

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Механико-математический факультет

**А. В. Войтишек**

## **ОСНОВЫ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО**

Учебное пособие

Новосибирск  
2010

ББК В193.3я 73–1  
УДК 519.676  
В 654

**Войтишек А. В.** Основы метода Монте-Карло: Учеб. пособие / Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. 108 с.

ISBN

Данное учебное пособие публикуется в рамках «Программы развития НИУ-НГУ» (направление «Математика, фундаментальные основы информатики и информационные технологии»). При этом автор использовал многолетний опыт преподавания основ теории численного статистического моделирования на механико-математическом и физическом факультетах НГУ. Издание предназначено для краткого курса (семь лекций и семь семинарских занятий) для магистрантов вузов физико-математического профиля. Помимо конспективного изложения лекций пособие содержит многочисленные примеры решения задач, а также методические указания по организации занятий. Кроме того, сформулировано творческое домашнее задание и подробно разобраны возможные технологии его выполнения. Работа над пособием выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 10–01–00040а, 09–01–00035а) и Президентской программы «Ведущие научные школы».

Рецензент  
канд. физ.–мат. наук И. А. Шалимова

ISBN

© Новосибирский государственный  
университет, 2010

## Предисловие

С развитием вычислительной техники возрастает интерес к численным методам решения прикладных задач, в частности к статистическому моделированию (или методу Монте-Карло) (см., например, [1], а также список литературы в этом учебнике). Исторически интенсивное развитие теории и приложений метода Монте-Карло было связано с решением актуальных задач теории переноса излучения в 50-х гг. XX столетия. За последние полвека сфера применимости методов численного статистического моделирования значительно расширилась. Разработана теория вероятностных представлений решений задач математической физики, на основе которой построены соответствующие численные стохастические оценки. Эффективные алгоритмы разработаны также в статистической физике (метод Метрополиса, схема Изинга), в физической и химической кинетике (многочастичные задачи, решение уравнений Больцмана и Смолуховского, моделирование реакций и фазовых переходов), в теории массового обслуживания, в финансовой математике, в теории турбулентности, в математической биологии и др.

При разработке данного пособия, реализованной в рамках «Программы развития НИУ-НГУ» (направление «Математика, фундаментальные основы информатики и информационные технологии»), автор использовал многолетний опыт преподавания основ теории численного статистического моделирования на механико-математическом и физическом факультетах Новосибирского государственного университета. Для освоения курса требуются элементарные знания из курсов теории вероятностей и математической статистики (см., например, [2, 3]).

Данное издание представляет собой доработанную версию пособия [4]. Следует особо подчеркнуть, что для более глубокого изучения теории численного статистического моделирования целесообразно использовать учебник [1] и сопутствующие монографии (представленные в списке литературы в [1]). Особенностью данного пособия является то, что помимо конспективного изложения лекций оно содержит многочисленные примеры решения задач, а также методические указания по организации занятий (см. прил. 4) и итогового экзамена (см. прил. 2). Кроме того, сформулировано творческое домашнее задание и подробно разобраны возможные технологии его выполнения (см. прил. 3).

## 1. Вычисление математического ожидания и дисперсии методом Монте-Карло

**1.1. Общая схема метода Монте-Карло.** Под численным статистическим моделированием обычно понимают реализацию с помощью компьютера вероятностной модели некоторого объекта с целью оценивания средних характеристик модели на основе закона больших чисел.

В самом общем виде схема метода Монте-Карло выглядит следующим образом (см., например, [1]). Пусть нам требуется вычислить некоторую величину  $I$ . Предполагается, что можно построить случайную величину  $\zeta$  с математическим ожиданием  $\mathbf{E}\zeta$ , равным  $I$ , и с конечной дисперсией  $\mathbf{D}\zeta$ , причем выборочные значения  $\zeta_j$  случайной величины  $\zeta$  достаточно просто реализуются на компьютере (здесь и далее обозначение выборочных значений случайной величины представляет собой греческую букву с нижним индексом, а обозначение соответствующей случайной величины нижнего индекса не имеет). Построив достаточно большое количество  $n$  выборочных значений  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ , на основе закона больших чисел (см., например, [2, 3]) получаем приближение искомой величины:

$$I = \mathbf{E}\zeta \approx Z_n = \frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{n}. \quad (1.1)$$

Базовая случайная величина  $\zeta$  называется *оценкой* величины  $I$ . Таким образом, понятие оценки в теории методов Монте-Карло несколько отличается от аналогичного термина в математической статистике (см., например, [3]), в которой оценкой величины  $I$  называется среднее арифметическое  $Z_n$ . Выбор оценки  $\zeta$ , как правило, неоднозначен. Поэтому главными проблемами при использовании методов численного статистического моделирования является выбор оптимальной оценки  $\zeta$  искомой величины  $I$  и разработка алгоритмов, позволяющих получать выборочные значения  $\{\zeta_i\}$  на ЭВМ.

Чаще всего оценка  $\zeta$  из соотношения (1.1) имеет вид

$$\zeta = q(\boldsymbol{\xi}), \quad (1.2)$$

где  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(d)})$  – случайный вектор или случайная последовательность (например, обрывающаяся с вероятностью единица цепь Маркова, для которой, вообще говоря,  $d \rightarrow \infty$ ) с заданным абсолютно непрерывным распределением, а  $q(\mathbf{x})$  – функция (неслучайная)  $d$  пере-

менных. При этом соотношение (1.1) приобретает вид

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q(\xi_i), \quad (1.3)$$

где  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – выборочные значения случайного вектора  $\xi$ .

**1.2. Приближенное вычисление дисперсии базовой случайной величины.** При исследовании погрешности и трудоемкости метода (1.1) требуется приближенно вычислять неизвестную величину дисперсии  $\mathbf{D}\zeta$  случайной величины  $\zeta$  (см. разд. 3).

Величина  $\mathbf{D}\zeta$  допускает эффективное оценивание с помощью реализуемых выборочных значений  $\zeta_1, \dots, \zeta_{\hat{n}}$  (при этом число выборочных значений  $\hat{n}$ , как правило, значительно меньше величины  $n$  из приближенного равенства (1.1) – см. подразд. 3.4). Простейшее приближение несложно получить из соотношений (1.2), (1.3) для  $\mathbf{u} = u \in R$  и  $q(u) = u^2$ :

$$\mathbf{D}\zeta = \mathbf{E}\zeta^2 - (\mathbf{E}\zeta)^2 \approx \mathbf{D}_{\hat{n}}^{(1)} = \frac{1}{\hat{n}} \sum_{i=1}^{\hat{n}} \zeta_i^2 - \left( \frac{1}{\hat{n}} \sum_{i=1}^{\hat{n}} \zeta_i \right)^2. \quad (1.4)$$

Если в равенстве (1.4) трактовать  $\zeta_1, \dots, \zeta_{\hat{n}}$  как независимые и одинаково распределенные (так же, как случайная величина  $\zeta$ ) случайные величины, то несложно показать, что

$$\mathbf{E}\mathbf{D}_{\hat{n}}^{(1)} = \left( 1 - \frac{1}{\hat{n}} \right) \mathbf{D}\zeta. \quad (1.5)$$

Действительно,  $\mathbf{E}\mathbf{D}_{\hat{n}}^{(1)} = \mathbf{E}\zeta^2 - \mathbf{E}Z_{\hat{n}}^2 = \mathbf{D}\zeta - \mathbf{D}Z_{\hat{n}}$ , так как  $\mathbf{E}Z_{\hat{n}} = \mathbf{E}\zeta$ . Учитывая, что  $\mathbf{D}Z_{\hat{n}} = \mathbf{D}\zeta/\hat{n}$ , получаем равенство (1.5). Разделив  $\mathbf{D}_{\hat{n}}^{(1)}$  на  $(1 - 1/\hat{n})$

$$\mathbf{D}_{\hat{n}}^{(2)} = \frac{1}{\hat{n} - 1} \sum_{i=1}^{\hat{n}} \zeta_i^2 - \frac{1}{\hat{n}(\hat{n} - 1)} \left( \sum_{i=1}^{\hat{n}} \zeta_i \right)^2, \quad (1.6)$$

получаем несмещенную оценку дисперсии.

## 2. Вычисление интеграла методом Монте-Карло

**2.1. Основные проблемы теории численного статистического моделирования.** В связи с задачей (1.1) возникает ряд вопросов.

1. Какие величины  $I$  допускают представление (1.1)?
2. Единственен ли выбор случайной величины  $\zeta$ , и если неединственен, то как оптимизировать этот выбор?
3. Сколько выборочных значений  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  требуется для достижения заданного уровня погрешности?
4. Как построить эффективные алгоритмы реализации выборочных значений  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  на ЭВМ?

Забегая вперед, отметим, что вопрос 4 будет исследоваться в разд. 10–17; вопросы 2 и 3 обсуждаются в разд. 3.

**2.2. Использование обобщенной формулы математического ожидания непрерывной случайной величины.** Исследуем вопрос 1. Отметим прежде всего, что если оценка  $\zeta$  имеет вид (1.2), то

$$I = \mathbf{E}\zeta = \int q(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

где  $f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$  – плотность распределения случайного вектора  $\boldsymbol{\xi}$ . В связи с этим можно объявить, что с математической точки зрения теория методов Монте-Карло является специальным разделом *численного интегрирования* (см., например, [5]). Отметим, что этот раздел включает (если иметь в виду именно методы Монте-Карло) и такую важную тему, как решение интегральных уравнений второго рода (см., например, [1], а также разд. 7–9). Эти уравнения, в свою очередь, могут описывать многие физические процессы, связанные с переносом излучения и частиц (см. разд. 6). Во многих задачах математической физики имеются возможности построения интегрального и вероятностного представлений решения и конструирования соответствующего численного алгоритма метода Монте-Карло (см., например, [1]).

**2.3. Приближенное вычисление интеграла.** Предположим, что решение  $I$  некоторой задачи допускает интегральное представление  $I = \int g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Выберем плотность  $f(\mathbf{x})$  такую, что  $f(\mathbf{x}) \neq 0$  при  $g(\mathbf{x}) \neq 0$ . Тогда на основе соотношений (1.2), (1.3) и (2.1) имеем

$$I = \int g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{E}\zeta \approx \frac{1}{n} \left( \frac{g(\boldsymbol{\xi}_1)}{f(\boldsymbol{\xi}_1)} + \dots + \frac{g(\boldsymbol{\xi}_n)}{f(\boldsymbol{\xi}_n)} \right), \quad (2.2)$$

при этом  $\zeta = q(\boldsymbol{\xi}) = g(\boldsymbol{\xi})/f(\boldsymbol{\xi})$ . Равенство (2.2) отражает принцип построения *весовой оценки* метода Монте-Карло для интеграла  $I$ .

### 3. Погрешность и трудоемкость метода Монте-Карло

**3.1. Построение доверительного интервала с использованием центральной предельной теоремы.** Погрешность  $\delta_n = |Z_n - I|$  метода (1.1) представима в виде

$$\delta_n = \left| \frac{S_n - nI}{n} \right| = \frac{\sqrt{\mathbf{D}\zeta}}{\sqrt{n}} \left| \frac{S_n - n\mathbf{E}\zeta}{\sqrt{\mathbf{D}\zeta}\sqrt{n}} \right|,$$

где  $S_n = \zeta_1 + \dots + \zeta_n$ . Из центральной предельной теоремы для одинаково распределенных случайных величин (см., например, [2]) следует, что при достаточно большом  $n$  случайная величина  $(S_n - n\mathbf{E}\zeta)/(\sqrt{\mathbf{D}\zeta}\sqrt{n})$  близка по распределению к стандартной нормальной случайной величине  $\gamma \in N(0, 1)$ . Следовательно, для малого  $\varepsilon > 0$  найдется константа  $H_\varepsilon$ , для которой при  $n \gg 1$  выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\left(\delta_n \leq H_\varepsilon \frac{\sqrt{\mathbf{D}\zeta}}{\sqrt{n}}\right) \approx \mathbf{P}(|\gamma| < H_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon. \quad (3.1)$$

Например, для  $\varepsilon = 0.003$  имеем  $H_\varepsilon \approx 3$ . Это соотношение отражает «правило трех сигма», использующее то обстоятельство, что с вероятностью, близкой к единице, значения стандартной нормальной случайной величины  $\gamma$  лежат в интервале  $(-3, 3)$ .

**3.2. Скорость сходимости метода Монте-Карло.** Из соотношения (3.1) следует, что скорость сходимости метода Монте-Карло определяется величиной  $n^{-1/2}$ , т. е. относительно невелика. Для того чтобы получить следующий знак после запятой величины  $I$  (т. е. уменьшить погрешность примерно в 10 раз) требуется в 100 раз увеличить число испытаний  $n$ . Поэтому характерные числа испытаний в практических вычислениях по методу Монте-Карло весьма велики.

Для сравнения при вычислении одномерного интеграла  $I$  с гладкой подынтегральной функцией  $g(\mathbf{x})$  погрешность простейшей *формулы прямоугольников*, определяемая числом  $n$  вычислений подынтегральной функции  $g(\mathbf{x})$  из равенства (2.2), имеет порядок  $n^{-2}$  (на четыре порядка лучше метода Монте-Карло), а чуть более сложная *формула Симпсона* имеет еще более высокий порядок погрешности  $n^{-3}$ . Упомя-

нутые формулы являются частными случаями так называемых *квобатурных формул Ньютона – Котеса*, построение которых основано на интегрировании полиномиальных интерполяций подынтегральной функции  $g(\mathbf{x})$ . Хорошо известно (см., например, [5]), что при переходе к размерностям  $d$  интеграла (2.2), больших единицы, и при рассмотрении негладких подынтегральных функций  $g(\mathbf{x})$  построение хороших интерполяций для  $g(\mathbf{x})$  и соответствующих им *квобатурных формул* значительно усложняется. Скорость сходимости метода Монте-Карло (2.2)  $n^{-1/2}$  не зависит от размерности  $d$  (эта скорость сохраняется в том числе и для интегралов счетной кратности). Свойства функции  $g(\mathbf{x})$  влияют лишь на величину  $\mathbf{D}\zeta$  в соотношении (3.1).

Таким образом, при переходе к сложным многомерным задачам конкурентоспособность методов Монте-Карло возрастает. Принято считать, что для  $1 \leq d \leq 3$  предпочтительнее использовать квобатурные формулы, для  $d \geq 10$  (включая задачи счетной размерности) не имеет конкурентов простейший метод Монте-Карло, а для размерностей  $3 < d < 10$  имеет смысл рассматривать смешанные *дискретно-стохастические методы* численного интегрирования [6].

Разработка алгоритмов численного статистического моделирования в настоящее время имеет особое значение в связи с возможностью их идеального распараллеливания путем распределения численных статистических испытаний по отдельным процессорам.

**3.3. Затраты и трудоемкость метода Монте-Карло.** Важным преимуществом метода Монте-Карло является простота учета вычислительных затрат, позволяющая проводить оптимизацию оценки  $\zeta$  за счет специального выбора плотности  $f(\mathbf{x})$ . Действительно, затраты на вычисление величины  $Z_n$  равны  $s = nt$ , где  $t$  – среднее время для получения одного выборочного значения  $\zeta_j$  случайной величины  $\zeta$ . Из практических расчетов известно, что при больших  $n$  формула  $\delta_n \sim H\sqrt{\mathbf{D}\zeta}/\sqrt{n}$  (здесь  $0 < H \leq H_\varepsilon$  – см. соотношение (3.1)) определяет поведение погрешности  $\delta_n$ . Отсюда получаем, что при заданном уровне погрешности  $\Delta$  величина  $\mathbf{D}\zeta$  пропорциональна  $n$ , т. е. из соотношения  $\Delta = H\sqrt{\mathbf{D}\zeta}/\sqrt{n}$  следует равенство  $n = (H/\Delta)^2 \times \mathbf{D}\zeta$ . Поэтому можно заменить величину  $s$  на

$$S = t \times \mathbf{D}\zeta. \quad (3.2)$$

Величина (3.2), называемая *трудоемкостью метода Монте-Карло*, является критерием качества алгоритма, определяемого соотношением



(2.2). Лучшим считается тот выбор плотности  $f(\mathbf{x})$ , для которого величина  $S$  меньше.

**3.4. Оценка трудоемкости с помощью предварительных расчетов.** Среднее время  $t$  из соотношения (3.2) несложно оценить экспериментально, предварительно (до использования алгоритма (1.1) для  $n \gg 1$ ) реализуя относительно небольшое количество  $\hat{n}$  выборочных значений  $\zeta_1, \dots, \zeta_{\hat{n}}$  и деля соответствующее время счета на  $\hat{n}$ .

Неизвестная величина  $\mathbf{D}\zeta$  из соотношения (3.2) также допускает эффективное оценивание с помощью выборочных значений  $\zeta_1, \dots, \zeta_{\hat{n}}$  – см. формулы (1.4) и (1.6) из подразд. 1.2.

Имеется ряд приемов, позволяющих уменьшать дисперсию  $\mathbf{D}\zeta$  для случайной величины  $\zeta = g(\xi)/f(\xi)$  из равенства (2.2) (см., например, [1, 6], а также разд. 4 и 5). Способы уменьшения времени  $t$  направлены, как правило, на оптимизацию моделирования случайного вектора  $\xi$  (см., например, [1, 6], а также разд. 14).

## 4. Метод выборки по важности

**4.1. Теорема о минимальной дисперсии.** Выясним, для какой плотности  $f(\mathbf{x})$  дисперсия

$$\mathbf{D}\zeta = \int \frac{g^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{f(\mathbf{x})} - I^2 \quad (4.1)$$

случайной величины  $\zeta$  из (2.2) является минимальной.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1.** *Минимальная дисперсия  $(\mathbf{D}\zeta)_{min}$  реализуется в случае, когда плотность  $f(\mathbf{x})$  пропорциональна модулю подынтегральной функции:*

$$f_{min}(\mathbf{x}) = H|g(\mathbf{x})|, \quad \text{где } H = \frac{1}{\int |g(\mathbf{y})| d\mathbf{y}}, \quad (4.2)$$

и равна

$$(\mathbf{D}\zeta)_{min} = \left( \int |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right)^2 - I^2. \quad (4.3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Соотношение (4.3) получается непосредственной подстановкой выражения (4.2) в равенство (4.1) с учетом того, что  $g^2(\mathbf{x})/|g(\mathbf{x})| = |g(\mathbf{x})|$ . Далее, из формул (4.1) и (4.3) следует, что дисперсия  $(\mathbf{D}\zeta)_{min}$  является действительно наименьшей, так как для любой

плотности  $f(\mathbf{x})$  величина

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\zeta - (\mathbf{D}\zeta)_{min} &= \left( \int \frac{g^2(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} d\mathbf{x} - I^2 \right) - \\ &- \left( \left( \int |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right)^2 - I^2 \right) = \int \frac{g^2(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} d\mathbf{x} - \left( \int |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right)^2 \end{aligned}$$

является дисперсией (т. е. величиной неотрицательной) случайной величины  $|g(\xi)|/f(\xi)$ , где случайный вектор  $\xi$  имеет плотность распределения  $f(\mathbf{x})$ . Утверждение 4.1 доказано.

Сформулируем также важное следствие утверждения 4.1 для случая знакопостоянной подынтегральной функции  $g(\mathbf{x})$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2.** Пусть

$$g(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in R^d. \quad (4.4)$$

Если

$$f(\mathbf{x}) = Hg(\mathbf{x}), \quad \text{где } H = 1/I \quad \text{и } \mathbf{x} \in R^d, \quad (4.5)$$

то  $(\mathbf{D}\zeta)_{min} = 0$ .

Плотности (4.2) и (4.5) не используются для вычисления интеграла  $I$  по той причине, что нахождение величины  $H = 1/\int |g(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$  из соотношения (4.2) представляет собой задачу, эквивалентную по сложности исходной задаче (2.1) (в случае (4.4) – в точности эквивалентную). Более того, для случая (4.4) алгоритм (2.2) «вырождается» и приближенное равенство (2.2) превращается в тождество  $I = (1/n) \times \sum_{i=1}^n I$ .

**4.2. Выборка по важности.** Из утверждений 4.1 и 4.2 можно сделать вывод о том, что в ряде случаев можно добиться уменьшения трудоемкости (3.2) алгоритма (2.2), выбирая плотность  $f(\mathbf{x})$ , близкой (с точностью до постоянного множителя  $H$ ) к функции  $|g(\mathbf{x})|$ :

$$f(\mathbf{x}) \approx H|g(\mathbf{x})|. \quad (4.6)$$

Алгоритм (2.2) в этом случае называется *выборкой по важности*, что соответствует английскому термину «*important sampling*». Такое название объясняется тем, что если  $f(\mathbf{x})$  пропорциональна модулю подынтегральной функции  $g(\mathbf{x})$ , то в тех частях области  $X$ , в которых  $|g(\mathbf{x})|$  больше и вклад которых в интеграл  $I$  более существенен, будет выбираться больше случайных точек  $\{\xi_i\}$ .

