей вероятности требуется вычислить ее по одной из формул (4.7) или (4.8).

АЛГОРИТМ 4.4. Реализуем значение стандартной случайной величины $Q := \alpha$ и полагаем $t := 1$ и $P := p_1$ (или $P := \psi(1)$). Производим переприсваивание

$$Q := Q - P. \quad (4.9)$$

Если новое Q не положительно, то в качестве значения ξ выбираем $\xi = \varphi(t)$ для текущего t ; в противном случае полагаем $t := t + 1$, производим пересчет вероятности $P := \psi(t)$ ($P := z(P)$ либо $P := Pr(t)$) и переприсваивание (4.9) и вновь производим проверку Q на положительность и т. д.

Средние затраты алгоритма 4.4 равны

$$t = a + \left(\sum_{i=1}^{\infty} i p_i \right) (b + c), \quad (4.10)$$

где c – средние затраты на пересчет вероятности. В случае, когда пересчет вероятностей происходит по рекуррентным формулам (4.8) и вероятность p_1 задана, число t из равенства (4.10) уменьшается на величину c . Для целочисленных случайных величин ξ с распределением (4.3) при $i = 1, 2, \dots$ формула (4.10) имеет вид

$$t_1 = a + (b + c)E\eta. \quad (4.11)$$

Существует ряд способов понизить трудоемкость (4.10), к числу которых относится, в частности, расположение (если это возможно) вероятностей p_i в порядке убывания (см. утверждение 4.1). В случае, когда пересчет вероятностей по одной из формул (4.7) или (4.8) является трудоемким (т. е. величина c велика), можно выбрать число N_0 так, чтобы сумма вероятностей $R_{N_0} = p_1 + p_2 + \dots + p_{N_0}$ была близка к единице и имелась возможность сохранить в оперативной памяти ЭВМ массив значений p_0, p_1, \dots, p_{N_0} . Тогда при $\alpha < R_{N_0}$ реализуется алгоритм 4.1 (без пересчета вероятностей), а формулы (4.7) или (4.8) будут использоваться только при $\alpha \geq R_{N_0}$, т. е. достаточно редко. Существенно снижают затраты (4.4), (4.10) алгоритмов 4.1 и 4.4 для $N \gg 1$ или $N = \infty$ рассмотренные далее в разделах 5 и 6 *метод Уолкера* и *квантильный метод* (алгоритмы 5.2 и 6.1). В этих алгоритмах существенно используется специальный алгоритм моделирования *равномерного дискретного распределения* (алгоритм 5.1).

5. Использование алгоритма моделирования равномерного дискретного распределения

5.1. Случай равных вероятностей. Реализация случайной величины ξ с конечным числом значений заметно упрощается, когда все значения x_1, \dots, x_N равновероятны, т. е. в соотношениях (4.1) все p_i равны $1/N$ (такое распределение вероятностей называется *дискретным равномерным*).

АЛГОРИТМ 5.1. Реализуем выборочное значение α стандартного случайного числа и полагаем

$$m = [\alpha N] + 1 = [\alpha N + 1] \quad (5.1)$$

(здесь $[A]$ обозначает целую часть числа A) и $\xi = x_m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Для достаточно больших N преимущество использования алгоритма 5.1 вместо алгоритма 4.1 очевидно. Однако неверно говорить что алгоритм 5.1 *всегда* экономичнее алгоритма 4.1. Так, для $N = 2$ и $p_1 = p_2 = 1/2$ более экономичным (по сравнению с алгоритмом 5.1), как правило, является алгоритм 4.3 (частный случай алгоритма 4.1). Здесь все зависит от того, насколько быстро работают операции взятия целой части числа, вычитания, сравнения и т. п., а это, в свою очередь, определяется выбором компьютера и языка программирования. Поэтому в каждом конкретном случае может существовать свое число N_0 , для которого при $N \leq N_0$ более экономичным является алгоритм 5.1, а при $N > N_0$ – алгоритм 4.3. Значение N_0 определяется экспериментально с помощью реализации выборки ξ_1, \dots, ξ_n и фиксации затрат $s = nt$ для каждого из алгоритмов 4.1 и 5.1.

5.2. Приведение вероятностей к общему знаменателю. Алгоритм 5.1 позволяет предложить целый ряд модификаций алгоритмов 4.1 и 4.4. Мы рассмотрим три таких модификации: для относительно небольшого N (приведение вероятностей к общему знаменателю), для умеренно большого N (метод Уолкера – см. подразд. 5.3) и для большого N (квантильный метод – см. разд. 6).

Рассмотрим случай относительно небольшого N такого, что вероятности p_i из соотношений (4.1) представляют собой обыкновенные дроби, которые можно привести к общему знаменателю M , т. е. $p_i = m_i/M$, причем $m_1 + \dots + m_N = M$ и $M \leq M_0$. Здесь через M_0 обозначен размер максимального массива для заданного компьютера и выбранного языка программирования.

Рассмотрим случайную величину ξ' , эквивалентную случайной величине ξ с распределением (4.1) и такую, что $\xi' = x'_j = x_i$ при $j = \sum_{s=1}^{i-1} m_s + 1, \dots, \sum_{s=1}^i m_s$, причем $\mathbf{P}(\xi' = x'_j) = 1/M$ (т. е. первые m_1 значений x'_j случайной величины ξ' равны x_1 , следующие m_2 значений равны x_2 и т. д., причем все значения $\{x'_j\}$ равновероятны). Выборочные значения случайной величины ξ' реализуются согласно алгоритму 5.1: $\xi' = x'_{m'}$, при $m' = [M\alpha] + 1$. Рассмотренная модификация означает замену алгоритма 4.1 для моделирования случайной величины ξ на алгоритм 5.1 для величины ξ' .

5.3. Метод Уолкера. Рассмотрим теперь случай умеренно большого N , для которого $N \approx M_0/2$. Здесь вместо алгоритма 4.1 можно предложить простую конструкцию, включающую использование формулы (5.1) и одного сравнения. Идею этой конструкции проще всего объяснить графически. Изобразим распределение (4.1) в виде диаграммы, состоящей из столбцов единичной ширины и высоты p_i .

Рис. 1. Схема перераспределения вероятностей при применении метода Уолкера

Проведем на высоте $h = 1/N$ линию, параллельную основанию диаграммы. Часть столбцов диаграммы имеют высоту, большую h , а часть – меньшую h . Несложно сформулировать алгоритм перераспределения частей столбцов диаграммы таким образом, чтобы все столбцы имели высоту h и в каждом из них были не более чем две доли исходных

столбцов (см. рис. 1). Процедура перераспределения состоит в последовательном выборе максимального (например, l -го) и минимального (m -го) столбцов (при этом выполнены строгие неравенства $p_l > 1/N$ и $p_m < 1/N$) и в дополнении m -го столбца частью l -го до высоты h (это возможно, так как на любом шаге процесса $p_{min} + p_{max} \geq 1/N$, ведь иначе $\sum_{i=1}^N p_i < 1$). После каждого шага заводится двумерная ячейка E_m , в которой хранится число $F_m = Np_m$ (здесь p_m – минимальная на данном шаге высота столбца) и номер столбца l , из которого взято дополнение m -го столбца. В дальнейшем m -я ячейка не меняется (соответствующий столбец имеет высоту $1/N$ и он не может быть ни максимальным, ни минимальным, так как не выполнены неравенства $p_m > 1/N$ и $p_m < 1/N$). Если же исходный (m -й) столбец имел высоту $h = 1/N$, то он заменяется на двумерную ячейку E_m , в которой вторая координата пуста. Процесс перераспределения заканчивается (через N шагов), когда на всех позициях возникают двумерные ячейки E_j (т. е. фактически возникает массив длины $2N$, что объясняет соотношение $N \approx M_0/2$ для максимально возможных N). После проведенной подготовительной работы возникает

АЛГОРИТМ 5.2. *Согласно формуле $m = [\alpha_1 N + 1]$ (см. соотношение (5.1)) выбираем номер ячейки $E_m = (F_m; l)$. Реализуем также второе выборочное значение α_2 стандартной случайной величины. Если $\alpha_2 < F_m$, то $\xi = x_m$, иначе $\xi = x_l$.*

Обоснование алгоритма 5.1 основано на том обстоятельстве, что точка $(\alpha_1 N + 1, \alpha_2/N)$ равномерно распределена в прямоугольнике $(1, N+1) \times (0, 1/N)$, полученном после перераспределения вероятностей, и на применении утверждения 1.1. Заметим, что алгоритм 5.2 допускает следующую модификацию: вместо α_2 можно взять величину

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1 - (m-1)/N}{1/N} = N\alpha_1 - m + 1. \quad (5.2)$$

Обоснование такой замены следует из того, что случайная величина α_3 равномерно распределена на интервале $(0, 1)$ для любого $\alpha_1 \in ((m-1)/N, m/N)$, что, в свою очередь, следует из утверждения 1.2 (см. также обоснование модифицированного метода суперпозиции – утверждение 13.1). Целесообразность применения формулы (5.2) связана с тем, что реализация нового выборочного значения α_2 с помощью обращения к генератору типа *RANDOM* является относительно трудоемкой операцией (см. замечание 3.2).

6. Квантильный метод

Рассмотрим случай большого N (т. е. $N > M_0$ и даже $N = \infty$). Трудоемкости t из соотношений (4.4) и (4.10) в этом случае можно существенно уменьшить, если применить так называемый *квантильный метод* моделирования дискретных случайных величин, который состоит в следующем.

Зададим целое число K и разобьем интервал $(0, 1)$ на K равных частей $[(j-1)/K, j/K)$, $j = 1, \dots, K$. Далее построим массив целых чисел $\{X_j\}_{j=1}^K$ такой, что

$$X_j = \min\{k : R_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k \geq (j-1)/K\},$$

который называется *массивом нижних квантилей* (см. рис. 2). Этот массив задает номер k элемента массива $\{R_i; i = 1, 2, \dots, N\}$, с которого следует начинать поиск «вверх» (т. е. как и в алгоритмах вида 4.1 и 4.4, вычитать величины R_q , $q = k, k+1, \dots$ из α до получения первого отрицательного значения) при $(j-1)/K \leq \alpha < j/K$.

Рис. 2. Схема формирования сумм R_{x_j} при применении квантильного метода

Окончательно моделирование дискретной случайной величины выглядит следующим образом.

АЛГОРИТМ 6.1. 1. Реализуем выборочное значение α равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$ случайной величины.

2. Вычисляем номер j полуинтервала $[(j-1)/K, j/K)$, в который попадает α по формуле типа (5.1): $j = [K\alpha + 1]$.

3. Реализуем последовательный поиск «снизу вверх» начиная с R_{X_j} .

Сформулированный алгоритм не приводит, как в алгоритмах из разд. 5, к полной замене алгоритмов 4.1 и 4.4, а лишь убыстряет процесс вычитания сумм R_m в стандартных алгоритмах 4.1 и 4.4 за счет применения формулы (5.1) и использования дополнительной оперативной памяти ЭВМ для хранения массивов номеров $\{X_j\}$ и сумм $\{R_{X_j}\}$. Тестовые вычисления показали, что при $N \leq 3M_0$ следует выбирать

число K квантилей $[(j-1)/K, j/K)$ так, чтобы выполнялось соотношение $N/K \approx 3$ (при этом трудоемкость алгоритма 6.1 практически не меняется с ростом N).

Особо подчеркнем, что квантильный метод работает и в случае бесконечного числа значений случайной величины ξ (т. е. для $N = \infty$); здесь можно брать $K \approx M_0$.

Отметим также, что можно построить эффективную реализацию алгоритма 6.1 в случае, когда число N относительно мало и $M_0 > s = 1/\min_{i=1, \dots, N} p_i$. Тогда можно взять число квантилей как целую часть $K = [s]$; при этом в каждом квантиле $[(j-1)/K, j/K)$ будет не более одного значения R_k и в п. 3 алгоритма 6.1 потребуется не более одного вычитания.

7. Специальные методы моделирования дискретных случайных величин (на примере геометрического распределения)

7.1. Стандартные и специальные алгоритмы моделирования случайных величин. Для ряда важнейших (с прикладной точки зрения) распределений дискретных и непрерывных случайных величин стандартные алгоритмы либо не реализуемы, либо не эффективны. В этих случаях предпринимаются (часто довольно успешные) попытки построить специальные алгоритмы моделирования, учитывающие свойства заданного распределения. Примером эффективного специального алгоритма может служить алгоритм 5.1 реализации выборочных значений случайной величины, имеющей равномерное дискретное распределение.

7.2. Стандартный алгоритм моделирования геометрического распределения и его модификации. Проанализируем соотношение стандартных и специальных алгоритмов на примере моделирования дискретной целочисленной случайной величины ξ (здесь, напомним, $x_i = i$) с бесконечным числом значений и с *геометрическим распределением* вида

$$p_i = p(1-p)^{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots; \quad 0 < p < 1. \quad (7.1)$$

Для численного моделирования ξ можно применить соответствующий алгоритм 4.4, причем для пересчета вероятностей целесообразно использовать мультипликативную рекуррентную формулу (4.8) при

$r(i+1) = p_{i+1}/p_i \equiv 1 - p$. Разлагая функцию $1/(1-z)^2$ в ряд Тейлора в точке $z_0 = 0$ и полагая $z = q = 1 - p$, получаем

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} \quad \text{и тогда} \quad \mathbf{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} ipq^{i-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Согласно формуле (4.11), трудоемкость стандартного алгоритма 4.4 равна $t_1 = a + (b+c)/p$.

7.3. Специальный алгоритм «с логарифмами». Рассмотрим сначала следующий специальный метод моделирования целочисленной случайной величины ξ .

АЛГОРИТМ 7.1. *Моделирование производится по формуле*

$$\xi = \left\lceil \frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)} \right\rceil + 1, \quad 0 < p < 1. \quad (7.2)$$

Покажем, что случайная величина (7.2) имеет распределение (7.1). Используя утверждение 1.2, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi = k) &= \mathbf{P}\left(k-1 \leq \frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)} < k\right) = \\ &= \mathbf{P}\{k \ln(1-p) < \ln \alpha \leq (k-1) \ln(1-p)\} = \\ &= \mathbf{P}\{\ln(1-p)^k < \ln \alpha \leq \ln(1-p)^{k-1}\} = \mathbf{P}\{(1-p)^k < \alpha \leq (1-p)^{k-1}\} = \\ &= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = (1-p)^{k-1}(1 - (1-p)) = p(1-p)^{k-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Сравнивая алгоритмы 4.4 и 7.1, можно, по аналогии с замечанием 5.1, отметить, что, несмотря на компактность формулы (7.2), неверно говорить, что алгоритм 7.1 *всегда* экономичнее алгоритма 4.4. Для вероятности успеха p , близкой к единице, затраты t из равенства (4.10) относительно невелики, а в формуле (7.2) для любого p дважды применяется трудоемкая операция логарифмирования. Поэтому для выбранного компьютера и данного языка программирования можно экспериментально найти число p_0 , для которого при $p \geq p_0$ более экономичным является алгоритм 4.4, а при $p < p_0$ – алгоритм 7.1.

7.4. Методы браковки. Напомним, что случайная величина ξ , имеющая геометрическое распределение (7.1), определяет количество испытаний Бернулли γ до получения первого успеха. Из этого следует, что моделирование ξ можно осуществлять с помощью реализации

соответствующих комбинаций величин $\{\gamma_{ij}\}$; такие алгоритмы называются *методами браковки*. Конкретнее, $\xi = \min\{i : \gamma_i = 1\}$, т. е. метод браковки состоит в последовательной проверке неравенства $\alpha_i < p$ (см. алгоритм 4.3) до тех пор, пока оно не окажется верным. В силу замечания 3.2 методы браковки неэффективны (во всяком случае, для малых p) из-за необходимости реализации большого количества стандартных случайных чисел $\{\alpha_i\}$ (т. е. методы браковки следует «забраковать»).

8. Элементарные распределения непрерывных случайных величин

8.1. Особенности моделирования случайных величин с непрерывными распределениями. Рассмотрим теперь алгоритмы моделирования случайной величины ξ , областью значений которой является интервал или объединение интервалов. В дальнейшем в подавляющем числе случаев предполагается, что $\xi \in (a, b)$, т. е. случайная величина ξ принимает значения в интервале (a, b) , где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, и ее функция распределения $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$ непрерывна и строго возрастает при $x \in (a, b)$, при этом

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a \text{ и } F(x) = 1 \text{ при } x \geq b; \quad (8.1)$$

для случаев $a = -\infty$ и $b = +\infty$ соотношения (8.1) приобретают вид

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1 \text{ или } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Случаи, когда область значений представляет собой объединение непересекающихся интервалов или дискретных множеств с интервалами (при этом нарушаются условия строгой монотонности или непрерывности функции $F(x)$), будут считаться «экзотическими».

В случае $\xi \in (a, b)$, в отличие от дискретного случая, отдельное значение $x_0 \in (a, b)$ имеет нулевую вероятность. Здесь функция распределения позволяет вычислять вероятности того, что ξ принадлежит некоторому интервалу:

$$\mathbf{P}(\xi \in (c, d)) = F(d) - F(c). \quad (8.2)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать практически значимые случайные величины $\xi \in (a, b)$, распределения которых являются *абсолютно непрерывными*, что означает существование для каждой из них неотрицательной функции $f(u)$ такой, что для любого интервала

$(c, d) \subseteq (a, b)$ выполнено

$$\mathbf{P}(\xi \in (c, d)) = \int_c^d f(u) du. \quad (8.3)$$

Функция $f(u)$ называется *плотностью распределения*. Она определена с точностью до значений на множестве меры нуль. В дальнейшем рассматриваются непрерывные и кусочно-непрерывные «версии» плотности $f(u)$. Свойствами плотности являются

$$f(u) \geq 0 \quad \text{при } u \in (a, b); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = \int_a^b f(u) du = 1; \quad (8.4)$$

$$f(u) = 0 \quad \text{при } u \notin (a, b). \quad (8.5)$$

Будем также предполагать, что при $u \in (a, b)$ множество точек, таких что $f(u) = 0$, имеет меру нуль. Из соотношений (8.2), (8.3) следует, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (8.6)$$

и почти всюду (по мере Лебега) имеет место равенство $f(u) = dF(u)/du$. Из соотношения (8.6) следует, что абсолютно непрерывное распределение можно задавать не функцией распределения $F(x)$, а плотностью $f(u)$. Еще раз отметим, что подавляющее большинство рассматриваемых далее распределений являются абсолютно непрерывными. Соответствующие случайные величины будем называть *непрерывными* (опуская дополнение *абсолютно*).

8.2. Метод обратной функции распределения. Сформулируем *стандартный алгоритм (метод обратной функции распределения)*.

АЛГОРИТМ 8.1. Для численной реализации (моделирования) выборочного значения $\xi \in (a, b)$ используем формулу

$$\xi = F^{-1}(\alpha); \quad (8.7)$$

здесь α – стандартное случайное число.

8.3. Элементарные плотности распределения. Алгоритм 8.1 на первый взгляд закрывает вопрос о моделировании случайных величин $\xi \in (a, b)$. Однако остается одна важная «техническая» проблема, связанная с использованием формул вида (8.7) в реальных вычислительных программах.

ЗАДАЧА 8.1. Представить зависимость $\psi(x) = F^{-1}(x)$ в виде простой композиции элементарных функций так, чтобы вычисление значения $\psi(x)$ могло быть эффективно реализовано на ЭВМ.

В случае, когда задача 8.1 разрешима, будем называть плотность распределения случайной величины ξ и соответствующие формулу (8.7) и алгоритм 8.1 – *элементарными* (с точки зрения возможности численного моделирования). Сразу заметим, что практически для всех распределений, для которых задача 8.1 неразрешима, удастся построить альтернативные алгоритмы численной реализации (моделирования) выборочных значений (методы исключения, суперпозиции и т. п. – см. далее разд. 12–24). Однако для случайных величин, имеющих элементарные распределения, алгоритм 8.1 является, как правило, наиболее эффективным (экономичным).

8.4. Примеры плотностей, не являющихся элементарными.

Опишем трудности, возникающие при решении задачи 8.1. Пусть имеется непрерывная случайная величина $\xi \in (a, b)$, распределенная согласно плотности $f(u)$. С учетом того что величины ξ и $F^{-1}(\alpha)$ принадлежат интервалу (a, b) , а функция $F(x)$ является возрастающей на этом интервале, перепишем равенство (8.7) в эквивалентной форме $F(\xi) = \alpha$. В свою очередь, в силу соотношений (8.5), (8.6), последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_a^\xi f(u) du = \alpha. \quad (8.8)$$

Распределение случайной величины ξ является элементарным, если решение уравнения (8.8) представимо в виде $\xi = \psi(\alpha)$, где $\psi(x)$ – простая композиция элементарных функций, и вычисление значения $\psi(x)$ на ЭВМ реализуется достаточно эффективно.

Уравнение (8.8) может быть неразрешимым по двум причинам. Первая причина связана с тем, что интеграл в левой части равенства (8.8) не берется (т. е. соответствующая первообразная не выражается в элементарных функциях); примером может служить широко применимое *стандартное нормальное распределение* с плотностью

$$f(u) = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\infty < u < +\infty. \quad (8.9)$$

Для распределения (8.9) имеется эффективный алгоритм моделирования, связанный со свойствами изотропного вектора случайной длины (см. далее разд. 23, 24).

Вторая причина, по которой распределение случайной величины может не оказаться элементарным, связана с тем, что даже если интеграл из (8.8) берется, получаемое уравнение может быть неразрешимым (в элементарных функциях) относительно ξ . В качестве примера такой ситуации можно привести *полиномиальное распределение* с плотностью

$$f(u) = \sum_{j=0}^N a_j u^j, \quad 0 < u < 1. \quad (8.10)$$

Получаемое при решении уравнения (8.8) для плотности (8.10) соотношение

$$\sum_{j=0}^N a_j \xi^{j+1} / (j+1) = \alpha$$

в общем случае неразрешимо (в элементарных функциях) относительно ξ при $N \geq 2$ и $a_j \neq 0$. Специальные алгоритмы моделирования распределения (8.10) (в частности, метод суперпозиции для случая $a_j \geq 0$ и метод исключения для произвольных коэффициентов $\{a_j\}$, а также некоторые специальные методы) представлены далее в разд. 20.

8.5. Примеры элементарных плотностей: экспоненциальное распределение и распределение индикатрисы Хеньи – Гринштейна. Несмотря на перечисленные в предыдущем подразделе трудности, можно построить неограниченное количество примеров элементарных распределений. Эту возможность дает, в частности, простая технология, основанная на теореме о замене случайных переменных (см. далее разд. 10). Поэтому имеет смысл представлять элементарные распределения, в той или иной степени «знаменитые» (важные) в приложениях метода Монте-Карло и теории вероятностей.