**4.3. Оценка сверху для дисперсии.** Соотношение (4.6) позволяет получить алгоритм метода Монте-Карло (2.2) с малой дисперсией. Продемонстрируем это сначала для случая (4.4). Обозначим через  $X$  замыкание множества тех  $\mathbf{x} \in R^d$ , для которых  $g(\mathbf{x}) > 0$ . Полагаем также, что  $f(\mathbf{x}) = 0$  при  $\mathbf{x} \notin X$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. *Предположим, что*

$$0 \leq m_1 \leq q(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} \leq m_2 < +\infty, \quad \mathbf{x} \in X. \quad (4.7)$$

Тогда имеет место следующая оценка сверху для дисперсии:

$$\mathbf{D}\zeta = \mathbf{D}q(\boldsymbol{\xi}) \leq \frac{(m_2 - m_1)^2}{4}. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \zeta - \frac{m_1 + m_2}{2} \right)^2 &= \mathbf{E} \left( (\zeta - \mathbf{E}\zeta) + \left( \mathbf{E}\zeta - \frac{m_1 + m_2}{2} \right) \right)^2 = \\ &= \mathbf{D}\zeta + \left( \mathbf{E}\zeta - \frac{m_1 + m_2}{2} \right)^2 + 2\mathbf{E} \left( (\zeta - \mathbf{E}\zeta) \left( \mathbf{E}\zeta - \frac{m_1 + m_2}{2} \right) \right) = \\ &= \mathbf{D}\zeta + \left( \mathbf{E}\zeta - \frac{m_1 + m_2}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{D}\zeta \leq \mathbf{E} \left( \zeta - \frac{m_1 + m_2}{2} \right)^2 \leq \frac{(m_2 - m_1)^2}{4}.$$

Здесь использовано то, что  $m_1 \leq \zeta \leq m_2$  (ведь  $\zeta = q(\boldsymbol{\xi})$ ) и что линейная функция

$$\varphi(t) = t - (m_1 + m_2)/2, \quad m_1 \leq t \leq m_2$$

принимает свое максимальное и минимальное значения в точках  $t_1 = m_1$  и  $t_2 = m_2$ . Утверждение 4.3 доказано.

Случай  $m_2 - m_1 \approx 0$  соответствует соотношению (4.6) для  $g(\mathbf{x}) \geq 0$  при  $m_1 \approx m_2 \approx 1/H$ . Неравенства (4.7) и (4.8) дают способ априорной оценки дисперсии при использовании выборки по важности (4.6) для случая (4.4). В частности, такой способ оценки дисперсии используется при решении экзаменационных задач (см. Приложение 1).

**4.4. Включение особенности в плотность.** Одна из принципиальных ситуаций, в которых применяется выборка по важности, связана с довольно широко распространенным случаем, когда подынтегральные функции имеют особенности, которые описываются обобщенными функциями:

$$I = \int G(\mathbf{x}) \left( \sum_{j=1}^A g_j(\mathbf{x}) \delta(\Psi_j(\mathbf{x})) \right) d\mathbf{x}, \quad A = M \vee \infty. \quad (4.9)$$

Здесь функции  $g_j(\mathbf{x})$  принимают положительные значения на гиперповерхностях  $\Gamma_j$ , определяемых уравнениями  $\Psi_j(\mathbf{x}) = 0$ . Символы  $\delta(u)$  обозначают *дельта-функцию Дирака*, т. е. для любой непрерывной функции  $z(u)$  выполнено  $\int z(u) \delta(u - u_0) du = z(u_0)$ . Таким образом, выражение (4.9) можно трактовать как интеграл по объединению гиперповерхностей  $\Gamma_j$ . Как правило, «классические» кубатурные формулы не дают эффективных алгоритмов вычисления таких интегралов (см., например, [5, 6]).

Для понимания дальнейших рассуждений полезно рассмотреть обобщение теории непрерывных случайных величин, в котором ключевым является понятие случайной величины  $\xi$ , распределенной согласно *дельта-плотности*  $f_\xi(x) = \delta(x - a)$  (здесь  $a = \text{const}$ ). Оно означает, что  $\xi = a$  с вероятностью единица (т. е. по сути «обычное» число  $a$  трактуется как случайная величина). Такой подход позволяет, в том числе, рассматривать дискретную случайную величину как случайный элемент с плотностью распределения, представляющей собой смесь дельта-плотностей (см., например, [1]). По аналогии с этим приемом для вычисления интеграла (4.9) можно выбрать *допустимую плотность* вида

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^A p_j f_j(\mathbf{x}) \delta(\Psi_j(\mathbf{x})).$$

Здесь функции  $f_j(\mathbf{x})$  являются плотностями распределения на гиперповерхностях  $\Gamma_j$ , а числа  $\{p_j\}$  – вероятности (т. е.  $p_j > 0$  и  $\sum_{j=1}^A p_j = 1$ ). Учитывая, что при  $\mathbf{x} \in \Gamma_j$  выполнено  $f(\mathbf{x}) = p_j f_j(\mathbf{x})$ , перепишем исходный интеграл в виде (2.2):

$$I = \int G(\mathbf{x}) \left( \sum_{j=1}^A \frac{g_j(\mathbf{x}) \delta(\Psi_j(\mathbf{x}))}{p_j f_j(\mathbf{x})} p_j f_j(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} =$$

$$= \int \left( \sum_{j=1}^A \frac{G(\mathbf{x})g_j(\mathbf{x})\delta(\Psi_j(\mathbf{x}))}{p_j f_j(\mathbf{x})} \right) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{E}\zeta.$$

Здесь

$$\zeta = \sum_{j=1}^A \frac{G(\boldsymbol{\xi})g_j(\boldsymbol{\xi})\delta(\Psi_j(\boldsymbol{\xi}))}{p_j f_j(\boldsymbol{\xi})},$$

а случайный вектор  $\boldsymbol{\xi}$  имеет плотность распределения  $f(\mathbf{x})$ . Таким образом, можно реализовать алгоритм (2.2), причем при моделировании выборочных значений  $\boldsymbol{\xi}_i$  применяется метод суперпозиции (см., например, [1], а также разд. 15 – алгоритм 15.2): сначала согласно вероятностям  $\{p_j\}$  выбирается номер  $m_i$ , а затем согласно плотности  $f_{m_i}(\mathbf{x})$  реализуется точка  $\boldsymbol{\xi}_i$  на гиперповерхности  $\Gamma_{m_i}$ . Соответствующий вклад в оценку (2.2) равен

$$\zeta_i = \frac{G(\boldsymbol{\xi}_i)g_{m_i}(\boldsymbol{\xi}_i)}{p_{m_i} f_{m_i}(\boldsymbol{\xi}_i)}.$$

По аналогии с утверждением 4.1 несложно показать, что минимальная дисперсия  $\mathbf{D}\zeta$  достигается в случае, когда плотность  $f(\mathbf{x})$  имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = H \sum_{j=1}^A |G(\mathbf{x})| g_j(\mathbf{x}) \delta(\Psi_j(\mathbf{x})),$$

где  $H$  – нормирующая константа. Описанный прием носит название *включение особенности в плотность*.

## 5. Методы понижения дисперсии (основные идеи)

**5.1. Выделение главной части.** Следующие соображения дают один из самых эффективных способов уменьшения дисперсии  $\mathbf{D}\zeta$ . Допустим, что известна близкая к  $g(\mathbf{x})$  функция  $g_0(\mathbf{x})$ , для которой легко вычисляется интеграл  $I_0 = \int g_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  (аналитически или численно с малыми затратами и высокой точностью). Тогда для увеличения эффективности расчетов по методу Монте-Карло можно использовать стандартный прием *выделения главной части*, который основан на соотношении

$$I = I_0 + \int (g(\mathbf{x}) - g_0(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

Для оценки второго слагаемого в последней сумме применяем алгоритм (2.2) и, следовательно,

$$I = \mathbf{E}\zeta^{(0)}, \quad \text{где } \zeta^{(0)} = I_0 + q(\boldsymbol{\xi}) - q_0(\boldsymbol{\xi}), \quad q_0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{g_0(\boldsymbol{\xi})}{f(\boldsymbol{\xi})},$$

а случайный вектор  $\boldsymbol{\xi}$  распределен согласно плотности  $f(\mathbf{x})$ . Дисперсия  $\mathbf{D}\zeta^{(0)}$  равна  $\mathbf{D}(q(\boldsymbol{\xi}) - q_0(\boldsymbol{\xi}))$  и может быть малой, если  $g_0(\mathbf{x})$  хорошо аппроксимирует функцию  $g(\mathbf{x})$ .

**5.2. Интегрирование по части области.** Рассмотрим также следующий аналог алгоритма выделения главной части. Допустим, что интеграл  $I = \int_X g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  представлен в виде (2.1) и удается вычислить (аналитически или численно с малыми затратами и высокой точностью) интегралы по некоторой части  $X_2$  области интегрирования  $X \subseteq R^d$ :

$$\int_{X_2} q(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = I_2 \quad \text{и} \quad \int_{X_2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = i_2,$$

где  $0 < i_2 < 1$ . Здесь мы полагаем, что  $f(\mathbf{x}) = 0$  при  $\mathbf{x} \notin X$ .

Как правило, выгодно представить интеграл (2.1) в виде суммы

$$I = I_2 + \int_{X_1} q(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = I_2 + \int_{X_1} i_1 q(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{E}\zeta^{(1)}, \quad (5.1)$$

где  $X_1 = X \setminus X_2$ ,  $i_1 = 1 - i_2$ ,  $\zeta^{(1)} = I_2 + i_1 q(\boldsymbol{\xi}^{(1)})$ , а  $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$  – случайный вектор, распределенный в  $X_1$  согласно усеченной плотности  $f_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/i_1$ . Замена алгоритма (2.2) на аналогичный алгоритм, соответствующий представлению (5.1), называется *интегрированием по части области*. Если область  $X_2$  близка к  $X$ , то можно считать, что мы выделяем главную часть. Однако описанный прием выгоден и тогда, когда область  $X_2$  заметно меньше области  $X$ , правда, и понижение дисперсии в этом случае относительно невелико.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1.** *Справедливо соотношение  $\mathbf{D}\zeta^{(1)} \leq i_1 \mathbf{D}\zeta$ .*

**5.3. Выборка по группам.** Рассмотрим представление (2.1) интеграла  $I = \int_X g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Запишем величину  $I$  в виде

$$I = \sum_{m=1}^M \int_{X_m} q(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где  $X_m$  – подобласти  $X$ , имеющие попарные пересечения меры нуль, причем  $X = X_1 \cup \dots \cup X_M$ . Введем обозначения

$$p_m = \int_{X_m} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad I_m = \int_{X_m} q(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad f_m(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{p_m}$$

при  $\mathbf{x} \in X_m$ . Предположим, что  $f(\mathbf{x}) = 0$  при  $\mathbf{x} \notin X$ . Тогда

$$p_1 + \dots + p_M = 1, \quad I_1 + \dots + I_M = I \quad \text{и} \quad I_m = \mathbf{E}(p_m q(\boldsymbol{\xi}^{(m)})),$$

где случайный вектор  $\boldsymbol{\xi}^{(m)}$  распределен в  $X_m$  согласно плотности  $f_m(\mathbf{x})$ .

**АЛГОРИТМ 5.1.** *Приближенно вычисляем значения  $I_m$  согласно стандартному алгоритму (2.2) с числом испытаний  $n_m$ :*

$$I_m \approx \frac{p_m}{n_m} \sum_{i_m=1}^{n_m} q(\boldsymbol{\xi}_{i_m}^{(m)}),$$

и полагаем

$$I \approx Z_n^{(M)} = \sum_{m=1}^M \frac{p_m}{n_m} \sum_{i_m=1}^{n_m} q(\boldsymbol{\xi}_{i_m}^{(m)}), \quad (5.2)$$

здесь  $n = n_1 + \dots + n_M$ .

Алгоритм 5.1 определяет *метод расслоенной выборки* или *выборку по группам*. Этот алгоритм отличается при  $M = 2$  от метода интегрирования по части области, так как последний предполагает, что интеграл  $I_2$  известен (а в алгоритме 5.1 этот интеграл вычисляется приближенно по выборке  $\{\boldsymbol{\xi}_{i_2}^{(2)}\}$ ).

Сравним выборочную дисперсию  $\mathbf{D}Z_n = \mathbf{D}\zeta/n$  стандартного метода (2.2) вычисления интеграла  $I$  (здесь случайные точки  $\boldsymbol{\xi}$  выбираются во всей области интегрирования  $X$ ) и соответствующую дисперсию  $\mathbf{D}Z_n^{(M)}$  метода расслоенной выборки при условии, что фиксированы число испытаний (для выборки по группам – суммарное число испытаний)  $n$  и разбиение области интегрирования  $X = X_1 \cup \dots \cup X_M$ . Несложно вычислить дисперсию

$$\mathbf{D}Z_n^{(M)} = \sum_{m=1}^M \left( \frac{p_m}{n_m} \right)^2 \sum_{i_m=1}^{n_m} \mathbf{D}q(\boldsymbol{\xi}_{i_m}^{(m)}) = \sum_{m=1}^M \frac{p_m^2 \mathbf{D}q(\boldsymbol{\xi}^{(m)})}{n_m},$$

где

$$\mathbf{D}q(\boldsymbol{\xi}^{(m)}) = \frac{1}{p_m} \int_{X_m} q^2(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \left( \frac{I_m}{p_m} \right)^2;$$

здесь использована независимость случайных точек  $\{\xi_{i_m}^{(m)}\}$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *Минимум величины  $\mathbf{D}Z_n^{(M)}$  равен*

$$d_n^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{m=1}^M p_m \sqrt{\mathbf{D}q(\xi^{(m)})} \right)^2.$$

*Эта величина не превосходит  $\mathbf{D}Z_n$  и реализуется при*

$$n_m = np_m \sqrt{\mathbf{D}q(\xi^{(m)})} \bigg/ \sum_{m'=1}^M p_{m'} \sqrt{\mathbf{D}q(\xi^{(m')})}. \quad (5.3)$$

Заметим, что на практике применяются более простые, чем (5.3), соотношения  $n_m = np_m$ , которые также дают не большую, чем  $\mathbf{D}Z_n$ , дисперсию  $\mathbf{D}Z_n^{(M)}$ .

Доказательства утверждений 5.1 и 5.2, а также примеры эффективного применения сформулированных методов понижения дисперсии представлены, например, в работах [1, 6]. Здесь же описан ряд других приемов, уменьшающих дисперсию основного алгоритма (2.2): *метод математических ожиданий, метод расщепления, симметризация переменных, использование поправочного множителя* и др.

## 6. Случайные элементы в задачах теории переноса

**6.1. Простейшая модель переноса частиц.** Методы Монте-Карло успешно применяются для численного решения задач теории переноса излучения. Типичной моделью этой теории является следующая.

Пусть имеется выпуклая область  $G$  (как правило,  $G \subseteq R^3$ ), вообще говоря, неоднородного вещества, в подобласти которой  $G' \subseteq G$  (или на границе  $\partial G$ ) расположен источник излучения (направленный или стохастический). Малые частицы излучения («фотоны»), сталкиваясь с более крупными частицами вещества в слое, либо поглощаются этими частицами, либо рассеиваются согласно некоторому стохастическому закону распределения, который описывается *индикатрисой рассеяния*  $g(\mathbf{r}, \omega', \omega)$  (это условная плотность распределения случайного направления частицы излучения после рассеяния  $\hat{\omega}$  при условии, что зафиксирована точка столкновения  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$  и предыдущее направление движения частицы  $\hat{\omega}' = \omega'$ ). Приложений у подобных моделей множество: защита ядерных реакторов, климатические задачи, задачи лазерного зондирования атмосферы и океана и др.



Ставится задача определения одной или нескольких вероятностных характеристик описанного процесса блуждания частиц. В частности, для многих приложений актуальной является проблема вычисления вероятности  $P$  того, что частица излучения поглотится в области  $G$  (или, другими словами, определить, какая часть излучаемого потока останется в области  $G$ ).

**6.2. Задание вероятностных распределений для процесса переноса.** Один из способов численного решения этой задачи состоит в реализации на ЭВМ траекторий частиц излучения (соответствующий численный алгоритм называют *прямым моделированием*). При этом должны быть заданы следующие стохастические законы распределения.

Во-первых, плотность  $g^{(0)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$  совместного распределения начальной точки  $\mathbf{r}^{(0)} \in G'$  и начального направления  $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$  движения частицы.

Во-вторых, задается распределение так называемой *длины свободного пробега* частицы (т. е. длины отрезка пути частицы, на котором она не испытывает столкновений). При этом используется следующее предположение: вероятность того, что частица, вылетевшая из точки  $s$ , испытает столкновение на интервале  $(s, s + \delta s)$  (ось  $s$  совпадает с направлением движения частицы), равна

$$\Sigma(\mathbf{r}) \delta s + o(\delta s). \quad (6.1)$$

Функция  $\Sigma(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r}$  обозначает координату частицы во «внешней» системе координат) предполагается заданной и называется *полным сечением взаимодействия частицы со средой*. Из соотношения (6.1) несложно вывести, что длина свободного пробега частицы излучения является случайной величиной с функцией распределения

$$F(u) = 1 - \exp\left(-\int_0^u \Sigma(\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} s) ds\right). \quad (6.2)$$

Заметим, что в случае, когда вещество, заполняющее область  $G$ , однородно, выполнено тождество  $\Sigma(\mathbf{r}) \equiv \text{const}$  и равенство (6.2) определяет *экспоненциальную (или показательную) функцию распределения*. Простой алгоритм получения значений случайной величины с таким распределением рассмотрен в разд. 13 (см. пример 13.1).

Полное сечение рассеяния представляет собой сумму

$$\Sigma(\mathbf{r}) = \Sigma^{(a)}(\mathbf{r}) + \Sigma^{(s)}(\mathbf{r}),$$

где  $\Sigma^{(a)}(\mathbf{r})$  – сечение поглощения,  $\Sigma^{(s)}(\mathbf{r})$  – сечение рассеяния; эти функции также предполагаются заданными. Величина  $q^{(a)}(\mathbf{r}) = \Sigma^{(a)}(\mathbf{r})/\Sigma(\mathbf{r})$  описывает вероятность того, что при столкновении частицы излучения с частицей вещества в точке  $\mathbf{r} \in G$  происходит поглощение малой частицы более крупной (при этом траектория движения частицы излучения прерывается). Розыгрыш события поглощения происходит по простому алгоритму: если  $\alpha_0 \leq p^{(a)}(\mathbf{r})$ , то произошло поглощение; если  $\alpha_0 > p^{(a)}(\mathbf{r})$ , то произошло рассеяние (см. алгоритм 11.3). Здесь  $\alpha_0$  – реализация стандартного случайного числа  $\alpha$  (т. е. случайной величины, равномерно распределенной в интервале  $(0, 1)$ ), получаемая с помощью генератора псевдослучайных чисел (см. разд. 10).

Наконец, требуется задать индикатрису рассеяния  $g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega})$ . Введем также случайную величину  $\beta$ , которая равна единице в случае, если частица излучения поглотилась в области  $G$ , и равна нулю во всех остальных случаях. Заметим, что  $\mathbf{E}\beta = P$ .

**6.3. Алгоритм прямого численного моделирования.** Реализуем  $n$  траекторий частиц и для  $j$ -й траектории ( $j = 1, \dots, n$ ) делаем следующее.

1. Моделируем начальную координату и направление движения частицы излучения согласно плотности  $g^{(0)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ .

2. Реализуем длину свободного пробега согласно функции распределения (6.2).

3. Проверяем, не вылетела ли частица из области  $G$ . Если вылет произошел, то заканчиваем траекторию и полагаем  $\beta_j = 0$ .

4. Вычисляем координату  $\mathbf{r}$  очередной точки столкновения, зная предыдущую координату  $\mathbf{r}'$ , направление движения  $\boldsymbol{\omega}'$  и длину свободного пробега  $l$ .

5. Определяем тип столкновения (поглощение или рассеяние) согласно вероятности  $p^{(a)}(\mathbf{r})$ . Если реализовалось поглощение, то обрываем траекторию и полагаем  $\beta_j = 1$ .

6. Если происходит рассеяние, то согласно индикатрису  $g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega})$  реализуем новое направление движения частицы и переходим на п. 2 для дальнейшего моделирования траектории.

Приближением искомой вероятности  $P$  поглощения частицы в области  $G$  будет среднее арифметическое вида (1.1):

$$P = \mathbf{E}\beta \approx \frac{\beta_1 + \dots + \beta_n}{n}.$$

## 7. Интегральное уравнение второго рода, ряд Неймана. Линейный функционал, как интеграл бесконечно возрастающей кратности

**7.1. Переход к интегральному уравнению.** Приведенная в предыдущем разделе математическая модель представляет собой скачкообразный, обрывающийся с вероятностью единица *однородный марковский процесс* или *цепь Маркова* (см., например, [2], а также разд. 8)  $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)}$ ; здесь  $N$  – случайный номер обрыва траектории (в задаче переноса излучения каждое из этих состояний – это шестимерный вектор  $\xi = (\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\omega}})$ , первые три компоненты которого описывают точку столкновения «фотона» с частицей вещества, а следующие три – направление прилета «фотона» в эту точку). Однородная цепь Маркова определяется плотностью распределения начального состояния (первого столкновения)  $f(x)$  (для задачи переноса излучения эта функция выражается через плотность  $g^{(0)}(x)$ ,  $x = (\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$  и функцию распределения свободного пробега (6.2)) и переходной функцией  $k(x', x)$  (которая, в свою очередь, выражается через вероятность поглощения  $p^{(a)}(x')$ , индикатрису рассеяния  $g(x', x)$  и функцию (6.2)). Если  $p^{(a)}(x') \geq \delta > 0$ , то справедливо неравенство

$$\int k(x', x) dx = q(x') \leq 1 - \delta < 1 \quad (7.1)$$

(величина  $q(x')$  имеет смысл вероятности необрыва траектории в заданной точке  $x'$ ), вследствие которого цепь обрывается с вероятностью единица (и даже математическое ожидание  $\mathbf{E}N$  конечно – см., например, [1]). Обобщенная плотность распределения состояний, непосредственно следующих за начальным, выражается равенством

$$\varphi_1(x) = \int f(x')k(x', x) dx' = [Kf](x); \quad (7.2)$$

это аналог формулы полной плотности вероятностей (см., например, [1], а также формулу (14.2)). В последнем соотношении  $K$  – *интегральный оператор с ядром*  $k(x', x)$  (см., например, [7]). Пусть  $\varphi_m(x)$  – плотность распределения состояний номера  $m$ . По аналогии с соотношением (7.2) имеем

$$\varphi_m(x) = \int \varphi_{m-1}(x')k(x', x) dx' = [K\varphi_{m-1}](x).$$

В частности,

$$\varphi_2(x) = [K\varphi_1](x) = \int \int f(y^{(0)})k(y^{(0)}, y^{(1)})k(y^{(1)}, x) dy^{(0)} dy^{(1)} = [K^2 f](x). \quad (7.3)$$

Следовательно, обобщенная плотность распределения фазовых состояний цепи

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x),$$

представляет собой *ряд Неймана* (см., например, [7])

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} [K^m f](x). \quad (7.4)$$

Непосредственной подстановкой легко показать, что эта функция является решением *интегрального уравнения Фредгольма второго рода* (см., например, [7])

$$\varphi(x) = \int k(x', x)\varphi(x') dx' + f(x) \quad \text{или} \quad \varphi = K\varphi + f. \quad (7.5)$$

Это уравнение обычно рассматривают в пространстве  $L_1(R^l)$  с нормой  $\|g\|_{L_1} = \int |g(x)| dx$  (причина – наличие особенностей у свободного члена  $f(x)$  и ядра  $k(x', x)$  для большинства актуальных прикладных задач; в частности, в ядро уравнения, описывающего процесс переноса излучения, входит дельта-функция по направлению – см., например, [1]). Существование и единственность решения уравнения (7.5) обеспечивает условие (7.1), при выполнении которого интегральный оператор  $K$  является сжимающим.

## 7.2. Интегральное представление линейного функционала.

Методы Монте-Карло обычно используются для оценки линейных функционалов

$$I_h = (\varphi, h) = \int \varphi(x)h(x) dx; \quad h \in L_{\infty}(R^l). \quad (7.6)$$

Здесь  $L_{\infty}(R^l)$  – пространство ограниченных (почти везде) функций с нормой  $\|h\|_{L_{\infty}} = \text{vrai sup}_{x \in R^l} |h(x)|$ . В частности, в рассмотренной в предыдущем разделе задаче искомая вероятность равна  $P = (\varphi, h)$ ,  $h(x) = p^{(a)}(\mathbf{r})\chi_G(\mathbf{r})$ , где  $\chi_G(\mathbf{r})$  – индикатор множества  $G$ .

В силу соотношения (7.4), искомый функционал представим в виде

$$I_h = \sum_{m=0}^{\infty} (K^m f, h), \quad (7.7)$$

где, по аналогии с равенством (7.3),

$$(K^m f, h) = \int f(y^{(0)}) k(y^{(0)}, y^{(1)}) \times \dots \times k(y^{(m-1)}, y^{(m)}) h(y^{(m)}) dy^{(0)} \dots dy^{(m)}. \quad (7.8)$$

Таким образом, правая часть соотношения (7.7) представляет собой сумму интегралов бесконечно возрастающей кратности. Сходимость ряда (7.7) следует из условия (7.1).

## 8. Однородная цепь Маркова, обрывающаяся с вероятностью единица, и ее моделирование

**8.1. Использование метода выборки по важности.** Стандартный метод Монте-Карло (2.2) не позволяет вычислять интегралы бесконечно возрастающей кратности из-за необходимости моделирования вектора  $\xi$  бесконечной размерности. Однако специальный вид подынтегральных функций из соотношений (7.7), (7.8), в которых при переходе от номера  $m$  к номеру  $m+1$  происходит умножение на функцию двух переменных  $k(y^{(m)}, y^{(m+1)})$  (и меняется аргумент функции  $h(y^{(m+1)})$ ), и метод выборки по важности (который подразумевает выбор плотности распределения случайного вектора  $\xi$ , близкой к модулю подынтегральной функции – см. разд. 4) наводят на мысль об использовании плотностей распределения векторов  $\tilde{\xi}^{(m+1)} = (\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)})$  вида

$$\tilde{f}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(m)}) = \pi(y^{(0)}) r(y^{(0)}, y^{(1)}) \times \dots \times r(y^{(m-1)}, y^{(m)}), \quad (8.1)$$

где  $r(x', x) = r(x|x')$  – некоторая условная плотность. При этом

$$(K^m f, h) = \mathbf{E} \zeta^{(m)}; \quad \zeta^{(m)} = \tilde{Q}^{(m)} h(\xi^{(m)}),$$

где

$$\tilde{Q}^{(0)} = \frac{f(\xi^{(0)})}{\pi(\xi^{(0)})}, \quad \tilde{Q}^{(i)} = \tilde{Q}^{(i-1)} \times \frac{k(\xi^{(i-1)}, \xi^{(i)})}{r(\xi^{(i-1)}, \xi^{(i)})}; \quad i = 1, \dots, m. \quad (8.2)$$

Функция (8.1) представляет собой плотность распределения отрезка  $(\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)})$  *однородной цепи Маркова*  $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots$  с начальной плотностью  $\pi(x)$  и переходной плотностью  $r(x', x)$  (см., например, [2]). Напомним, что «классическая» цепь Маркова – это бесконечная последовательность случайных величин (случайных векторов), для которой распределение состояния  $\xi^{(m)}$  полностью определяется значением предыдущего состояния  $\xi^{(m-1)}$  (однородность означает, что вероятностные характеристики перехода  $\xi^{(m-1)} \rightarrow \xi^{(m)}$  – одни и те же для всех  $m = 1, 2, \dots$ ). Переходная плотность  $r(x', x) = r(x|\xi^{(m-1)} = x')$  – это условная плотность распределения последующего ( $m$ -го) состояния при фиксированном предыдущем (для однородной цепи эта функция не зависит от  $m$ ).

**8.2. Численное моделирование отрезка цепи Маркова.** Моделирование  $m$ -го состояния однородной цепи Маркова происходит следующим образом. Сначала реализуется выборочное значение  $\xi_0^{(0)}$  случайной величины  $\xi^{(0)}$  согласно плотности  $\pi(x)$ , а затем последовательно реализуются значения  $\xi_0^{(i)}$ ;  $i = 1, \dots, m$  согласно плотностям  $r(\xi_0^{(i-1)}, x) = r(x|\xi^{(i-1)} = \xi_0^{(i-1)})$  (см., например, [1], а также алгоритм 14.2).

**8.3. Введение обрыва цепи.** В связи с необходимостью приближения бесконечной суммы (7.7) в методах Монте-Карло вводится *цепь Маркова, обрывающаяся с вероятностью единица*. Это делается по аналогии с «физическими» соображениями из теории переноса частиц (см., например, [1], а также разд. 6). Определяется *переходная функция*

$$p(x', x) = r(x', x)(1 - p(x')), \quad (8.3)$$

где значение  $0 \leq p(x') \leq 1$  играет роль вероятности обрыва траектории. Модификация моделирования состоит в следующем: после реализации начального состояния  $\xi_0^{(0)}$  при реализации перехода  $\xi_0^{(i-1)} \rightarrow \xi_0^{(i)}$  согласно вероятности  $p(\xi_0^{(i-1)})$  разыгрывается обрыв траектории. Если обрыв происходит, то дальнейшие переходы не моделируются, иначе происходит реализация выборочного значения  $\xi_0^{(i)}$  согласно плотности  $r(\xi_0^{(i-1)}, x)$ .

Если потребовать  $p(x') \geq \delta > 0$ , то

$$\int p(x', x) dx = 1 - p(x') \leq 1 - \delta < 1 \quad (8.4)$$

(это аналог соотношения (7.1)) и  $\mathbf{E}N < +\infty$ , где  $N$  – случайный номер обрыва траектории. Несмотря на соотношение (8.4), функцию (8.3)

часто называют *переходной плотностью* однородной цепи Маркова, обрывающейся с вероятностью единица.

## 9. Оценка по столкновениям для вычисления линейного функционала от решения интегрального уравнения второго рода. Прямое моделирование. Локальные оценки

**9.1. Оценка по столкновениям и ее несмещенность.** Справедливо следующее соотношение (см., например, [1]):

$$I_h = (\varphi, h) = \mathbf{E}\zeta, \quad \zeta = \sum_{m=0}^N Q^{(m)} h(\xi^{(m)}). \quad (9.1)$$

Здесь  $I_h$  – линейный функционал (7.6) от решения  $\varphi(x)$  интегрального уравнения второго рода (7.5);  $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)}$  – однородная цепь Маркова, обрывающаяся с вероятностью единица, с начальной плотностью  $\pi(x)$  и переходной функцией (плотностью)  $p(x', x)$ ;  $N$  – случайный номер обрыва цепи. Случайные веса  $Q^{(m)}$  определяются рекуррентно по аналогии с соотношением (8.2):

$$Q^{(0)} = \frac{f(\xi^{(0)})}{\pi(\xi^{(0)})}; \quad Q^{(m)} = Q^{(m-1)} \times \frac{k(\xi^{(m-1)}, \xi^{(m)})}{p(\xi^{(m-1)}, \xi^{(m)})}.$$

Для выполнения равенства (9.1) достаточно потребовать выполнения соотношений (8.4) и

$$\pi(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad f(x) \neq 0 \quad \text{и} \quad p(x', x) \neq 0 \quad \text{при} \quad k(x', x) \neq 0. \quad (9.2)$$

Случайная величина  $\zeta$  называется *весовой оценкой по столкновениям* функционала  $I_h$ .

**9.2. Алгоритм вычисления функционала  $I_h$ .** Равенство (9.1) дает следующий способ вычисления функционала (7.6).

**АЛГОРИТМ 9.1.** *Реализуем  $n$  траекторий*

$$\xi_j^{(0)}, \xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(N_j)}; \quad j = 1, \dots, n$$

*цепи Маркова с начальной плотностью  $\pi(x)$  и переходной функцией  $p(x', x)$  и вычисляем среднее арифметическое вида (1.1):*

$$I_h \approx Z_n = \frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{n}, \quad \text{где} \quad \zeta_j = \sum_{m=0}^{N_j} Q_j^{(m)} h(\xi_j^{(m)}).$$

Таким образом, метод Монте-Карло позволяет получать приближения бесконечных сумм (7.7) интегралов бесконечно возрастающей кратности (7.8).

**9.3. Использование оценки по столкновениям.** Для целого ряда актуальных прикладных задач можно представить искомую величину в виде линейного функционала (7.6) от решения интегрального уравнения второго рода (7.5) (см., например, [1]). Для оценки этого функционала можно использовать алгоритм 9.1.

Достаточно часто свободный член  $f(x)$  уравнения (7.5) представляет собой начальную плотность, а ядро  $k(x', x)$  – переходную функцию (плотность) цепи Маркова, обрывающейся с вероятностью единица. В этом случае можно реализовать *прямое моделирование* цепи Маркова с начальной плотностью  $\pi(x) = f(x)$  и переходной функцией  $p(x', x) = k(x', x)$ , и тогда  $I_h = \mathbf{E} \left[ \sum_{m=0}^N h(\xi^{(m)}) \right]$ . Однако нередко функции  $f(x)$  и  $k(x', x)$ , имеющие указанный выше вероятностный смысл, являются весьма сложными, и моделирование соответствующей цепи Маркова затруднено. Тогда можно моделировать другую, вспомогательную цепь Маркова с простой плотностью перехода  $p(x', x)$  и начальной плотностью  $\pi(x)$ , для которых выполнены условия (9.2), и строить весовую оценку по столкновениям (9.1). Последнюю возможность существенно ограничивает наличие особенностей в функциях  $f(x)$  и  $k(x', x)$  для большинства актуальных приложений, что вынуждает использовать прием, описанный в подразд. 4.4 – включение особенности в плотность.

**9.4. Метод сопряженных блужданий.** Для многих приложений важным является умение строить *локальные весовые оценки метода Монте-Карло*, позволяющие приближенно вычислять значения решения  $\varphi(x)$  уравнения (7.5) в фиксированной точке  $\hat{x}$ , используя соответствующие аналоги алгоритма 9.1 (см., например, [1]).

Первый подход основан на теории обобщенных функций (см., например, [7]) и на идее включения особенности в плотность (см., например, [1] и подразд. 4.4). Заметим, что значение  $\varphi(\hat{x})$  можно представить в виде функционала (7.6):

$$\varphi(\hat{x}) = (\varphi_2, \hat{h}), \quad \hat{h}(x) = \delta(x - \hat{x}). \quad (9.3)$$

Ясно, что для такого функционала нельзя использовать оценку по столкновениям (9.1) ввиду невозможности подсчета дельта-функции из соотношения (9.3) в случайных точках  $\xi_j^{(m)}$ . Несложно показать, что



$(\varphi, \hat{h}) = (\varphi^*, f)$ , где  $f(x)$  – свободный член исходного уравнения (7.5), а  $\varphi^*(y)$  – решение сопряженного (относительно функционала (9.3)) интегрального уравнения

$$\varphi^*(y) = \int k^*(y', y) \varphi^*(y') dy' + \hat{h}(y); \quad \text{или} \quad \varphi^* = K^* \varphi^* + \hat{h}, \quad (9.4)$$

где  $K^*$  – интегральный оператор с ядром  $k^*(y', y) = k(y, y')$ . Вместо оценки (9.1) можно строить оценку по столкновениям для функционала  $(\varphi^*, f)$  от решения  $\varphi^*(y)$  уравнения (9.4):

$$\zeta^* = \sum_{m=0}^{N^*} Q^{(m)*} f(\eta^{(m)}), \quad (9.5)$$

где однородная, обрывающаяся с вероятностью единица цепь Маркова  $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(N^*)}$  имеет начальную плотность  $\pi^*(y)$  и переходную функцию  $p^*(y', y) = r^*(y', y)(1 - p^*(y'))$ ;

$$Q^{(0)*} = \frac{\hat{h}(\eta^{(0)})}{\pi^*(\eta^{(0)})}, \quad Q^{(m)*} = Q^{(m-1)*} \frac{k^*(\eta^{(m-1)}, \eta^{(m)})}{p^*(\eta^{(m-1)}, \eta^{(m)})}. \quad (9.6)$$

В случае  $\hat{h}(x) = \delta(x - \hat{x})$  возникают трудности с реализацией алгоритма 9.1, соответствующего оценке (9.5), в связи с невозможностью вычисления веса  $Q^{(0)*}$  из (9.6). Однако здесь может быть реализована идея «включения особенности в плотность» (см. подразд. 4.4). Возьмем в качестве начальной плотности  $\pi^*(y)$  функцию  $\delta(y - \hat{x})$ . Это означает, что начальное состояние  $\eta^{(0)}$  является случайной величиной, тождественно (с вероятностью единица) равной  $\hat{x}$  (т. е. это уже по сути детерминированная – неслучайная – величина). Соответственно при моделировании траекторий цепи  $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(N^*)}$  следует брать  $\eta_j^{(0)} = \hat{x}$ , при этом  $Q_j^{(0)*} \equiv 1$ . Таким образом получается несмещенная оценка *метода сопряженных блужданий*:

$$\varphi(\hat{x}) = \mathbf{E} \hat{\zeta}^*, \quad \hat{\zeta}^* = \sum_{m=1}^{N^*} Q^{(m)*} f(\eta^{(m)}) + f(\hat{x}). \quad (9.7)$$

**9.5. «Функциональная» локальная оценка.** Недостатком оценки (9.7) является то обстоятельство, что при необходимости вычисления решения  $\varphi(x)$  в наборе точек требуется моделировать индивидуальные

наборы траекторий цепи Маркова, стартующих в каждой из точек. Этого недостатка лишена «функциональная» локальная оценка, которая строится следующим образом.

Заметим, что первый член  $I_{k,x} = K\varphi(x) = \int k(x', x)\varphi(x') dx'$  в правой части уравнения (7.5) имеет форму функционала (7.6) для параметрической функции  $h_x(x') = k(x', x)$ . Для каждого  $x$  (в том числе, и для  $x = \hat{x}$ ) можно построить оценку по столкновениям вида (9.1) для функционала  $I_{k,x}$  и прибавить свободный член  $f(x)$  уравнения (7.5):

$$\varphi(x) = \mathbf{E}\xi(x), \quad \xi(x) = \sum_{m=0}^N Q^{(m)}k(\xi^{(m)}, x) + f(x). \quad (9.8)$$

При реализации соответствующего алгоритма 9.1 можно использовать один и тот же набор траекторий  $\xi_j^{(0)}, \xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(N_j)}$  (здесь  $j = 1, \dots, n$ ) для многих точек  $x$ . Следует, однако, заметить, что обоснованное применение локальной (а по сути – «глобальной») оценки (9.8) (что означает, в частности, возможность получения скорости сходимости  $n^{-1/2}$  по числу испытаний) возможно только для гладких функций  $\varphi(x), k(x', x), f(x)$  по переменной  $x$  (см., например, [8]). Для подавляющего большинства актуальных прикладных задач ядро  $k(x', x)$  и свободный член  $f(x)$  содержат особенности типа дельта-функций по части переменных (такая ситуация имеет место, в частности, в задаче переноса излучения, рассмотренной в разд. 6, 7), и приходится локально «вырезать» эти особенности, приближая негладкие функции  $k(x', x), f(x)$  в «вырезанных» областях гладкими аналогами (отсюда название «локальная оценка»).

## 10. Физические датчики стандартных случайных чисел и генераторы псевдо-случайных чисел. Метод вычетов и его свойства

**10.1. Основные свойства стандартной случайной величины  $\alpha$ .** Из предыдущих разделов следует, что ключевым моментом реализации метода Монте-Карло является моделирование (или реализация выборочных значений) случайных величин и случайных векторов на ЭВМ, которое состоит из двух этапов:

1) *реализуются значения  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  стандартной случайной величины  $\alpha$ , равномерно распределенной в интервале  $(0, 1)$ , с помощью специальной программы или устройства, которое называется генератором стандартных случайных (псевдослучайных) чисел;*

2) с помощью некоторых преобразований полученных чисел  $\{\alpha_j\}$  вычисляются значения случайных величин с более сложными законами распределения.

Таким образом, теорию методов Монте-Карло можно рассматривать как науку о возможностях применения преобразований стандартного случайного числа  $\alpha$  для численного решения прикладных задач.

Перечислим вероятностные характеристики случайной величины  $\alpha$ . Распределение этой величины является абсолютно непрерывным с плотностью  $f(u) \equiv 1$ ,  $0 < u < 1$ . Функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, 0], \\ x & \text{при } x \in (0, 1), \\ 1 & \text{при } x \in [1, +\infty), \end{cases} \quad (10.1)$$

Для обоснования алгоритмов метода Монте-Карло важным является следующее свойство равномерно распределенных точек.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 10.1** (см., например, [1]). Если  $l$ -мерная точка  $\alpha$  равномерно распределена в области  $G_1 \subset R^l$  конечного объема  $\bar{G}_1 = \int_{G_1} du$ , то она также равномерно распределена в произвольной подобласти  $G \subseteq G_1$  объема  $\bar{G}$  при условии попадания в эту подобласть; при этом  $\mathbf{P}(\alpha \in G) = \bar{G}/\bar{G}_1$ .

В качестве следствия сформулируем

**УТВЕРЖДЕНИЕ 10.2.** Пусть имеется интервал  $(a, b) \subseteq (0, 1)$ . Тогда случайная величина  $\alpha$  равномерно распределена в  $(a, b)$  при условии попадания в этот интервал и  $\mathbf{P}(\alpha \in (a, b)) = b - a$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 10.1.** Утверждение 10.2 используется при обосновании многих вычислительных конструкций метода Монте-Карло.

**10.2. Двоичное представление стандартной случайной величины.** Важным для построения и тестирования генераторов стандартных случайных чисел является следующее рассуждение. Поскольку  $\alpha \in (0, 1)$ , двоичное представление каждого выборочного значения этой случайной величины имеет вид

$$\alpha = 0, \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(k)} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)} 2^{-k}, \quad (10.2)$$

причем каждый разряд  $\alpha^{(k)}$  мантиссы числа (10.2) равен нулю или единице.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 10.3** (см., например, [1]). Для того чтобы случайная величина  $\alpha$  была равномерно распределенной в интервале  $(0, 1)$ ,

необходимо и достаточно, чтобы двоичные цифры  $\{\alpha^{(k)}\}$  из соотношения (10.2) представляли собой последовательность независимых бернуллиевских случайных величин с вероятностью успеха  $1/2$ :  $\mathbf{P}\{\alpha^{(k)} = 1\} = \mathbf{P}\{\alpha^{(k)} = 0\} = 1/2$ .

С одной стороны, утверждение 1.3 может повергнуть исследователя в некоторое уныние, так как оно говорит о том, что «настоящее» стандартное случайное число (10.2) имеет *бесконечную* мантиссу, воспроизвести которую на ЭВМ невозможно. С другой стороны, можно отметить, что в вычислительной математике машинные ошибки, связанные с конечностью мантиссы, часто не учитываются (в качестве примера можно указать использование форматов вещественных чисел на ЭВМ). Для используемых на практике генераторов случайных чисел эффекты, связанные с конечностью мантиссы, как правило, незначительны.