ПРИМЕР 8.1. Рассмотрим *экспоненциальное распределение* с плотностью

$$f(u) = \lambda e^{-\lambda u}, \quad u > 0; \quad \lambda > 0. \quad (8.11)$$

Сфера применения этого распределения весьма широка. На основе этого распределения формируются пуассоновские потоки, используемые в теории массового обслуживания, в простейших моделях теории переноса излучения, при моделировании случайных полей и т. д.

Решая уравнение вида (8.8) $\int_0^\xi \lambda e^{-\lambda u} du = \alpha'$, получаем

$$-e^{-\lambda u} \Big|_0^\xi = \alpha', \quad \text{или} \quad e^{-\lambda \xi} = 1 - \alpha', \quad \text{или} \quad \xi = -\frac{\ln(1 - \alpha')}{\lambda}.$$

Заметим, что величина $\alpha = 1 - \alpha'$ равномерно распределена в $(0, 1)$. Действительно, в силу того что $\alpha' \in (0, 1)$ имеем $F_\alpha(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0]$ и $F_\alpha(x) = 1$ при $x \in [1, +\infty)$. Наконец, для $x \in (0, 1)$ выполнено

$$F_\alpha(x) = \mathbf{P}(1 - \alpha' < x) = \mathbf{P}(\alpha' > 1 - x) = 1 - (1 - x) = x, \quad (8.12)$$

т. е. случайная величина α имеет функцию распределения (1.2). Обращаясь к датчику типа *RANDOM*, мы можем считать, что реализуется выборочное значение α , и тогда моделирующая формула для экспоненциального распределения приобретает вид

$$\xi = -\frac{\ln \alpha}{\lambda}. \quad (8.13)$$

Последнее на первый взгляд несущественное замечание о замене $(1 - \alpha')$ на α является весьма важным с прикладной точки зрения, так как во многих практических расчетах количество обращений n к формуле (8.13) очень велико ($n \gg 1$), и небольшая экономия ε , связанная с ликвидацией одного вычитания, может дать ощутимый выигрыш в эффективности на величину $n\varepsilon$. При практическом применении тех или иных моделирующих соотношений в трудоемких прецезионных расчетах следует весьма тщательно выверять эти формулы на предмет их эффективности. Например, соотношение (8.13) можно переписать в виде $\xi = (\ln(1/\alpha))/\lambda$, однако последняя формула хуже с точки зрения практического применения, чем соотношение (8.13), так как операция деления более трудоемка, чем взятие минуса.

ПРИМЕР 8.2. При численном решении задач теории переноса излучения широко используется *индикатриса Хенъи – Гринстейна*, представляющая собой плотность распределения косинуса угла рассеяния при столкновении «фотона» с частицей среды следующего вида:

$$f(u) = \frac{1 - \mu^2}{2(1 + \mu^2 - 2\mu u)^{3/2}} \quad \text{при } u, \mu \in (-1, +1). \quad (8.14)$$

Несложно показать, что $\mathbf{E}\xi = \int_{-1}^1 u f(u) du = \mu$. Для моделирования «рассеяния вперед» принимают $\mu \approx 1$, а для «рассеяния назад» берут $\mu \approx -1$. Решая уравнение (8.8), получаем

$$\int_{-1}^{\xi} \frac{(1 - \mu^2) d\mu}{2(1 + \mu^2 - 2\mu u)^{3/2}} = \alpha, \quad \text{или} \quad \int_{-1}^{\xi} \frac{(1 - \mu^2) d(1 + \mu^2 - 2\mu u)}{-4\mu(1 + \mu^2 - 2\mu u)^{3/2}} = \alpha, \quad \text{или}$$

$$-\frac{1-\mu^2}{4\mu} \int_{(1+\mu)^2}^{1+\mu^2-2\mu\xi} v^{-3/2} dv = \alpha, \text{ или } \frac{1-\mu^2}{2\mu} \int_{(1+\mu)^2}^{1+\mu^2-2\mu\xi} dv^{-1/2} = \alpha, \text{ или}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2-2\mu\xi}} - \frac{1}{1+\mu} = \frac{2\mu\alpha}{1-\mu^2}, \text{ или } \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2-2\mu\xi}} = \frac{2\mu\alpha+1-\mu}{1-\mu^2}, \text{ или}$$

$$\xi = \frac{1}{2\mu} \left(1 + \mu^2 - \left(\frac{1-\mu^2}{2\mu\alpha+1-\mu} \right)^2 \right).$$

Описание примера 8.2 закончено.

9. Моделирование случайных величин, имеющих составные плотности распределения

9.1. Метод обратной функции распределения для составных плотностей. Рассмотрим случайную величину $\xi \in (a, b)$, имеющую *составную плотность распределения* вида

$$f(u) = \begin{cases} p_1 f_1(u) & \text{при } u \in (a, c), \\ p_2 f_2(u) & \text{при } u \in [c, b) \end{cases}$$

или

$$f(u) = p_1 f_1(u) \chi_{(a,c)}(u) + p_2 f_2(u) \chi_{[c,b)}(u). \quad (9.1)$$

Здесь $\chi_A(u)$ – индикатор множества A , p_1 и p_2 – положительные числа, дающие в сумме единицу, а $f_1(u)$ и $f_2(u)$ – плотности случайных величин ξ_1 и ξ_2 , имеющих элементарные распределения, т. е. для выборочных значений случайных величин ξ_i можно вывести эффективные моделирующие формулы вида (8.7): $\xi_i = \psi_i(\alpha)$. Алгоритм 8.1 для плотности (9.1) можно представить в следующем виде.

АЛГОРИТМ 9.1. Если $\alpha \leq p_1$, то $\xi = \psi_1(\alpha/p_1)$, иначе $\xi = \psi_2((\alpha - p_1)/p_2)$.

Для обоснования алгоритма 9.1 можно заметить, что при $\alpha \leq p_1$ выборочное значение случайной величины ξ находится между a и c и для получения формулы вида (8.7) следует рассматривать уравнение

$$\int_a^\xi p_1 f_1(u) du = \alpha \quad \text{или} \quad \int_a^\xi f_1(u) du = \frac{\alpha}{p_1},$$

и тогда $\xi = \psi_1(\alpha/p_1)$. Если же $\alpha > p_1$, то значение ξ располагается между c и b и уравнение типа (8.8) можно переписать в виде

$$\int_a^c p_1 f_1(u) du + \int_c^\xi p_2 f_2(u) du = \alpha \quad \text{или} \quad \int_c^\xi f_2(u) du = \frac{\alpha - p_1}{p_2},$$

и тогда $\xi = \psi_2((\alpha - p_1)/p_2)$.

9.2. Пример. В качестве примера приведем составную плотность, используемую при моделировании гамма-распределения с параметром ν при $0 < \nu < 1$ методом исключения (см. далее алгоритм 21.1). Рассмотрим случайную величину ξ , имеющую плотность распределения вида:

$$f(u) = \begin{cases} Cu^{\nu-1} & \text{при } 0 < u < 1, 0 < \nu < 1, \\ Ce^{-\lambda u} & \text{при } u \geq 1, \lambda > 0, \end{cases}$$

или

$$f(u) = C(u^{\nu-1}\chi_{(0,1)}(u) + e^{-\lambda u}\chi_{[1,\infty)}(u)),$$

где $C = \nu\lambda/(\lambda + \nu e^{-\lambda})$. Перепишем эту плотность в виде соотношения (9.1):

$$f(u) = p_1 \times (\nu u^{\nu-1}) \times \chi_{(0,1)}(u) + p_2 \times (\lambda e^{-\lambda u} / \exp(-\lambda)) \times \chi_{[1,\infty)}(u),$$

где $p_1 = \lambda/(\lambda + \nu e^{-\lambda})$ и $p_2 = 1 - p_1$. Функция $f_1(u) = \nu u^{\nu-1}$ является *степенной плотностью*; несложно получить соответствующую моделирующую формулу метода обратной функции распределения: $\xi_1 = \alpha^{1/\nu}$. Функция $f_2(u) = (\lambda e^{-\lambda u})/e^{-\lambda}$, $u > 1$ является плотностью усеченного экспоненциального распределения. По аналогии с примером 8.1 несложно получить моделирующую формулу $\xi_2 = 1 - (\ln(1 - \alpha))/\lambda$. Алгоритм 9.1 выглядит здесь следующим образом: если $\alpha \leq \lambda/(\lambda + \nu e^{-\lambda})$, то

$$\xi = \left(\frac{\alpha(\lambda + \nu e^{-\lambda})}{\lambda} \right)^{1/\nu},$$

иначе

$$\xi = 1 - \frac{\ln(1 - (\alpha - p_1)/p_2)}{\lambda} = -\frac{\ln((1 - \alpha)(e^{-\lambda} + \lambda\nu^{-1}))}{\lambda}. \quad (9.2)$$

Заметим, что в отличие от формулы (8.13) замена $\alpha' = 1 - \alpha$ в последнем соотношении невозможна, так как формула (9.2) верна только при условии $\alpha > p_1$.

9.3. Применение метода суперпозиции. Составные плотности можно также строить, разбивая (a, b) на более чем два непересекающихся интервала (см. далее разд. 14). В качестве примеров таких распределений можно рассмотреть, в частности, кусочно-постоянную и кусочно-линейную плотности. Для составных плотностей с большим

числом интервалов разбиения интервала (a, b) несложно построить аналог алгоритма 9.1, однако в ряде случаев в этот алгоритм целесообразно включить элементы метода суперпозиции (см. далее разд. 14).

10. Построение элементарных плотностей

10.1. Теорема о замене случайных переменных. В ряде рассуждений, связанных с обоснованием алгоритмов численного моделирования случайных величин и случайных векторов, нам потребуется следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 10.1. Пусть $u_i = \Phi_i(v_1, \dots, v_l)$, $i = 1, \dots, l$ – взаимно однозначное дифференцируемое отображение области A в пространстве с координатами v_1, \dots, v_l на область B в пространстве с координатами u_1, \dots, u_l . Если плотность случайного вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$ в A равна $f_\eta(v_1, \dots, v_l)$, то плотность распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)$ в B , где $\xi_i = \Phi_i(\eta_1, \dots, \eta_l)$, имеет вид

$$f_\xi(u_1, \dots, u_l) = f_\eta(v_1, \dots, v_l) \left| \frac{\partial(v_1, \dots, v_l)}{\partial(u_1, \dots, u_l)} \right|. \quad (10.1)$$

В правой части последнего соотношения v_i должны быть выражены через u_i , а $\left| \frac{\partial(v_1, \dots, v_l)}{\partial(u_1, \dots, u_l)} \right|$ есть якобиан перехода от координат $\{v_i\}$ к координатам $\{u_i\}$.

10.2. Технология «вложенных замен». При рассмотрении численных моделей со случайными параметрами возникает необходимость, с одной стороны, на основании экспериментальных статистических данных выбрать законы распределения параметров, а с другой – иметь алгоритмы реализации выборочных значений параметров по выбранным вероятностным законам. В связи с этим можно заняться созданием «банка» распределений, допускающих построение эффективных алгоритмов численного моделирования. В частности, для построения плотностей элементарных распределений можно использовать следующую технологию, основанную на одномерном варианте утверждения 10.1.

ТЕХНОЛОГИЯ 10.1. Пусть $f_\eta(v)$ – плотность случайной величины η , имеющей элементарное распределение в интервале (c, d) , т. е. из соотношения типа (8.8) $\int_c^d f_\eta(v) dv = \alpha$ для соответствующего выборочного значения случайной величины η можно получить формулу типа (8.7): $\eta = \psi_\eta(\alpha)$, где $\psi_\eta(w)$ – простая композиция эле-

ментарных функций. Рассмотрим взаимно-однозначное преобразование, задаваемое монотонно возрастающей дифференцируемой функцией $\varphi(x)$, переводящей интервал (a, b) в интервал (c, d) ; в частности $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$. Полагаем также, что функцию φ и обратную к ней функцию φ^{-1} можно представить в виде простой композиции элементарных функций. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f(u) = f_\eta(\varphi(u)) \varphi'(u), \quad u \in (a, b); \quad (10.2)$$

это частный случай формулы (10.1). При сделанных выше предположениях можно утверждать, что $f(u)$ является плотностью элементарного распределения, т. е. уравнение (8.8) разрешимо относительно ξ в элементарных функциях и справедлива формула $\xi = \varphi^{-1}(\psi_\eta(\alpha))$.

Действительно, записывая уравнение (8.8), имеем

$$\int_a^\xi f_\eta(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \alpha, \quad \text{или} \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\xi)} f_\eta(v) dv = \alpha,$$

$$\text{или} \quad \varphi(\xi) = \psi_\eta(\alpha), \quad \text{или} \quad \xi = \varphi^{-1}(\psi_\eta(\alpha)).$$

Полученную плотность (10.2) можно взять в качестве исходной плотности $f_\eta(v)$ и осуществить еще одно взаимно-однозначное преобразование типа $\varphi(u)$. С помощью таких вложенных замен можно получать неограниченное количество новых плотностей элементарных распределений. Графики этих плотностей можно сравнивать с полученными из эксперимента распределениями и выбирать подходящий для данной численной модели случайный элемент.

10.3. Примеры. Продемонстрируем несколько примеров применения технологии 10.1.

ПРИМЕР 10.1. Рассмотрим случайную величину ξ , имеющую плотность распределения

$$f(u) = \exp u \times \exp(-\exp u), \quad -\infty < u < +\infty. \quad (10.3)$$

Это плотность экстремального (точнее, минимального) распределения, описывающая одно из трех возможных асимптотических распределений линейных комбинаций вида

$$a_n \min(\gamma_1, \dots, \gamma_n) + b_n \quad (10.4)$$

при $a_n \neq 0$, $n \rightarrow \infty$; здесь a_n, b_n – числовые последовательности, а $\{\gamma_i\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины.

Выведем моделирующую формулу для выборочного значения случайной величины ξ . Для этого рассмотрим уравнение (8.8):

$$\int_{-\infty}^{\xi} \exp u \exp(-\exp u) du = \alpha, \text{ или } \int_0^{\exp \xi} \exp(-v) dv, \text{ или} \\ -\exp(-\exp \xi) + 1 = \alpha, \text{ или } \xi = \ln(-\ln \alpha'),$$

где $\alpha' = 1 - \alpha$. Описание примера 10.1 закончено.

Применение технологии 10.1 для рассмотренного примера можно описать следующим образом. Исходным являлось экспоненциальное распределение (8.11) для случая $\lambda = 1$, т. е. $f_{\eta}(v) = e^{-v}$, $v > 0$; соответствующая моделирующая формула: $\eta = -\ln \alpha'$. Затем использована замена $v = \varphi(u) = e^u$, $-\infty < u < +\infty$.

Заметим также, что два других (отличных от плотности (10.3)) возможных асимптотических распределения линейных комбинаций вида (10.4) также являются элементарными. Это *распределение Вейбулла* с плотностью

$$f_1(u) = u^{c-1} \exp(-u^c), \quad u > 0, \quad c > 0 \quad (10.5)$$

и моделирующей формулой $\xi_1 = (-\ln \alpha)^{1/c}$, а также распределение с плотностью

$$f_2(u) = c(-u)^{c-1} \exp(-(-u)^c), \quad u < 0, \quad c > 0 \quad (10.6)$$

и моделирующей формулой $\xi_2 = -(-\ln \alpha)^{1/c}$.

Применение технологии 10.1 для плотностей (10.5) и (10.6) можно описать следующим образом. Исходным, как и для плотности (10.3), являлось экспоненциальное распределение $f_{\eta}(v) = e^{-v}$, $v > 0$ с моделирующей формулой $\eta = -\ln \alpha$. Затем использованы замены: для плотности (10.5) $v = \varphi(u) = u^c$, $u > 0$, а для плотности (10.6) $v = \varphi(u) = (-u)^c$, $u < 0$.

ПРИМЕР 10.2. Рассмотрим случайную величину ξ , имеющую плотность распределения

$$f(u) = \frac{3\sqrt{3} \cos u}{\pi(\sin^2 u + \sin u + 1)}, \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}. \quad (10.7)$$

Выведем моделирующую формулу для ξ . Для этого рассмотрим уравнение (8.8):

$$\int_0^{\xi} \frac{3\sqrt{3} \cos u du}{\pi(\sin^2 u + \sin u + 1)} = \alpha, \text{ или } \int_0^{\xi} \frac{3\sqrt{3} d(\sin u + 1/2)}{\pi((\sin u + 1/2)^2 + 3/4)} = \alpha,$$

$$\begin{aligned}
\frac{6}{\pi} \int_{1/2}^{\sin \xi + 1/2} \frac{d(2v/\sqrt{3})}{(2v/\sqrt{3})^2 + 1} &= \alpha, \text{ или } \frac{6}{\pi} \int_{1/\sqrt{3}}^{2(\sin \xi + 1/2)/\sqrt{3}} \frac{dw}{w^2 + 1} = \alpha, \\
\text{или } \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin \xi + \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} &= \alpha, \\
\text{или } \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin \xi + \frac{1}{2} \right) \right) &= \frac{\pi}{6}(\alpha + 1), \\
\text{или } \xi = \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6}(\alpha + 1) \right) - \frac{1}{2} \right). & \quad (10.8)
\end{aligned}$$

Схема «сочинения» плотности (10.7) такова. Берем исходную плотность

$$f_{\gamma}(w) = \frac{6}{\pi(w^2 + 1)}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < w < \sqrt{3}$$

с моделирующей формулой $\gamma = \operatorname{tg}(\pi(\alpha + 1)/6)$. Используя линейное преобразование $\varphi_1(v) = (2/\sqrt{3})(v + 1/2)$, получаем плотность

$$f_{\eta}(v) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi((2(v + 1/2)/\sqrt{3})^2 + 1)}, \quad 0 < v < 1$$

и моделирующую формулу $\eta = (\sqrt{3} \operatorname{tg}(\pi(\alpha + 1)/6) - 1)/2$. Наконец, преобразование $\varphi_2 = \sin u$ дает плотность (10.7) и моделирующую формулу (10.8).

Отметим, что порядок преобразований при «сочинении» плотности является обратным к порядку замен при выводе моделирующей формулы. В дальнейшем, если плотность конструируется по технологии 10.1, мы будем приводить только вывод моделирующих формул, не формулируя достаточно очевидных соображений о «сочинении» плотности.

11. Построение моделируемых плотностей двумерных случайных векторов с зависимыми компонентами

11.1. Стандартный алгоритм моделирования случайных векторов. Известно, что плотность $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_l)$ распределения l -мерного случайного вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_l)$ может быть $l!$ способами разложена в произведение условных плотностей:

$$f(\mathbf{x}) = f_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2}|x_{i_1}) \times \dots \times f_{i_l}(x_{i_l}|x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{l-1}}), \quad (11.1)$$

где (i_1, \dots, i_l) – некоторая перестановка номеров $(1, \dots, l)$ (таких перестановок как раз $l!$ штук),

$$f_{i_1}(x_{i_1}) = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_l) dx_{i_2} \dots dx_{i_l},$$

$$f_{i_2}(x_{i_2} | x_{i_1}) = f_{i_2}(x_{i_2} | \xi_{i_1} = x_{i_1}) = \frac{\int \dots \int f(x_1, \dots, x_l) dx_{i_3} \dots dx_{i_l}}{f_{i_1}(x_{i_1})},$$

$$f_{i_3}(x_{i_3} | x_{i_1}, x_{i_2}) = \frac{\int \dots \int f(x_1, \dots, x_l) dx_{i_4} \dots dx_{i_l}}{f_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2} | x_{i_1})},$$

.

$$f_{i_{l-1}}(x_{i_{l-1}} | x_{i_1}, \dots, x_{i_{l-2}}) = \frac{\int f(x_1, \dots, x_l) dx_{i_l}}{f_{i_1}(x_{i_1}) \times \dots \times f_{i_{l-2}}(x_{i_{l-2}} | x_{i_1}, \dots, x_{i_{l-3}})},$$

$$f_{i_l}(x_{i_l} | x_{i_1}, \dots, x_{i_{l-1}}) = \frac{f(x_1, \dots, x_l)}{f_{i_1}(x_{i_1}) \times \dots \times f_{i_{l-1}}(x_{i_{l-1}} | x_{i_1}, \dots, x_{i_{l-2}})}.$$

Каждому разложению (11.1) соответствует алгоритм моделирования случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)$.

АЛГОРИТМ 11.1. 1. Реализуем выборочное значение случайной компоненты ξ_{i_1} вектора ξ согласно плотности $f_{i_1}(x_{i_1})$.

2. Реализуем выборочное значение случайной компоненты ξ_{i_2} согласно плотности $f_{i_2}(x_{i_2} | \xi_{i_1})$.

.

l. Реализуем выборочное значение случайной компоненты ξ_{i_l} согласно плотности $f_{i_l}(x_{i_l} | \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_{l-1}})$.

11.2. Двумерный случай. Обоснование формулы (11.1) и алгоритма 11.1 осуществляется индукцией по размерности l . При этом индуктивный переход основан на рассмотрении двумерного вектора (ξ, η) (случайные компоненты ξ и η могут быть как скалярными, так и векторными) с плотностью распределения $f(u, v)$, для которой справедливы два представления

$$f(u, v) = f_\xi(u) f_\eta(v|u); \quad f_\xi(u) = \int f(u, v) dv, \quad f_\eta(v|u) = \frac{f(u, v)}{f_\xi(u)}; \quad (11.2)$$

$$f(u, v) = f_\eta(v) f_\xi(u|v); \quad f_\eta(v) = \int f(u, v) du, \quad f_\xi(u|v) = \frac{f(u, v)}{f_\eta(v)}. \quad (11.3)$$

Для представления (11.2) алгоритм 11.1 выглядит следующим образом: сначала реализуется выборочное значение ξ_0 согласно плотности $f_\xi(u)$, а затем моделируется выборочное значение η_0 согласно плотности $f(\xi_0, v)/f_\xi(\xi_0)$. Аналогично для представления (11.3) сначала реализуется выборочное значение η_0 согласно плотности $f_\eta(v)$, а затем моделируется выборочное значение ξ_0 согласно плотности $f(u, \eta_0)/f_\eta(\eta_0)$.