**10.3. Физические датчики.** Утверждение 10.3 обосновывает принцип работы так называемых *физических датчиков случайных чисел*. Это технические устройства (чаще всего «шумящие» радиоэлектронные приборы), которые вырабатывают случайную последовательность двоичных цифр (условно: лампочка горит или не горит с вероятностью  $1/2$ ; если вероятность не равна  $1/2$ , можно брать пары событий *да—нет* и *нет—да*, а события *да—да*, *нет—нет* отбрасывать). К преимуществам такого способа получения случайных чисел относят быстроту реализации и неограниченность запаса случайных чисел. Недостатком датчиков случайных чисел является то, что периодически требуется статистическая проверка вырабатываемых случайных чисел (поскольку даже сверхнадежное техническое устройство дает сбой). Кроме того, нет возможности воспроизвести расчеты. Следует тем не менее заметить, что существует немало вычислителей, которые предпочитают именно датчики случайных чисел, и работы по конструированию таких устройств продолжают.

**10.4. Генераторы псевдослучайных чисел.** Большинство расчетов по методу Монте-Карло произведено и производится с помощью генераторов псевдослучайных чисел, представляющих из себя некоторые вычислительные программы. Аргументами в пользу применения псевдослучайных чисел являются: возможность воспроизводить расчеты, быстрота получения чисел, отсутствие внешних устройств и необходимости многократной проверки качества получаемых чисел, малая загруженность памяти ЭВМ. Большинство известных алгоритмов ре-

лизации псевдослучайных чисел имеют вид

$$\alpha_{n+1} = \psi(\alpha_n), \quad (10.3)$$

где начальное число  $\alpha_0$  задано. Областью значений функции  $\psi(x)$  должен являться интервал  $(0, 1)$ .

Одно из соображений о том, каким образом следует выбирать функцию  $\psi(x)$  из (10.3), состоит в следующем. Пары точек

$$(\alpha_1, \alpha_2 = \psi(\alpha_1)), (\alpha_3, \alpha_4 = \psi(\alpha_3)), (\alpha_5, \alpha_6 = \psi(\alpha_5)), \dots$$

с одной стороны, должны располагаться на кривой  $y = \psi(x)$ , а с другой – эти же точки должны (по свойствам «настоящих» стандартных случайных чисел) быть равномерно распределены в квадрате  $Q_2 = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ . Поэтому график функции  $\psi(x)$  должен достаточно плотно заполнять квадрат  $Q_2$ . Примером такой функции  $\psi(x)$  может служить

$$\psi(x) = \{Mx\} \quad (10.4)$$

для большого множителя  $M$ ; здесь  $\{A\}$  обозначает дробную часть числа  $A$ . Алгоритм (10.3) с функцией (10.4) называется *мультипликативным методом вычетов* и является одним из наиболее часто употребляемых алгоритмов при моделировании псевдослучайных чисел.

**10.5. Равномерность и корреляция соседних членов последовательности метода вычетов.** Отметим два полезных свойства функции (10.4).

**УТВЕРЖДЕНИЕ 10.4.** *Случайная величина  $\beta = \{M\alpha\}$  равномерно распределена в интервале  $(0, 1)$  для любого целого положительного числа  $M$ .*

В качестве иллюстрации замечания 10.1 приведем доказательство сформулированного утверждения. Исследуем функцию распределения  $F(x) = \mathbf{P}(\beta < x)$ . По определению дробной части числа и с учетом того, что  $\alpha \in (0, 1)$ , имеем  $\beta \in (0, 1)$ , и поэтому  $F(x) = 0$  при  $x \leq 0$  и  $F(x) = 1$  при  $x \geq 1$ . Если  $x \in (0, 1)$ , то, используя утверждение 10.2, получаем

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{P}(k \leq M\alpha < k+x) = \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{P}\left(\frac{k}{M} \leq \alpha < \frac{k+x}{M}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \left(\frac{k+x}{M} - \frac{k}{M}\right) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{x}{M} = x. \end{aligned}$$

Из формулы (10.1) следует, что случайная величина  $\beta$  равномерно распределена в интервале  $(0, 1)$ .

Одним из существенных сомнений, связанных с использованием мультипликативного метода вычетов (10.3), (10.4), является то обстоятельство, что члены последовательности  $\{\alpha_n\}$  зависимы между собой. Поэтому весьма важным является следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 10.5** (см., например, [1]). *Коэффициент корреляции*

$$r(\alpha, \beta^{(s)}) = \mathbf{E} \left( \left( \frac{\alpha - \mathbf{E}\alpha}{\sqrt{\mathbf{D}\alpha}} \right) \left( \frac{\beta^{(s)} - \mathbf{E}\beta^{(s)}}{\sqrt{\mathbf{D}\beta^{(s)}}} \right) \right)$$

*случайных величин  $\alpha$  и*

$$\beta^{(s)} = \{M\beta^{(s-1)}\}, \quad \beta^{(0)} = \alpha; \quad s = 1, 2, \dots$$

*равен  $1/M^s$  для любого целого положительного  $M$ .*

Из утверждения 10.5 следует, что при  $M \gg 1$  коэффициент корреляции между зависимыми величинами  $\alpha_{n+s}$  и  $\alpha_n$  невелик и равен  $1/M^s$ .

**10.6. Учет конечности мантиссы. Периодичность и тестирование метода вычетов.** Отметим, что утверждения 10.4 и 10.5 сформулированы для «настоящего» стандартного случайного числа  $\alpha$ . Можно сформулировать аналоги этих утверждений в случае применения метода (10.3), (10.4) для чисел  $\alpha_n$  с ограниченной мантиссой длины  $m$ . При этом для достаточно большого  $m$  при удачном подборе множителя  $M$  статистические свойства членов последовательности (10.3), (10.4) и «настоящего» стандартного числа  $\alpha$  близки.

Предположим, что начальный элемент последовательности (10.3), (10.4) равен  $\alpha_0 = 2^{-m}$ , а множитель имеет вид  $M = 5^{2p+1}$ , где  $p$  — целое положительное число. Такой выбор объясняется, в частности, тем, что многие специалисты использовали и проверяли последовательности с множителями  $M$  именно такого вида. Справедливо представление

$$\alpha_n = k_n 2^{-m}; \quad k_0 = 1, \quad k_n \equiv k_{n-1} 5^{2p+1} \pmod{2^m}. \quad (10.5)$$

Существенный недостаток мультипликативного метода вычетов (10.5) связан с тем, что количество чисел, имеющих мантиссу длины  $m$  и принадлежащих интервалу  $(0, 1)$ , является конечным, и поэтому последовательность (10.5) является *периодической*, т. е. рано или поздно какое-нибудь значение  $\alpha_L$  совпадет со значением  $\alpha_0$ , и тогда, в силу равенства (10.3), имеем

$$\alpha_{L+i} = \alpha_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots \quad (10.6)$$

Наименьшее число  $L$ , удовлетворяющее соотношению (10.6), называется *длиной периода*. Обычно для расчетов не рекомендуют использовать больше чем  $L/2$  чисел последовательности (10.3), (10.4). Стандартными методами теории чисел можно доказать, что для мультипликативного метода вычетов (10.5) период равен  $L = 2^{m-2}$ . Величина  $M = 5^{2p+1}$  в двоичном представлении оканчивается на 01, поэтому все  $\alpha_n$  являются  $m$ -разрядными двоичными дробями, последние два разряда которых равны 01. Вследствие равенства  $L = 2^{m-2}$  остальные  $m - 2$  разряда «пробегают» все возможные комбинации. Поэтому в качестве  $\alpha_0$  можно выбрать любую  $m$ -разрядную двоичную дробь указанного типа.

Вопрос о пригодности псевдослучайных чисел (10.5) исследуется с помощью специальных статистических тестов и решения достаточно сложных тестовых задач. Для некоторых параметров  $(m, p)$  получаются удовлетворительные последовательности, для других – плохие. В новосибирской школе методов Монте-Карло для алгоритмов с числом испытаний  $n$  порядка  $10^9$  и меньше долгие годы вполне удовлетворительным считается генератор (10.5) с параметрами  $m = 40$  и  $p = 8$ , прошедший всестороннее многолетнее тестирование. В последнее время в связи с ростом мощностей современных вычислительных систем возникла потребность в генераторах с увеличенным периодом. В частности, для параллельных вычислений используется генератор (10.5) с параметрами  $m = 128$  и  $p = 50059$  из работы [9]. Определенные трудности конкретной реализации формул (10.5) на компьютере связаны с тем, что нужно производить действия с числами, имеющими мантиссу длины  $m$ , превосходящую стандартный формат ЭВМ.

**10.7. Два важных замечания.** В заключение этого раздела сформулируем два принципиальных соображения.

**ЗАМЕЧАНИЕ 10.2.** *Как правило, генераторы псевдослучайных чисел, представленные в современных версиях языков программирования (FORTRAN, PASCAL, СИ++ и др.) достаточно хорошо протестированы и дают статистически удовлетворительные результаты вычислений по методу Монте-Карло (во всяком случае, для задач, в которых используется умеренно большое количество выборочных значений случайных величин). Поэтому, несмотря на сформулированные выше замечания о возможных недостатках датчиков (конечность используемой мантиссы, периодичность и т. п.), в дальнейшем будем полагать, что используемый в расчетах генератор стандартных случайных чисел дает «настоящие» (теоретические) выборочные значения  $\alpha$ .*

Заметим, однако, что для проведения прецизионных расчетов целесообразно использовать датчик, результаты проверки которого известны. Особую роль играют контрольные расчеты для задач (близких к реальным) с известным решением.

**ЗАМЕЧАНИЕ 10.3.** *Мультипликативный метод вычетов (10.5), даже реализованный оптимально для используемого языка программирования, является относительно трудоемким (по сравнению, например, с простым умножением чисел). Поэтому при оптимизации алгоритмов метода Монте-Карло целесообразно по-возможности уменьшать число обращений к подпрограмме типа RANDOM.*

## 11. Стандартный метод моделирования дискретного распределения и его трудоемкость

**11.1. Порядок изучения алгоритмов численного моделирования случайных величин.** Наличие надежного генератора стандартных случайных чисел  $\alpha$  позволяет получать выборочные значения  $\xi_j$  случайных величин  $\xi$  (одномерных и многомерных) с произвольными законами распределения. Порядок описания соответствующих алгоритмов в этом пособии аналогичен порядку изучения случайных величин в курсах теории вероятностей: «от простого к сложному» (см., например, [2]). Сначала будут изучены алгоритмы моделирования для дискретных случайных величин, затем – для одномерных абсолютно непрерывных величин и далее – для многомерных случайных величин (или случайных векторов). Для каждого типа случайных величин будет представлен соответствующий стандартный алгоритм. Учитывая то обстоятельство, что при реализации метода Монте-Карло (1.1) требуется получать большое количество  $n \gg 1$  выборочных значений, особое внимание будет уделяться трудоемкости представляемых алгоритмов. Для ряда важнейших (с прикладной точки зрения) распределений стандартные алгоритмы либо не реализуемы, либо не эффективны. В этих случаях предпринимаются (часто довольно успешные) попытки построить специальные алгоритмы моделирования, учитывающие свойства заданного распределения (см., например, [1], а также разд. 12 и 17).

**11.2. Стандартный алгоритм моделирования дискретного распределения.** Рассмотрим вопрос о моделировании *дискретной случайной величины*  $\xi$  с конечным числом значений  $x_1, \dots, x_N$  и распреде-



лением вероятностей

$$\mathbf{P}(\xi = x_i) = p_i; \quad p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1; \quad (11.1)$$

далее в подразд. 11.5 рассмотрен случай счетного числа значений, для которого  $N = \infty$ .

В силу соотношений (11.1), реализация того или иного значения  $x_m$  случайной величины  $\xi$  означает розыгрыш события с вероятностью  $p_m$ . Кроме того, из соотношений (11.1) следует, что интервал  $(0, 1)$  можно разбить на полуинтервалы  $\Delta_m$  длины  $p_m$ :

$$\Delta_m = [R_{m-1}, R_m); \quad R_m = \sum_{i=1}^m p_i; \quad m = 1, 2, \dots, N;$$

для  $m = 1$  полагаем  $R_{m-1} = R_0 = 0$ . Используя соответствующий генератор, реализуем выборочное значение  $\alpha_0$  стандартного случайного числа. В силу утверждения 10.2, имеем  $\mathbf{P}(\alpha \in \Delta_m) = p_m$ . Таким образом, если  $\alpha_0 \in \Delta_m$ , то для данного испытания полагаем, что выборочное значение случайной величины  $\xi$  равно  $\xi_0 = x_m$ .

Технически определение того номера  $m$  полуинтервала  $\Delta_m$ , в который попало выборочное значение  $\alpha_0$ , осуществляется последовательным вычитанием из  $\alpha_0$  сумм  $R_m$  для  $m = 1, 2, \dots$  до тех пор, пока разность  $\alpha_0 - R_m$  не станет отрицательной. Описанную операцию можно осуществлять без непосредственного вычисления сумм  $R_m$ , используя операцию переприсваивания.

АЛГОРИТМ 11.1 (см., например, [1]). *Реализуем значение  $Q := \alpha_0$  (т. е.  $Q := \text{RANDOM}$ ) и полагаем  $t := 1$ . Производим переприсваивание*

$$Q := Q - p_m \quad (11.2)$$

*(т. е. заносим новое значение  $(\alpha_0 - p_1)$  в ячейку  $Q$ ). Если новое  $Q$  не положительно, то в качестве  $t$  выбираем текущее его значение и полагаем  $\xi_0 = x_m$ , в противном случае производим переприсваивание  $t := t + 1$  и (11.2) и вновь производим проверку  $Q$  на положительность и т. д.*

Важным примером дискретных случайных величин являются *целочисленные случайные величины  $\eta$* , для которых

$$x_i = i, \quad \mathbf{P}(\eta = i) = p_i; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11.3)$$

Алгоритм 11.1 в этом случае имеет следующий вид.

**АЛГОРИТМ 11.2.** *Реализуем значение  $Q := \alpha_0$  и полагаем  $t := 1$ . Производим переприсваивание (11.2). Если новое значение  $Q$  не положительно, то полагаем  $\eta_0 = t$ , в противном случае производим переприсваивания  $t := t + 1$  и (11.2) и вновь производим проверку  $Q$  на положительность и т. д.*

**11.3. Трудоемкость стандартного алгоритма.** В разд. 4 указано, что в формуле (4.1) для трудоемкости метода Монте-Карло (1.1) величина  $t$  является средним временем вычисления одного выборочного значения  $\zeta_j$ . Слово *среднее* здесь принципиально, так как затраты на моделирование конкретного выборочного значения  $\zeta_j$  являются, вообще говоря, случайными. Это проявляется уже на простейшем примере случайной величины  $\xi$  с дискретным распределением (если ставить задачу вычисления математического ожидания  $\mathbf{E}\xi = \sum_{i=1}^N x_i p_i$  методом Монте-Карло, например, с целью тестирования генераторов стандартных случайных чисел).

Легко видеть, что в случае, когда  $\xi_0 = x_m$ , приходится осуществлять  $t$  проверок  $Q$  на положительность. В общие затраты  $\delta$  алгоритма 11.1 входят затраты на моделирование одной стандартной случайной величины (их обозначим  $a$ ) и реализацию сравнений  $Q$  с нулем (затраты на каждое сравнение обозначим  $b$ ). Тогда средняя трудоемкость  $t$  алгоритма равна

$$t = \mathbf{E}\delta = a + \left( \sum_{i=1}^N ip_i \right) \times b. \quad (11.4)$$

Заметим, что для целочисленной случайной величины  $\eta$  с распределением (11.3) величина  $t$  из (11.4) представима в виде

$$t_1 = a + b \mathbf{E}\eta. \quad (11.5)$$

При реализации алгоритмов 11.1 и 11.2 целесообразно (если это возможно) располагать вероятности  $p_i$  в порядке их убывания.

**11.4. Случай малого числа значений случайной величины.** Отметим, что в алгоритме 11.1 возможна следующая модификация. Если  $\alpha_0 - R_{N-1} > 0$ , то последнее вычитание можно не производить, так как в этом случае  $\alpha_0 \in \Delta_N$ . Соответствующие аналоги формул (11.4) и (11.5) имеют вид

$$t = a + \left( \sum_{i=1}^{N-1} ip_i + (N-1)p_N \right) \times b; \quad t_1 = a - bp_N + b \mathbf{E}\eta.$$

Однако выигрыш от этой модификации сказывается только для малых  $N$ , так как при ее применении требуется проводить сравнение текущего  $m$  с  $(N - 1)$ .

Рассмотрим, в частности, случай  $N = 2$ . Здесь алгоритм 11.1 приобретает следующий простой вид.

**АЛГОРИТМ 11.3.** *Реализуем значение  $\alpha_0$ . Если  $\alpha_0 < p_1$ , то  $\xi_0 = x_1$ , иначе  $\xi_0 = x_2$ .*

Если  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 0$ , то  $\xi$  – бернуллиевская случайная величина с вероятностью успеха  $p_1$  (см., например, [2]). В свою очередь, можно вспомнить о том, что бернуллиевская случайная величина вводится для формализации изучения случайных событий. Если придать величинам  $x_1$  и  $x_2$  «словесные» значения  $x_1 = \{\text{событие } A \text{ произошло}\}$  и  $x_2 = \{\text{событие } A \text{ не произошло}\}$ , то алгоритм 11.3 описывает моделирование случайного события  $A$ .

**11.5. Случай счетного числа значений случайной величины.**

В случае  $N = \infty$  для задания распределения (11.1) вместо конкретных значений  $\{x_i\}$  и вероятностей  $\{p_i\}$  задаются формулы их вычисления

$$x_i = \varphi(i); \quad p_i = \psi(i). \quad (11.6)$$

Для вычисления вероятностей часто более удобными (экономичными) являются рекуррентные формулы вида

$$p_{i+1} = z(p_i), \quad \text{а конкретнее, } p_{i+1} = p_i r(i + 1). \quad (11.7)$$

При реализации алгоритма 11.1 в случае бесконечного числа значений перед вычитанием соответствующей вероятности требуется вычислить ее по одной из формул (11.6) или (11.7).

**АЛГОРИТМ 11.4.** *Реализуем значение стандартной случайной величины  $Q := \alpha_0$  и полагаем  $m := 1$  и  $P := p_1$  (или  $P := \psi(1)$ ). Производим переприсваивание*

$$Q := Q - P. \quad (11.8)$$

*Если новое  $Q$  не положительно, то в качестве выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  выбираем  $\xi_0 = \varphi(m)$  для текущего  $m$ ; в противном случае полагаем  $m := m + 1$ , производим пересчет вероятности  $P := \psi(m)$  (или  $P := z(P)$ , или  $P := Pr(m)$ ) и переприсваивание (11.8) и вновь производим проверку  $Q$  на положительность и т.д.*

Средние затраты алгоритма 11.4 равны

$$t = a + \left( \sum_{i=1}^{\infty} i p_i \right) \times (b + c), \quad (11.9)$$

где  $c$  – средние затраты на пересчет вероятности. В случае, когда пересчет вероятностей происходит по рекуррентным формулам (11.7) и вероятность  $p_1$  задана, число  $t$  из равенства (11.9) уменьшается на величину  $c$ . Для целочисленных случайных величин  $\eta$  с распределением (11.3) при  $i = 1, 2, \dots$  формула (11.9) имеет вид

$$t_1 = a + (b + c)\mathbf{E}\eta. \quad (11.10)$$

Существует ряд способов понизить трудоемкость (11.9), к числу которых относится, в частности, расположение (если это возможно) вероятностей  $p_i$  в порядке убывания. В случае, когда пересчет вероятностей по одной из формул (11.6) или (11.7) является трудоемким (т. е. величина  $c$  велика), можно выбрать число  $N_0$  так, чтобы сумма вероятностей  $R_{N_0} = p_1 + p_2 + \dots + p_{N_0}$  была близка к единице и имелась возможность сохранить в оперативной памяти ЭВМ массив значений  $p_0, p_1, \dots, p_{N_0}$ . Тогда при  $\alpha_0 < R_{N_0}$  реализуется алгоритм 11.1 (без пересчета вероятностей), а формулы (11.6) или (11.7) будут использоваться только при  $\alpha_0 \geq R_{N_0}$ , т. е. достаточно редко. Существенно снижает затраты (11.4), (11.9) алгоритмов 11.1 и 11.4 для  $N \gg 1$  или  $N = \infty$  рассмотренный в разд. 12 *квантильный метод* (алгоритм 12.2). В этом алгоритме существенно используется специальный алгоритм моделирования *равномерного дискретного распределения* (алгоритм 12.1).

## 12. Моделирование равномерного дискретного распределения. Квантильный метод

**12.1. Случай равных вероятностей.** Реализация выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  с конечным числом значений заметно упрощается, когда все значения  $x_1, \dots, x_N$  равновероятны, т. е. в соотношении (11.1) все  $p_i$  равны  $1/N$  (такое распределение вероятностей называется *дискретным равномерным*).

АЛГОРИТМ 12.1 (см., например, [1]). *Реализуем выборочное значение  $\alpha_0$  стандартного случайного числа  $\alpha$  и полагаем*

$$\mu_0 = [\alpha_0 N] + 1 = [\alpha_0 N + 1] \quad (12.1)$$

(здесь  $[A]$  обозначает целую часть числа  $A$ ) и  $\xi_0 = x_{\mu_0}$ .