11.3. Технология «взвешенного параметра». При моделировании случайного вектора ξ основной проблемой является выбор того из $l!$ разложений (11.1), для которого возможно построение наиболее эффективных алгоритмов последовательной реализации выборочных значений $\{\xi_{i_j}\}$. Уже для двумерного случая часто можно наблюдать следующую ситуацию: одно из разложений (11.2) или (11.3) позволяет построить эффективные алгоритмы моделирования компонент ξ_0 и η_0 , а второе разложение не дает таких алгоритмов. Примеры таких ситуаций дает следующая

ТЕХНОЛОГИЯ 11.1. Рассмотрим плотность элементарного распределения $f_\xi(u; \lambda)$, $u \in (a, b)$, зависящую от параметра λ , допустимые значения которого принадлежат интервалу (C, D) . Элементарность распределения означает существование простой формулы $\xi = \psi_\xi(\alpha; \lambda)$ для получения выборочного значения случайной величины ξ . Рассмотрим также еще одну элементарную плотность $f_\eta(v)$ случайной величины η , принимающей значения в интервале $v \in (c, d) \subseteq (C, D)$; при этом имеется соответствующая моделирующая формула $\eta = \psi_\eta(\alpha)$. Теперь поставим задачу построения эффективного алгоритма реализации выборочных значений двумерного случайного вектора (ξ, η) , принимающего значения в прямоугольнике

$$G = \{(u, v) : a < u < b; c < v < d\}$$

и имеющего плотность распределения

$$f(u, v) = f_\eta(v) \times f_\xi(u; v), \quad (u, v) \in G. \quad (11.4)$$

Это результат формального умножения плотностей $f_\eta(v)$ и $f_\xi(u; v)$ (здесь происходит подстановка переменной v вместо параметра λ). В представлении (11.3) для плотности (11.4) имеем $f_\xi(u|v) = f_\xi(u; v)$. Для этого представления получаем эффективный алгоритм 11.1:

$$\eta = \psi_\eta(\alpha_1), \quad \xi = \psi_\xi(\alpha_2; \eta). \quad (11.5)$$

Для представления (11.2) плотности (11.4) эффективных формул типа (11.5) построить, как правило, не удастся.

11.3. Примеры. Приведем примеры применения технологии «взвешенного параметра».

ПРИМЕР 11.1. Пусть требуется построить эффективный алгоритм моделирования двумерного случайного вектора (ξ, η) с плотностью распределения

$$f(u, v) = \frac{1}{2} v e^{-uv}, \quad u > 0, \quad 0 < v < 2.$$

Рассмотрим представление (11.3) для вектора (ξ, η) : $f(u, v) = f_\eta(v) f_\xi(u|v)$;

$$f_\eta(v) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} v e^{-uv} du = \frac{1}{2}, \quad f_\xi(u|v) = \frac{f(u, v)}{f_\eta(v)} = v e^{-vu}.$$

Плотность $f_\eta(v)$ является плотностью равномерного распределения на интервале $(0, 2)$. Соответствующее выборочное значение η_0 случайной величины η равно $\eta_0 = 2\alpha_1$. Функция $f_\xi(u|\eta_0)$ является плотностью экспоненциального распределения с параметром $\lambda = \eta_0$ (см. формулу (8.11)) и, следовательно, $\xi = -\ln \alpha_2/\eta_0$ (см. формулу (8.13)).

Теперь рассмотрим представление (11.2) для вектора (ξ, η) : $f(u, v) = f_\xi(u) f_\eta(v|u)$. Интегрируя по частям, имеем

$$f_\xi(u) = \int_0^2 \frac{1}{2} v e^{-uv} dv = \frac{1 - (2u + 1)e^{-2u}}{2u^2}, \quad u > 0.$$

Полученная функция, очевидно, не является плотностью элементарного распределения, и поэтому для этого примера представление (11.3) является заведомо худшим (с точки зрения реализации алгоритма 11.1) по сравнению с представлением (11.2). Описание примера 11.1 закончено.

ПРИМЕР 11.2. Пусть требуется построить эффективный алгоритм моделирования двумерного случайного вектора (ξ, η) с плотностью распределения

$$f(u, v) = \frac{3v \sin v e^{-3uv}}{1 - e^{-v}}, \quad 0 < u < \frac{1}{3}, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, что интеграл по v от этой функции аналитически не возьмется, поэтому представление (11.2) не дает простых алгоритмов моделирования случайного вектора (ξ, η) . Рассмотрим представление (11.3). Имеем

$$f_\eta(v) = \int_0^{1/3} \frac{3v \sin v e^{-3uv}}{1 - e^{-v}} du = \sin v \times \left(\frac{-e^{-3vu}}{1 - e^{-v}} \right) \Bigg|_0^{1/3} = \sin v$$

для $0 < v < \pi/2$ и

$$f_{\xi}(u|v) = \frac{f(u, v)}{f_{\eta}(v)} = \frac{3v e^{-3uv}}{1 - e^{-v}}, \quad 0 < u < \frac{1}{3}.$$

Выведем соответствующие формулы метода обратной функции распределения:

$$\int_0^{\eta} \sin v \, dv = \alpha'_1, \quad \text{или} \quad -\cos v \Big|_0^{\eta} = \alpha'_1, \quad \text{или} \quad \eta = \arccos \alpha_1,$$

здесь $\alpha_1 = 1 - \alpha'_1$;

$$\int_0^{\xi} \frac{3\eta e^{-3\eta u} \, du}{1 - e^{-\eta}} = \alpha_2, \quad \text{или} \quad 1 - e^{-3\eta\xi} = \alpha_2(1 - e^{-\eta}),$$

$$\text{или} \quad \xi = -\frac{\ln(1 - \alpha_2(1 - e^{-\eta}))}{3\eta}.$$

Описание примера 11.2 закончено.

12. Построение плотностей случайных величин, при моделировании которых целесообразно использовать методы суперпозиции

12.1. Метод суперпозиции как частный случай моделирования случайного вектора. Напомним общую ситуацию, в которой применяется метод суперпозиции. Пусть требуется построить алгоритм численной реализации выборочных значений k_1 -мерного случайного вектора ξ , плотность которого может быть представлена в виде интеграла, зависящего от многомерного параметра $\mathbf{u} \in R^{k_1}$:

$$f(\mathbf{u}) = \int_{R^{k_2}} p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \, d\mathbf{v}, \quad (12.1)$$

при этом:

- 1) функция $p(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ является плотностью $(k_1 + k_2)$ -мерного вектора (ξ, η) ;
- 2) в соответствующей формуле полной плотности вероятностей

$$f(\mathbf{u}) = \int_{R^{k_2}} f_{\eta}(\mathbf{v}) f_{\xi}(\mathbf{u}|\mathbf{v}) \, d\mathbf{v} \quad (12.2)$$

(см. соотношения (11.2), (11.3)) для выборочных значений случайных векторов ξ и η с плотностями $f_{\eta}(\mathbf{v})$ и $f_{\xi}(\mathbf{u}|\mathbf{v})$ имеются эффективные стандартные алгоритмы (формулы) численного моделирования вида $\eta = \psi_{\eta}(\bar{\alpha}_1)$, $\xi = \psi_{\xi}(\bar{\alpha}_2; \mathbf{v})$, где $\bar{\alpha}_i$ – соответствующие наборы стандартных случайных чисел.

При сделанных предположениях можно использовать алгоритм метода суперпозиции.

АЛГОРИТМ 12.1. Реализуем выборочное значение случайного вектора ξ , имеющего плотность распределения вида (12.2), согласно алгоритму (формуле) $\xi = \psi_{\xi}(\bar{\alpha}_2; \eta_0)$, где выборочное значение η_0 случайного вектора η моделируется согласно алгоритму (формуле) $\eta_0 = \psi_{\eta}(\bar{\alpha}_1)$.

Учитывая интегральное представление (12.1), в котором вспомогательный вектор η имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_{\eta}(\mathbf{v})$, назовем алгоритм 12.1 *методом интегральной суперпозиции* (в отличие от *метода дискретной суперпозиции*, рассмотренного далее в подразд. 12.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 12.1. Ситуацию, в которой применяется метод интегральной суперпозиции, можно трактовать следующим образом. Нам требуется получить выборочное значение k_1 -мерной компоненты ξ для $(k_1 + k_2)$ -мерного вектора (ξ, η) , причем «моделируемым» является разложение вида (11.3), а для разложения (11.2) не удастся даже представить в явном виде плотность $f_{\xi}(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$, так как интеграл (12.1) не берется аналитически.

12.2. Применение технологии «взвешенного параметра» для построения примеров эффективной реализации метода интегральной суперпозиции. Из замечания 12.1 следует, что во всяком случае для размерностей k_1 и k_2 , равных единице, для построения примеров эффективного применения метода интегральной суперпозиции можно использовать технологию 11.1.

ПРИМЕР 12.1. Пусть требуется построить алгоритм моделирования случайной величины ξ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = 2 \int_0^{\pi/2} v \cos v \cos uv \, dv, \quad 0 < u < 1.$$

Рассмотрим двумерный случайный вектор (ξ, η) с плотностью распределения $p(u, v) = 2v \cos v \cos uv$, $0 < u < 1$, $0 < v < \pi/2$ и представление

(11.3) для этой плотности:

$$f_{\eta}(v) = \int_0^1 2v \cos v \cos uv \, du = \sin 2v, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2};$$

$$f_{\xi}(u|v) = \frac{2v \cos v \cos uv}{2 \cos v \sin v} = \frac{v \cos uv}{\sin v}, \quad 0 < u < 1.$$

Полученные функции являются плотностями элементарных распределений. Решая уравнения вида (8.8)

$$\int_0^{\eta_0} \sin 2v \, dv = \alpha_1 \quad \text{и} \quad \int_0^{\xi} \frac{\eta_0 \cos(\eta_0 u) \, du}{\sin \eta_0} = \alpha_2,$$

выписываем моделирующие формулы

$$\eta_0 = \frac{\arccos(1 - 2\alpha_1)}{2} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{\arcsin(\alpha_2 \sin \eta_0)}{\eta_0}.$$

Таким образом, выборочное значение случайной величины ξ можно получить по формуле

$$\xi = \frac{\arcsin[\alpha_2 \sin((1/2) \arccos(1 - 2\alpha_1))]}{(1/2) \arccos(1 - 2\alpha_1)}.$$

Описание примера 12.1 закончено.

Технология 11.1 применена здесь следующим образом. В качестве исходной плотности элементарного распределения с параметром взята функция

$$f_{\xi}(u; \lambda) = \frac{\lambda \cos \lambda u}{\sin \lambda}, \quad 0 < u < 1; \quad \lambda > 0,$$

которой соответствует моделирующая формула

$$\xi = \frac{\arcsin(\alpha \sin \lambda)}{\lambda}.$$

Затем на подмножестве $(0, \pi/2)$ множества $(0, +\infty)$ допустимых значений параметра λ рассмотрена плотность $f_{\eta}(v) = \sin 2v$, которой соответствует моделирующая формула

$$\eta = \frac{\arccos(1 - 2\alpha)}{2}.$$

Далее формируется совместная плотность

$$p(u, v) = f_\eta(v) \times f_\xi(u; v) = \sin 2v \times \frac{v \cos vu}{\sin v} = 2v \cos v \cos uv$$

(здесь $0 < u < 1$, $0 < v < \pi/2$), интеграл $f_\xi(u) = \int_0^{\pi/2} p(u, v) dv$ от которой аналитически не берется.

12.3. Метод дискретной суперпозиции. Ситуация, когда плотность моделируемого распределения представляет собой интеграл (12.1), является достаточно редкой. Гораздо чаще в качестве вектора $\boldsymbol{\eta}$ используется одномерная целочисленная случайная величина η с распределением

$$\mathbf{P}(\eta = i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad M \leq \infty.$$

В этом случае, формально подставляя в формулу (12.2) соотношение $f_\eta(v) = \sum_{i=1}^M p_i \delta(v - i)$, получаем

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M p_i f_i(\mathbf{u}); \quad f_i(\mathbf{u}) = f_\xi(\mathbf{u} | \eta = i). \quad (12.3)$$

Согласно требованиям, при которых применим алгоритм 12.1, должны существовать эффективные алгоритмы получения выборочных значений случайной величины η (в рассматриваемом частном случае следует применять стандартный алгоритм 4.1 моделирования дискретного распределения или его модификации – см. разд. 4–7) и вектора $\boldsymbol{\xi}$ согласно плотности $f_i(\mathbf{u})$ для любого i . Таким образом, соотношение (12.3) представляет собой взвешенную сумму (смесь) эффективно моделируемых плотностей $\{f_i(\mathbf{u})\}$. Метод суперпозиции для плотности (12.3) формулируется следующим образом.

АЛГОРИТМ 12.2. 1. Реализуя выборочное значение α_1 стандартного случайного числа, согласно вероятностям $\{p_i\}$, используя алгоритм 4.1 или его модификации, выбираем номер $\eta_0 = t$.

2. Реализуем выборочное значение случайного вектора $\boldsymbol{\xi}$ согласно плотности $f_m(\mathbf{u})$.

Алгоритм 12.2 называется *методом дискретной суперпозиции* или просто *методом суперпозиции*.

ПРИМЕР 12.2. Пусть требуется построить алгоритм моделирования случайной величины ξ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = \frac{3}{8}(1 + u^2), \quad -1 < u < 1. \quad (12.4)$$

Соотношение (12.4) представляет так называемый *закон Релея молекулярного рассеяния фотонов в атмосфере*, используемый в теории переноса излучения. Функция (12.4) не является плотностью элементарного распределения, так как уравнение $\int_{-1}^{\xi} f(u) du = \alpha$ сводится к соотношению $\xi^3 + 3\xi - 8\alpha - 4 = 0$, которое неразрешимо относительно ξ . Плотность (12.4) представима в виде смеси (12.3):

$$f(u) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} u^2, \quad -1 < u < 1,$$

т. е. $p_1 = 3/4$, $f_1(u) = 1/2$; $p_2 = 1/4$; $f_2(u) = 3u^2/2$. Функция $f_1(u)$ является плотностью равномерного распределения на интервале $(-1, 1)$, а функция $f_2(u)$ является аналогом плотности степенного распределения на том же интервале. Алгоритм 12.2 здесь выглядит следующим образом: *если $\alpha_1 < 3/4$, то $\xi = 2\alpha_2 - 1$, иначе $\xi = \sqrt[3]{2\alpha_2 - 1}$.*

12.4. Технология «формирования смеси». Пример 12.2 показывает, что достаточно содержательные примеры применения алгоритма 12.2 можно построить для простейшего случая $\mathbf{u} = u \in R$, $M = 2$. Здесь может быть реализована

ТЕХНОЛОГИЯ 12.1. *Возьмем две плотности элементарных распределений $f_1(u)$ и $f_2(u)$, определенные на интервале (a, b) и такие, что линейная комбинация с положительными коэффициентами*

$$f(u) = p_1 f_1(u) + p_2 f_2(u), \quad u \in (a, b), \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad p_1 + p_2 = 1 \quad (12.5)$$

не является плотностью элементарного распределения (т. е. уравнение $\int_a^{\xi} f(u) du = \alpha$ неразрешимо относительно ξ). Такие плотности $f_1(u)$ и $f_2(u)$ можно получить с помощью разнородных замен $\varphi_i : (a, b) \rightarrow (c_i, d_i)$; $i = 1, 2$ в технологии 10.1. Для выборочных значений ξ_i , реализуемых согласно плотностям $f_i(u)$, выписываются моделирующие формулы $\xi_i = \psi_i(\alpha)$, $i = 1, 2$. Для плотности (12.5) можно построить экономичный алгоритм дискретной суперпозиции: если $\alpha_1 < p_1$, то значение вспомогательной целочисленной случайной величины η равно единице и выборочное значение случайной величины ξ моделируется по формуле $\xi = \psi_1(\alpha_2)$, иначе $\xi = \psi_2(\alpha_2)$.

ПРИМЕР 15.3. Пусть требуется построить алгоритм моделирования случайной величины ξ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = \frac{5u}{(1+u^2)^2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8u^2} \sin\left(\frac{\pi}{2u}\right), \quad 1 < u < 2. \quad (12.6)$$

Эта функция не является плотностью элементарного распределения, так как уравнение $\int_1^\xi f(u) du = \alpha$ сводится к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \int_1^\xi \frac{d(u^2 + 1)}{(u^2 + 1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^\xi d \cos \left(\frac{\pi}{2u} \right) &= \alpha \quad \text{или} \\ \frac{5}{4} - \frac{5}{2(1 + \xi^2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \left(\frac{\pi}{2\xi} \right) &= \alpha, \end{aligned} \quad (12.7)$$

которое неразрешимо относительно ξ . По аналогии с выкладками (12.7) несложно вычислить интегралы

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{u du}{(1 + u^2)^2} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1 + 2^2} + \frac{1}{1 + 1^2} \right) = \frac{3}{20}, \\ \int_1^2 \frac{1}{u^2} \sin \left(\frac{\pi}{2u} \right) du &= \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}. \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений можно представить плотность (12.6) в виде смеси (12.5):

$$f(u) = \frac{3}{4} \times \frac{20u}{3(1 + u^2)^2} + \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{\sqrt{2}u^2} \sin \left(\frac{\pi}{2u} \right), \quad 1 < u < 2, \quad (15.8)$$

т. е. $p_1 = 3/4$, $p_2 = 1/4$,

$$f_1(u) = \frac{20u}{3(1 + u^2)^2}, \quad f_2(u) = \frac{\pi}{\sqrt{2}u^2} \sin \left(\frac{\pi}{2u} \right).$$

С учетом выкладок (12.7) выведем моделирующую формулу для плотности $f_1(u)$:

$$\frac{20}{3} \int_1^\xi \frac{u du}{(1 + u^2)^2} = \alpha_2, \quad \text{или} \quad \frac{5}{3} - \frac{10}{3(1 + \xi^2)} = \alpha_2, \quad \text{или} \quad \xi = \sqrt{\frac{10}{5 - 3\alpha_2} - 1}. \quad (12.9)$$

Для плотности $f_2(u)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_1^\xi \frac{\pi}{\sqrt{2}u^2} \sin \left(\frac{\pi}{2u} \right) du &= \alpha_2, \quad \text{или} \quad \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2\xi} \right) = \alpha_2, \\ \text{или} \quad \xi &= \frac{\pi}{2 \arccos(\alpha_2/\sqrt{2})}. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Алгоритм метода суперпозиции выглядит следующим образом: если $\alpha_1 < 3/4$, то выборочное значение случайной величины ξ реализуется по формуле (12.9), иначе ξ реализуется по формуле (12.10). Описание примера 12.3 закончено.

Технология 12.1 реализована здесь следующим образом: по технологии 10.1 из плотности $10/(3w^2)$, $2 < w < 5$ с помощью замены $w = \varphi_1(u) = 1 + u^2$, $1 < u < 2$ создана плотность $f_1(u)$, а из плотности $\sqrt{2} \sin w$, $\pi/4 < w < \pi/2$ с помощью замены $w = \varphi_2(u) = \pi/(2u)$, $1 < u < 2$ получена плотность $f_2(u)$, а затем рассмотрена взвешенная сумма (12.5) с вероятностями $p_1 = 3/4$ и $p_2 = 1/4$.

12.5. Выделение вероятностей. Здесь уместно сформулировать следующее простое

ЗАМЕЧАНИЕ 12.1. Пусть исходная плотность задана в виде

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M h_i(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U, \quad (12.11)$$

где $h_i(\mathbf{u})$ – положительные (почти всюду в U) функции. Вычисляя интегралы $p_i = \int_U h_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$, перепишем плотность (12.11) в виде

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M p_i \times \frac{h_i(\mathbf{u})}{p_i}. \quad (12.12)$$

Тогда функции $\{f_i(\mathbf{u}) = h_i(\mathbf{u})/p_i\}$ являются плотностями (ведь $f_i(\mathbf{u}) \geq 0$ и $\int_U f_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1$), а числа $\{p_i\}$ – вероятностями: они неотрицательны и $\sum_{i=1}^M p_i = 1$. Действительно,

$$1 = \int_U f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \sum_{i=1}^M p_i \int_U \frac{h_i(\mathbf{u})}{p_i} d\mathbf{u} = \sum_{i=1}^M p_i.$$

Таким образом, представление (12.12) плотности (12.11) имеет вид (12.3).

Замечание 12.1 обосновывает, в частности, переход от соотношения (12.6) к представлению (12.8) в примере 12.3.

12.6. Увеличение числа слагаемых. Обобщение технологии 12.1 может быть связано с увеличением числа слагаемых M в сумме (12.5) (вплоть до рассмотрения функциональных рядов).

ПРИМЕР 12.4. Пусть требуется построить алгоритм моделирования случайной величины ξ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = e^{-2u} + e^{-3u} + e^{-6u}, \quad u > 0.$$

Эта плотность не является элементарной, так как уравнение $\int_0^\xi f(u) du = \alpha$ сводится к соотношению

$$\frac{e^{-2\xi}}{2} + \frac{e^{-3\xi}}{3} + \frac{e^{-6\xi}}{6} + \alpha - 1 = 0,$$

которое неразрешимо относительно ξ . Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} du = -\frac{e^{-\lambda u}}{\lambda} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

для любого $\lambda > 0$, согласно замечанию 12.1, получаем представление вида (12.3)

$$f(u) = \frac{1}{2} \times (2e^{-2u}) + \frac{1}{3} \times (3e^{-3u}) + \frac{1}{6} \times (6e^{-6u}),$$

т. е. $p_1 = 1/2$, $f_1(u) = 2e^{-2u}$; $p_2 = 1/3$, $f_2(u) = 3e^{-3u}$; $p_3 = 1/6$, $f_3(u) = 6e^{-6u}$. Плотности $f_i(u)$ являются экспоненциальными (см. пример 8.1) и с учетом формулы (8.13) получаем следующий алгоритм метода суперпозиции:

- если $\alpha_1 < 1/2$, то выборочное значение случайной величины ξ реализуется по формуле $\xi = -(1/2) \ln \alpha_2$;
- если $1/2 \leq \alpha_1 < 1/2 + 1/3 = 5/6$, то $\xi = -(1/3) \ln \alpha_2$;
- если $\alpha_1 \geq 5/6$, то $\xi = -(1/6) \ln \alpha_2$.

13. Модифицированный метод суперпозиции

13.1. Введение вспомогательной случайной величины. Рассмотрим алгоритм 12.2 для случая моделирования одномерной случайной величины $\xi \in (a, b)$ с плотностью распределения вида (12.3). Предполагаем дополнительно, что во втором пункте алгоритма 12.2 выборочное значение случайной величины ξ моделируется методом обратной функции распределения, т. е. выражение $\xi = \psi_m(\alpha_2)$ получается с помощью решения уравнения вида (8.8):

$$\int_a^\xi f_m(u) du = \alpha_2. \quad (13.1)$$

Согласно утверждению 1.2, в случае, когда в первом пункте алгоритма 12.2 выбран номер $\eta = m$, случайная величина α_1 , попадая в интервал $\Delta_m = \left(\sum_{i=1}^{m-1} p_i, \sum_{i=1}^m p_i\right)$, равномерно распределена в Δ_m , и тогда справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 13.1. *Случайная величина $\beta = \left(\alpha_1 - \sum_{i=1}^{m-1} p_i\right) p_m^{-1}$ равномерно распределена в интервале $(0, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того что $\alpha_1 \in \Delta_m$, имеем $F_\beta(x) = \mathbf{P}(\beta < x) = 0$ при $x \leq 0$ и $F_\beta(x) = 1$ при $x \geq 1$. Далее, для $0 < x < 1$ получаем

$$\begin{aligned} F_\beta(x) &= \mathbf{P}(\beta < x | \eta = m) = \frac{\mathbf{P}\{(\beta < x) \cap (\eta = m)\}}{\mathbf{P}(\eta = m)} = \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{m-1} p_i \leq \alpha_1 < \sum_{i=1}^{m-1} p_i + x p_m\right) / p_m = x, \end{aligned}$$

т. е. функция $F_\beta(x)$ совпадает с функцией распределения $F(x)$ стандартного случайного числа α (см. соотношение (1.2)).

13.2. Модифицированный метод суперпозиции. Утверждение 13.1 обосновывает следующую модификацию алгоритма 12.2.

АЛГОРИТМ 13.1. 1. *Реализовав выборочное значение α стандартного случайного числа, согласно вероятностям $\{p_i\}$, используя алгоритм 4.1 или его модификации, выбираем номер m .*

2. *Реализуем выборочное значение случайной величины $\xi \in (a, b)$ по формуле $\xi = \psi_m(\beta)$, полученной с помощью решения уравнения*

$$\int_a^\xi f_m(u) du = \beta, \quad \beta = \left(\alpha - \sum_{i=1}^{m-1} p_i\right) p_m^{-1} \quad (13.2)$$

относительно переменной ξ .

Модификация состоит в замене α_2 на β в уравнении (13.1). Это позволяет ликвидировать одну из двух трудоемких операций обращения к генератору стандартных случайных чисел *RANDOM* (см. замечание 3.2).

13.3. Пример эффективного применения модифицированного метода суперпозиции. Пусть требуется построить алгоритм моделирования случайной величины ξ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = \frac{5}{12} (1 + (u - 1)^4), \quad 0 < u < 2.$$

Эта функция не является плотностью элементарного распределения, так как соотношение $\int_0^\xi f(u) du = \alpha$ равносильно уравнению

$$(\xi - 1)^5 + 5\xi = 12\alpha - 1,$$

которое неразрешимо относительно ξ . Справедливо представление

$$f(u) = p_1 f_1(u) + p_2 f_2(u); \quad p_1 = \frac{5}{6}, \quad p_2 = \frac{1}{6}; \quad f_1(u) \equiv \frac{1}{2}, \quad f_2(u) = \frac{5}{2} (u-1)^4.$$

Моделирующие формулы метода суперпозиции выглядят следующим образом:

$$\xi = \begin{cases} 2\alpha_2 & \text{при } \alpha_1 < 5/6, \\ 1 + (2\alpha_2 - 1)^{1/5} & \text{при } \alpha_1 \geq 5/6. \end{cases}$$

Для модифицированного метода суперпозиции величина β равна $(6/5)\alpha$ при $m = 1$ и $\beta = 6\alpha - 5$ при $m = 2$ и, следовательно,

$$\xi = \begin{cases} (12/5)\alpha & \text{при } \alpha < 5/6, \\ 1 + (12\alpha - 11)^{1/5} & \text{при } \alpha \geq 5/6. \end{cases}$$

Модифицированный метод имеет для этого примера преимущество, так как при его применении не требуется реализовывать второе стандартное случайное число (а затраты на остальные операции у стандартного и модифицированного методов практически совпадают).

14. Метод суперпозиции для составных плотностей

14.1. Обобщение алгоритма 9.1. Рассмотрим следующее обобщение формулы (9.1), определяющей составную плотность, сосредоточенную на двух интервалах:

$$f(u) = \sum_{i=1}^M p_i f_i(u) \chi_{(a_i, b_i)}(u), \quad u \in (a_1, b_1) \cup \dots \cup (a_M, b_M). \quad (14.1)$$

Здесь $\{f_i(u)\}$ – элементарные плотности, а $\{(a_i, b_i)\}$ – непересекающиеся интервалы. Алгоритм метода обратной функции распределения (алгоритм 9.1), сформулированный в разд. 9 для случая $M = 2$, легко распространяется на составные плотности вида (14.1) для $M > 2$.

Пусть в объединении $(a_1, b_1) \cup \dots \cup (a_M, b_M)$ для определенности выполнено $b_i \leq a_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, M - 1$. Выпишем уравнение вида

(8.8) для плотности (14.1):

$$\int_{a_1}^{\xi} \sum_{i=1}^M p_i f_i(u) \chi_{(a_i, b_i)}(u) du = \alpha. \quad (14.2)$$

АЛГОРИТМ 14.1. *Находим номер t такой, что*

$$\alpha \in \Delta_m = \left[\sum_{i=1}^{m-1} p_i, \sum_{i=1}^m p_i \right)$$

(см. алгоритм 4.1), и полагаем $\xi = \psi_m(\beta)$, где $\xi = \psi_m(\alpha)$ – формула метода обратной функции распределения, соответствующая элементарной плотности $f_m(u)$, и $\beta = \left(\alpha - \sum_{i=1}^{m-1} p_i \right) p_m^{-1}$.

Действительно, при $\alpha \in \Delta_m$ имеем $\xi \in (a_m, b_m)$ и уравнение (14.2) приобретает вид

$$\int_{a_1}^{b_1} p_1 f_1(u) du + \dots + \int_{a_m}^{\xi} p_m f_m(u) du = \alpha \quad \text{или} \quad \int_{a_m}^{\xi} f_m(u) du = \beta. \quad (14.3)$$

14.2. Теорема об эквивалентности метода обратной функции распределения и модифицированного метода суперпозиции для составных плотностей. Сравнивая соотношения (13.2) и (14.3), получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 14.1. *Метод обратной функции распределения для случайной величины ξ с составной плотностью вида (14.1) (алгоритм 14.1) совпадает с модифицированным методом суперпозиции (алгоритм 13.1) с определением номера t согласно стандартному алгоритму моделирования дискретной случайной величины (алгоритм 4.1).*

ЗАМЕЧАНИЕ 14.1. Для достаточно больших M целесообразно выбирать из эквивалентных алгоритмов 13.1 и 14.1 модифицированный метод суперпозиции 13.1 и использовать на первом шаге этого алгоритма эффективные модификации стандартного алгоритма 4.1 из разд. 4–6 (квантильный метод, метод Уолкера и др.).

14.3. Моделирование кусочно-постоянной и кусочно-линейной плотностей. Рассмотрим случайную величину ξ_1 , имеющую кусочно-постоянную плотность распределения

$$f_1(u) = v_i, \quad x_{i-1} \leq u < x_i; \quad i = 1, \dots, M; \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_M = b. \quad (14.4)$$

Значения $\{v_i\}$ в формуле (14.4) положительны. Рассмотрим методы численной реализации выборочного значения случайной величины ξ_1 . Соотношение (8.8) метода обратной функции распределения $\int_a^{\xi_1} f_1(u) du = \alpha$ может быть переписано в виде

$$\sum_{k=1}^{N_1} v_k (x_k - x_{k-1}) - v_{N_1} (x_{N_1} - \xi_1) = \alpha,$$

где $N_1 = \min\left(n_1 : \sum_{k=1}^{n_1} v_k (x_k - x_{k-1}) \geq \alpha\right)$ и, следовательно,

$$\xi_1 = x_{N_1} + Q_1/v_{N_1}, \quad Q_1 = \left(\alpha - \sum_{k=1}^{N_1} v_k (x_k - x_{k-1})\right). \quad (14.5)$$

Соотношение (14.5) порождает следующий простой алгоритм моделирования выборочного значения случайной величины ξ_1 .

АЛГОРИТМ 14.2. *Реализуем значение $q_1 := \alpha$ и полагаем $n_1 := 1$. Производим переприсваивание*

$$q_1 := q_1 - v_{n_1} (x_{n_1} - x_{n_1-1}). \quad (14.6)$$

Если новое значение q_1 не положительно, то полагаем

$$\xi_1 = x_{n_1} + q_1/v_{n_1},$$

иначе производим переприсваивания $n_1 := n_1 + 1$ и (14.6) и вновь производим проверку величины q_1 на положительность и т. д.

Рассмотрим также случайную величину ξ_2 с кусочно-линейной плотностью

$$f_2(u) = v_{i-1} + (u - x_{i-1}) \frac{\Delta v_i}{\Delta x_i}, \quad u \in [x_{i-1}, x_i]; \quad (14.7)$$

здесь $x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta v_i = v_i - v_{i-1}$ и, как и в соотношении (14.4), величины v_i неотрицательны. Для численной реализации выборочного значения случайной величины ξ_2 можно рассмотреть метод обратной функции распределения (см. соотношение (8.8)). Соответствующее уравнение $\int_a^{\xi_2} f_2(u) du = \alpha$ можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{N_2} \frac{(v_{k-1} + v_k) \Delta x_k}{2} - \frac{(x_{N_2} - \xi_2)(f_2(\xi_2) + v_{N_2})}{2} = \alpha, \quad (14.8)$$

где $N_2 = \min\left(n_2 : \sum_{k=1}^{n_2} \frac{(v_{k-1}+v_k)\Delta x_k}{2} \geq \alpha\right)$. Заметим, что $f_2(\xi_2) = v_{N_2} + (\xi_2 - x_{N_2})\Delta v_{N_2}/\Delta x_{N_2}$. Обозначим также $Q_2 = \alpha - \sum_{k=1}^{N_2} (v_{k-1}+v_k)\Delta x_k/2$. Тогда соотношение (14.8) примет вид

$$\left(2v_{N_2} + (\xi_2 - x_{N_2})\frac{\Delta v_{N_2}}{\Delta x_{N_2}}\right)(\xi_2 - x_{N_2}) = 2Q_2,$$

$$\text{или } \frac{\Delta v_{N_2}}{\Delta x_{N_2}}(\xi_2 - x_{N_2})^2 + 2v_{N_2}(\xi_2 - x_{N_2}) - 2Q_2 = 0,$$

$$\text{или } \xi_2 - x_{N_2} = \frac{-v_{N_2} \pm \sqrt{v_{N_2}^2 + 2Q_2 \Delta v_{N_2}/\Delta x_{N_2}}}{\Delta v_{N_2}/\Delta x_{N_2}}.$$

Знак перед радикалом должен быть «+», так как при $Q_2 = 0$ должно выполняться $\xi_2 = x_{N_2}$ (см. соотношения (14.7), (14.8)), а при $Q_2 = -(v_{N_2} + v_{N_2-1})\Delta v_{N_2}/2$ должно быть $\xi_2 = x_{N_2-1}$. Следовательно,

$$\xi_2 = x_{N_2} + \frac{-v_{N_2}\Delta x_{N_2} + \sqrt{v_{N_2}^2 \Delta^2 x_{N_2} + 2Q_2 \Delta v_{N_2} \Delta x_{N_2}}}{\Delta v_{N_2}}. \quad (14.9)$$

Таким образом, алгоритм реализации выборочного значения случайной величины ξ_2 состоит в следующем.

АЛГОРИТМ 14.3. *Реализуем значение $q_2 := \alpha$ и полагаем $n_2 := 1$. Производим переприсваивание*

$$q_2 := q_2 - (v_{n_2-1} + v_{n_2})(x_{n_2} - x_{n_2-1})/2. \quad (14.10)$$

Если новое значение q_2 не положительно, то вычисляем значение ξ_2 по формуле (14.9) для $Q_2 = q_2$ и $N_2 = n_2$, иначе производим переприсваивания $n_2 := n_2 + 1$ и (14.10) и вновь производим проверку величины q_2 на положительность и т. д.

Очевидно, что трудоемкость алгоритмов 14.2 и 14.2 возрастает с ростом M из-за необходимости реализации вычитаний (14.6), (14.10). Для построения модификаций, позволяющих преодолеть это обстоятельство, заметим, что плотности (14.4) и (14.7) являются составными. По аналогии с соотношением (14.1) они могут быть представлены в виде

$$f_1(u) = \sum_{i=1}^M p_i^{(1)} f_i^{(1)}(u) \chi_{[x_{i-1}, x_i)}(u), \quad (14.11)$$

где $p_i^{(1)} = v_i(x_i - x_{i-1})$, $f_i^{(1)}(u) \equiv 1/(x_i - x_{i-1})$ и

$$f_2(u) = \sum_{i=1}^M p_i^{(2)} f_i^{(2)}(u) \chi_{[x_{i-1}, x_i)}(u), \quad (14.12)$$

где $p_i^{(2)} = (v_{i-1} + v_i)(x_i - x_{i-1})/2$, $f_i^{(2)}(u) = A_i u + B_i$ и

$$A_i = \frac{2\Delta v_i}{(v_{i-1} + v_i)(\Delta x_i)^2}, \quad B_i = \frac{2(v_{i-1}x_i - v_i x_{i-1})}{(v_{i-1} + v_i)(\Delta x_i)^2}.$$

Согласно утверждению 14.1, метод обратной функции распределения для плотностей вида (14.11), (14.12) совпадает с модифицированным методом суперпозиции. Таким образом, алгоритмы 14.2 и 14.3 могут быть переписаны в следующем виде

АЛГОРИТМ 14.4. 1. Реализовав выборочное значение α стандартного случайного числа, согласно вероятностям $\{p_i^{(1)} = v_i(x_i - x_{i-1})\}$, используя алгоритм 4.1 или его модификации, выбираем номер N'_1 и полагаем $N_1 = N'_1 + 1$.

2. Реализуем выборочное значение случайной величины ξ_1 по формуле $\xi_1 = x_{N_1} + Q_1/v_{N_1}$, полученной с помощью решения уравнения

$$\int_{x_{N_s-1}}^{\xi_s} f_{N_s}^{(s)}(u) du = \beta_s; \quad \beta_s = (Q_s + p_{N_s}^{(s)}) / p_{N_s}^{(s)} \quad (14.13)$$

для $s = 1$.

АЛГОРИТМ 14.5. 1. Реализовав выборочное значение α стандартного случайного числа, согласно вероятностям $\{p_i^{(2)} = (v_{i-1} + v_i) \times (x_i - x_{i-1})/2\}$, используя алгоритм 4.1 или его модификации, выбираем номер N'_2 и полагаем $N_2 = N'_2 + 1$.

2. Реализуем выборочное значение случайной величины ξ_2 по формуле (14.9), полученной с помощью решения уравнения (14.13) для $s = 2$.

Согласно замечанию 14.1, такая трактовка алгоритмов 14.2 и 14.3 позволяет обоснованно применять различные модификации алгоритма 4.1 (см. первые пункты алгоритмов 14.4, 14.5) – квантильный метод, метод Уолкера и др. (см. разд. 4–6).

15. Построение плотностей случайных величин, при моделировании которых целесообразно использовать мажорантный метод исключения

15.1. Теоремы, позволяющие обосновать мажорантный метод исключения. Пусть требуется моделировать случайный вектор (случайную величину) ξ , распределенный в области $U \in R^l$ согласно плотности $f(\mathbf{u})$, которая пропорциональна заданной неотрицательной функции $g(\mathbf{u})$, т. е.

$$f(\mathbf{u}) = \frac{g(\mathbf{u})}{\bar{G}}, \quad \bar{G} = \int_U g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (15.1)$$

Предполагается, что ни один из рассмотренных в разд. 8–14 методов не дает эффективного алгоритма моделирования вектора ξ . Надежду на построение моделирующего алгоритма для случайного вектора с плотностью (15.1) дает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 15.1. Пусть точка (ξ, η) равномерно распределена в области $G = \{\mathbf{u} \in U, 0 < v < g(\mathbf{u})\}$, т. е. в «подграфике» функции $g(\mathbf{u})$; при этом $\xi \in U$ и $\eta \in (0, g(\xi))$. Тогда случайный вектор ξ распределен согласно плотности (15.1).

Возникает вопрос: каким образом можно реализовать точку, равномерно распределенную в «подграфике» заданной функции? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение, которое является по сути обратным к утверждению 15.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15.2. Пусть случайный вектор ξ_1 распределен согласно плотности

$$f_1(\mathbf{u}) = \frac{g_1(\mathbf{u})}{\bar{G}_1}, \quad \bar{G}_1 = \int_U g_1(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (15.2)$$

а условное распределение при фиксированном значении ξ_1 случайной величины η является равномерным на интервале $(0, g_1(\xi_1))$. Тогда случайная точка (ξ_1, η) равномерно распределена в «подграфике» $G_1 = \{\mathbf{u} \in U, 0 < v < g_1(\mathbf{u})\}$ функции $g_1(\mathbf{u})$.

Если в утверждении 15.2 выбрать $\xi_1 = \xi$, то в совокупности с утверждением 15.1 получаем логический круг: нам нужно разыграть случайную точку (ξ, η) , равномерно распределенную в «подграфике» G (и тогда координата ξ имеет требуемое распределение с плотностью (15.1)), но для этого нужно реализовать вектор ξ согласно плотности

(15.1). Имеется еще, однако, утверждение 1.1, из которого следует, что если погрузить «подграфик» G в область G_1 в системе координат (\mathbf{u}, v) (т. е. $G \subseteq G_1$) и реализовать выборочное значение случайного вектора (ξ_1, η) , равномерно распределенного в G_1 , то при условии $(\xi_1, \eta) \in G$ пара (ξ_1, η) равномерно распределена в G . Тогда, согласно утверждению 15.1, вектор ξ_1 имеет требуемое распределение с плотностью (15.1).

Конструирование области G_1 связано с расширением «подграфика» G в направлении оси v . Другими словами, рассматривается мажоранта $g_1(\mathbf{u})$ функции $g(\mathbf{u})$ такая, что $g(\mathbf{u}) \leq g_1(\mathbf{u})$ при $\mathbf{u} \in U$. Первое требование к мажоранте $g_1(\mathbf{u})$ таково, что для плотности (15.2) имеется эффективный алгоритм (формула) вида $\xi_1 = \psi_1(\bar{\alpha}_1)$ для реализации выборочного значения случайного вектора ξ_1 согласно одному из вариантов алгоритма 11.1 (здесь $\bar{\alpha}_1$ – соответствующий набор стандартных случайных чисел). Это дает *мажорантный метод исключения*.

АЛГОРИТМ 15.1. 1. Реализуем выборочное значение ξ_1 согласно плотности (15.2): $\xi_1 = \psi_1(\bar{\alpha}_1)$, а также значение $\eta = \alpha_2 g_1(\xi_1)$.

2. Если

$$\eta < g(\xi_1), \quad (15.3)$$

то в качестве искомого выборочного значения принимаем $\xi = \xi_1$. В случае, когда неравенство (15.3) не выполнено, повторяем п. 1 данного алгоритма и т. д.

Согласно утверждению 15.2, точка (ξ_1, η) , реализуемая в п. 1 алгоритма 15.1, равномерно распределена в области G_1 . Если выполнено условие (15.3), то пара (ξ_1, η) принадлежит области G и, согласно утверждению 1.1, равномерно распределена в этой области, и тогда, согласно утверждению 15.1, величину ξ_1 можно принять в качестве искомого выборочного значения ξ .

Трудоемкость \bar{s} алгоритма 15.1 пропорциональна среднему числу реализаций пар (ξ_1, η) , равному

$$s = \frac{1}{\mathbf{P}((\xi_1, \eta) \in G)} = \frac{\bar{G}_1}{\bar{G}}. \quad (15.4)$$

Таким образом, мажоранту $g_1(\mathbf{u})$ функции $g(\mathbf{u})$ следует подбирать так, чтобы объемы \bar{G}_1 и \bar{G} были близки; это выполнено при $g_1(\mathbf{u}) \approx g(\mathbf{u})$.

15.2. Пример эффективного применения мажорантного метода исключения. Рассмотрим случайную величину ξ , имеющую плотность распределения $f(u)$, пропорциональную функции

$$g(u) = \left(1 + \frac{\sin u}{2}\right) e^{-u}, \quad u > 0. \quad (15.5)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{+\infty} g(u) du = \left(-e^{-u} - \frac{(\cos u + \sin u) e^{-u}}{4}\right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{5}{4}, \quad (15.6)$$

и тогда

$$f(u) = \frac{4}{5} \left(1 + \frac{\sin u}{2}\right) e^{-u}, \quad u > 0.$$

Из соотношения (15.6) следует, что функция $f(u)$ не является плотностью элементарного распределения, т. е. уравнение метода обратной функции распределения $\int_0^\xi f(u) du = \alpha$ (см. соотношение (8.8)) неразрешимо относительно ξ . В силу того что $|\sin u| \leq 1$, в качестве мажоранты функции (15.5) можно взять функцию $g_1(u) = 3e^{-u}/2$. Легко вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} g_1(u) du = 3/2$. Следовательно, $f_1(u) = e^{-u}$, $u > 0$. Это частный случай экспоненциальной плотности (8.11) для $\lambda = 1$. Отсюда получаем следующий алгоритм метода исключения:

1. Согласно формуле (8.13) получаем выборочное значение $\xi_1 = -\ln \alpha_1$. Реализуем также величину $\eta = \alpha_2 g_1(\xi_1) = 3\alpha_2 \exp(-\xi_1)/2$.
2. Проверяем неравенство $\eta < g(\xi_1)$ или $3\alpha_2 < 2 + \sin \xi_1$. Если это неравенство выполнено, то полагаем, что выборочное значение случайной величины ξ равно $\xi = \xi_1$, иначе повторяем пункт 1 и т. д.

Трудоемкость этого алгоритма пропорциональна величине $s = 3/2 : 5/4 = 1.2$ (см. соотношение (15.4)).

15.3. Технология «порчи» моделируемой плотности. При построении примера из подразд. 15.2 использовалась следующая

ТЕХНОЛОГИЯ 15.1. Конструируем сначала плотность $f_1(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in U \subseteq R^l$) вектора ξ_1 , для которого существует эффективный алгоритм (формула) численной реализации: $\xi_1 = \psi_1(\bar{\alpha}_1)$ (этот алгоритм используется затем в первом пункте алгоритма 15.1). Для построения функции $f_1(\mathbf{u})$ можно использовать весь арсенал конструирования моделируемых плотностей (технологии 8.1, 11.1, 14.1 и др.).