Для обоснования правильности выбора номера  $\mu_0$  по формуле (12.1) нужно показать, что для любого  $k = 1, 2, \dots, N$  выполнено  $\mathbf{P}(\mu = k) = 1/N$ . Используя определение целой части числа и утверждение 10.2,

имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mu = k) &= \mathbf{P}([\alpha N + 1] = k) = \mathbf{P}(k - 1 \leq \alpha N < k) = \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{k-1}{N} \leq \alpha < \frac{k}{N}\right) = \frac{k}{N} - \frac{k-1}{N} = \frac{1}{N}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для достаточно больших  $N$  преимущество использования алгоритма 12.1 вместо алгоритма 11.1 очевидно. Однако неверно говорить, что алгоритм 12.1 *всегда* экономичнее алгоритма 11.1. Так, для  $N = 2$  и  $p_1 = p_2 = 1/2$  более экономичным (по сравнению с алгоритмом 12.1), как правило, является алгоритм 11.3 (частный случай алгоритма 11.1). Здесь все зависит от того, насколько быстро работают операции взятия целой части числа, вычитания, сравнения и т. п., а это, в свою очередь, определяется выбором компьютера и языка программирования. Поэтому в каждом конкретном случае может существовать свое число  $N_0$ , для которого при  $N \leq N_0$  более экономичным является алгоритм 11.1, а при  $N > N_0$  – алгоритм 12.1. Значение  $N_0$  определяется экспериментально с помощью реализации выборки  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и фиксации затрат  $s = nt$  для каждого из алгоритмов 11.1 и 12.1.

**12.2. Квантильный метод.** Алгоритм 12.1 позволяет построить следующую эффективную модификацию алгоритмов 11.1 и 11.4, которая носит название *квантильный метод* (см., например, [1]) и применяется, как правило, в случае  $N \gg 1$  (и даже для  $N = \infty$ ).

Зададим целое число  $K$  и разобьем интервал  $(0, 1)$  на  $K$  равных частей  $[(j-1)/K, j/K)$ ,  $j = 1, \dots, K$ . Далее построим массив целых чисел  $\{X_j\}_{j=1}^K$  такой, что

$$X_j = \min\{k : R_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k \geq (j-1)/K\},$$

который называется *массивом нижних квантилей*. Этот массив задает номер  $k$  элемента массива  $\{R_i ; i = 1, 2, \dots, N\}$ , с которого следует начинать поиск «вверх» (т. е. как и в алгоритме вида 11.1, вычитать величины  $R_q$ ,  $q = k, k+1, \dots$  из  $\alpha_0$  до получения первого отрицательного значения) при  $(j-1)/K \leq \alpha_0 < j/K$ . Окончательно моделирование дискретной случайной величины выглядит следующим образом.

**АЛГОРИТМ 12.2.** 1. Реализуем выборочное значение  $\alpha_0$  равномерно распределенной в интервале  $(0, 1)$  случайной величины  $\alpha$ .

2. Вычисляем номер  $j_0$  полуинтервала  $[(j_0-1)/K, j_0/K)$ , в который попадает  $\alpha_0$  по формуле типа (12.1):  $j_0 = [K\alpha_0 + 1]$ .

3. Реализуем последовательный поиск «снизу вверх», начиная с  $R_{X_{j_0}}$ .

Тестовые вычисления показали, что при  $N \leq 3M_0$  (здесь через  $M_0$  обозначен размер максимального массива для заданного компьютера и выбранного языка программирования) следует выбирать число  $K$  квантилей  $[(j-1)/K, j/K)$  так, чтобы выполнялось соотношение  $N/K \approx 3$  (при этом трудоемкость алгоритма 12.2 практически не меняется с ростом  $N$ ). Для случая  $N = \infty$  можно брать  $K \approx M_0$ .

**12.3. Случай малого числа вероятностей.** Эффективные версии квантильного метода можно строить и для относительно малого числа вероятностей. Пусть  $1/p_{min} < M_0$  (здесь  $p_{min} = \min(p_1, \dots, p_N)$ ). Тогда можно взять число квантилей, равное  $K = [1/p_{min}] + 1$ . При этом для реализации третьего пункта алгоритма 12.2 потребуется не более одного вычитания типа (11.2).

Заметим также, что в целом ряде ситуаций целесообразно использовать вместо квантильного метода алгоритм Уолкера или даже бинарный поиск (см., например, [1]), однако алгоритм 12.2 является более универсальным и простым для реализации на ЭВМ.

### 13. Метод обратной функции распределения. Конструирование моделируемых плотностей

**13.1. Особенности моделирования случайной величины с непрерывным распределением.** Рассмотрим теперь алгоритмы численной реализации выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$ , областью значений которой является интервал или объединение интервалов. В дальнейшем в подавляющем числе случаев предполагается, что  $\xi \in (a, b)$ , т.е. случайная величина  $\xi$  принимает значения в интервале  $(a, b)$ , где  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , и ее функция распределения  $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$  непрерывна и строго возрастает при  $x \in (a, b)$ , при этом

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a \text{ и } F(x) = 1 \text{ при } x \geq b; \quad (13.1)$$

для случаев  $a = -\infty$  и  $b = +\infty$  соотношения (13.1) приобретают вид

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Случаи, когда область значений представляет собой объединение непересекающихся интервалов или дискретных множеств с интервалами (при этом нарушаются условия строгой монотонности или непрерывности функции  $F(x)$ ), будут считаться «экзотическими».

В случае  $\xi \in (a, b)$ , в отличие от дискретного случая, отдельное значение  $x_0 \in (a, b)$  имеет нулевую вероятность. Здесь функция распределения позволяет вычислять вероятности того, что  $\xi$  принадлежит некоторому интервалу:

$$\mathbf{P}(\xi \in (c, d)) = F(d) - F(c). \quad (13.2)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать практически значимые случайные величины  $\xi \in (a, b)$ , распределения которых являются *абсолютно непрерывными* (см., например, [2]), что означает существование для каждой из них неотрицательной функции  $f(u)$  такой, что для любого интервала  $(c, d) \subseteq (a, b)$  выполнено

$$\mathbf{P}(\xi \in (c, d)) = \int_c^d f(u) du. \quad (13.3)$$

Функция  $f(u)$  называется *плотностью распределения*. Она определена с точностью до значений на множестве меры нуль. В дальнейшем рассматриваются непрерывные и кусочно-непрерывные «версии» плотности  $f(u)$ . Свойствами плотности являются

$$f(u) \geq 0 \quad \text{при } u \in (a, b); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = \int_a^b f(u) du = 1; \quad (13.4)$$

$$f(u) = 0 \quad \text{при } u \notin (a, b). \quad (13.5)$$

Будем также предполагать, что при  $u \in (a, b)$  множество точек, таких что  $f(u) = 0$ , имеет меру нуль. Из соотношений (13.2), (13.3) следует, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (13.6)$$

и почти всюду (по мере Лебега) имеет место равенство  $f(u) = dF(u)/du$ . Из соотношения (13.6) следует, что абсолютно непрерывное распределение можно задавать не функцией распределения  $F(x)$ , а плотностью  $f(u)$ . Еще раз отметим, что подавляющее большинство рассматриваемых далее распределений являются абсолютно непрерывными. Соответствующие случайные величины будем называть *непрерывными* (опуская дополнение *абсолютно*).

**13.2. Метод обратной функции распределения.** Сформулируем стандартный алгоритм (метод обратной функции распределения).

АЛГОРИТМ 13.1 (см., например, [1]). Для численной реализации (моделирования) выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi \in (a, b)$  используем формулу

$$\xi_0 = F^{-1}(\alpha_0); \quad (13.7)$$

здесь  $\alpha_0$  – реализация стандартного случайного числа  $\alpha$ .

Обоснование формулы (13.7) следует из того, что случайные величины  $\xi$  и  $\tilde{\xi} = F^{-1}(\alpha)$  одинаково распределены. Действительно, для  $x \leq a$  имеем  $F_{\tilde{\xi}}(x) = \mathbf{P}(\tilde{\xi} < x) = F(x) = 0$ , для  $x \geq b$  выполнено  $F_{\tilde{\xi}}(x) = F(x) = 1$ , а для  $a < x < b$  справедливо равенство

$$F_{\tilde{\xi}}(x) = \mathbf{P}(F^{-1}(\alpha) < x) = \mathbf{P}(\alpha < F(x)) = F(x).$$

В последней выкладке использовано утверждение 10.2.

**13.3. Элементарные плотности распределения.** Алгоритм 13.1 на первый взгляд закрывает вопрос о моделировании случайных величин  $\xi \in (a, b)$ . Однако остается одна важная «техническая» проблема, связанная с использованием формул вида (13.7) в реальных вычислительных программах.

**ЗАДАЧА 13.1.** Представить зависимость  $\psi(x) = F^{-1}(x)$  в виде простой композиции элементарных функций так, чтобы вычисление значения  $\psi(x)$  могло быть эффективно реализовано на ЭВМ.

В случае, когда задача 13.1 разрешима, будем называть плотность распределения случайной величины  $\xi$  и соответствующую формулу (13.7) *элементарными* (с точки зрения возможности численного моделирования). Сразу заметим, что практически для всех распределений, для которых задача 13.1 неразрешима, удастся построить альтернативные алгоритмы численной реализации (моделирования) выборочных значений (методы исключения, суперпозиции и т. п. – см. далее разд. 15–17). Однако для случайных величин, имеющих элементарные распределения, алгоритм 13.1 является, как правило, наиболее эффективным (экономичным).

**13.4. Примеры плотностей, не являющихся элементарными.**

Опишем трудности, возникающие при решении задачи 13.1. Пусть имеется непрерывная случайная величина  $\xi \in (a, b)$ , распределенная согласно плотности  $f(u)$ . С учетом того что величины  $\xi$  и  $F^{-1}(\alpha)$  принадлежат интервалу  $(a, b)$ , а функция  $F(x)$  является возрастающей на этом интервале, перепишем равенство (13.7) в эквивалентной форме  $F(\xi_0) = \alpha_0$ .



В свою очередь, в силу соотношений (13.5), (13.6), последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_a^{\xi_0} f(u) du = \alpha_0. \quad (13.8)$$

Распределение случайной величины  $\xi$  является элементарным, если решение уравнения (13.8) представимо в виде  $\xi_0 = \psi(\alpha_0)$ , где  $\psi(x)$  – простая композиция элементарных функций, и вычисление значения  $\psi(x)$  на ЭВМ реализуется достаточно эффективно.

Уравнение (13.8) может быть неразрешимым по двум причинам. Первая причина связана с тем, что интеграл в левой части равенства (13.8) не берется (т. е. соответствующая первообразная не выражается в элементарных функциях); примером может служить широко применяемое *стандартное нормальное распределение* (см., например, [2]) с плотностью

$$f(u) = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\infty < u < +\infty; \quad (13.9)$$

здесь и далее пределы, ограничивающие переменную  $u$ , обозначают интервал  $(a, b)$  (вне этого интервала выполнено соотношение (13.5)). Для распределения (13.9) имеется эффективный алгоритм моделирования, связанный со свойствами изотропного вектора случайной длины (см., например, [1] и разд. 17).

Вторая причина, по которой распределение случайной величины может не оказаться элементарным, связана с тем, что даже если интеграл из (13.8) берется, получаемое уравнение может быть неразрешимым (в элементарных функциях) относительно  $\xi_0$ . В качестве примера такой ситуации можно привести распределение с полиномиальной плотностью

$$f(u) = \sum_{i=0}^N c_i u^i, \quad 0 < u < 1. \quad (13.10)$$

Получаемое при решении уравнения (13.8) для плотности (13.10) соотношение

$$\sum_{i=0}^N c_i \xi_0^{i+1} / (i+1) = \alpha_0$$

в общем случае неразрешимо (в элементарных функциях) относительно  $\xi_0$  при  $N \geq 2$  и  $c_i \neq 0$ . Специальные алгоритмы моделирования распределения (13.10) (в частности, метод суперпозиции для случая  $c_i \geq 0$

и метод исключения для произвольных коэффициентов  $\{c_i\}$ , а также некоторые специальные методы) представлены далее в разд. 16 (см. пример 16.2).

**13.5. Примеры элементарных плотностей.** Несмотря на перечисленные в предыдущем подразделе трудности, можно построить неограниченное количество примеров элементарных распределений. Эту возможность дает, в частности, простая технология, основанная на теореме о замене случайных переменных (см. утверждение 13.1 и технологию 13.1). Поэтому имеет смысл представлять элементарные распределения, в той или иной степени «знаменитые» (важные) в приложениях метода Монте-Карло и теории вероятностей.

Особо отметим, что в заголовках приводимых здесь и далее в разд. 14–16 и в прил. 1 примеров и задач указан (в скобках) приблизительный балл (в пределах от нуля до трех) за соответствующий пример с точки зрения выполнения *семестрового домашнего задания* (см. прил. 3).

**ПРИМЕР 13.1** (0.5 балла). Рассмотрим *экспоненциальное распределение* (см., например, [2]) с плотностью

$$f(u) = \lambda e^{-\lambda u}, \quad u > 0; \quad \lambda > 0. \quad (13.11)$$

Сфера применения этого распределения весьма широка (см., например, [1]). На основе этого распределения формируются пуассоновские потоки, используемые в теории массового обслуживания, в простейших моделях теории переноса излучения, при моделировании случайных полей и т. д.

Решая уравнение вида (13.8), последовательно получаем

$$\int_0^{\xi_0} \lambda e^{-\lambda u} du = \alpha_0, \quad -e^{-\lambda u} \Big|_0^{\xi_0} = \alpha_0, \quad 1 - e^{-\lambda \xi_0} = \alpha_0$$

и, наконец,  $\xi_0 = -\ln(1 - \alpha_0)/\lambda$ . Заметим, что величина  $\alpha' = 1 - \alpha$  равномерно распределена в  $(0, 1)$ . Действительно, в силу того что  $\alpha \in (0, 1)$ , имеем  $F_{\alpha'}(x) = 0$  при  $x \in (-\infty, 0]$  и  $F_{\alpha'}(x) = 1$  при  $x \in [1, +\infty)$ . Наконец, для  $x \in (0, 1)$  выполнено

$$F_{\alpha'}(x) = \mathbf{P}(1 - \alpha < x) = \mathbf{P}(\alpha > 1 - x) = 1 - (1 - x) = x, \quad (13.12)$$

т. е. случайная величина  $\alpha'$  имеет функцию распределения (10.1). Обращаясь к датчику типа *RANDOM*, мы можем считать, что реализуется

выборочное значение  $\alpha'$ , и тогда моделирующая формула для экспоненциального распределения приобретает вид

$$\xi_0 = -\frac{\ln \alpha'_0}{\lambda}. \quad (13.13)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 13.1.** Последнее на первый взгляд несущественное соображение о замене  $(1-\alpha_0)$  на  $\alpha'_0$  является весьма важным с прикладной точки зрения, т. к. во многих практических расчетах количество обращений  $n$  к формуле (13.13) очень велико ( $n \gg 1$ ) и небольшая экономия  $\varepsilon$ , связанная с ликвидацией одного вычитания, может дать ощутимый выигрыш в эффективности на величину  $n\varepsilon$ . При практическом применении тех или иных моделирующих соотношений в трудоемких прецизионных расчетах следует весьма тщательно выверять эти формулы на предмет их эффективности. Например, соотношение (13.13) можно переписать в виде  $\xi_0 = (\ln(1/\alpha'_0))/\lambda$ , однако последняя формула хуже с точки зрения практического применения, чем соотношение (13.13), т. к. операция деления более трудоемка, чем взятие минуса.

**ЗАМЕЧАНИЕ 13.2.** Для относительно сложных элементарных плотностей  $f(u)$  при решении уравнения (13.8) и выводе соответствующей формулы  $\xi_0 = \psi_\xi(\alpha_0)$  могут случиться неточности (ошибки). В подавляющем числе случаев эти неточности можно обнаружить с помощью следующей простой процедуры, которую мы будем в дальнейшем называть **ПРОВЕРКОЙ 13.1**:

**В полученную при решении уравнения (13.8) формулу  $\xi_0 = \psi_\xi(\alpha_0)$  подставьте  $\alpha_0 = 0$ . При этом должно получиться  $\xi_0 = \psi_\xi(0) = a$ . Соответственно для  $\alpha_0 = 1$  должно получиться  $\xi = \psi_\xi(1) = b$ .**

В частности, для формулы (13.13) проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\alpha'_0 = 1$  и  $\xi_0 = (-\ln 1)/\lambda = 0$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\alpha'_0 = 0$  и  $\xi_0 = (-\ln 0)/\lambda = +\infty$ .

Для моделирования случайной величины  $\xi$  с полиномиальной плотностью (13.10) в разд. 16 представлены специальные методы суперпозиции и исключения. Построение этих методов основано на том, что при  $c_i > 0$  слагаемое  $c_i u^i$  суммы (13.10) пропорционально следующей плотности элементарного распределения.

**ПРИМЕР 13.2** (0.5 балла). Рассмотрим *степенное распределение* с плотностью

$$f(u) = (i+1)u^i, \quad 0 < u < 1. \quad (13.14)$$

Решая уравнение (13.8) для плотности (13.14), получаем

$$\xi_0^{i+1} = \alpha_0 \quad \text{или} \quad \xi_0 = \alpha_0^{1/(i+1)}. \quad (13.15)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\xi_0 = 0$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\xi_0 = 1$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 13.3.** В дальнейшем будем называть распределения (13.11), (13.14) и соответствующие моделирующие формулы (13.13), (13.15) *табличными* и не будем представлять для них результаты проверки 13.1. Табличным будем считать также равномерное распределение на конечном интервале  $(a, b)$  с соответствующими плотностью распределения и моделирующей формулой:

$$f(u) = 1/(b - a); \quad a < u < b; \quad \xi_0 = a + (b - a)\alpha_0. \quad (13.16)$$

**ПРИМЕР 13.3** (0.5 балла). Похожая на (13.15) формула получается при моделировании случайной величины  $\xi$  с *распределением Парето*  $f(u) = cu^{-c-1}$ ,  $u > 1$ ,  $c > 0$ . Это распределение встречается в задачах экономической статистики. Решением уравнения  $\int_1^{\xi_0} cu^{-c-1} du = \alpha_0$  является  $\xi_0 = (1 - \alpha_0)^{-1/c}$ . Учитывая, что случайная величина  $\alpha' = 1 - \alpha$  равномерно распределена (см. соотношение (13.12)), согласно замечанию 13.1, целесообразно использовать формулу  $\xi_0 = (\alpha'_0)^{-1/c}$ . Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\alpha'_0 = 1$  и  $\xi_0 = 1$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\alpha'_0 = 0$  и  $\xi_0 = +\infty$ .

**ПРИМЕР 13.4** (2 балла). При численном решении задач теории переноса излучения (см. разд. 6) широко используется *индикатриса Хенъи – Гринштейна* (см., например, [1]), представляющая собой плотность распределения косинуса угла рассеяния при столкновении «фотона» с частицей среды следующего вида:

$$f(u) = \frac{1 - \mu^2}{2(1 + \mu^2 - 2\mu u)^{3/2}} \quad \text{при} \quad u, \mu \in (-1, +1). \quad (13.17)$$

Несложно показать, что  $\mathbf{E}\xi = \int_{-1}^1 uf(u) du = \mu$ . Для моделирования «рассеяния вперед» принимают  $\mu \approx 1$ , а для «рассеяния назад» берут  $\mu \approx -1$ . Решая уравнение (13.8) для плотности (13.17), последовательно получаем

$$\int_{-1}^{\xi_0} \frac{(1 - \mu^2) du}{2(1 + \mu^2 - 2\mu u)^{3/2}} = \alpha_0, \quad \int_{-1}^{\xi_0} \frac{(1 - \mu^2) d(1 + \mu^2 - 2\mu u)}{-4\mu(1 + \mu^2 - 2\mu u)^{3/2}} = \alpha_0,$$

$$-\frac{1-\mu^2}{4\mu} \int_{(1+\mu)^2}^{1+\mu^2-2\mu\xi_0} v^{-3/2} dv = \alpha_0, \quad \frac{1-\mu^2}{2\mu} \int_{(1+\mu)^2}^{1+\mu^2-2\mu\xi_0} dv^{-1/2} = \alpha_0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2-2\mu\xi_0}} - \frac{1}{1+\mu} = \frac{2\mu\alpha_0}{1-\mu^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2-2\mu\xi_0}} = \frac{2\mu\alpha_0+1-\mu}{1-\mu^2}$$

и, наконец,

$$\xi_0 = \frac{1}{2\mu} \left( 1 + \mu^2 - \left( \frac{1-\mu^2}{2\mu\alpha_0+1-\mu} \right)^2 \right). \quad (13.18)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\xi_0 = (1 + \mu^2 - (1 + \mu)^2)/(2\mu) = -1$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\xi_0 = (1 + \mu^2 - (1 - \mu)^2)/(2\mu) = 1$ .

**13.6. О связи стандартных алгоритмов моделирования дискретных и непрерывных распределений.** Как было указано в подразд. 4.4, в целом ряде приложений целесообразным является введение дельта-плотности

$$f(u) = \delta(u - x_0), \quad a < u < b, \quad (13.19)$$

где  $\delta(u - x_0)$  – дельта-функция Дирака, определяемая соотношением

$$\int_a^b \varphi(u) \delta(u - x_0) du = \begin{cases} \varphi(x_0) & \text{при } x_0 \in (a, b), \\ 0 & \text{при } x_0 \notin (a, b) \end{cases}$$

для произвольной функции  $\varphi(u)$ , непрерывной в точке  $u = x_0$  (см., например, [7]). Функция (13.19), очевидно, удовлетворяет соотношениям (13.4) при  $x_0 \in (a, b)$ .

Случайная величина  $\xi$ , имеющая плотность (13.19), принимает значение  $\xi = x_0$  с вероятностью единица. Наоборот, любое число  $x_0$  можно трактовать как случайную величину  $\xi$  с плотностью (13.19).