Далее преобразуем плотность $f_1(\mathbf{u})$ таким образом, чтобы она превратилась в функцию $g(\mathbf{u})$, пропорциональную «немоделируемой» плотности $f(\mathbf{u})$ (по сути, мы «портим» моделируемую плотность $f_1(\mathbf{u})$). Одним из простейших преобразований является умножение плотности $f_1(\mathbf{u})$ на мало меняющуюся функцию $\theta(\mathbf{u})$:

$$g(\mathbf{u}) = f_1(\mathbf{u})\theta(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U; \quad \text{где } 0 < A \leq \theta(\mathbf{u}) \leq B \quad (15.7)$$

и $(B - A)$ – близкая к нулю положительная величина. В качестве мажоранты тогда можно взять $g_1(\mathbf{u}) = B f_1(\mathbf{u})$. Плотность, пропорциональная этой функции, очевидно, равна $f_1(\mathbf{u})$. Интегрируя функции $g_1(\mathbf{u})$ и $g(\mathbf{u})$ по области U , из соотношения (15.7) получаем

$$\frac{A \bar{G}_1}{B} \leq \bar{G}, \quad \text{и тогда } s = \frac{\bar{G}_1}{\bar{G}} \leq \frac{B}{A}, \quad (15.8)$$

т. е. при $A \approx B$ величина s из соотношения (15.4) для алгоритма 15.1 невелика (близка к единице).

Для удобства выкладок в равенстве (15.7) вместо плотности $f_1(\mathbf{u})$ можно рассматривать пропорциональную ей функцию $\tilde{g}_1(\mathbf{u})$ (опуская, к примеру, нормирующую константу).

В примере из подразд. 15.2 в качестве $f_1(u)$ из равенства (15.7) выбрана функция $f_1(u) = e^{-u}$, $u > 0$, а в качестве функции $\theta(u)$ взята $\theta(u) = 1 + \sin(u/2)$. Для оценки величины s из соотношения (15.4) формула (15.8) не нужна, так как, в силу выкладок (15.6), величина \bar{G} вычисляется точно.

Приведем еще один пример применения технологии 15.1. Рассмотрим случайную величину ξ , имеющую плотность распределения $f(u)$, пропорциональную функции

$$g(u) = \frac{(12\pi + 3 \operatorname{arctg} u)u^2}{8\pi}, \quad -1 < u < 1.$$

Несложно убедиться в том, что функция $f(u) = g(u)/\bar{G}$ не является плотностью элементарного распределения. Заметим, что функция $g(u)$ представима в виде произведения (15.7):

$$g(u) = f_1(u)\theta(u), \quad \text{где } f_1(u) = \frac{3u^2}{2}, \quad \theta(u) = 1 + \frac{\operatorname{arctg} u}{4\pi}.$$

Формула метода обратной функции распределения для выборочного значения случайной величины ξ_1 получается из цепочки равенств

$$\int_{-1}^{\xi_1} \frac{3u^2}{2} du = \alpha, \quad \text{или } \frac{\xi_1^3}{2} + \frac{1}{2} = \alpha, \quad \text{или } \xi_1 = \sqrt[3]{2\alpha - 1}.$$

Для функции $\theta(u)$ выполнено неравенство

$$|\theta(u) - 1| < \frac{\operatorname{arctg} 1}{4\pi} = \frac{1}{16}, \quad \text{т. е. } A = \frac{15}{16}, \quad B = \frac{17}{16}.$$

В качестве мажоранты функции $g(u)$ можно взять

$$g_1(u) = \frac{17}{16} \times \frac{3u^2}{2}.$$

Тогда получаем следующий алгоритм метода исключения:

1. Реализуем выборочное значение ξ_1 по формуле $\xi_1 = \sqrt[3]{2\alpha_1 - 1}$. Реализуем также величину

$$\eta = \alpha_2 g_1(\xi_1) = \frac{17\alpha_2}{16} \times \frac{3\xi_1^2}{2}.$$

2. Проверяем неравенство $\eta < g(\xi_1)$ или $17\pi\alpha_2 < 16\pi + 4 \operatorname{arctg} \xi_1$. Если это неравенство выполнено, то полагаем, что выборочное значение случайной величины ξ равно $\xi = \xi_1$, иначе повторяем п. 1 и т. д.

Согласно формуле (15.8), величина s из равенства (15.4) для этого алгоритма оценивается сверху величиной $s \leq B/A = 17/15 \approx 1.13$.

16. Двусторонний метод исключения. Моделирование усеченных распределений

16.1. Двусторонний метод исключения. Следующая модификация алгоритма 15.1 эффективна в достаточно распространенном случае, когда требуется моделировать выборочное значение случайного вектора ξ , плотность которого пропорциональна функции $g(\mathbf{u})$, вычисление значений которой весьма трудоемко. В этом случае помимо мажоранты $g_1(\mathbf{u})$ строим миноранту $g_2(\mathbf{u})$ такую, что

$$g_2(\mathbf{u}) \leq g(\mathbf{u}) \leq g_1(\mathbf{u}); \quad \mathbf{u} \in U. \quad (16.1)$$

АЛГОРИТМ 16.1. 1. Реализуем выборочное значение $\xi_1 = \psi_1(\bar{\alpha}_1)$ согласно плотности (15.2), а также значение $\eta = \alpha_2 g_1(\xi_1)$.

2. Вместо неравенства (15.3) проверяем сначала соотношение $\eta < g_2(\xi_1)$. Если оно выполнено, то пара (ξ_1, η) принадлежит «подграфу» функции $g_2(\mathbf{u})$, а значит, и области G . Тогда можно положить, что выборочное значение случайного вектора ξ равно $\xi = \xi_1$. В случае

же $\eta \geq g_2(\xi_1)$ проверяем неравенство (15.3). Если оно выполнено, то $\xi = \xi_1$, иначе повторяется пункт 1 данного алгоритма и т. д.

В связи с соотношением (16.1) алгоритм 16.1 называют *двусторонним методом исключения*. В случае, когда все три функции из неравенства (16.1) близки, а миноранта $g_2(\mathbf{u})$ и мажоранта $g_1(\mathbf{u})$ легко вычислимы, проверка (15.3), связанная с трудоемким вычислением значения $g(\xi_1)$ будет происходить относительно редко, и двусторонний метод может дать существенный выигрыш по сравнению с «односторонним» алгоритмом 15.1. В качестве функций $g_2(\mathbf{u})$ и $g_1(\mathbf{u})$ часто используются кусочно-постоянные и кусочно-линейные приближения снизу и сверху для функции $g(\mathbf{u})$ (см. далее подразд. 17.3).

16.2. Моделирование усеченных распределений. Рассмотрим случайный вектор ξ_1 , распределенный в области $V \in R^l$ согласно плотности $f_1(\mathbf{u})$. Случайный вектор ξ имеет *усеченное распределение вектора* ξ_1 , если он распределен в подобласти $U \subset V$ и его плотность распределения $f(\mathbf{u})$ пропорциональна в U плотности $f_1(\mathbf{u})$:

$$f(\mathbf{u}) = H f_1(\mathbf{u}) = \frac{f_1(\mathbf{u})}{\int_U f_1(\mathbf{w}) d\mathbf{w}}, \quad \mathbf{u} \in U \subset V. \quad (16.2)$$

В случае, когда имеется эффективный алгоритм моделирования выборочного значения случайного вектора ξ_1 , можно использовать следующий алгоритм исключения для моделирования выборочного значения вектора ξ , имеющего усеченное распределение (16.2).

АЛГОРИТМ 16.2. 1. Реализуем выборочное значение случайного вектора ξ_1 в области V согласно плотности $f_1(\mathbf{u})$.

2. Если $\xi_1 \in U$, то $\xi = \xi_1$, иначе повторяется п. 1 данного алгоритма и т. д.

Несложно понять, что алгоритм 16.2 является частным случаем алгоритма 15.1 в области V , в котором для функции (16.2) рассмотрена мажоранта $H f_1(\mathbf{u})$ при $\mathbf{u} \in V$ (при $\mathbf{u} \in U$ имеем $f(\mathbf{u}) = H f_1(\mathbf{u})$, а при $\mathbf{u} \in V \setminus U$ выполнено $f(\mathbf{u}) = 0 < H f_1(\mathbf{u})$). Моделирование значения случайной величины η не требуется (см. п. 1 алгоритма 15.1), так как при $\xi_1 \in U$ неравенство (15.3) заведомо выполнено, а при $\xi_1 \in V \setminus U$ — заведомо не выполнено. Трудоемкость алгоритма 16.2 пропорциональна величине $s = H$ (см. соотношения (15.4), (16.2)).

Заметим, что во многих случаях для моделирования случайного вектора ξ с плотностью вида (16.2) удается построить более эффективную, чем алгоритм 16.2, численную процедуру, не связанную с включением

области U в множество V . Рассмотрим, например, случайную величину ξ , имеющую плотность распределения

$$f(u) = \frac{\lambda e^{-\lambda u}}{1 - e^{-\lambda A}}, \quad 0 < u < A, \quad \lambda > 0. \quad (16.3)$$

С учетом примера 8.1 распределение (16.3) можно назвать усеченным экспоненциальным распределением. Это распределение широко используется в приложениях (например, оно позволяет реализовать так называемое *блуждание без вылета* при моделировании переноса частиц).

Алгоритм 16.2 здесь выглядит следующим образом: *реализуем выборочное значение величины ξ_1 согласно формуле (8.13): $\xi_1 = -\ln \alpha / \lambda$; если $\xi_1 \leq A$, то в качестве выборочного значения случайной величины ξ выбираем $\xi = \xi_1$, иначе снова реализуем ξ_1 и т. д.* Трудоемкость этого алгоритма пропорциональна величине $s = 1/(1 - e^{-\lambda A})$. При малых A это значение может быть достаточно большим.

С другой стороны, непосредственно решая уравнение (8.8) метода обратной функции распределения, получаем моделирующую формулу: $\xi = -(1/\lambda) \ln(1 - \alpha(1 - e^{-\lambda A}))$. Последнее соотношение ненамного сложнее формулы (8.13), и не требует процедуры исключения, как в алгоритме 16.2.

17. Применение полиномиальных и кусочно-полиномиальных плотностей

17.1. Полиномиальные приближения функций. В этом разделе рассмотрены алгоритмы метода Монте-Карло, в которых используются полиномиальные и кусочно-полиномиальные приближения функций вида

$$g(\mathbf{u}) \approx L_M g(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M w_i \chi_i(\mathbf{u}), \quad (17.1)$$

на компактном множестве $U \subset R^l$. В формуле (17.1) $L_M g$ обозначает аппроксимацию (или интерполяцию) функции g на сетке $V^{(M)} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M\}$. Базисные полиномиальные функции $\Xi^{(M)} = \{\chi_1, \dots, \chi_M\}$ и коэффициенты $W^{(M)} = \{w_1, \dots, w_M\}$ определенным образом связаны с узлами сетки $V^{(M)}$. В частности, коэффициенты $W^{(M)}$ являются, как правило, комбинациями значений $\{g(\mathbf{v}_1), \dots, g(\mathbf{v}_M)\}$; чаще всего

$$w_i = g(\mathbf{v}_i), \quad i = 1, \dots, M. \quad (17.2)$$

Прежде всего рассмотрим примеры ситуаций, в которых нужно решать следующую

ЗАДАЧА 17.1. Построить алгоритм численного моделирования случайного вектора ξ , имеющего плотность распределения

$$f(\mathbf{u}) = C L_M g(\mathbf{u}), \quad C = 1/c, \quad c = \int_{R^l} L_M g(\mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad g(\mathbf{u}) \geq 0. \quad (17.3)$$

17.2. Использование гистограммы и полигона частот. Пусть параметр θ моделируемого физического процесса X случаен и имеется возможность получить выборочные значения $\theta_1^{(X)}, \dots, \theta_k^{(X)}$ этого параметра с помощью проведения достаточно дорогих экспериментов. Пусть также Y_X является математической моделью, описывающей процесс X и включающей параметр θ , причем численная реализация модели Y_X требует моделирования большой выборки

$$\theta_1^{(Y_X)}, \dots, \theta_K^{(Y_X)}, \quad \text{где } K \gg k. \quad (17.4)$$

В этом случае можно разделить интервал $[a, b]$, $a = \min(\theta_1^{(X)}, \dots, \theta_k^{(X)})$, $b = \max(\theta_1^{(X)}, \dots, \theta_k^{(X)})$ на полуинтервалы $[z_i, z_{i+1})$; $i = 1, \dots, M - 1$; $a = z_1 < z_2 < \dots < z_M = b$ и вычислить частоты $\nu_i^* = m_i/k$ (здесь m_i есть число значений $\{\theta_j^{(X)}\}$, попавших в i -й полуинтервал). Пусть $v_i = (z_i + z_{i+1})/2$ и $g(v_i) = \nu_i^*/(z_{i+1} - z_i)$. Тогда плотность вида (17.3) может быть использована для реализации выборки (17.4). Для кусочно-постоянного случая имеем $\chi_i(u) \equiv 1$ при $u \in [z_i, z_{i+1})$; $w_i = g(v_i)$ и $C = 1$, и функция (17.3) называется *гистограммой*. Соответствующая кусочно-линейная версия функции (17.1), (17.2) называется *полигоном частот*. В этих простейших случаях выборочные значения (17.4) могут быть получены с помощью модифицированного метода суперпозиции (см. разд. 14).

17.3. Использование аппроксимаций функций в методе исключения. В алгоритмах метода исключения (алгоритм 15.1) и двустороннего метода исключения (алгоритм 16.1) требуется строить мажоранту g_1 и миноранту g_2 функции g , пропорциональной плотности f , для которой не удастся построить эффективного алгоритма реализации соответствующих выборочных значений. Оптимизация алгоритмов 15.1 и 16.1 связана с выбором функций g_1, g_2 , близких к функции g . Для построения таких функций целесообразно использовать приближения «сверху» и «снизу» для плотности f (здесь, особенно в многомерном

случае, эффективными оказываются кусочно-полиномиальные, в частности кусочно-постоянные, аппроксимации); в этом случае плотность $f_1(\mathbf{x}) = g_1/\bar{G}_1$ имеет вид (17.3).

17.4. Приближение «сложных» плотностей. В случае, когда функция g пропорциональна «немоделируемой» плотности \tilde{f} случайной величины или вектора θ , кроме мажорантного метода исключения можно использовать следующий прием. Выберем «близкую» к \tilde{f} плотность (17.3) и будем моделировать соответствующую случайную величину ξ вместо θ . При этом приближение (17.1) должно обладать достаточно хорошими аппроксимационными свойствами, т. е. расстояние $\rho_{B(X)}(g, L_M g)$ должно быть мало; здесь $\rho_{B(X)}$ – метрика функционального пространства $B(X)$. Здесь уместно заметить, что имеется хорошо развитая статистическая теория приближения плотностей, в которой в основном изучается случай пространства $B(X) = L_1(X)$, однако метрика этого пространства является недостаточно «сильной» для ряда приложений теории методов Монте-Карло (здесь требуются метрики пространств $L_2(X)$, $C(X)$ и даже $W_2^p(X)$ и $C^p(X)$).

17.5. Использование приближений функций в численном стохастическом и дискретно-стохастическом интегрировании. Функциональные оценки. Рассмотрим стандартный алгоритм метода Монте-Карло приближенного вычисления многократного интеграла $I = \int g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$. Этот алгоритм предусматривает представление величины I в виде математического ожидания

$$I = \int \frac{g(\mathbf{u})}{f(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \mathbf{E}\zeta; \quad \zeta = q(\xi) = \frac{g(\xi)}{f(\xi)} \quad (17.5)$$

(здесь случайный вектор ξ распределен согласно выбираемой плотности $f(\mathbf{u})$) с последующим приближением этого математического ожидания вида

$$I = \mathbf{E}\zeta \approx \theta_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q(\xi_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(\xi_i)}{f(\xi_i)}, \quad (17.6)$$

при этом выборочные значения $\{\xi_i\}$ реализуются численно. Плотность $f(\mathbf{u})$ из соотношения (17.5) выбирается так, чтобы минимизировать величину трудоемкости

$$S = t \times \mathbf{D}\zeta; \quad (17.7)$$

здесь t – среднее время ЭВМ для получения одного выборочного значения случайной величины ζ из равенства (17.5).

Согласно принципу *выборки по важности*, уменьшить дисперсию $\mathbf{D}\zeta$ из соотношения (17.7) можно за счет выбора плотности $f(\mathbf{u})$, близкой к $\tilde{C}|g(\mathbf{u})|$ (здесь \tilde{C} – соответствующая нормирующая константа). Для знакопостоянной функции g в качестве плотности f можно выбрать функцию (17.3); при этом получаем *дискретно-стохастическую версию выборки по важности*. В свою очередь, к уменьшению величины t может привести использование *взвешенной равномерной выборки*

$$I \approx \theta_n^{(2)} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q(\boldsymbol{\alpha}_i) \right) / \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\boldsymbol{\alpha}_i) \right).$$

Здесь интеграл I берется по единичному кубу Q_l , и векторы $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ равномерно распределены в Q_l .

Другой способ понижения дисперсии дает *метод выделения главной части*, идея которого состоит в том, чтобы выбрать функцию $g_0(\mathbf{u})$, близкую к подынтегральной функции $g(\mathbf{u})$ и такую, что интеграл I_0 берется аналитически; при этом искомый интеграл представим в виде суммы $I = I_0 + \int (g(\mathbf{u}) - g_0(\mathbf{u})) d\mathbf{u}$, и метод Монте-Карло (17.6) применяется для оценки второго слагаемого этой суммы. Если взять $g_0(\mathbf{u}) = L_M g(\mathbf{u})$ (см. соотношение (17.1)), то получается (в ряде случаев весьма эффективная) *дискретно-стохастическая версия выборки выделения главной части*.

Еще один дискретно-стохастический метод уменьшения дисперсии – *метод Монте-Карло с поправочным множителем* связан с использованием оценки

$$I \approx \theta_n^{(3)} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q(\boldsymbol{\xi}_i) \right) \times \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(\boldsymbol{\xi}_i) \right),$$

где $H(\mathbf{u}) = 2 - CL_M q(\mathbf{u})$.

К существенному уменьшению величины t из соотношения (17.7) может привести использование *дискретно-стохастической версии двустороннего геометрического метода Монте-Карло*, в которой по аналогии с двусторонним методом исключения строятся кусочно-полиномиальные приближения (17.1) «сверху» и «снизу» для сложно вычисляемой подынтегральной функции $g(\mathbf{u})$.

Приближения функций (17.1) используются также при реализации так называемых *дискретно-стохастических численных процедур приближения функций, заданных в интегральной форме* [24]. Основны-

ми примерами таких функций являются интеграл, зависящий от параметра, и решение интегрального уравнения второго рода. Дискретно-стохастический метод включает в себя предварительную дискретизацию задачи (введение сетки), оценку решения в узлах сетки методом Монте-Карло с последующим конечно-элементным восполнением решения по полученным приближенным значениям в узлах сетки. В этих задачах особенно важным является свойство *устойчивости* соответствующего приближения (17.1).

17.6. Использование метода суперпозиции при решении задачи 17.1. Пусть для плотности (17.3) выполнены соотношения

$$\chi_i(\mathbf{u}) \geq 0 \quad \text{для } \mathbf{u} \in R^l \quad \text{и } w_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (17.8)$$

Тогда можно записать плотность (2.3) в виде

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M P_i f_i(\mathbf{u}); \quad f_i(\mathbf{u}) = \frac{\chi_i(\mathbf{u})}{Y_i}, \quad Y_i = \int \chi_i(\mathbf{w}) d\mathbf{w}, \quad P_i = C w_i Y_i. \quad (17.9)$$

Выберем функциональный базис $\Xi^{(M)}$ таким образом, что для случайных величин ξ_i , распределенных согласно плотностям $\{f_i\}$ из соотношения (17.9), имеются эффективные алгоритмы численного статистического моделирования. Тогда возникает следующий алгоритм метода суперпозиции (см. алгоритм 12.2).

АЛГОРИТМ 17.1. Согласно вероятностям $\{P_i\}$ из соотношения (17.9) выбираем номер $t : \mathbf{P}(t = i) = P_i$. Реализуем ξ согласно плотности $f_m(\mathbf{u})$.

Количество узлов сетки M может быть достаточно велико и затраты на поиск номера t могут быть также велики. В этом случае целесообразно использование квантильного метода (алгоритм 6.1).

17.7. Выбор функционального базиса. Суммируя соображения подразделов 17.1–17.6, сформулируем требования к функциональному базису $\Xi^{(M)}$:

- а) базисные функции $\chi_i(\mathbf{u})$ и коэффициенты $\{w_i\}$ неотрицательны (см. соотношение (17.8));
- б) выборочные значения согласно соответствующим плотностям $\{f_i(\mathbf{u})\}$ эффективно численно реализуемы;
- в) функция $f(\mathbf{u})$ близка к функции $Cg(\mathbf{u})$ в некоторой функциональной норме;
- г) аппроксимация (17.1) устойчива.

Требования v и z являются «традиционными» для теории аппроксимации функций, а требования a , b специфичны именно для перечисленных выше приложений. Будем называть *моделируемыми* функциональные базисы $\Xi^{(M)}$, удовлетворяющие требованиям a и b .

Сразу отметим, что далеко не все «классические» аппроксимационные базисы являются моделируемыми. Например, функции *базиса Лагранжа* $\chi_i(u) = \prod_{j=1, j \neq i}^M (u - v_j)/(v_i - v_j)$, $u \in R$ являются знакопеременными (т. е. требования a и b не выполняются). Обладая весьма хорошими аппроксимационными свойствами, аппроксимация Лагранжа имеет весьма неважные свойства устойчивости (особенно для равномерной сетки). Аналогичные недостатки имеют *тригонометрические базисы*.

Наиболее удачной для использования в дискретно-стохастических численных процедурах оказалась конечно-элементная *аппроксимация Стренга–Фикса* (см. далее разд. 18). В одномерном случае хорошие свойства моделируемости имеет *базис Бернштейна* (см. разд. 19, 20).

18. Моделируемость аппроксимации Стренга–Фикса

18.1. Построение аппроксимации Стренга–Фикса. Для простоты в дальнейшем в качестве множества $U \subset R^l$, на котором рассматривается приближение (17.1) функции $g(\mathbf{u})$ возьмем прямоугольный параллелепипед

$$U = \{\mathbf{u} = (u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) \in R^l \mid a_k \leq u^{(k)} \leq b_k, k = 1, \dots, l\}.$$

Предполагается также, что в R^l задана равномерная прямоугольная сетка, и каждому узлу \mathbf{v}_i из $V^{(M)}$ можно сопоставить мультииндекс $\mathbf{j}^{(i)} = (j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(l)})$ так, что $\mathbf{v}_i = (j_{(i)}^{(1)}h, \dots, j_{(i)}^{(l)}h)$, где h – шаг сетки, а $j_{(i)}^{(s)}$ – целые числа. Аппроксимация Стренга–Фикса определяется базисом

$$\chi_i(\mathbf{u}) = \chi_{(j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(l)})}(u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) = \chi_{j_{(i)}^{(1)}}(u^{(1)}) \times \dots \times \chi_{j_{(i)}^{(l)}}(u^{(l)}), \quad (18.1)$$

где $\chi_{j_{(i)}^{(m)}}(u^{(m)}) = \chi(u^{(m)}/h - j_{(i)}^{(m)})$, а $\chi(u)$ – финитная, одинаковая для всех координат, *производящая базис функция*. Как правило, в качестве производящей функции выбирают B -сплайн $\beta^{(r)}(u)$ порядка r , который

определяется рекуррентно: $\beta^{(i+1)}(u) = \beta^{(i)} * \beta^{(0)}(u)$, где

$$\beta^{(0)}(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } -1/2 \leq u \leq 1/2; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

а знак «*» обозначает свертку.

18.2. Моделирование случайного вектора ξ . Использование B -сплайна в качестве производящей функции имеет большое преимущество с точки зрения эффективной численной реализуемости полученных аппроксимаций (см. требование б), поскольку для случайных величин, имеющих в качестве плотности распределения комбинацию B -сплайнов (типа (18.1)), существуют эффективные моделирующие алгоритмы, основанные на следующем

УТВЕРЖДЕНИЕ 18.1. *Функция $\beta^{(r)}(u)$ является плотностью распределения случайной величины*

$$\eta = \alpha_1 + \dots + \alpha_r + \alpha_{r+1} - (r+1)/2, \quad (18.2)$$

где α_i – независимые стандартные (т. е. равномерно распределенные в $(0, 1)$) случайные числа.

Утверждение 18.1 доказывается индукцией по r с учетом того, что функция $\beta^{(0)}$ является плотностью распределения случайной величины $(\alpha - 1/2)$, а функция $f_1 * f_2$ является плотностью распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$ независимых случайных величин ξ_i , распределенных согласно плотностям f_i ; $i = 1, 2$. Из утверждения 18.1 следует, что если $\{w_i\}$ положительны, приближение (17.1) пропорционально плотности случайного вектора, моделируемого методом суперпозиции.

АЛГОРИТМ 18.1. *Пусть требуется моделировать случайный вектор ξ , имеющий плотность распределения $f(\mathbf{u}) = CL_M g(\mathbf{u})$. Действуем согласно алгоритму 17.1. Перепишем плотность в виде соотношения (17.9). Для базиса (18.1) плотности $f_i(\mathbf{u})$ из формулы (17.9) можно представить в виде*

$$f_i(\mathbf{u}) = \frac{\chi_i^{(1)}(u^{(1)})}{\int \chi_i^{(1)}(w) dw} \times \dots \times \frac{\chi_i^{(l)}(u^{(l)})}{\int \chi_i^{(l)}(w) dw} = f_i^{(1)}(u^{(1)}) \times \dots \times f_i^{(l)}(u^{(l)}).$$

Таким образом, компоненты ξ_1, \dots, ξ_l вектора ξ на втором шаге алгоритма 17.1 (после выбора номера m) следует моделировать независимо согласно плотностям $f_m^{(1)}, \dots, f_m^{(l)}$. Все эти плотности имеют вид $f_\xi(u) = K_3 \chi(K_1 u + K_2)$, $u \in R$. Произведя замену $v = K_1 u + K_2$, будем моделировать случайную величину $\eta = K_1 \xi + K_2$, которая имеет

плотность распределения $f_\eta(v) = K_3\chi(v)/K_1$. Согласно утверждению 18.1, для $\chi = \beta^{(r)}$ имеем, что $K_3/K_1 = 1$, и что моделирующая формула для η имеет вид (18.2). Получив реализацию случайной величины η , подсчитываем нужное значение по формуле $\xi = (\eta - K_2)/K_1$.

Чаще всего в качестве производящей функции используются сплайны первого порядка (или «функции-крышки»)

$$\chi(x) = \beta^{(1)}(u) = \begin{cases} 1 + u & \text{при } -1 \leq u \leq 0; \\ 1 - u & \text{при } 0 \leq u \leq 1; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

и тогда приближение (17.1), (18.1) называется *мультилинейной аппроксимацией*.

18.3. Аппроксимационные свойства приближения Стренга – Фикса. Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 18.2 [25]. А. Пусть $g \in W_2^{p+1}(U)$ и $\chi \in W_2^p(R)$, тогда найдутся такие коэффициенты w_i из соотношения (17.1), что справедлива оценка

$$\rho_{W_2^s(U)}(g, L_M g) \leq H'_s h^{p+1-s} \|g\|_{W_2^{p+1}(U)}, \quad 0 \leq s \leq p, \quad (18.3)$$

где константы H'_s не зависят от f и h .

Б. Пусть $g \in C^{p+1}(U)$ и $\chi \in C^p(R)$, тогда найдутся такие коэффициенты w_i из соотношения (17.1), что справедлива оценка

$$\rho_{C^s(U)}(g, L_M g) \leq H''_s h^{p+1-s} \|g\|_{C^{p+1}(U)}, \quad 0 \leq s \leq p, \quad (18.4)$$

где константы H''_s не зависят от f и h .

Здесь $C^p(U)$ – пространство функций, непрерывных на U вместе со своей p -й производной с нормой

$$\|g\|_{C^p(U)} = \sum_{\mathbf{m}: |\mathbf{m}| \leq p} \sup_{\mathbf{u} \in U} |D^{\mathbf{m}} g(\mathbf{u})|; \quad D^{\mathbf{m}} g(\mathbf{u}) = \frac{\partial^{|\mathbf{m}|}}{\partial (u^{(1)})^{m_1} \dots \partial (u^{(l)})^{m_l}} g(\mathbf{u}),$$

$\mathbf{u} = (u^{(1)}, \dots, u^{(l)})$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_l)$, m_i – целые неотрицательные числа, $|\mathbf{m}| = m_1 + \dots + m_l$. Соответственно $W_2^p(U)$ – пространство Соболева (L_2 -расширение пространства $C^p(U)$) с нормой

$$\|g\|_{W_2^p(U)} = \left(\sum_{\mathbf{m}: |\mathbf{m}| \leq p} \int_U (D^{\mathbf{m}} g(\mathbf{u}))^2 d\mathbf{u} \right)^{1/2}.$$

Расстояние определяется через норму: $\rho_B(g_1, g_2) = \|g_1 - g_2\|_B$, $B = C^p(U) \vee W_2^p(U)$.

Из утверждения 18.2 следует, что для получения более высокого порядка по h оценки погрешности аппроксимации Стренга – Фикса следует выбирать более гладкие производящие функции. В описанных выше приложениях утверждение 18.2 будет в основном использоваться для оценки погрешности аппроксимации Стренга – Фикса в пространствах $L_2(U) = W_2^0(U)$, $C(U) = C^0(U)$. В этих пространствах для кусочно-постоянной и мультилинейной аппроксимаций (т. е. для $\chi = \beta^{(0)}$ и $\chi = \beta^{(1)}$) оптимальный порядок сходимости в утверждении 18.2 дают коэффициенты (17.2), и в этом случае $L_M g(\mathbf{v}_i) = g(\mathbf{v}_i)$ (т. е. аппроксимация (17.1) является *интерполяцией*). Более того, для этих интерполяций и для гладких функций g (а именно такие в основном будут рассматривать в дальнейшем) оценки (18.3), (18.4) могут быть уточнены и усилены. В частности, в работе [26] доказано, что для случая $\chi = \beta^{(1)}$, $g \in C^2(U)$ справедливо неравенство

$$\rho_{C(U)}(g, L_M g) \leq \hat{H} h^2, \quad \hat{H} = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^l \sup_{\mathbf{u} \in U} \left| \frac{\partial^2}{\partial (u^{(s)})^2} g(\mathbf{u}) \right|. \quad (18.5)$$

Из соотношения (18.5) и определения нормы пространства $L_2(U)$ следует оценка $\rho_{L_2(U)}(g, L_M g) \leq \hat{H} \sqrt{\text{mes } U} h^2$.

В случае $r > 1$ выбор подходящих (с точки зрения утверждения 18.2) коэффициентов $\{w_i\}$ в представлении (17.1) более сложен [26]. Это затрудняет реализацию таких алгоритмов на ЭВМ и, кроме того, усложняет рассмотрение устойчивости погрешности аппроксимации к возможной ошибке задания значений функции в узлах сетки.

18.4. Устойчивость мультилинейного приближения. Теперь сформулируем свойство «сноса погрешности в узлы» для мультилинейной аппроксимации, которое обосновывает устойчивость мультилинейной аппроксимации к погрешности задания значений функции в узлах (см. требование \mathcal{J}).

УТВЕРЖДЕНИЕ 18.3. Пусть заданы две функции $g, \tilde{g} \in C^0(U)$, тогда для мультилинейной аппроксимации имеет место

$$\sup_{\mathbf{u} \in U} \rho_{C^0(U)}(L_M g, L_M \tilde{g}) = \max_{i=1, \dots, M} |g(\mathbf{v}_i) - \tilde{g}(\mathbf{v}_i)|. \quad (18.6)$$

Иными словами, если функция g задана с ошибкой, то соответствующая мультилинейная аппроксимация отличается от аппроксимации,

построенной по точным значениям, на величину, по модулю не превосходящую максимальную ошибку в узлах $V^{(M)}$.

19. Моделируемость аппроксимации Бернштейна

19.1. Аппроксимация Бернштейна. Для одномерного случая ($l = 1$) рассмотрим в качестве базисных функций приближения (17.1) рассмотрим *полиномы Бернштейна*

$$\chi_i(u) = C_M^i u^i (1-u)^{M-i}, \quad i = 0, 1, \dots, M; \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (19.1)$$

Полагаем

$$g(u) \geq 0 \quad \text{при } u \in [0, 1] \quad \text{и} \quad w_i = g(ih). \quad (19.2)$$

19.2. Два полезных свойства полиномов Бернштейна. Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 19.1. Для всех $u \in [0, 1]$ выполнено

$$S_0 = \sum_{i=0}^M C_M^i u^i (1-u)^{M-i} = 1, \quad (19.3)$$

$$S_j = \sum_{i=0}^M \frac{i(i-1)\dots(i-j+1)}{M(M-1)\dots(M-j+1)} C_M^i u^i (1-u)^{M-i} = u^j, \quad (19.4)$$

где $j = 1, \dots, N$ и $M \geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (19.3) справедливо, так как величина S_0 представляет собой сумму биномиальных вероятностей для «вероятности успеха», равной u . Далее произведем в соотношении (19.4) замены $\hat{i} = i - j$, $\hat{M} = M - j$ и тогда

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_{\hat{i}=0}^{\hat{M}} \frac{(\hat{i}+1)\dots(\hat{i}+j)}{(\hat{M}+1)\dots(\hat{M}+j)} \times \frac{(\hat{M}+j)!}{(\hat{i}+j)!(\hat{M}-\hat{i})!} u^{\hat{i}+j} (1-u)^{\hat{M}-\hat{i}} = \\ &= u^j \times \sum_{\hat{i}=0}^{\hat{M}} C_{\hat{M}}^{\hat{i}} u^{\hat{i}} (1-u)^{\hat{M}-\hat{i}} = u^j; \end{aligned}$$

здесь мы учли равенство (19.3). Утверждение 19.1 доказано.

Утверждение 19.1 будут использовано в дальнейшем при построении метода Кондюрина для моделирования случайных величин с полиномиальным распределением (8.10) (см. разд. 20).

19.3. Теорема о распределении порядковых статистик. Моделируемость аппроксимации Бернштейна. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n – набор независимых, одинаково распределенных случайных величин. *Вариационным рядом* $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ называется упорядоченный по возрастанию набор случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n . При этом r -й член вариационного ряда называется *r -ой порядковой статистикой*. В частности, $\xi_1^{(n)} = \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ и $\xi_n^{(n)} = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 19.2. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют функцию распределения $F(u)$ и плотность $f(u)$. Тогда r -я порядковая статистика $\xi_r^{(n)}$ имеет плотность распределения

$$f_r^{(n)}(u) = n C_{n-1}^{r-1} F^{r-1}(u) (1 - F(u))^{n-r} f(u), \quad (19.5)$$

где $C_N^k = N!/(k!(N-k)!)$ – число сочетаний из N элементов по k .

Рассмотрим случай $\{\xi_i = \alpha_i \in U(0, 1)\}$, когда величины ξ_i имеют равномерное распределение в интервале $(0, 1)$, при этом плотность (19.5) порядковой статистики $\xi_r^{(n)} = \alpha_r^{(n)}$ имеет вид

$$\hat{f}_r^{(n)}(u) = n C_{n-1}^{r-1} u^{r-1} (1-u)^{n-r}, \quad u \in (0, 1), \quad (19.6)$$

так как $F(u) = u$, $f(u) \equiv 1$ при $u \in (0, 1)$ – см. соотношения (1.1), (1.2).

При решении задачи 17.1 для аппроксимации Бернштейна (19.1), (19.2) можно представить соответствующую плотность (17.3) в виде (17.9), где

$$P_i = \frac{Cg(ih)}{M+1}, \quad f_i(u) = (M+1)C_M^i u^i (1-u)^{M-i}, \quad (19.7)$$

и использовать алгоритм 17.1. На втором шаге этого алгоритма требуется моделировать случайную величину ξ согласно плотности $f_m(u)$ вида (19.7). Учитывая соотношение (19.6), в этом случае требуется реализовать $(m+1)$ -ю порядковую статистику $\alpha_{m+1}^{(M+1)}$ независимой выборки объема $(M+1)$ из совокупности с равномерным распределением в интервале $(0, 1)$.

19.4. Моделирование порядковых статистик. Для численного моделирования (т. е. для получения выборочных значений) случайной величины $\xi_r^{(n)}$ можно использовать следующую процедуру. Предполагаем, что имеется эффективный алгоритм выбора максимального элемента A_K и номера K соответствующей ячейки массива (a_1, \dots, a_r) , состоящего из r компонент.

АЛГОРИТМ 19.1. 1. Реализуем r выборочных значений $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ случайной величины ξ согласно функции распределения $F(u)$ (или плотности распределения $f(u)$), параллельно выбирая максимальный элемент A_K получаемого массива Ξ . Полагаем $\xi_r^{(n)} := A_K$.

2. Для $s = r + 1, \dots, n$ реализуем выборочные значения ξ_s . Если $\xi_s < A_K$, то заменяем K -ю компоненту массива Ξ : $\xi_K := \xi_s$ и находим максимальный элемент A_K и номер K для преобразованного массива Ξ . Полагаем $\xi_r^{(n)} := A_K$.

Недостатком алгоритма 19.1 является необходимость проведения большого числа сравнений (порядка $O(r \times n)$).

Нами были подробно изучены возможные модификации алгоритма 19.1; при этом особое внимание было уделено случаю $\{\xi_i = \alpha_i\}$. Удалось выяснить, что для больших n к существенному уменьшению числа сравнений может привести использование доверительных интервалов. Было также замечено, что для моделирования порядковой статистики $\alpha_r^{(n)}$ согласно плотности (19.6) можно использовать специальные (отличные от алгоритма 19.1) методы моделирования бета-распределения с натуральными параметрами (см. далее разд. 22). Проведенные нами численные эксперименты показали, что наиболее эффективной формулой для моделирования случайной величины $\alpha_r^{(n)}$ является

$$\alpha_r^{(n)} = \frac{\ln \prod_{i=1}^r \alpha_i}{\ln \prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i}. \quad (19.8)$$

(см. также соотношение (22.4)), которая основана на представлении случайной величины, имеющей бета-распределение с натуральными параметрами, в виде композиции случайных величин, имеющих гамма-распределение с целыми параметрами (см. далее формулу (22.3)).

19.5. Аппроксимационные свойства и устойчивость приближения Бернштейна. Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 19.3. Если $g \in C[0, 1]$ и удовлетворяет условию Липшица с константой L , то $\rho_{C[0,1]}(g, L_M g) \leq L/(2\sqrt{M})$.

Таким образом, скорость сходимости приближения (17.1), (19.1), (19.2) (см. требование 6 из подразд. 17.7) относительно невелика. Например, для рассмотренной выше в разд. 18 конечно-элементной аппроксимации Стрэнга–Фикса с образующей базис функцией $\chi(u) = \beta^{(1)}(u)$ скорость сходимости имеет порядок $1/M^2$.

Для аппроксимации Бернштейна выполнено утверждение 18.3 и соотношение (18.6), т. е. это приближение обладает «идеальным» свой-

ством устойчивости (см. требование 2). Это легко следует из соотношения (19.3).

20. Моделирование полиномиального распределения

20.1. Применение метода обратной функции распределения.

В разд. 17 отмечено, что во многих приложениях метода Монте-Карло требуется моделировать случайную величину ξ , имеющую *полиномиальное распределение* с плотностью

$$f(u) = \sum_{j=0}^N a_j u^j, \quad 0 < u < 1; \quad (20.1)$$

см. также формулу (8.10). Для реализации выборочного значения случайной величины ξ используют различные алгоритмы в зависимости от вида коэффициентов $\{a_j\}$. Так, метод обратной функции распределения (см. разд. 8) заведомо реализуем для $N = 0$ (здесь $f(u) \equiv 1$, $0 < u < 1$ и $\xi = \alpha$), для $N = 1$ (при этом $\xi = (-a_0 + \sqrt{a_0^2 + 2a_1\alpha})/a_1$), а также для случая $a_j = (j+1)$ и $a_k = 0$ при $k \neq j$; при этом

$$f(u) = (j+1)u^j \quad \text{и} \quad \xi = \alpha^{1/(j+1)} = {}^{j+1}\sqrt{\alpha}. \quad (20.2)$$

Как отмечено в подразд. 8.4, в общем случае (при $N > 1$ и при наличии достаточно большого числа ненулевых коэффициентов a_j) попытка применить метод обратной функции распределения приводит к уравнению $\sum_{j=0}^N a_j \xi^{j+1}/(j+1) = \alpha$, которое, как правило, неразрешимо относительно ξ , и нужно использовать специальные алгоритмы моделирования.

20.2. Метод суперпозиции для случая неотрицательных коэффициентов. Для случая $a_j \geq 0$ удается представить плотность (20.1) в виде

$$f(u) = \sum_{j=0}^N p_j f_j(u); \quad p_j = a_j/(j+1); \quad f_j(u) = (j+1)u^j, \quad (20.3)$$

и построить следующий метод дискретной суперпозиции (см. алгоритм 12.2).

АЛГОРИТМ 20.1. 1. Реализуя выборочное значение α_1 стандартного случайного числа согласно вероятностям $\{p_j = a_j/(j+1)\}$, используя стандартный алгоритм моделирования дискретной случайной величины или его модификации (см. разд. 4–6), выбираем номер m .

2. Реализуем выборочное значение случайной величины ξ согласно плотности $f_m(u) = (m+1)u^m$ по формуле вида (20.2): $\xi = {}^{m+1}\sqrt{\alpha_2}$.

Заметим, что алгоритм 20.1 реализуем для функциональных рядов (при этом $N = \infty$).

20.3. Метод исключения для случая произвольных коэффициентов. В случае наличия отрицательных чисел среди коэффициентов $\{a_j\}$ величины $\{p_j\}$ из соотношения (20.3) нельзя считать вероятностями. Для функции (20.1) можно построить мажоранту

$$f(u) \leq g_1(u) = \sum_{j=0}^N a_j^+ u^j, \quad (20.4)$$

где $a_j^+ = a_j$ при $a_j \geq 0$ и $a_j^+ = 0$ при $a_j < 0$. Тогда можно предложить следующий метод исключения (см. алгоритм 15.1).

АЛГОРИТМ 20.2. 1. Реализуем выборочное значение случайной величины ξ_1 , распределенной с плотностью

$$\tilde{f}_1(u) = \sum_{j=0}^N p_j^+ f_j(u), \quad p_j^+ = \frac{a_j^+}{(j+1) \int_0^1 g_1(w) dw} = \frac{a_j^+}{(j+1) \sum_{k=0}^N (a_k^+ / (k+1))},$$

согласно алгоритму 20.1 (при этом используются два стандартных случайных числа α_1 и α_2).

2. Реализуем также значение $\eta = \alpha_3 g_1(\xi_1)$.

3. Проверяем неравенство $\eta < f(\xi_1)$. Если оно выполнено, то полагаем, что выборочное значение случайной величины ξ равно $\xi = \xi_1$, иначе повторяем пункты 1 и 2 и т. д.

Трудоемкость этого алгоритма (среднее число повторений п.п. 1 и 2 до выполнения неравенства $\eta < f(\xi_1)$) пропорциональна величине

$$s_1 = \int_0^1 g_1(w) dw = \sum_{j=0}^N (a_j^+ / (j+1)).$$

Выбор мажоранты с неотрицательными коэффициентами неоднозначен. Можно, например, рассмотреть функцию $g_2(u) = \sum_{j=0}^N |a_j| u^j$ и использовать для нее алгоритм 20.2 с заменой ξ_1 на ξ_2 . Такой выбор мажоранты заведомо хуже, чем (20.4), так как $g_2(u) > g_1(u)$ и

$$s_2 = \int_0^1 g_2(w) dw = \sum_{j=0}^N (|a_j| / (j+1)) > s_1.$$

Однако несложно построить пример, в котором мажоранта (20.4) не является лучшей. Рассмотрим случайную величину ξ с квадратичной плотностью распределения $f(u) = 6u - 6u^2$, $0 < u < 1$. В этом случае $g_1(u) = 6u$ и трудоемкость соответствующего алгоритма 20.2 пропорциональна величине $s_1 = \int_0^1 6w dw = 3$. С другой стороны, для простейшего метода Неймана с постоянной мажорантой

$$g_3(u) \equiv \max_{u \in (0,1)} f(u) = f(1/2) = 3/2$$

имеем $s_3 = 3/2$. Эта величина в два раза меньше, чем s_1 .

20.4. Метод Кондюрина для случая произвольных коэффициентов. Далее мы рассмотрим метод, являющийся своего рода альтернативой алгоритма 20.2. Предполагаем, что в выражении для полиномиальной плотности (20.1) коэффициенты $\{a_j\}$ могут иметь разные знаки и, кроме того, плотность $f(u)$ отделена от нуля, т. е. существует константа T такая, что $f(u) \geq T > 0$ для всех $u \in (0, 1)$.