В свою очередь, можно ввести обобщенную плотность для дискретной случайной величины с распределением (11.1):

$$f(u) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(u - x_i), \quad -\infty < u < +\infty; \quad p_i \geq 0, \quad p_1 + \dots + p_N = 1. \quad (13.20)$$

Для простоты полагаем  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . Соответствующая плотности (13.20) функция распределения имеет ступенчатый вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ R_i = p_1 + \dots + p_i & \text{при } x \in [x_i, x_{i+1}); \quad i = 1, \dots, N-1, \\ 1 & \text{при } x \geq x_N. \end{cases} \quad (13.21)$$

Такой вид функции распределения позволяет отнести дискретные случайные величины к «экзотическим». Определение функции, обратной к (13.21), неоднозначно. Однако можно ввести аналог функции  $F^{-1}(z)$  для распределения (13.21) с помощью соотношения

$$G(z) = \inf_{x: z < F(x)} x$$

и соответствующий аналог метода обратной функции распределения  $\xi_0 = G(\alpha_0)$ . Несложно убедиться, что последняя формула дает стандартный алгоритм моделирования дискретной случайной величины (алгоритм 11.1). В связи с этим алгоритм 11.1 иногда называют *методом обратной функции распределения для дискретной случайной величины* с распределением (11.1). Мы, однако, в дальнейшем будем различать стандартные алгоритмы 11.1 и 13.1 моделирования дискретных и непрерывных случайных величин соответственно.

**13.6. Теорема о замене случайных переменных.** В ряде рассуждений, связанных с обоснованием алгоритмов численного моделирования случайных величин и случайных векторов, нам потребуется следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 13.1 (см., например, [1]). Пусть

$$u^{(i)} = \Phi^{(i)}(v^{(1)}, \dots, v^{(d)}), \quad i = 1, 2, \dots, d -$$

взаимно однозначное дифференцируемое отображение области  $A$  в пространстве с координатами  $v^{(1)}, \dots, v^{(d)}$  на область  $B$  в пространстве с координатами  $u^{(1)}, \dots, u^{(d)}$ . Если плотность случайного вектора  $\eta = (\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(d)})$  в  $A$  равна  $f_\eta(v^{(1)}, \dots, v^{(d)})$ , то плотность распределения случайного вектора  $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(d)})$  в  $B$ , где  $\xi^{(i)} = \Phi^{(i)}(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(d)})$ , имеет вид

$$f_\xi(u^{(1)}, \dots, u^{(d)}) = f_\eta(v^{(1)}, \dots, v^{(d)}) \left| \frac{\partial(v^{(1)}, \dots, v^{(d)})}{\partial(u^{(1)}, \dots, u^{(d)})} \right|. \quad (13.22)$$

В правой части последнего соотношения  $v^{(i)}$  должны быть выражены через  $u^{(j)}$ , а  $\left| \frac{\partial(v^{(1)}, \dots, v^{(d)})}{\partial(u^{(1)}, \dots, u^{(d)})} \right|$  есть якобиан перехода от координат  $\{v^{(i)}\}$  к координатам  $\{u^{(j)}\}$ .

**13.7. Технология «вложенных замен».** При рассмотрении численных моделей со случайными параметрами возникает необходимость, с одной стороны, на основании экспериментальных статистических данных выбрать законы распределения параметров, а с другой – иметь

алгоритмы реализации выборочных значений параметров по выбранным вероятностным законам. В связи с этим можно заняться созданием «банка» распределений, допускающих построение эффективных алгоритмов численного моделирования. В частности, для построения плотностей элементарных распределений можно использовать следующую технологию, основанную на одномерном варианте утверждения 13.1.

**ТЕХНОЛОГИЯ 13.1.** Пусть  $f_\eta(v)$  – плотность случайной величины  $\eta$ , имеющей элементарное распределение в интервале  $(c, d)$ , т. е. из соотношения типа (13.8)  $\int_c^{\eta_0} f_\eta(v) dv = \alpha_0$  для соответствующего выборочного значения  $\eta_0$  случайной величины  $\eta$  можно получить формулу типа (13.3):  $\eta_0 = \psi_\eta(\alpha_0)$ , где  $\psi_\eta(w)$  – простая композиция элементарных функций. Рассмотрим взаимно-однозначное преобразование, задаваемое монотонно возрастающей дифференцируемой функцией  $\varphi(x)$ , переводящей интервал  $(a, b)$  в интервал  $(c, d)$ ; в частности  $\varphi(a) = c$ ,  $\varphi(b) = d$ . Полагаем также, что функцию  $\varphi(x)$  и обратную к ней функцию  $\varphi^{-1}(y)$  можно представить в виде простой композиции элементарных функций. Пусть случайная величина  $\xi$  имеет плотность распределения

$$f(u) = f_\eta(\varphi(u)) \varphi'(u), \quad u \in (a, b); \quad (13.23)$$

это частный случай формулы (13.22). При сделанных выше предположениях можно утверждать, что  $f(u)$  является плотностью элементарного распределения, т. е. уравнение (13.8) разрешимо относительно  $\xi_0$  в элементарных функциях и справедлива формула  $\xi_0 = \varphi^{-1}(\psi_\eta(\alpha_0))$ .

Действительно, записывая уравнение (13.8) для плотности (13.23), имеем

$$\int_a^{\xi_0} f_\eta(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \alpha_0, \quad \text{или} \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\xi_0)} f_\eta(v) dv = \alpha_0,$$

$$\text{или} \quad \varphi(\xi_0) = \psi_\eta(\alpha_0), \quad \text{или} \quad \xi_0 = \varphi^{-1}(\psi_\eta(\alpha_0)). \quad (13.24)$$

Полученную плотность (13.23) можно взять в качестве исходной плотности  $f_\eta(v)$  и осуществить еще одно взаимно-однозначное преобразование типа  $\varphi(u)$ . С помощью таких вложенных замен можно получать неограниченное количество новых плотностей элементарных распределений. Графики этих плотностей можно сравнивать с полученными из эксперимента распределениями и выбирать подходящий для данной численной модели случайный элемент.

**13.8. Примеры.** Иллюстрацией применения технологии 13.1 является, в частности, пример 13.4. В нем исходным является аналог усеченного распределения Парето с плотностью

$$f_{\eta}(v) = (a^c b^c / (b^c - a^c)) c v^{-c-1}, \quad 0 < a < v < b, \quad c > 0$$

при  $a = (1 - |\mu|)^2$ ,  $b = (1 + |\mu|)^2$ ,  $c = 1/2$  (для классического распределения Парето  $a = 1, b = +\infty$  – см. пример 13.3) с моделирующей формулой  $\eta_0 = ab / \sqrt{b^c - (b^c - a^c)\alpha_0}$ . Использована замена  $v = \varphi(u) = 1 + \mu^2 - 2\mu u$ , приводящая к плотности (13.17) и моделирующей формуле (13.18).

Продемонстрируем еще несколько примеров применения технологии 13.1.

**ПРИМЕР 13.5** (1.5 балла). Рассмотрим случайную величину  $\xi$ , имеющую плотность распределения

$$f(u) = \exp u \times \exp(-\exp u), \quad -\infty < u < +\infty. \quad (13.25)$$

Это плотность *экстремального (точнее, минимального) распределения* (см., например, [10]), описывающая одно из трех возможных асимптотических распределений линейных комбинаций вида

$$a_n \min(\eta_1, \dots, \eta_n) + b_n \quad (13.26)$$

при  $a_n \neq 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ; здесь  $a_n, b_n$  – числовые последовательности, а  $\{\eta_i\}$  – независимые одинаково распределенные случайные величины.

Выведем моделирующую формулу для выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$ . Решая уравнение (13.8) для плотности (13.25), последовательно получаем:

$$\int_{-\infty}^{\xi_0} \exp u \exp(-\exp u) du = \alpha_0, \quad \int_0^{\exp \xi_0} \exp(-v) dv = \alpha_0,$$

$-\exp(-\exp \xi_0) + 1 = \alpha_0$  и, наконец,  $\xi_0 = \ln(-\ln \alpha'_0)$ , где  $\alpha'_0 = 1 - \alpha_0$ .

Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\alpha'_0 = 1$  и  $\xi_0 = \ln(-\ln 1) = -\infty$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\alpha'_0 = 0$  и  $\xi_0 = \ln(-\ln 0) = +\infty$ . Описание примера 13.5 закончено.

Применение технологии 13.1 для рассмотренного примера можно описать следующим образом. Исходным являлось экспоненциальное распределение (13.11) для случая  $\lambda = 1$ , т.е.  $f_{\eta}(v) = e^{-v}$ ,  $v > 0$ ; соответствующая моделирующая формула:  $\eta_0 = -\ln \alpha'_0$ . Затем использована замена  $v = \varphi(u) = e^u$ ,  $-\infty < u < +\infty$ .



Заметим также, что два других (отличных от (13.25)) возможных асимптотических распределения линейных комбинаций вида (13.26) (см., например, [10]) также являются элементарными. Это *распределение Вейбулла* с плотностью

$$f^{(1)}(u) = u^{c-1} \exp(-u^c), \quad u > 0, \quad c > 0 \quad (13.27)$$

и моделирующей формулой  $\xi_0^{(1)} = (-\ln \alpha_0)^{1/c}$ , а также распределение с плотностью

$$f^{(2)}(u) = c(-u)^{c-1} \exp(-(-u)^c), \quad u < 0, \quad c > 0 \quad (13.28)$$

и моделирующей формулой  $\xi_0^{(2)} = -(-\ln \alpha_0)^{1/c}$ .

Применение технологии 13.1 для плотностей (13.27) и (13.28) можно описать следующим образом. Исходным, как и для распределения (13.25), являлось экспоненциальное распределение  $f_\eta(v) = e^{-v}$ ,  $v > 0$  с моделирующей формулой  $\eta_0 = -\ln \alpha_0$ . Затем использованы замены: для плотности (13.27)  $v = \varphi(u) = u^c$ ,  $u > 0$ , а для плотности (13.28)  $v = \varphi(u) = (-u)^c$ ,  $u < 0$ .

**ПРИМЕР 13.6** (2.5 балла). Рассмотрим случайную величину  $\xi$ , имеющую плотность распределения

$$f(u) = \frac{3\sqrt{3} \cos u}{\pi(\sin^2 u + \sin u + 1)}, \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}. \quad (13.29)$$

Выведем моделирующую формулу для  $\xi$ . Решая уравнение (13.8) для плотности (13.29), последовательно получаем:

$$\int_0^{\xi_0} \frac{3\sqrt{3} \cos u \, du}{\pi(\sin^2 u + \sin u + 1)} = \alpha_0, \quad \int_0^{\xi_0} \frac{3\sqrt{3} d(\sin u + 1/2)}{\pi((\sin u + 1/2)^2 + 3/4)} = \alpha_0,$$

$$\frac{6}{\pi} \int_{1/2}^{\sin \xi_0 + 1/2} \frac{d(2v/\sqrt{3})}{(2v/\sqrt{3})^2 + 1} = \alpha_0, \quad \frac{6}{\pi} \int_{1/\sqrt{3}}^{2(\sin \xi_0 + 1/2)/\sqrt{3}} \frac{dw}{w^2 + 1} = \alpha_0,$$

$$\frac{6}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \xi_0 + \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \alpha_0,$$

$$\operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \xi_0 + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{6} (\alpha_0 + 1)$$

и, наконец,

$$\xi_0 = \arcsin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} (\alpha_0 + 1) \right) - \frac{1}{2} \right). \quad (13.30)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\xi_0 = \arcsin((\sqrt{3}/2) \operatorname{tg}(\pi/6) - 1/2) = \arcsin 0 = 0$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\xi_0 = \arcsin((\sqrt{3}/2) \operatorname{tg}(\pi/3) - 1/2) = \arcsin 1 = \pi/2$ . Описание примера 13.6 закончено.

Схема «сочинения» плотности (13.29) такова. Берем исходную плотность

$$f_\theta(w) = \frac{6}{\pi(w^2 + 1)}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < w < \sqrt{3}$$

с моделирующей формулой  $\theta_0 = \operatorname{tg}(\pi(\alpha_0 + 1)/6)$ . Используя линейное преобразование  $\varphi_1(v) = (2/\sqrt{3})(v + 1/2)$ , получаем плотность

$$f_\eta(v) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi((2(v + 1/2)/\sqrt{3})^2 + 1)}, \quad 0 < v < 1$$

и моделирующую формулу  $\eta_0 = (\sqrt{3} \operatorname{tg}(\pi(\alpha_0 + 1)/6) - 1)/2$ . Наконец, преобразование  $\varphi_2(u) = \sin u$  дает плотность (13.29) и моделирующую формулу (13.30).

Отметим, что порядок преобразований при «сочинении» плотности является обратным к порядку замен при выводе элементарной моделирующей формулы. В дальнейшем, если плотность конструируется по технологии 13.1, мы будем приводить только вывод моделирующих формул, не формулируя достаточно очевидных соображений о «сочинении» плотности.

**ПРИМЕР 13.7** (3 балла). Рассмотрим случайную величину  $\xi$ , имеющую плотность распределения

$$f(u) = \frac{3}{(u + 3)\sqrt{9 - u^2}}, \quad 0 < u < 3.$$

Выведем моделирующую формулу для  $\xi$ . Решая уравнение (13.8) для заданной плотности, последовательно получаем:

$$\int_0^{\xi_0} \frac{3 du}{(u + 3)\sqrt{9 - u^2}} = \alpha_0, \quad \int_0^{\xi_0} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 + u}{3 - u}} \times \frac{6}{(u + 3)^2} du = \alpha_0,$$

$$\int_0^{\xi_0} \frac{1}{2\sqrt{\frac{3-u}{3+u}}} d\left(-\frac{3-u}{3+u}\right) = \alpha_0, \quad -\int_1^{(3-\xi_0)/(3+\xi_0)} \frac{dv}{2\sqrt{v}} = \alpha_0,$$

$$-\sqrt{\frac{3 - \xi_0}{3 + \xi_0}} + 1 = \alpha_0, \quad \frac{3 - \xi_0}{3 + \xi_0} = (\alpha'_0)^2, \quad \text{где } \alpha'_0 = 1 - \alpha_0,$$

и, наконец,

$$\xi_0 = \frac{3(1 - (\alpha'_0)^2)}{1 + (\alpha'_0)^2}.$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\alpha'_0 = 1$  и  $\xi_0 = 3(1 - 1^2)/(1 + 1^2) = 0$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\alpha'_0 = 0$  и  $\xi_0 = 3(1 - 0^2)/(1 + 0^2) = 3$ .

**ПРИМЕР 13.8 (3 балла).** Рассмотрим случайную величину  $\xi$ , имеющую плотность распределения

$$f(u) = \frac{8 \sin u \cos u}{(\sin u + 1)^3}, \quad 0 < u < \pi/2.$$

Выведем моделирующую формулу для  $\xi$ . Решая уравнение (13.8) для заданной плотности, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_0} \frac{8 \sin u \cos u \, du}{(\sin u + 1)^3} &= \alpha_0, & \int_0^{\xi_0} \frac{8 \sin u \, d \sin u}{(\sin u + 1)^3} &= \alpha_0, \\ \int_0^{\sin \xi_0} \frac{((8v + 8) - 8) \, dv}{(v + 1)^3} &= \alpha_0, & \int_0^{\sin \xi_0} \frac{8 \, d(v + 1)}{(v + 1)^2} - \int_0^{\sin \xi_0} \frac{8 \, d(v + 1)}{(v + 1)^3} &= \alpha_0, \\ \left( \frac{4}{(\sin \xi_0 + 1)^2} - 4 \right) + \left( -\frac{8}{\sin \xi_0 + 1} + 8 \right) &= \alpha_0, & t^2 - 2t - C &= 0, \end{aligned}$$

где  $t = 1/(\sin \xi_0 + 1)$  и  $C = (\alpha_0 - 4)/4$ . Дискриминант последнего квадратного уравнения равен  $D = 4 + \alpha_0 - 4 = \alpha_0$ . Тогда получаем

$$\frac{1}{\sin \xi_0 + 1} = \frac{2 \pm \sqrt{\alpha_0}}{2} \quad \text{или} \quad \sin \xi_0 = \frac{2}{2 \pm \sqrt{\alpha_0}} - 1 = \frac{\mp \sqrt{\alpha_0}}{2 \pm \sqrt{\alpha_0}}.$$

Знак «минус» в последнем выражении не годится, так как из условий задачи следует, что  $\sin \xi_0$  неотрицателен. Поэтому

$$\xi_0 = \arcsin \left( \frac{\sqrt{\alpha_0}}{2 - \sqrt{\alpha_0}} \right).$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\xi_0 = \arcsin(\sqrt{0}/(2 - \sqrt{0})) = \arcsin 0 = 0$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\xi_0 = \arcsin(\sqrt{1}/(2 - \sqrt{1})) = \arcsin 1 = \pi/2$ .

*РЕШЕНИЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ  
«МЕТОД ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ»*

Экзаменационные задачи по теме «Метод обратной функции распределения» сконструированы согласно технологии 13.1. При решении этих задач нужно найти функцию  $\varphi(u)$ , определяющую соответствующую замену переменных, и проделать выкладки вида (13.24).

**ЗАДАЧА А1** (1.5 балла). *Сформулируйте метод обратной функции распределения и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения*

$$f(u) = 3 \sin 2u \cos^4 u, \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Преобразуя соответствующее уравнение (13.8), последовательно получаем

$$\int_0^{\xi_0} 3 \sin 2u \cos^4 u \, du = \alpha_0, \quad \int_0^{\xi_0} 6 \cos^5 u \sin u \, du = \alpha_0, \quad -\cos^6 u \Big|_0^{\xi_0} = \alpha_0,$$

$$\cos^6 \xi_0 = 1 - \alpha_0 \quad \text{и, наконец,} \quad \xi_0 = \arccos \sqrt[6]{\alpha'_0}, \quad \text{где} \quad \alpha'_0 = 1 - \alpha_0.$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\alpha'_0 = 1$  и  $\xi_0 = \arccos \sqrt[6]{1} = \pi/2$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\alpha'_0 = 0$  и  $\xi_0 = \arccos \sqrt[6]{0} = 0$ .

**ЗАДАЧА А2** (1.5 балла). *Сформулируйте метод обратной функции распределения и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения*

$$f(u) = \frac{5 \ln^4 5u}{u}, \quad \frac{1}{5} < u < \frac{e}{5}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Преобразуя соответствующее уравнение (13.8), последовательно получаем

$$\int_{1/5}^{\xi_0} \frac{5 \ln^4 5u}{u} \, du = \alpha_0, \quad \int_1^{5\xi_0} 5 \ln^4 w \, d(\ln w) = \alpha_0, \quad \ln^5 5u \Big|_{1/5}^{\xi_0} = \alpha_0,$$

$$\ln^5 5\xi_0 = \alpha_0, \quad \text{и, наконец,} \quad \xi_0 = \frac{e^{\sqrt[5]{\alpha_0}}}{5}.$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\xi_0 = e^{\sqrt[5]{0}}/5 = 1/5$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\xi_0 = e^{\sqrt[5]{1}}/5 = e/5$ .

ЗАДАЧА А3 (1.5 балла). Сформулируйте метод обратной функции распределения и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = \frac{4u^3}{\sqrt{4u^4 + 9}}, \quad 0 < u < \sqrt{2}.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуя соответствующее уравнение (13.8), последовательно получаем

$$\int_0^{\xi_0} \frac{4u^3 du}{\sqrt{4u^4 + 9}} = \alpha_0, \quad \frac{1}{4} \int_9^{4\xi_0^4 + 9} \frac{dw}{\sqrt{w}} = \alpha_0, \quad \frac{\sqrt{4u^4 + 9}}{2} \Big|_0^{\xi_0} = \alpha_0,$$

$$\sqrt{4\xi_0^4 + 9} = 2\alpha_0 + 3, \quad \text{и, наконец,} \quad \xi_0 = \sqrt[4]{\frac{(2\alpha_0 + 3)^2 - 9}{4}} = \sqrt[4]{\alpha_0^2 + 3\alpha_0}.$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\xi_0 = \sqrt[4]{0^2 + 3 \times 0} = 0$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\xi_0 = \sqrt[4]{1^2 + 3 \times 1} = \sqrt{2}$ .

#### 14. Моделирование случайных векторов. Конструирование двумерного моделируемого вектора с зависимыми компонентами

**14.1. Стандартный алгоритм моделирования случайного вектора.** Известно (см., например, [1]), что плотность  $f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$  распределения  $d$ -мерного случайного вектора  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(d)})$  может быть  $d!$  способами разложена в произведение условных плотностей:

$$f(\mathbf{x}) = f_{i_1}(x^{(i_1)}) f_{i_2}(x^{(i_2)} | x^{(i_1)}) \times \dots \times f_{i_d}(x^{(i_d)} | x^{(i_1)}, x^{(i_2)}, \dots, x^{(i_{d-1})}), \quad (14.1)$$

где  $(i_1, \dots, i_d)$  – некоторая перестановка номеров  $(1, \dots, d)$  (таких перестановок как раз  $d!$  штук),

$$f_{i_1}(x^{(i_1)}) = \int \dots \int f(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) dx^{(i_2)} \dots dx^{(i_d)},$$

$$\begin{aligned} f_{i_2}(x^{(i_2)} | x^{(i_1)}) &= f_{i_2}(x^{(i_2)} | \xi^{(i_1)} = x^{(i_1)}) = \\ &= \frac{\int \dots \int f(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) dx^{(i_3)} \dots dx^{(i_d)}}{f_{i_1}(x^{(i_1)})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{i_3} \left( x^{(i_3)} | x^{(i_1)}, x^{(i_2)} \right) &= \frac{\int \dots \int f \left( x^{(1)}, \dots, x^{(d)} \right) dx^{(i_4)} \dots dx^{(i_d)}}{f_{i_1} \left( x^{(i_1)} \right) f_{i_2} \left( x^{(i_2)} | x^{(i_1)} \right)}, \\
&\dots \\
f_{i_{d-1}} \left( x^{(i_{d-1})} | x^{(i_1)}, \dots, x^{(i_{d-2})} \right) &= \frac{\int f \left( x^{(1)}, \dots, x^{(d)} \right) dx^{(i_d)}}{f_{i_1} \left( x^{(i_1)} \right) \dots f_{i_{d-2}} \left( x^{(i_{d-2})} | x^{(i_1)}, \dots, x^{(i_{d-3})} \right)}, \\
f_{i_d} \left( x^{(i_d)} | x^{(i_1)}, \dots, x^{(i_{d-1})} \right) &= \frac{f \left( x^{(1)}, \dots, x^{(d)} \right)}{f_{i_1} \left( x^{(i_1)} \right) \dots f_{i_{d-1}} \left( x^{(i_{d-1})} | x^{(i_1)}, \dots, x^{(i_{d-2})} \right)}.
\end{aligned}$$

Каждому разложению (14.1) соответствует алгоритм реализации выборочного значения  $\xi_0 = \left( \xi_0^{(1)}, \dots, \xi_0^{(d)} \right)$  случайного вектора  $\xi = \left( \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(d)} \right)$ .