Используя утверждение 19.1 и соотношения (19.3), (19.4), запишем плотность (20.1) следующим образом:

$$f(u) = \sum_{i=0}^M b_{NM}(i) \hat{f}_{i+1}^{(M+1)}(u); \quad \hat{f}_{i+1}^{(M+1)}(u) = (M+1) C_M^i u^i (1-u)^{M-i}, \quad (20.5)$$

$$b_{NM}(i) = \frac{1}{M+1} \times \left(a_0 + \sum_{j=1}^N a_j \frac{i(i-1)\dots(i-j+1)}{M(M-1)\dots(M-j+1)} \right)$$

для $i = 0, 1, \dots, M$. Согласно формуле (19.6), функция $\hat{f}_{i+1}^{(M+1)}(u)$ представляет собой плотность распределения $(i+1)$ -й порядковой статистики $\alpha_{i+1}^{(M+1)}$ из совокупности $(M+1)$ случайных величин с равномерным распределением в интервале $(0, 1)$. В силу того что функция $f(u)$ является плотностью распределения вероятностей, справедливо соотношение $\sum_{i=0}^M b_{NM}(i) = 1$ (см. замечание 12.1). Справедливо также

УТВЕРЖДЕНИЕ 20.1. *Существует M_0 , $M_0 \geq N$, такое, что $b_{NM_0}(i) \geq 0$ при всех $i = 0, 1, \dots, M_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность

$$d_M = \max_{1 \leq j \leq N} \left(\max_{0 \leq u \leq 1} \left| \frac{u(u-1/M)\dots(u-(j-1)/M)}{(1-1/M)\dots(1-(j-1)/M)} - u^j \right| \right), \quad M \geq N,$$

и полином

$$Q_M(u) = a_0 + \sum_{j=1}^N a_j \frac{u(u-1/M)\dots(u-(j-1)/M)}{(1-1/M)\dots(1-(j-1)/M)}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Очевидно, что $|Q_M(u) - f(u)| \leq C d_M$, где $C = \sum_{j=2}^N |a_j|$. Тогда из условия $f(u) \geq T > 0$ следует неравенство

$$Q_M(u) \geq T - C d_M. \quad (20.6)$$

Заметим теперь, что $d_M \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$ и

$$Q_M(i/M) = (M+1)b_{NM}(i), \quad i = 0, 1, \dots, M.$$

Тогда из неравенства (20.6) получаем требуемое утверждение.

Пусть \hat{M}_0 – наименьшее из M_0 , таких, что $b_{NM_0}(i) \geq 0$ для всех $i = 0, 1, \dots, M_0$. Тогда числа $\{b_{N\hat{M}_0}(i)\}$ можно считать вероятностями, и из представления (20.5) следует алгоритм метода суперпозиции.

АЛГОРИТМ 20.3. 1. Реализуя выборочное значение α_1 , согласно вероятностям $\{p_i = b_{N\hat{M}_0}(i), i = 1, \dots, \hat{M}_0\}$, используя стандартный алгоритм моделирования дискретной случайной величины или его модификации (см. разд. 4–6), выбираем номер t .

2. Реализуем выборочное значение случайной величины ξ согласно плотности $\hat{f}_{m+1}^{(\hat{M}_0+1)}(u)$, используя один из алгоритмов подразд. 19.4: $\xi = \alpha_{m+1}^{(\hat{M}_0+1)}$.

Отметим, что величина $\hat{M}_0 = \min M_0$ из утверждения 20.1 может быть достаточно большой. Более того, несложно показать, что даже для простейших случаев (например, для $N = 2$, т. е. при моделировании случайной величины с квадратичной плотностью) можно подобрать коэффициенты $\{a_j\}$ таким образом, что величина \hat{M}_0 будет сколь угодно большой. В подобных ситуациях алгоритм 20.3 может оказаться неэффективным (по сравнению, например, с методом исключения – алгоритмом 20.2 – или его модификациями).

21. Моделирование гамма-распределения

21.1. Использование свойства безграничной делимости. Рассмотрим алгоритмы моделирования случайной величины $\xi_{\lambda,\nu}^{(\gamma)}$, имеющей

гамма-распределение Пирсона с плотностью распределения вида

$$f_{\lambda,\nu}^{(\gamma)}(u) = \frac{\lambda^\nu u^{\nu-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\nu)}, \quad u > 0; \quad \lambda > 0, \quad \nu > 0; \quad (21.1)$$

здесь $\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} w^{\nu-1} e^{-w} dw$ – гамма-функция.

Заметим, что при $\nu = 1$ соотношение (21.1) представляет собой знакомую нам по подразд. 8.5 плотность показательного распределения: $f_{\lambda,1}^{(\gamma)}(u) = \lambda e^{-\lambda u}$, $u > 0$, $\lambda > 0$ (см. пример 8.1) с моделирующей формулой

$$\xi_{\lambda,1}^{(\gamma)} = -\frac{\ln \alpha}{\lambda} \quad (21.2)$$

(см. соотношение (8.13)). При целом положительном $\nu = n > 1$ соотношение (21.1) иногда называют *распределением Эрланга*, и, учитывая, что для натуральных $\nu = n$ выполнено $\Gamma(n) = (n-1)!$, плотность (21.1) в этом случае имеет вид

$$f_{\lambda,n}^{(\gamma)}(u) = \frac{\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u}}{(n-1)!}, \quad n > 1. \quad (21.3)$$

При $\lambda = 1/2$, $\nu = l/2$ и целом положительном l соотношение (21.1) является плотностью χ^2 -распределения с l степенями свободы:

$$f_{\chi_l^2}(u) = f_{1/2,l/2}^{(\gamma)}(u) = \frac{u^{l/2-1} e^{-u/2}}{2^{l/2} \Gamma(l/2)}. \quad (21.4)$$

При моделировании случайной величины $\xi_{\lambda,\nu}^{(\gamma)}$ широко используется следующее свойство гамма-распределения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21.1. *Если случайные величины $\xi_{\lambda,\nu}^{(\gamma)}$ и $\xi_{\lambda,\mu}^{(\gamma)}$ независимы, то $\xi_{\lambda,\nu}^{(\gamma)} + \xi_{\lambda,\mu}^{(\gamma)} = \xi_{\lambda,\nu+\mu}^{(\gamma)}$; равенство означает здесь совпадение распределений соответствующих случайных величин.*

Сформулированное свойство тесно связано со следующим понятием. Распределение случайной величины ζ называется *безгранично делимым*, если для любого натурального n справедливо представление $\zeta = \zeta_1^{(n)} + \dots + \zeta_n^{(n)}$, где $\zeta_j^{(n)}$, $j = 1, \dots, n$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины.

Индукцией по n несложно показать, что из утверждения 21.1 следует безграничная делимость гамма-распределения (21.1): здесь следует взять $\zeta_j^{(n)} = \xi_{\lambda,\nu/n}^{(\gamma)}$. Свойство безграничной делимости обуславливает

достаточно широкое применение гамма-распределения при моделировании случайных векторов и случайных функций.

Утверждение 21.1 позволяет представить случайную величину $\xi_{\lambda,\nu}^{(\gamma)}$ в виде суммы

$$\xi_{\lambda,\nu}^{(\gamma)} = \xi_{\lambda,\nu_1}^{(\gamma)} + \xi_{\lambda,\nu_2}^{(\gamma)}, \quad (21.5)$$

где $\nu_1 = [\nu]$ – целая часть, а $\nu_2 = \{\nu\}$ – дробная часть параметра ν .

21.2. Моделирование гамма-распределения с натуральным параметром. Для моделирования первого слагаемого суммы (21.5) можно еще раз использовать свойство безграничной делимости гамма-распределения и представить $\xi_{\lambda,\nu_1}^{(\gamma)}$ в виде суммы из ν_1 слагаемых:

$$\xi_{\lambda,\nu_1}^{(\gamma)} = (\xi_{\lambda,1}^{(\gamma)})_1^{(\nu_1)} + \dots + (\xi_{\lambda,1}^{(\gamma)})_{\nu_1}^{(\nu_1)}.$$

Согласно примеру 8.1 и соотношениям (8.13) и (21.2), для получения выборочного значения случайной величины $\xi_{\lambda,\nu_1}^{(\gamma)}$ можно предложить формулу

$$\xi_{\lambda,\nu_1}^{(\gamma)} = \left(-\frac{\ln \alpha_1}{\lambda}\right) + \dots + \left(-\frac{\ln \alpha_{\nu_1}}{\lambda}\right) = -\frac{\ln(\alpha_1 \times \dots \times \alpha_{\nu_1})}{\lambda}. \quad (21.6)$$

Полученное соотношение дает алгоритм моделирования выборочного значения $\xi_{\lambda,n}^{(\gamma)}$ распределения Эрланга (21.3) (следует лишь заменить ν_1 на n в формуле (21.6)). В разд. 24 нам также понадобится моделирующая формула для χ^2 -распределения с четным числом $l = 2k$ степеней свободы (см. формулу (21.4)), которая непосредственно получается из соотношения (21.6):

$$\chi_{2k}^2 = \xi_{1/2,k}^{(\gamma)} = -2 \ln(\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k). \quad (21.7)$$

21.3. Метод исключения для моделирования гамма-распределения с параметром, меньшим единицы. Для моделирования выборочного значения второго слагаемого $\xi_{\lambda,\nu_2}^{(\gamma)}$ суммы (21.5) можно предложить следующий мажорантный метод исключения (см. алгоритм 15.1). Заметим, что для функции $g(u) = u^{\nu_2-1} e^{-\lambda u}$, пропорциональной плотности (21.1), справедливо неравенство

$$g(u) \leq g_1(u) = \begin{cases} u^{\nu_2-1} & \text{при } 0 < u < 1, \\ e^{-\lambda u} & \text{при } u \geq 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующий алгоритм мажорантного метода исключения.

АЛГОРИТМ 21.1. 1. Реализуем выборочное значение $\xi_1 = \psi_1(\alpha_1)$ согласно плотности $f_1(u) = C g_1(u)$ (несложно подсчитать, что нормирующая константа равна $C = \lambda/(\lambda \nu_2^{-1} + e^{-\lambda})$); здесь

$$\psi_1(\alpha_1) = \begin{cases} (\alpha_1(\lambda + \nu_2 e^{-\lambda})/\lambda)^{1/\nu_2} & \text{при } \alpha_1 \leq \lambda/(\lambda + \nu_2 e^{-\lambda}), \\ -(1/\lambda) \ln((1 - \alpha_1)(e^{-\lambda} + \lambda \nu_2^{-1})) & \text{иначе} \end{cases}$$

(вывод этого соотношения подробно описан в примере из подразд. 9.2). Реализуем также значение $\eta = \alpha_2 g_1(\xi_1)$.

2. Если выполнено условие $\eta < g(\xi_1)$, то полагаем $\xi_{\lambda, \nu_2}^{(\gamma)} = \xi_1$, иначе повторяем п. 1 и т. д.

Согласно формуле (15.4), трудоемкость алгоритма 21.1 пропорциональна величине

$$s = \frac{\int_0^{+\infty} g_1(w) dw}{\int_0^{+\infty} g(w) dw} = \frac{\lambda \nu_2^{-1} + e^{-1}}{\lambda \Gamma(\nu_2)}.$$

Например, для $\nu_2 = 1/2$ имеем $s = (2\lambda + e^{-1})/(\lambda\sqrt{\pi})$. Заметим также, что при $\lambda = 1$ величина s монотонно растет от $s = 1$ (при $\nu_2 \downarrow 0$) до $s = 1 + e^{-1} \approx 1.36$ при $\nu_2 = 1$. В частности, при $\nu_2 = 1/2$ имеем $s \approx 1.33$.

21.4. Метод Йонка для моделирования гамма-распределения с параметром, меньшим единицы. Заметим, что для любого $t > 0$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} t^{\nu_2-1} &= t^{\nu_2-1} \int_0^{+\infty} f_{1,1-\nu_2}^{(\gamma)}(y) dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{-1}}{t^{-\nu_2}} \frac{e^{-y} y^{-\nu_2}}{\Gamma(1-\nu_2)} dy = \int_0^{+\infty} e^{-tv} \frac{v^{-\nu_2}}{\Gamma(1-\nu_2)} dv; \end{aligned}$$

здесь использована замена $v = y/t$. Полагая $t = \lambda u$, получаем представление

$$\begin{aligned} f_{\lambda, \nu_2}^{(\gamma)}(u) &= \frac{\lambda^{\nu_2} u^{\nu_2-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\nu_2)} = \frac{\lambda e^{-\lambda u}}{\Gamma(\nu_2)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda uv} \frac{v^{-\nu_2}}{\Gamma(1-\nu_2)} dv = \\ &= \int_0^{+\infty} f_\gamma(u|v) f_\eta(v) dv, \end{aligned} \quad (21.8)$$

где

$$f_{\eta}(v) = \frac{1}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(1-\nu_2)} \times \frac{v^{-\nu_2}}{v+1}, \quad v > 0, \quad (21.9)$$

$$f_{\gamma}(u|v) = \lambda(v+1)e^{-\lambda u(v+1)}, \quad u > 0.$$

Представление (21.8) дает возможность применить интегральный метод суперпозиции (см. алгоритм 12.1).

АЛГОРИТМ 21.2. 1. Реализуем значение $\eta = \eta_0$ согласно плотности (21.9).

2. Реализуем значение $\xi_{\lambda, \nu_2}^{(\gamma)}$ согласно экспоненциальной плотности $f_{\gamma}(u|\eta_0) = \lambda(\eta_0 + 1)e^{-\lambda u(\eta_0 + 1)}$ (см. пример 8.1 и соотношение (8.13)):

$$\xi_{\lambda, \nu_2}^{(\gamma)} = \frac{-\ln \alpha}{\lambda(\eta_0 + 1)}.$$

Для моделирования величины η_0 согласно плотности (21.8) в п. 1 алгоритма 21.2 рассмотрим преобразование $w = g(v) = v/(v+1)$. Обратное преобразование имеет вид $v = w/(1-w)$. Тогда, согласно утверждению 10.1, случайная величина $\beta = g(\eta)$ имеет плотность

$$\begin{aligned} f_{\beta}(w) &= \frac{1}{\Gamma(\nu_2)\Gamma(1-\nu_2)} \times \frac{\left(\frac{w}{1-w}\right)^{-\nu_2}}{\left(\frac{w}{1-w}\right) + 1} \times \left(\frac{w}{1-w}\right)' = \\ &= \frac{w^{-\nu_2}(1-w)^{\nu_2}(1-w)}{\Gamma(1-\nu_2)\Gamma(\nu_2)(1-w)^2} = \frac{w^{(1-\nu_2)-1}(1-w)^{\nu_2-1}}{B(1-\nu_2, \nu_2)}, \end{aligned}$$

где $B(x, y) = \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1} dz$ – бета-функция. Мы получили плотность бета-распределения с параметрами $(1-\nu_2)$ и ν_2 . Реализации значений случайной величины с бета-распределением посвящен разд. 22. Моделируя β и учитывая, что $\eta = \beta/(1-\beta)$, получаем

$$\xi_{\lambda, \nu_2}^{(\gamma)} = \frac{-\ln \alpha}{\lambda(\eta + 1)} = \frac{(\beta - 1) \ln \alpha}{\lambda}.$$

Сравнивая алгоритмы 21.1 и 21.2, отметим, что достаточно трудно построить эффективный алгоритм моделирования случайной величины β , имеющей бета-распределение с параметрами $(1-\nu_2)$ и ν_2 , меньшими

единицы. Поэтому использование метода исключения (т. е. алгоритма 21.1) является более предпочтительным.

22. Моделирование бета-распределения

22.1. Случай целых параметров. Рассмотрим случайную величину $\xi_{\nu,\mu}^{(\beta)}$, имеющую бета-распределение с плотностью

$$f_{\nu,\mu}^{(\beta)}(u) = \frac{u^{\nu-1} (1-u)^{\mu-1}}{B(\nu,\mu)}, \quad 0 < u < 1; \quad \nu > 0, \quad \mu > 0. \quad (22.1)$$

Заметим, что функция $\hat{f}_r^{(n)}(u)$ из формулы (19.6) является плотностью бета-распределения (22.1) с параметрами $\nu = r$ и $\mu = n - r + 1$. Соответственно, в случае, когда бета-распределение имеет целочисленные параметры ν и μ , его плотность является плотностью распределения ν -й порядковой статистики для $(\nu + \mu - 1)$ независимых значений стандартного случайного числа α и для моделирования случайной величины $\xi_{\nu,\mu}^{(\beta)}$ можно использовать алгоритмы из подразд. 19.4.

Известны другие способы моделирования бета-распределения с целыми параметрами. Один из них основан на следующем факте.

УТВЕРЖДЕНИЕ 22.1. Пусть случайная величина ζ распределена на интервале $(0, A)$, $0 < A \leq +\infty$ с плотностью $\tilde{f}(u)$ такой, что $\tilde{f}(A) = 0$, и для некоторого $a > -1$ функция $\tilde{f}(u) u^{-a}$ абсолютно непрерывна и монотонно убывает при $u > 0$. Предположим также, что случайная величина ξ_1 распределена с плотностью $f_1(u) = (a+1)u^a$ при $0 < u < 1$, а ξ_2 распределена с плотностью

$$f_2(u) = \frac{-u^{a+1}(\tilde{f}(u) u^{-a})'}{a+1} \quad \text{при } 0 < u < A.$$

Тогда справедливо представление $\zeta = \xi_1 \xi_2$.

Применим утверждение 22.1 для $\tilde{f}(u) = f_{\mu,\nu}^{(\beta)}(u)$, $A = 1$ и $a = \nu - 1$. Тогда $\xi_{\nu,\mu}^{(\beta)} = \xi_1 \hat{\xi}_2$, где случайная величина ξ_1 распределена с плотностью $f_1(u) = \nu u^{\nu-1}$, $0 < u < 1$, а $\hat{\xi}_2$ распределена с плотностью

$$\hat{f}_2(u) = \frac{-u^{a+1}(\tilde{f}(u) u^{-a})'}{a+1} = \frac{u^\nu (1-u)^{\mu-2}}{B(\nu+1, \mu-1)}.$$

Вновь применяем утверждение 22.1 для $\tilde{f}(u) = \hat{f}_2(u)$, $A = 1$ и $a = \nu$. Тогда $\hat{\xi}_2 = \xi_2 \hat{\xi}_3$, где случайная величина ξ_2 распределена с плотностью

$f_2(u) = (\nu + 1) u^\nu$, $0 < u < 1$, а $\hat{\xi}_3$ распределена с плотностью

$$\hat{f}_3(u) = \frac{u^{\nu+1} (1-u)^{\mu-3}}{B(\nu+2, \mu-3)}, \quad 0 < u < 1.$$

Этот процесс продолжаем до тех пор пока индекс j плотности \hat{f}_j не станет равным μ ; при этом показатель степени при $(1-u)$ будет равен нулю. Получаем представление $\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)} = \xi_1 \times \dots \times \xi_\mu$, где случайные величины ξ_i распределены со степенными плотностями $f_i(u) = (\nu + i - 1) u^{\nu+i-2}$, $0 < u < 1$. Согласно формуле (20.2) для ξ_i имеем моделирующие формулы $\xi_i = \alpha_i^{1/(\nu+i-1)}$; $i = 1, \dots, \mu$. Таким образом, моделирующая формула для случайной величины $\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)}$ имеет вид

$$\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)} = \prod_{i=1}^{\mu} \alpha_i^{1/(\nu+i-1)}. \quad (22.2)$$

Этот способ моделирования подходит и в том случае, когда параметр ν не является целым.

Другой способ моделирования бета-распределения с целыми параметрами основан на формуле [27]

$$\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)} = \frac{\xi_{\lambda, \nu}^{(\gamma)}}{\xi_{\lambda, \nu}^{(\gamma)} + \xi_{\lambda, \mu}^{(\gamma)}}; \quad (22.3)$$

здесь случайная величина $\xi_{\lambda, \nu}^{(\gamma)}$ имеет гамма-распределение (21.1) с параметрами λ, ν . Согласно формуле (21.6), имеем

$$\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)} = \frac{\ln \prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i}{\ln \prod_{i=1}^{\nu+\mu} \alpha_i}. \quad (22.4)$$

Проведенные нами тестовые численные эксперименты показали, что формула (22.4) является наиболее эффективной не только для моделирования бета-распределения с целыми параметрами, но и для моделирования порядковых статистик из равномерного распределения (см. подразд. 19.4 и формулу (19.8)).

22.2. Случай нецелых параметров. В случае, когда ν и μ не являются целыми числами, также существуют разные методы для моделирования бета-распределения. Упомянем прежде всего метод суперпозиции, использующий формулу (22.2).

Пусть $m = [\mu] + 1 - \mu$, где $[\mu]$ обозначает целую часть числа μ . Представим плотность $f_{\nu, \mu}^{(\beta)}(u)$ следующим образом:

$$f_{\nu, \mu}^{(\beta)}(u) = \frac{u^{\nu-1} (1-u)^{[\mu]} (1-u)^{-m}}{B(\nu, \mu)}$$

и разложим $(1-u)^{-m}$ по формуле Маклорена:

$$(1-u)^{-m} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_i u^i}{i!}; \quad C_0 = 1, \quad C_i = m(m+1) \times \dots \times (m+i-1) = \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m)},$$

здесь $i = 1, 2, \dots$. В последнем соотношении использовано свойство гамма-функции

$$\Gamma(\nu) = (\nu-1)\Gamma(\nu-1). \quad (22.5)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_{\nu, \mu}^{(\beta)}(u) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{B(i+\nu, [\mu]+1)\Gamma(m+i)}{B(\nu, \mu) i! \Gamma(m)} \times \frac{u^{i+\nu-1} (1-u)^{[\mu]}}{B(i+\nu, [\mu]+1)} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i f_{i+\nu, [\mu]+1}^{(\beta)}(u), \end{aligned} \quad (22.6)$$

где величины $\{p_i\}$ представляют собой вероятности и имеют вид

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{[\mu]!}{B(\nu, \mu) \nu(\nu+1) \times \dots \times (\nu+[\mu])}; \\ p_i &= \frac{\Gamma(i+\nu) \Gamma([\mu]+1) \Gamma(m+i)}{\Gamma(i+\nu+[\mu]+1) B(\nu, \mu) i! \Gamma(m)} = \\ &= \frac{[\mu]! m(m+1) \times \dots \times (m+i-1)}{B(\nu, \mu) i! (i+\nu)(i+\nu+1) \times \dots \times (i+\nu+[\mu])}; \quad i = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

здесь использовано свойство гамма-функции (22.5) и свойство бета-функции:

$$B(\nu, \mu) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)} = B(\mu, \nu) \quad (22.7)$$

Из формулы (22.6) следует алгоритм метода суперпозиции для реализации значений $\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)}$ при нецелых параметрах.

АЛГОРИТМ 22.1. 1. Реализовав выборочное значение α_1 стандартного случайного числа, согласно вероятностям $\{p_i\}$, используя стандартный алгоритм моделирования или его модификации (см. разд. 4–6), выбираем номер k плотности $f_{k+\nu, [\mu]+1}^{(\beta)}(u)$.

2. Реализуем выборочное значение $\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)}$ согласно выбранной плотности по формуле (22.2):

$$\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)} = \prod_{i=1}^{[\mu]+1} \alpha_i^{1/(k+\nu+i-1)}.$$

Недостатком этого метода является то, что выбор номера k плотности $f_{k+\nu, [\mu]+1}^{(\beta)}(u)$ весьма трудоемок. Это связано с тем, что таких номеров k бесконечно много и скорость убывания последовательности соответствующих им вероятностей p_k с ростом k невелика. Также определенные сложности вызывает то, что нужно вычислять бета-функцию от дробных переменных, причем делать это с высокой точностью.

Согласно формуле (4.11), трудоемкость стандартного алгоритма 4.2 выбора значения k целочисленной случайной величины η согласно вероятностям $\{p_i\}$ (см. п. 1 алгоритма 22.1) пропорциональна величине $\mathbf{E}\eta$. Нетрудно показать, что $\mathbf{E}\eta = +\infty$ при $[\mu] = 0$. Поэтому в случае $\nu > 1$, $0 < \mu < 1$ следует воспользоваться заменой переменных $v = 1 - u$, которая меняет местами параметры ν и μ , а в случае $0 < \nu < 1$, $0 < \mu < 1$ можно провести дополнительную рандомизацию и реализовать соответствующий метод суперпозиции на основе соотношения

$$f_{\nu, \mu}^{(\beta)}(u) = u f_{\nu, \mu}^{(\beta)}(u) + (1 - u) f_{\nu, \mu}^{(\beta)}(u) = \frac{\nu}{\nu + \mu} f_{\nu+1, \mu}^{(\beta)}(u) + \frac{\mu}{\nu + \mu} f_{\nu, \mu+1}^{(\beta)}(u);$$

здесь использован вид плотности $f_{\nu, \mu}^{(\beta)}(u)$ (см. соотношение (22.1)) и свойства (22.5) и (22.7).

Можно попытаться воспользоваться формулой (22.3) для $\lambda = 1$. Здесь проблемой является то обстоятельство, что не существует эффективных «прямых» (не связанных с методом исключения) алгоритмов моделирования гамма-распределения с нецелым параметром (см. разд. 21).

22.3. Методы исключения для моделирования бета-распределения. Описанные в подразд. 23.2 алгоритмы моделирования бета-распределения требуют во многих случаях частого обращения к генератору псевдослучайных чисел, что резко снижает их эффективность

(см. замечание 3.2). Поэтому целесообразно исследовать альтернативные возможности построения моделирующих алгоритмов для распределения (22.1). В данном подразделе мы изучим различные варианты мажорантного метода исключения (алгоритм 15.1).

Плотность бета-распределения (22.1) пропорциональна функции

$$g(u) = u^{\nu-1} (1-u)^{\mu-1}, \quad 0 < u < 1. \quad (22.8)$$

Способы построения мажорант для функции (22.8) весьма разнообразны, причем эти построения и эффективность соответствующих алгоритмов метода исключения существенно зависят от значений параметров ν и μ . Так, для описанного выше «сложного» случая $0 < \nu < 1$, $0 < \mu < 1$ можно построить мажоранту

$$g(u) \leq g_1^{(1)}(u) = u^{\nu-1} + (1-u)^{\mu-1}. \quad (22.9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} u^{\nu-1} (1-u)^{\mu-1} &= (u + (1-u))u^{\nu-1} (1-u)^{\mu-1} = \\ &= u^{\nu} (1-u)^{\mu-1} + u^{\nu-1} (1-u)^{\mu} \leq (1-u)^{\mu-1} + u^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что при $0 < u < 1$ и $t > 0$ выполнено

$$u^t < 1, \quad (1-u)^t < 1. \quad (22.10)$$

Тогда для случая $0 < \nu < 1$, $0 < \mu < 1$ можно реализовать следующий алгоритм метода исключения.

АЛГОРИТМ 22.2. 1. Реализуем выборочное значение ξ_1 согласно плотности $f_1(u) = C g_1^{(1)}(u)$ (несложно подсчитать, что $C = \nu \mu / (\nu + \mu)$) методом суперпозиции: если $\alpha_1 < \mu / (\nu + \mu)$, то $\xi_1 = \alpha_2^{1/\nu}$, иначе $\xi_1 = 1 - \alpha_2^{1/\mu}$.

2. Реализуем величину $\eta = \alpha_3 g_1^{(1)}(\xi_1)$.

3. Если $\eta < g(\xi_1)$, то $\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)} = \xi_1$, иначе повторяем пп. 1 и 2 и т. д.

Трудоемкость алгоритма 22.2 пропорциональна величине

$$s^{(1)} = \frac{\int_0^1 g_1^{(1)}(w) dw}{\int_0^1 g(w) dw} = \frac{\nu + \mu}{\nu \mu B(\nu, \mu)}. \quad (22.11)$$

Например, для $\nu = \mu = 1/2$ имеем $s^{(1)} = 4/\pi \approx 1.27$.

Для случая $0 < \nu < 1$ и $\mu > 1$ с учетом соотношения (22.10) в качестве мажоранты функции (22.8) можно взять

$$g(u) \leq g_1^{(2)}(u) = u^{\nu-1}, \quad 0 < u < 1. \quad (22.12)$$

Очевидно, что для заданных ограничений на параметры ν и μ выполнено $g_1^{(2)}(u) < g_1^{(1)}(u)$ при $0 < u < 1$. Соответствующий алгоритм метода исключения выглядит следующим образом.

АЛГОРИТМ 22.3. 1. Реализуем выборочное значение ξ_1 согласно плотности $f_1(u) = C g_1^{(2)}(u) = \nu u^{\nu-1}$ (это случай моделирования степенной плотности – см. формулу (20.2)): $\xi_1 = \alpha_1^{1/\nu}$. Реализуем также величину $\eta = \alpha_2 g_1^{(2)}(\xi_1)$.

2. Если $\eta < g(\xi_1)$, то $\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)} = \xi_1$, иначе повторяем п. 1 и т. д.

Трудоемкость алгоритма 22.3 пропорциональна величине

$$s^{(2)} = \frac{\int_0^1 g_1^{(2)}(w) dw}{\int_0^1 g(w) dw} = \frac{1}{\nu B(\nu, \mu)}. \quad (22.13)$$

Аналогично для случая $\nu > 1$ и $0 < \mu < 1$ можно вновь воспользоваться соотношением (22.10) и в качестве мажоранты функции (22.8) можно взять

$$g(u) \leq g_1^{(3)}(u) = (1-u)^{\mu-1}, \quad 0 < u < 1, \quad (22.14)$$

и тогда соответствующий алгоритм метода исключения выглядит следующим образом.

АЛГОРИТМ 22.4. 1. Реализуем выборочное значение ξ_1 согласно плотности $f_1(u) = C g_1^{(3)}(u) = \mu (1-u)^{\mu-1}$: $\xi_1 = 1 - \alpha_1^{1/\mu}$. Реализуем также величину $\eta = \alpha_2 g_1^{(3)}(\xi_1)$.

2. Если $\eta < g(\xi_1)$, то $\xi_{\nu, \mu}^{(\beta)} = \xi_1$, иначе повторяем п. 1 и т. д.

Трудоемкость алгоритма 22.4 пропорциональна величине $s^{(3)} = 1/(\mu B(\nu, \mu))$.

Заметим, что мажоранту $g_1^{(2)}(u)$ из соотношения (22.14) и алгоритм 22.4 целесообразно использовать и в случае $\nu \geq \mu \geq 1$. Здесь используется следующее соображение:

$$\int_0^1 u^{\nu-1} du = \frac{1}{\nu-1} \leq \frac{1}{\mu-1} = \int_0^1 (1-u)^{\mu-1} du. \quad (22.15)$$

Аналогично при $\mu \geq \nu \geq 1$ можно использовать мажоранту $g_1^{(3)}(u)$ из соотношения (22.14) и алгоритм 22.4 (здесь справедливо неравенство, противоположное (22.15)). Следует, однако, отметить, что трудоемкость $s^{(2)}$ из равенства (22.13) (и ее аналог $s^{(3)}$) достаточно быстро растет с увеличением параметров ν и μ . Например, при $\nu = 3$ и $\mu = 2$ имеем $s^{(2)} = \Gamma(5)/(3\Gamma(2)\Gamma(3)) = 4$.

В связи с последним соображением для больших ν и μ целесообразно использовать мажоранту

$$g(u) \leq g_1^{(4)}(u) = Ku^{[\nu]-1}(1-u)^{[\mu]-1}, \quad K = \frac{\{\nu\}\{\mu\}\{\mu\}}{(\{\nu\} + \{\mu\})\{\nu+\mu\}};$$

здесь $[A]$ и $\{A\}$ – соответственно целая и дробная части числа A . В последнем соотношении использовано то обстоятельство, что функция $g(u)/(u^{[\nu]-1}(1-u)^{[\mu]-1}) = u^{\{\nu\}}(1-u)^{\{\mu\}}$ имеет единственный локальный максимум, равный K , в точке $u_{max} = \{\nu\}/(\{\nu\} + \{\mu\})$. Как указано выше, плотность $f_1^{(4)}(u) = f_{[\nu],[\mu]}^{(\beta)}(u)$ является плотностью распределения $[\nu]$ -й порядковой статистики для $([\nu] + [\mu] - 1)$ независимых значений стандартного случайного числа α . Отсюда возникает следующий метод исключения.

АЛГОРИТМ 22.5. 1. Реализуем выборочное значение ξ_1 согласно формуле (22.4):

$$\xi_1 = \frac{\ln \prod_{i=1}^{[\nu]} \alpha_i}{\ln \prod_{i=1}^{[\nu]+[\mu]} \alpha_i}.$$

Реализуем также величину $\eta = \alpha_2 g_1^{(4)}(\xi_1)$.

2. Если $\eta < g(\xi_1)$, т. е. $K\alpha_2 < \xi_1^{\{\nu\}}(1-\xi_1)^{\{\mu\}}$, то $\xi_{\nu,\mu}^{(\beta)} = \xi_1$, иначе повторяем п. 1 и т. д.

Трудоемкость этого алгоритма пропорциональна величине $s^{(4)} = KB([\nu],[\mu])/B(\nu,\mu)$. Эта величина невелика. Например, для $\nu = \mu = 2.5$ имеем

$$\begin{aligned} s^{(4)} &= \frac{(1/2)^{1/2}(1/2)^{1/2}}{(1/2 + 1/2)^{1/2+1/2}} \times \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} \times \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(2.5)\Gamma(2.5)} = \\ &= \frac{(1/2) \times 4!}{3!(3/2)^2(1/2)^2\pi} = \frac{32}{9\pi} \approx 1.13; \end{aligned}$$

здесь использованы соотношения (22.5), (22.7) и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Однако следует учитывать, что при реализации величины $\xi_1 = \alpha_{[\nu]}^{([\nu]+[\mu]-1)}$ в п. 1

алгоритма 22.5 требуется $([\nu] + [\mu] - 1)$ обращений к датчику случайных чисел (см. замечание 3.2).

Отметим также, что для нецелых значений ν и μ вычисление значений $g(\xi_1)$ в алгоритмах 22.2–22.5 может оказаться трудоемким. В этом случае можно использовать двусторонний метод исключения (алгоритм 16.1) с кусочно-постоянными или кусочно-линейными мажорантой и минорантой.

23. Моделирование нормального распределения

23.1. Реализация пары выборочных значений случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение. В этом разделе мы рассмотрим вопрос о моделировании случайной величины η , имеющей плотность *нормального распределения*

$$f_{\eta}(u) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(u-m)^2/(2\sigma^2)} \quad -\infty < u < +\infty$$

с параметрами (m, σ^2) : $m = \mathbf{E}\eta$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\eta$. Заметим, что для реализации значений η достаточно моделировать значения *стандартной нормальной случайной величины* ξ с параметрами $(0, 1)$ и плотностью распределения

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}, \quad -\infty < u < +\infty, \quad (23.1)$$

а затем использовать преобразование $\eta = m + \sigma \xi$. Несложно доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 23.1. *Случайные величины*

$$\xi_1 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin 2\pi\alpha_2, \quad \xi_2 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi\alpha_2, \quad (23.2)$$

где (α_1, α_2) – пара независимых случайных чисел, являются независимыми и распределенными согласно плотности (23.1).

23.2. Использование центральной предельной теоремы. В литературе по методам Монте-Карло можно найти следующую формулу моделирования стандартной нормальной случайной величины:

$$\xi \approx \xi^{(n)} = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1/2). \quad (23.3)$$

Согласно центральной предельной теореме, величина $\xi^{(n)}$ асимптотически нормальна, кроме того, $\mathbf{E}\xi^{(n)} = 0$, $\mathbf{D}\xi^{(n)} = 1$. Формула (23.3) особенно удобна для $n = 12$: $\xi^{(12)} = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i - 6$. Соотношения типа (23.3), в частности, «обрубают хвосты» распределения стандартной нормальной случайной величины ξ (например, $|\xi^{(12)}| \leq 6$), и поэтому такие формулы обычно используют в случаях, когда большие значения величины $|\xi|$ не играют существенной роли. Недостатком формулы (23.3) является также необходимость реализации достаточно большого количества стандартных случайных чисел α_i (см. замечание 3.2).

23.3. Теоремы об изотропном векторе. Утверждение 23.1 допускает обобщение на l -мерный случай, где $l \geq 2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23.2. *Если ξ – изотропный вектор, квадрат длины которого имеет χ^2 -распределение с l степенями свободы, то его компоненты ξ_1, \dots, ξ_l независимы и нормальны с параметрами $(0, 1)$.*

Используя известное из теории вероятностей представление $\chi_l^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_l^2$ [27], несложно доказать обратное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23.3. *Если случайные величины ξ_1, \dots, ξ_l независимы и распределены нормально с параметрами $(0, 1)$, то вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)$ является изотропным.*

Утверждение 23.2 дает возможность получать большое количество независимых выборочных значений ξ_1, \dots, ξ_l стандартной нормальной случайной величины. Здесь для использования формулы (21.7) разумно положить $l = 2k$.

АЛГОРИТМ 23.1. 1). *Реализуем l -мерный изотропный случайный вектор $(\omega_1, \dots, \omega_l)$ единичной длины.*

2. Вычисляем значения $\xi_i = \sqrt{-2 \ln(\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k)} \omega_i$, $i = 1, \dots, 2k$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – независимые реализации стандартного случайного числа.

Формулы (23.2) являются частным случаем алгоритма 23.1 для $l = 2$ и $k = 1$, так как двумерный вектор

$$(\omega_1, \omega_2) = (\sin 2\pi\alpha, \cos 2\pi\alpha) \quad (23.4)$$

является единичным изотропным. Забегая вперед, заметим, что алгоритм 23.1 эффективен только для случая $l = 2$ и $k = 1$ из-за отсутствия экономичных процедур численного построения многомерного единичного изотропного вектора $(\omega_1, \dots, \omega_l)$ (см. следующий разд. 24).

24. Моделирование изотропного вектора

24.1. Двумерный и трехмерный случаи. Особо важными для приложений являются алгоритмы моделирования единичного изотропного вектора в двумерном и трехмерном случаях. Для двумерного случая эффективным является алгоритм, определяемый формулами (23.4).

Построение алгоритмов реализации компонент единичного l -мерного изотропного вектора может быть основано на том очевидном соображении, что вектор $\omega = \zeta/|\zeta|$ является единичным изотропным в случае, когда случайная точка ζ равномерно распределена в l -мерном шаре радиуса R .

Рассмотрим случай $l = 3$. Требуется построить алгоритм моделирования случайного вектора $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, равномерно распределенного в шаре $G = \{(u', v', w') : (u')^2 + (v')^2 + (w')^2 < R^2\}$ согласно плотности

$$f(u, v, w) = \begin{cases} ((4/3)\pi R^3)^{-1}, & \text{при } (u, v, w) \in G, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сразу отметим, что факторизация (11.1) в декартовой системе координат дает «плохие» (немоделируемые) условные плотности распределения компонент вектора ζ . Здесь целесообразно перейти к сферическим координатам $u = r \sin \theta \cos \phi$, $v = r \sin \theta \sin \phi$, $w = r \cos \theta$. В новых координатах шар G превращается в параллелепипед $0 \leq r < R$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Якобиан преобразования равен

$$\left| \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = r^2 \sin \theta,$$

и согласно утверждению 10.1 плотность в новых координатах имеет вид

$$f_1(r, \theta, \phi) = \frac{3r^2 \sin \theta}{4\pi R^3} = \left(\frac{3r^2}{R^3} \right) \left(\frac{\sin \theta}{2} \right) \left(\frac{1}{2\pi} \right), \quad (24.1)$$

при этом сферические координаты $(r_\zeta, \theta_\zeta, \phi_\zeta)$ образа точки ζ независимы. Несложно получить моделирующие формулы метода обратной функции распределения для плотностей из произведения (24.1):

$$\cos \theta_\zeta = 1 - 2\alpha_1, \quad r_\zeta = R(\alpha_2)^{1/3}, \quad \phi_\zeta = 2\pi\alpha_3, \quad (24.2)$$

а декартовы координаты точки ζ равны

$$\xi = r_\zeta \sin \theta_\zeta \cos \phi_\zeta, \quad \eta = r_\zeta \sin \theta_\zeta \sin \phi_\zeta, \quad \zeta = r_\zeta \cos \theta_\zeta. \quad (24.3)$$

Полагая $R = 1$, из соотношений (24.2), (24.3) получаем следующие моделирующие формулы для компонент вектора $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$:

$$\omega_1 = 1 - 2\alpha', \quad \omega_2 = \sqrt{1 - \omega_1^2} \cos 2\pi\alpha'', \quad \omega_3 = \sqrt{1 - \omega_1^2} \sin 2\pi\alpha''. \quad (24.4)$$

Эти же формулы получаются из следующих рассуждений [16]. Рассмотрим в пространстве R^3 некоторую фиксированную ось, например ось OX . Единичный вектор, исходящий из начала координат, будем определять следующими двумя величинами: μ – косинус угла между вектором и осью OX , φ – угол между плоскостью, определяемой вектором и осью OX , и некоторой фиксированной плоскостью, проходящей через ось OX . Очевидно, что для изотропного вектора угол φ распределен равномерно в интервале $(0, 2\pi)$, а распределение μ симметрично относительно точки $\mu = 0$. Для $x \geq 0$ имеем $\mathbf{P}(x \leq \mu \leq x + dx) = c dx$, где $c = \text{const}$, так как площадь сферического пояса пропорциональна его высоте. Следовательно, величина μ распределена равномерно в интервале $(-1, 1)$. Таким образом, единичный изотропный вектор $\boldsymbol{\omega}$ моделируется по формулам (24.4).

24.2. Метод исключения. Рассмотрим следующий метод моделирования случайной точки $\boldsymbol{\zeta}$, равномерно распределенной в l -мерном шаре радиуса R .

АЛГОРИТМ 24.1. *Реализуем l независимых значений, равномерно распределенных в интервале $(-R, R)$:*

$$\zeta_1 = R(2\alpha_1 - 1), \dots, \zeta_l = R(2\alpha_l - 1). \quad (24.5)$$

Проверяем неравенство $\zeta_1^2 + \dots + \zeta_l^2 < R^2$. Если оно выполнено, то, в силу утверждения 1.1, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_l)$ – искомая точка, равномерно распределенная в l -мерном шаре, иначе вновь реализуем вектор (24.5) и т. д.

В силу утверждения 1.1 и формулы (15.4), трудоемкость \tilde{s} алгоритма 24.1 пропорциональна отношению объемов l -мерного куба (с ребром $2R$) и l -мерного шара радиуса R :

$$\tilde{s} \sim s = \frac{(2R)^l}{\pi^{l/2} R^l / \Gamma(l/2 + 1)} = (4/\pi)^{l/2} \times \Gamma(l/2 + 1).$$

Например, для $l = 2k$ имеем $s = (4/\pi)^k \times k!$. Эта величина очень быстро возрастает. По сути алгоритм 24.1 используется только в случае $l = 2$ (здесь $s \approx 1.27$, а для $l = 3$ уже $s \approx 1.91$) и тогда, когда элементарные

функции, используемые в формуле (23.4), вычисляются относительно медленно.

24.3. Моделирование многомерного изотропного вектора. Из приведенных рассуждений следует, что для моделирования единичного изотропного вектора ω при $l > 3$ целесообразно использовать алгоритм, который следует из утверждения 23.1 и формул (23.2).

АЛГОРИТМ 24.2. Пусть для простоты $l = 2k$. Применяя k раз формулу (23.2), формируем вектор $\zeta = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})$ и полагаем $\omega = \zeta/|\zeta|$.

Библиографический список

1. Hammersley J. M., Handscomb D. C. Monte Carlo Methods. N. Y.: John Wiley and Sons, Inc., 1964.
2. Спанье Дж., Гелбард Э. Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1972.
3. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
4. Михайлов Г. А. Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1974.
5. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1974.
6. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976.
7. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / Г. И. Марчук, Г. А. Михайлов, М. А. Назаралиев, Р. А. Дарбинян и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1976.
8. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
9. Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984.
10. Kalos M. H., Whitlock P. A. Monte Carlo methods. N. Y.: John Wiley and Sons, 1986.
11. Михайлов Г. А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987.
12. Сабельфельд К. К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. М.: Наука, 1989.
13. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.
14. Михайлов Г. А. Весовые методы Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
15. Михайлов Г. А. Весовые алгоритмы статистического моделирования. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2003.
16. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. ц-тр «Академия», 2006.
17. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Новосибирск: НГУ, 1997. Ч. 1: Обзор методов Монте-Карло. Генераторы случайных и псевдослучайных чисел.

18. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Новосибирск: НГУ, 1997. Ч. 2: Моделирование дискретных случайных величин. Моделирование непрерывных случайных величин методом обратной функции распределения.
19. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Новосибирск: НГУ, 1997. Ч. 3: Моделирование случайных векторов. Моделирование непрерывных случайных величин методом суперпозиции и методом исключения.
20. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Новосибирск: НГУ, 1997. Ч. 4: Моделирование случайных величин с распределениями, связанными с гамма-распределением. Моделирование случайных процессов и полей.
21. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Новосибирск: НГУ, 1999. Ч. 5: Вычисление многократных интегралов. Аппроксимация интегралов, зависящих от параметра.
22. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Новосибирск: НГУ, 2004. Ч. 6: Вычисление значений линейных функционалов от решения интегрального уравнения второго рода. Дискретно-стохастические методы решения интегрального уравнения второго рода.
23. Войтишек А. В. Символьные и численные расчеты в физических приложениях. Новосибирск: НГУ, 2006. Ч. 2: Основы метода Монте-Карло.
24. Войтишек А. В. Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2007.
25. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
26. Милосердов В. В. Дискретно-стохастические численные алгоритмы со сплайн-восполнениями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2006.
27. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.