**АЛГОРИТМ 14.1.** 1. Реализуем выборочное значение  $\xi_0^{(i_1)}$  случайной компоненты  $\xi^{(i_1)}$  вектора  $\xi$  согласно плотности  $f_{i_1}(x)$ .

2. Реализуем выборочное значение  $\xi_0^{(i_2)}$  случайной величины  $\xi^{(i_2)}$  согласно плотности  $f_{i_2} \left( x | \xi_0^{(i_1)} \right)$ .

3. Реализуем выборочное значение  $\xi_0^{(i_3)}$  случайной величины  $\xi^{(i_3)}$  согласно плотности  $f_{i_3} \left( x | \xi_0^{(i_1)}, \xi_0^{(i_2)} \right)$ .

...

d. Реализуем выборочное значение  $\xi_0^{(i_d)}$  случайной величины  $\xi^{(i_d)}$  согласно плотности  $f_{i_d} \left( x | \xi_0^{(i_1)}, \dots, \xi_0^{(i_{d-1})} \right)$ .

**14.2. Двумерный случай.** Обоснование формулы (14.1) и алгоритма 14.1 осуществляется индукцией по размерности  $d$ . При этом индуктивный переход основан на рассмотрении двумерного вектора  $(\xi, \eta)$  (случайные компоненты  $\xi$  и  $\eta$  могут быть как скалярными, так и векторными) с плотностью распределения  $f(u, v)$ , для которой справедливы два представления

$$f(u, v) = f_\xi(u) f_\eta(v|u); \quad f_\xi(u) = \int f(u, v) dv, \quad f_\eta(v|u) = \frac{f(u, v)}{f_\xi(u)}; \quad (14.2)$$

$$f(u, v) = f_\eta(v) f_\xi(u|v); \quad f_\eta(v) = \int f(u, v) du, \quad f_\xi(u|v) = \frac{f(u, v)}{f_\eta(v)}. \quad (14.3)$$

Для представления (14.2) алгоритм 14.1 выглядит следующим образом: сначала реализуется выборочное значение  $\xi_0$  согласно плотности

$f_\xi(u)$ , а затем моделируется выборочное значение  $\eta_0$  согласно плотности  $f(\xi_0, v)/f_\xi(\xi_0)$ . Аналогично для представления (14.3) сначала реализуется выборочное значение  $\eta_0$  согласно плотности  $f_\eta(v)$ , а затем моделируется выборочное значение  $\xi_0$  согласно плотности  $f(u, \eta_0)/f_\eta(\eta_0)$ .

**14.3. Технология «взвешенного параметра».** При моделировании случайного вектора  $\xi$  основной проблемой является выбор того из  $d!$  разложений (14.1), для которого возможно построение наиболее эффективных алгоритмов последовательной реализации выборочных значений  $\{\xi_{i_j}\}$ . Уже для двумерного случая часто можно наблюдать следующую ситуацию: одно из разложений (14.2) или (14.3) позволяет построить эффективные алгоритмы моделирования компонент  $\xi_0$  и  $\eta_0$ , а второе разложение не дает таких алгоритмов. Примеры таких ситуаций дает следующая

**ТЕХНОЛОГИЯ 14.1.** Рассмотрим плотность элементарного распределения  $f_\xi(u; \lambda)$ ,  $u \in (a, b)$ , зависящую от параметра  $\lambda$ , допустимые значения которого принадлежат интервалу  $(C, D)$ . Элементарность распределения означает существование простой (элементарной) формулы  $\xi_0 = \psi_\xi(\alpha_1; \lambda)$  для получения выборочного значения случайной величины  $\xi$ . Рассмотрим также еще одну элементарную плотность  $f_\eta(v)$  случайной величины  $\eta$ , принимающей значения в интервале  $v \in (c, d) \subseteq (C, D)$ ; при этом имеется соответствующая элементарная моделирующая формула  $\eta_0 = \psi_\eta(\alpha_2)$ . Теперь поставим задачу построения эффективного алгоритма реализации выборочных значений  $(\xi_0, \eta_0)$  двумерного случайного вектора  $(\xi, \eta)$ , принимающего значения в прямоугольнике  $G = \{(u, v) : a < u < b; c < v < d\}$  и имеющего плотность распределения

$$f(u, v) = f_\eta(v) \times f_\xi(u; v), \quad (u, v) \in G. \quad (14.4)$$

Это результат формального умножения плотностей  $f_\eta(v)$  и  $f_\xi(u; v)$  (здесь происходит подстановка переменной  $v$  вместо параметра  $\lambda$ ). В представлении (14.3) для плотности (14.4) имеем  $f_\xi(u|v) = f_\xi(u; v)$ . Для этого представления получаем эффективный алгоритм 14.1:

$$\eta_0 = \psi_\eta(\alpha_2), \quad \xi_0 = \psi_\xi(\alpha_1; \eta_0). \quad (14.5)$$

Для представления (14.2) плотности (14.4) эффективных формул типа (14.5) построить, как правило, не удастся.

**14.4. Примеры.** Приведем примеры применения технологии «взвешенного параметра».

**ПРИМЕР 14.1** (1 балл). Пусть требуется построить эффективный алгоритм моделирования двумерного случайного вектора  $(\xi, \eta)$  с плотностью распределения

$$f(u, v) = \frac{1}{2} v e^{-uv}, \quad u > 0, \quad 0 < v < 2.$$

Рассмотрим представление (14.3) для вектора  $(\xi, \eta)$ :  $f(u, v) = f_\eta(v) f_\xi(u|v)$ ;

$$f_\eta(v) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} v e^{-uv} du = \frac{1}{2}, \quad 0 < v < 2; \quad f_\xi(u|v) = \frac{f(u, v)}{f_\eta(v)} = v e^{-vu}, \quad u > 0.$$

Плотность  $f_\eta(v)$  является плотностью равномерного распределения на интервале  $(0, 2)$ . Учитывая замечание 13.3 и формулу (13.16), для реализации выборочного значения  $\eta_0$  случайной величины  $\eta$  можно использовать табличную формулу  $\eta_0 = 2\alpha_1$ . Функция  $f_\xi(u|\eta_0)$  является плотностью экспоненциального распределения с параметром  $\lambda = \eta_0$  (см. формулу (13.11)) и, следовательно,  $\xi = -(\ln \alpha_2)/\eta_0$  (см. табличную формулу (13.13)).

Теперь рассмотрим представление (14.2) для вектора  $(\xi, \eta)$ :  $f(u, v) = f_\xi(u) f_\eta(v|u)$ . Интегрируя по частям, имеем

$$f_\xi(u) = \int_0^2 \frac{1}{2} v e^{-uv} dv = \frac{1 - (2u + 1)e^{-2u}}{2u^2}, \quad u > 0.$$

Полученная функция, очевидно, не является элементарной плотностью распределения, и поэтому для этого примера представление (14.2) является заведомо худшим (с точки зрения реализации алгоритма 14.1) по сравнению с представлением (14.3).

**ПРИМЕР 14.2** (2 балла). Пусть требуется построить эффективный алгоритм моделирования двумерного случайного вектора  $(\xi, \eta)$  с плотностью распределения

$$f(u, v) = \frac{3 v \sin v e^{-3uv}}{1 - e^{-v}}, \quad 0 < u < \frac{1}{3}, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, что интеграл по  $v$  от этой функции аналитически не возьмется, поэтому представление (14.2) не дает простых алгоритмов моделирования случайного вектора  $(\xi, \eta)$ . Рассмотрим представление (14.3).



Имеем

$$f_{\eta}(v) = \int_0^{1/3} \frac{3v \sin v e^{-3uv} du}{1 - e^{-v}} = \sin v \times \left( \frac{-e^{-3vu}}{1 - e^{-v}} \right) \Big|_0^{1/3} = \sin v$$

для  $0 < v < \pi/2$  и

$$f_{\xi}(u|v) = \frac{f(u, v)}{f_{\eta}(v)} = \frac{3v e^{-3uv}}{1 - e^{-v}}, \quad 0 < u < \frac{1}{3}.$$

Выведем соответствующие формулы метода обратной функции распределения. Для выборочного значения  $\eta_0$  последовательно получаем:

$$\int_0^{\eta_0} \sin v dv = \alpha'_1, \quad -\cos v \Big|_0^{\eta_0} = \alpha'_1 \quad \text{и, наконец,} \quad \eta_0 = \arccos \alpha_1,$$

здесь  $\alpha_1 = 1 - \alpha'_1$ . Для выборочного значения  $\xi_0$  последовательно получаем:

$$\int_0^{\xi_0} \frac{3\eta_0 e^{-3\eta_0 u} du}{1 - e^{-\eta_0}} = \alpha_2, \quad 1 - e^{-3\eta_0 \xi_0} = \alpha_2(1 - e^{-\eta_0})$$

$$\text{и, наконец,} \quad \xi_0 = -\frac{\ln(1 - \alpha_2(1 - e^{-\eta_0}))}{3\eta_0}.$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_1 = 0$  дает  $\alpha'_1 = 1$  и  $\eta_0 = \arccos 1 = 0$ , а при  $\alpha_1 = 1$  имеем  $\alpha'_1 = 0$  и  $\eta_0 = \arccos 0 = \pi/2$ . При  $\alpha_2 = 0$  получаем  $\xi_0 = -(\ln(1 - 0 \times (1 - e^{-\eta_0}))) / (3\eta_0) = 0$ , а при  $\alpha_2 = 1$  имеем  $\xi_0 = -(\ln(1 - 1 \times (1 - e^{-\eta_0}))) / (3\eta_0) = \eta_0 / (3\eta_0) = 1/3$ .

**14.5. О выборе плотностей распределения в прикладных задачах.** С учетом указанных выше трудностей, связанных с выбором «моделируемого» разложения (14.1), во многих приложениях, связанных с конструированием вероятностных плотностей, компоненты вектора  $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(d)})$  берутся независимыми, при этом функция  $f(x^{(1)}, \dots, x^{(d)})$  имеет вид

$$f(x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) = f_1(x^{(1)}) \times f_2(x^{(2)}) \times \dots \times f_d(x^{(d)}), \quad (14.5)$$

т. е. условные плотности в (14.1) превращаются в «безусловные», и разница в представлениях вида (14.1) состоит лишь в порядке перемножения плотностей  $\{f_i(x^{(i)})\}$ . При этом каждая случайная компонента  $\xi^{(i)}$

моделируется согласно своей плотности  $f_i(x)$ , причем порядок моделирования, в отличие от алгоритма 14.1, произволен.

Здесь, однако, уместно напомнить, что «удобство» моделирования далеко не всегда определяет эффективность соответствующего алгоритма метода Монте-Карло (1.1) с оценкой  $\zeta = q(\xi)$ . При оптимизации алгоритма требуется минимизировать величину трудоемкости  $S = t \times \mathbf{D}\zeta$  (см. формулу (3.2)), и выбор плотности вида (14.5) влияет лишь на уменьшение времени  $t$ , в то время как дисперсия  $\mathbf{D}\zeta$  может оказаться весьма большой (и даже бесконечной).

**ПРИМЕР 14.3** (0.5 балла). Пусть требуется построить алгоритм моделирования трехмерного случайного вектора  $(\xi, \eta, \theta)$ , имеющего плотность распределения

$$f(u, v, w) = 10e^{-2u-5v-w}, \quad u > 0, \quad v > 0, \quad w > 0.$$

Найдем

$$\begin{aligned} f_\xi(u) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} 10e^{-2u-5v-w} dv dw = \\ &= (2e^{-2u}) \left( -e^{-5v} \Big|_0^{+\infty} \right) \left( -e^{-w} \Big|_0^{+\infty} \right) = 2e^{-2u}, \quad u > 0. \end{aligned}$$

Далее,

$$f_\eta(v|u) = \frac{\int_0^{+\infty} 10e^{-2u-5v-w} dw}{2e^{-2u}} = (5e^{-5v}) \left( -e^{-w} \Big|_0^{+\infty} \right) = 5e^{-5v},$$

здесь  $v > 0$ . Наконец,

$$f_\theta(w|u, v) = \frac{10e^{-2u-5v-w}}{(2e^{-2u})(5e^{-5v})} = e^{-w}, \quad w > 0.$$

Таким образом, исходная плотность представима в виде произведения «безусловных» плотностей

$$f(u, v, w) = (2e^{-2u}) \times (5e^{-5v}) \times (e^{-w}), \quad u > 0, \quad v > 0, \quad w > 0.$$

Каждая из плотностей является экспоненциальной (см. пример 13.1) и для получения выборочного значения  $(\xi_0, \eta_0, \theta_0)$  вектора  $(\xi, \eta, \theta)$  можно использовать вариации табличной формулы (13.13) (см. замечание 13.3):

$$\xi_0 = -\frac{\ln \alpha_1}{2}, \quad \eta_0 = -\frac{\ln \alpha_2}{5}, \quad \theta_0 = -\ln \alpha_3.$$

При численном решении задач приближения функционалов от решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода (см., например, [1], а также разд. 6–9) рассматриваются (конструируются)  $(m+1)$ -мерные случайные векторы  $\tilde{\xi}^{(m+1)} = (\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)})$  с плотностями распределения вида

$$\tilde{f}(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \pi(x^{(0)})p_1(x^{(1)}|x^{(0)})p_2(x^{(2)}|x^{(1)})\dots p_m(x^{(m)}|x^{(m-1)}) \quad (14.6)$$

(см. соотношение (8.1)). Представление (14.6) отражает то обстоятельство, что вектор  $\tilde{\xi}^{(m+1)}$  обладает *марковским свойством*: в одном из представлений вида (14.1) (конкретнее, для тождественной перестановки  $(i_0, i_1, \dots, i_m) = (0, 1, \dots, m)$ ) распределение случайной компоненты  $\xi^{(j)}$  полностью определяется значением  $x^{(j-1)}$  предыдущей компоненты  $\xi^{(j-1)}$ :

$$f_j(x|x^{(0)}, \dots, x^{(j-1)}) \equiv p_j(x|x^{(j-1)}) = p_{\xi^{(j)}}(x|\xi^{(j-1)} = x^{(j-1)}).$$

Таким образом, вектор  $(\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)})$  представляет начальный отрезок длины  $(m+1)$  цепи Маркова с начальной плотностью  $\pi(x)$  и переходной плотностью  $p_j(x', x) = p_j(x|\xi^{(j-1)} = x')$ . В случае, когда переходные плотности  $p_j(x', x)$  одинаковы для всех  $j = 1, 2, \dots$ , цепь Маркова  $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots$  является однородной. Численное моделирование начальных выборочных значений  $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)}$  траектории цепи Маркова происходит согласно следующему варианту алгоритма 14.1 (см. также подразд. 8.2).

**АЛГОРИТМ 14.2.** *Реализуем выборочное значение  $\xi_0^{(0)}$  случайной компоненты  $\xi^{(0)}$  согласно начальной плотности  $\pi(x)$ . Затем последовательно для  $j = 1, 2, \dots, m$  реализуем выборочные значения  $\xi_0^{(j)}$  случайных компонент  $\xi^{(j)}$  согласно переходным плотностям  $p_j(\xi_0^{(j-1)}, x)$ .*

Для однородной цепи Маркова розыгрыш компонент  $\xi_0^{(j)}$  в алгоритме 14.2 происходит согласно одинаковой для всех  $j = 1, \dots, m$  переходной плотности  $p(x', x)$ . Кроме того, в приложениях, связанных с решением интегральных уравнений, число  $m$  является случайным (цепь «обрывается»), и в алгоритмы типа 14.2 включаются специальные приемы для реализации выборочного значения  $m$  для данной траектории (см. подразд. 8.3).

**РЕШЕНИЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ  
«МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА»**

Экзаменационные задачи по теме «Моделирование двумерного случайного вектора» сконструированы согласно технологии 14.1. При решении этих задач нужно понять, по какой из переменных ( $u$  или  $v$ ) плотность  $f(u, v)$  допускает простое аналитическое интегрирование (и в зависимости от этого выбрать моделируемое представление (14.2) или (14.3)). Следует также учитывать, что в моделируемом представлении одна из плотностей является табличной (с точностью до обозначений параметров  $\lambda, i, a, b$ ) – см. замечание 13.3; здесь можно использовать формулы (13.3), (13.5), (13.6), не представляя преобразования соответствующего уравнения (13.8) и результаты проверки 13.1.

**ЗАДАЧА Б1 (1.5 балла).** *Сформулируйте стандартный метод моделирования случайного вектора и продемонстрируйте его на примере двумерного вектора  $(\xi, \eta)$ , имеющего плотность распределения*

$$f(u, v) = \frac{e^{-4uv}}{v^4}, \quad u > 0, \quad v > \frac{1}{2}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Очевидно, что интегрирование этой функции по переменной  $v$  затруднено, и представление (14.2) не дает простых алгоритмов моделирования случайного вектора  $(\xi, \eta)$ . Рассмотрим представление (14.3). Имеем

$$f_{\eta}(v) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-4uv}}{v^4} du = \frac{1}{4v^5} \times (-e^{-4vu}) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4v^5}, \quad v > \frac{1}{2},$$

$$f_{\xi}(u|v) = \frac{f(u, v)}{f_{\eta}(v)} = 4ve^{-4vu}, \quad u > 0.$$

Выведем формулу метода обратной функции распределения для компоненты  $\eta$ . Преобразуя соответствующее уравнение (13.8), последовательно получаем:

$$\int_{1/2}^{\eta_0} \frac{dv}{4v^5} = \alpha_1, \quad -\frac{1}{16v^4} \Big|_{1/2}^{\eta_0} = \alpha_1, \quad \frac{1}{16\eta_0^4} = 1 - \alpha_1 \text{ и, наконец, } \eta_0 = \frac{1}{2(\alpha_1')^{1/4}},$$

здесь  $\alpha_1' = 1 - \alpha_1$ . Проверка 13.1 при  $\alpha_1 = 0$  дает  $\alpha_1' = 1$  и  $\eta_0 = 1/2$ , а при  $\alpha_1 = 1$  имеем  $\alpha_1' = 0$  и  $\eta_0 = +\infty$ .

Для моделирования компоненты  $\xi$  используем табличную формулу типа (13.13) (см. пример 13.1 и замечание 13.3):  $\xi_0 = -(\ln \alpha_2)/(4\eta_0)$ .

ЗАДАЧА Б2 (1.5 балла). *Сформулируйте стандартный метод моделирования случайного вектора и продемонстрируйте его на примере двумерного вектора  $(\xi, \eta)$ , имеющего плотность распределения*

$$f(u, v) = 3u^2(u+1)v^u e^{-u^3}, \quad u > 0, \quad 0 < v < 1.$$

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что интеграл по  $u$  от этой функции аналитически не возьмется, поэтому представление (14.3) не дает простых алгоритмов моделирования случайного вектора  $(\xi, \eta)$ . Рассмотрим представление (14.2). Имеем

$$f_\xi(u) = \int_0^1 3u^2(u+1)v^u e^{-u^3} dv = 3u^2 e^{-u^3} \times (v^{u+1}) \Big|_0^1 = 3u^2 e^{-u^3}$$

при  $u > 0$  и

$$f_\eta(v|u) = \frac{f(u, v)}{f_\xi(u)} = (u+1)v^u, \quad 0 < v < 1.$$

Выведем формулу метода обратной функции распределения для компоненты  $\xi$ . Преобразуя соответствующее уравнение (13.8), последовательно получаем:

$$\int_0^{\xi_0} 3u^2 e^{-u^3} du = \alpha_1, \quad -e^{-u^3} \Big|_0^{\xi_0} = \alpha_1 \text{ и, наконец, } \xi_0 = \sqrt[3]{-\ln \alpha_1},$$

здесь  $\alpha_1' = 1 - \alpha_1$ . Проверка 13.1 при  $\alpha_1 = 0$  дает  $\alpha_1' = 1$  и  $\xi_0 = 0$ , а при  $\alpha_1 = 1$  имеем  $\alpha_1' = 0$  и  $\xi_0 = +\infty$ .

Для моделирования компоненты  $\eta$  используем табличную формулу типа (13.15) (см. пример 13.2 и замечание 13.3):  $\eta_0 = \alpha_2^{1/(\xi_0+1)}$ .

ЗАДАЧА Б3 (1.5 балла). *Сформулируйте стандартный метод моделирования случайного вектора и продемонстрируйте его на примере двумерного вектора  $(\xi, \eta)$ , имеющего плотность распределения*

$$f(u, v) = 4u^{v-1} \ln^3 v, \quad 0 < u < 1, \quad 1 < v < e.$$

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что интеграл по  $v$  от этой функции аналитически не возьмется, поэтому представление (14.2) не дает простых алгоритмов моделирования случайного вектора  $(\xi, \eta)$ . Рассмотрим представление (14.3). Имеем

$$f_\eta(v) = \int_0^1 4u^{v-1} \ln^3 v du = \frac{4 \ln^3 v}{v} \times (v u^{v-1}) \Big|_0^1 = \frac{4 \ln^3 v}{v}, \quad 1 < v < e,$$

$$f_{\xi}(u|v) = \frac{f(u, v)}{f_{\eta}(v)} = v u^{v-1}, \quad 0 < u < 1.$$

Выведем формулу метода обратной функции распределения для компоненты  $\eta$ . Преобразуя соответствующее уравнение (13.8), последовательно получаем:

$$\int_1^{\eta_0} \frac{4 \ln^3 v dv}{v} = \alpha_1, \quad \ln^4 v \Big|_1^{\eta_0} = \alpha_1, \quad \text{и, наконец, } \eta_0 = e^{\sqrt[4]{\alpha_1}}.$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_1 = 0$  дает  $\eta_0 = 1$ , а при  $\alpha_1 = 1$  имеем  $\eta_0 = e$ .

Для моделирования компоненты  $\xi$  используем табличную формулу типа (13.15) (см. пример 13.2 и замечание 13.3):  $\xi_0 = \alpha_2^{1/\eta_0}$ .

## 15. Методы интегральной и дискретной суперпозиции Конструирование моделируемых плотностей

**15.1. Метод суперпозиции как частный случай моделирования случайного вектора.** В этом и следующем разделах изучаются два метода реализации выборочных значений  $\xi_0$  одномерных и многомерных случайных величин  $\xi$ , для которых не удается построить эффективные стандартные алгоритмы 13.1 и 14.1. Это *методы суперпозиции и исключения* (см., например, [1]), в которых предусматривается моделирование дополнительных вероятностных распределений.

Опишем сначала общую ситуацию, в которой применяется метод суперпозиции. Пусть требуется построить алгоритм численной реализации выборочных значений  $k_1$ -мерного случайного вектора  $\xi$ , плотность которого может быть представлена в виде интеграла, зависящего от многомерного параметра  $\mathbf{u} \in R^{k_1}$ :

$$f(\mathbf{u}) = \int_{R^{k_2}} p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (15.1)$$

при этом:

- 1) функция  $p(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  является плотностью  $(k_1 + k_2)$ -мерного вектора  $(\xi, \eta)$ ;
- 2) в соответствующей формуле полной плотности вероятностей

$$f(\mathbf{u}) = \int_{R^{k_2}} f_{\eta}(\mathbf{v}) f_{\xi}(\mathbf{u}|\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (15.2)$$

(см. соотношения (14.2), (14.3)) для выборочных значений  $\xi_0$  и  $\eta_0$  случайных векторов  $\xi$  и  $\eta$  с плотностями  $f_\eta(\mathbf{v})$  и  $f_\xi(\mathbf{u}|\mathbf{v})$  имеются эффективные алгоритмы (формулы) численного моделирования вида  $\eta_0 = \psi_\eta(\bar{\alpha}_1)$ ,  $\xi_0 = \psi_\xi(\bar{\alpha}_2; \mathbf{v})$ , где  $\bar{\alpha}_i$  – соответствующие наборы стандартных случайных чисел.

При сделанных предположениях можно использовать алгоритм метода суперпозиции.

**АЛГОРИТМ 15.1.** Реализуем выборочное значение случайного вектора  $\xi_0$ , имеющего плотность распределения вида (15.2), согласно алгоритму (формуле)  $\xi_0 = \psi_\xi(\bar{\alpha}_2; \eta_0)$ , где выборочное значение  $\eta_0$  случайного вектора  $\eta$  моделируется согласно алгоритму (формуле)  $\eta_0 = \psi_\eta(\bar{\alpha}_1)$ .

Учитывая интегральное представление (15.1), в котором вспомогательный вектор  $\eta$  имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью  $f_\eta(\mathbf{v})$ , назовем алгоритм 15.1 *методом интегральной суперпозиции* (в отличие от *метода дискретной суперпозиции*, рассмотренного далее в подразд. 15.3).

**ЗАМЕЧАНИЕ 15.1.** Ситуацию, в которой применяется метод интегральной суперпозиции, можно трактовать следующим образом. Нам требуется получить выборочное значение  $k_1$ -мерной компоненты  $\xi$  для  $(k_1 + k_2)$ -мерного вектора  $(\xi, \eta)$ , причем «моделируемым» является разложение вида (14.3), а для разложения (14.2) не удастся даже представить в явном виде плотность  $f_\xi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$ , т. к. интеграл (15.1) не берется аналитически.

**15.2. Применение технологии «взвешенного параметра» для построения примеров эффективной реализации метода интегральной суперпозиции.** Из замечания 15.1 следует, что во всяком случае для размерностей  $k_1$  и  $k_2$ , равных единице, для построения примеров эффективного применения метода интегральной суперпозиции можно использовать технологию 14.1.

**ПРИМЕР 15.1** (2 балла). Пусть требуется построить алгоритм моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = 2 \int_0^{\pi/2} v \cos v \cos uv \, dv, \quad 0 < u < 1.$$

Рассмотрим двумерный случайный вектор  $(\xi, \eta)$  с плотностью распределения  $p(u, v) = 2v \cos v \cos uv$ ,  $0 < u < 1$ ,  $0 < v < \pi/2$  и представление

(14.3) для этой плотности:

$$f_{\eta}(v) = \int_0^1 2v \cos v \cos uv \, du = \sin 2v, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2};$$

$$f_{\xi}(u|v) = \frac{2v \cos v \cos uv}{2 \cos v \sin v} = \frac{v \cos uv}{\sin v}, \quad 0 < u < 1.$$

Полученные функции являются плотностями элементарных распределений. Выведем формулу метода обратной функции распределения для компоненты  $\eta$ . Преобразуя соответствующее уравнение (13.8), последовательно получаем:

$$\int_0^{\eta_0} \sin 2v \, dv = \alpha_1, \quad \left. \frac{-\cos 2v}{2} \right|_0^{\eta_0} = \alpha_1 \quad \text{и, наконец} \quad \eta_0 = \frac{\arccos(1 - 2\alpha_1)}{2}.$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_1 = 0$  дает  $\eta_0 = (\arccos(1 - 2 \times 0))/2 = 0$ , а при  $\alpha_1 = 1$  имеем  $\eta_0 = (\arccos(1 - 2 \times 1))/2 = \pi/2$ . Выведем формулу метода обратной функции распределения для случайной величины  $\xi$ . Преобразуя соответствующее уравнение (13.8), последовательно получаем:

$$\int_0^{\xi_0} \frac{\eta_0 \cos(\eta_0 u) \, du}{\sin \eta_0} = \alpha_2, \quad \left. \frac{\sin(\eta_0 u)}{\sin \eta_0} \right|_0^{\xi_0} = \alpha_2 \quad \text{и} \quad \xi_0 = \frac{\arcsin(\alpha_2 \sin \eta_0)}{\eta_0}.$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_2 = 0$  дает  $\xi_0 = (\arcsin(0 \times \sin \eta_0))/\eta_0 = 0$ , а при  $\alpha_2 = 1$  имеем  $\xi_0 = (\arcsin(1 \times \sin \eta_0))/\eta_0 = \eta_0/\eta_0 = 1$ .

Таким образом, выборочное значение  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  можно получать по формуле

$$\xi_0 = \frac{\arcsin[\alpha_2 \sin((1/2) \arccos(1 - 2\alpha_1))]}{(1/2) \arccos(1 - 2\alpha_1)}.$$

Описание примера 15.1 закончено.

Технология 14.1 применена здесь следующим образом. В качестве исходной плотности элементарного распределения с параметром взята функция  $f_{\xi}(u; \lambda) = (\lambda \cos \lambda u)/\sin \lambda$ ,  $0 < u < 1$ ;  $0 < \lambda < \pi/2$ , которой соответствует моделирующая формула  $\xi_0 = (\arcsin(\alpha_2 \sin \lambda))/\lambda$ . Затем на множестве  $(0, \pi/2)$  допустимых значений параметра  $\lambda$  рассмотрена плотность  $f_{\eta}(v) = \sin 2v$ , которой соответствует моделирующая формула  $\eta_0 = (\arccos(1 - 2\alpha_1))/2$ . Далее после замены  $\lambda = v$  формируется совместная плотность

$$p(u, v) = f_{\eta}(v) \times f_{\xi}(u; v) = \sin 2v \times \frac{v \cos vu}{\sin v} = 2v \cos v \cos uv$$



(здесь  $0 < u < 1$ ,  $0 < v < \pi/2$ ), интеграл  $f_\xi(u) = \int_0^{\pi/2} p(u, v) dv$  от которой аналитически не берется.

**15.3. Метод дискретной суперпозиции.** Ситуация, когда плотность моделируемого распределения представляет собой интеграл (15.1), является достаточно редкой. Гораздо чаще в качестве вектора  $\boldsymbol{\eta}$  используется одномерная целочисленная случайная величина  $\eta$  с распределением

$$\mathbf{P}(\eta = i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad M \leq \infty.$$

В этом случае, формально подставляя в формулу (15.2) соотношение  $f_\eta(v) = \sum_{i=1}^M p_i \delta(v-i)$  (см. рассуждения из подразд. 13.6, и, в частности, формулу (13.20)), получаем

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M p_i f_i(\mathbf{u}); \quad f_i(\mathbf{u}) = f_\xi(\mathbf{u}|\eta = i). \quad (15.3)$$

Согласно требованиям, при которых применим алгоритм 15.1, должны существовать эффективные алгоритмы получения выборочного значения  $\eta_0$  случайной величины  $\eta$  (в рассматриваемом частном случае следует применять стандартный алгоритм 11.1 моделирования дискретного распределения или его модификации – см. разд. 11, 12) и выборочных значений  $\xi_0^{(i)}$  векторов  $\xi^{(i)}$ , распределенных согласно плотностям  $f_i(\mathbf{u})$  для всех  $i = 1, \dots, M$ . Таким образом, соотношение (15.3) представляет собой взвешенную сумму (смесь) эффективно моделируемых плотностей  $\{f_i(\mathbf{u})\}$ . Метод суперпозиции для плотности (15.3) формулируется следующим образом.

**АЛГОРИТМ 15.2.** 1. Реализуя выборочное значение  $\alpha_1$  стандартной случайной величины  $\alpha$ , согласно вероятностям  $\{p_i\}$ , используя алгоритм 11.1 или его модификации, выбираем номер  $\eta_0 = t$ .

2. Реализуем выборочное значение  $\xi_0$  случайного вектора  $\xi$  согласно плотности  $f_m(\mathbf{u})$ .

Алгоритм 15.2 называется *методом дискретной суперпозиции* или просто *методом суперпозиции*.

**ПРИМЕР 15.2** (1 балл). Пусть требуется построить алгоритм моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = \frac{3}{8}(1 + u^2), \quad -1 < u < 1. \quad (15.4)$$

Соотношение (15.4) представляет так называемый *закон Релея молекулярного рассеяния фотонов в атмосфере*, используемый в теории пере-

носа излучения. Функция (15.4) не является плотностью элементарного распределения, т. к. уравнение  $\int_{-1}^{\xi_0} f(u) du = \alpha_0$  сводится к соотношению  $\xi_0^3 + 3\xi_0 - 8\alpha_0 - 4 = 0$ , не позволяющему получить элементарную формулу моделирования случайной величины  $\xi$ . Плотность (15.4) представима в виде смеси (15.3):

$$f(u) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} u^2, \quad -1 < u < 1,$$

т. е.  $p_1 = 3/4$ ,  $f_1(u) = 1/2$ ;  $p_2 = 1/4$ ;  $f_2(u) = 3u^2/2$ . Функция  $f_1(u)$  является плотностью равномерного распределения на интервале  $(-1, 1)$ , а функция  $f_2(u)$  является аналогом плотности степенного распределения на том же интервале (см. пример 13.2 и замечание 13.3). Алгоритм 15.2 здесь выглядит следующим образом: *если  $\alpha_1 < 3/4$ , то  $\xi_0 = 2\alpha_2 - 1$ , иначе  $\xi_0 = \sqrt[3]{2\alpha_2 - 1}$ .*

**15.4. Технология «Формирования смеси».** Пример 15.2 показывает, что достаточно содержательные примеры применения алгоритма 15.2 можно построить для простейшего случая  $\mathbf{u} = u \in R$ ,  $M = 2$ . Здесь может быть реализована

**ТЕХНОЛОГИЯ 15.1.** *Возьмем две плотности элементарных распределений  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$ , определенные на интервале  $(a, b)$  и такие, что линейная комбинация с положительными коэффициентами*

$$f(u) = p_1 f_1(u) + p_2 f_2(u), \quad u \in (a, b), \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad p_1 + p_2 = 1 \quad (15.5)$$

*не является плотностью элементарного распределения (т. е. уравнение  $\int_a^{\xi_0} f(u) du = \alpha_0$  неразрешимо относительно  $\xi_0$ ). Такие плотности  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$  можно получить с помощью разнородных замен  $\varphi_i : (a, b) \rightarrow (c_i, d_i)$ ;  $i = 1, 2$  в технологии 13.1. Для выборочных значений  $\xi_0^{(i)}$ , реализуемых согласно плотностям  $f_i(u)$ , выписываются моделирующие формулы  $\xi_0^{(i)} = \psi_i(\alpha_0)$ ,  $i = 1, 2$ . Для плотности (15.5) можно построить экономичный алгоритм дискретной суперпозиции: если  $\alpha_1 < p_1$ , то значение  $\eta_0$  вспомогательной целочисленной случайной величины  $\eta$  равно единице и выборочное значение  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  моделируется по формуле  $\xi_0 = \psi_1(\alpha_2)$ , иначе  $\xi_0 = \psi_2(\alpha_2)$ .*

**ПРИМЕР 15.3** (2.5 балла). Пусть требуется построить алгоритм моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = \frac{5u}{(1+u^2)^2} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}u^2} \sin\left(\frac{\pi}{2u}\right), \quad 1 < u < 2. \quad (15.6)$$

Эта функция не является плотностью элементарного распределения, т. к. последовательные преобразования уравнения  $\int_1^{\xi_0} f(u) du = \alpha_0$  вида

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \int_1^{\xi_0} \frac{d(u^2 + 1)}{(u^2 + 1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^{\xi_0} d \cos \left( \frac{\pi}{2u} \right) &= \alpha_0, \\ -\frac{5}{2(1 + u^2)} \Big|_1^{\xi_0} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \left( \frac{\pi}{2u} \right) \Big|_1^{\xi_0} &= \alpha_0 \end{aligned}$$

приводят к соотношению

$$\frac{5}{4} - \frac{5}{2(1 + \xi_0^2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \left( \frac{\pi}{2\xi_0} \right) = \alpha_0, \quad (15.7)$$

которое неразрешимо относительно  $\xi_0$ . По аналогии с выкладками (15.7) несложно вычислить интегралы от каждого из слагаемых суммы (15.6):

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_1^2 \frac{5u du}{(1 + u^2)^2} = \frac{5}{2} \left( -\frac{1}{1 + 2^2} + \frac{1}{1 + 1^2} \right) = \frac{3}{4}, \\ p_2 &= \int_1^2 \frac{\sqrt{2}\pi}{8u^2} \sin \left( \frac{\pi}{2u} \right) du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Несложно показать, что эти величины являются вероятностями в соответствующем разложении (15.5) (см. замечание 15.1). С учетом этого можно представить плотность (15.6) в виде смеси (15.5):

$$f(u) = \frac{3}{4} \times \frac{20u}{3(1 + u^2)^2} + \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{\sqrt{2}u^2} \sin \left( \frac{\pi}{2u} \right), \quad 1 < u < 2, \quad (15.8)$$

$$\text{т. е. } f_1(u) = \frac{20u}{3(1 + u^2)^2}, \quad f_2(u) = \frac{\pi}{\sqrt{2}u^2} \sin \left( \frac{\pi}{2u} \right).$$

С учетом выкладок (15.7) выведем моделирующие формулы для плотностей  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$ . Преобразуя соответствующее уравнение (13.8) первой плотности, последовательно получаем:

$$\frac{20}{3} \int_1^{\xi_0} \frac{u du}{(1 + u^2)^2} = \alpha_2, \quad \frac{5}{3} - \frac{10}{3(1 + \xi_0^2)} = \alpha_2 \quad \text{и} \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{10}{5 - 3\alpha_2}} - 1. \quad (15.9)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_2 = 0$  дает  $\xi_0 = \sqrt{10/(5 - 3 \times 0)} - 1 = 1$ , а при  $\alpha_2 = 1$  имеем  $\xi_0 = \sqrt{10/(5 - 3 \times 1)} - 1 = 2$ .

Преобразования для второй плотности дают

$$\int_1^{\xi_0} \frac{\pi}{\sqrt{2}u^2} \sin\left(\frac{\pi}{2u}\right) du = \alpha_2, \quad \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2\xi_0}\right) = \alpha_2 \text{ и } \xi_0 = \frac{\pi}{2 \arccos(\alpha_2/\sqrt{2})}. \quad (15.10)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_2 = 0$  дает  $\xi_0 = \pi/(2 \arccos(0/\sqrt{2})) = 1$ , а при  $\alpha_2 = 1$  имеем  $\xi_0 = \pi/(2 \arccos(1/\sqrt{2})) = 2$ .

Алгоритм метода суперпозиции выглядит следующим образом: если  $\alpha_1 < 3/4$ , то выборочное значение  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  реализуется по формуле (15.9), иначе  $\xi_0$  реализуется по формуле (15.10). Описание примера 15.3 закончено.

Технология 15.1 реализована здесь следующим образом: по технологии 13.1 из плотности  $10/(3w^2)$ ,  $2 < w < 5$  с помощью замены  $w = \varphi_1(u) = 1 + u^2$ ,  $1 < u < 2$  создана плотность  $f_1(u)$ , а из плотности  $\sqrt{2} \sin w$ ,  $\pi/4 < w < \pi/2$  с помощью замены  $w = \varphi_2(u) = \pi/(2u)$ ,  $1 < u < 2$  получена плотность  $f_2(u)$ , а затем рассмотрена взвешенная сумма (15.5) с вероятностями  $p_1 = 3/4$  и  $p_2 = 1/4$ .

**15.5. Выделение вероятностей.** Здесь уместно сформулировать следующее простое

ЗАМЕЧАНИЕ 15.2. Пусть исходная плотность задана в виде

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M h_i(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U, \quad (15.11)$$

где  $h_i(\mathbf{u})$  – положительные (почти всюду в  $U$ ) функции. Вычисляя интегралы  $p_i = \int_U h_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$ , перепишем плотность (15.11) в виде

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M p_i \times \frac{h_i(\mathbf{u})}{p_i}. \quad (15.12)$$

Тогда функции  $\{f_i(\mathbf{u}) = h_i(\mathbf{u})/p_i\}$  являются плотностями (ведь  $f_i(\mathbf{u}) \geq 0$  и  $\int_U f_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1$ ), а числа  $\{p_i\}$  – вероятностями: они неотрицательны и  $\sum_{i=1}^M p_i = 1$ . Действительно,

$$1 = \int_U f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \sum_{i=1}^M p_i \int_U \frac{h_i(\mathbf{u})}{p_i} d\mathbf{u} = \sum_{i=1}^M p_i.$$

Таким образом, представление (15.12) плотности (15.11) имеет вид (15.3).

Замечание 15.2 обосновывает, в частности, переход от соотношения (15.6) к представлению (15.8) в примере 15.3.

**ЗАМЕЧАНИЕ 15.3.** При описании примеров, связанных с методом дискретной суперпозиции, требуется представлять результаты интегрирования в следующих трех случаях:

– при обосновании того, что исходная плотность не является элементарной (т. е. уравнение вида  $\int_a^{\xi_0} f(u) du = \alpha_0$  неразрешимо в элементарных функциях относительно  $\xi_0$ ) – см., например, соотношение (15.7);

– при выделении вероятностей  $\{p_i = \int_U h_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u}\}$  (см. замечание 15.2);

– при выводе формул метода обратной функции распределения для плотностей  $\{f_i(u)\}$  – см., например, соотношения (15.9), (15.10).

Однако несложно заметить, что во всех трех случаях используются одни и те же первообразные (с точностью до умножения на константы и подстановки различных пределов интегрирования). Учет этого обстоятельства позволяет существенно сократить описание упомянутых выше примеров.

**15.6. Увеличение числа слагаемых.** Обобщение технологии 15.1 может быть связано с увеличением числа слагаемых  $M$  в сумме (15.5) (вплоть до рассмотрения функциональных рядов).

**ПРИМЕР 15.4** (1.5 балла). Пусть требуется построить алгоритм моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = e^{-2u} + e^{-3u} + e^{-6u}, \quad u > 0.$$

Эта плотность не является элементарной, так как уравнение  $\int_0^{\xi_0} f(u) du = \alpha_0$  сводится к соотношению

$$\frac{e^{-2\xi_0}}{2} + \frac{e^{-3\xi_0}}{3} + \frac{e^{-6\xi_0}}{6} + \alpha_0 - 1 = 0,$$

которое неразрешимо относительно  $\xi_0$ . Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} du = -\frac{e^{-\lambda u}}{\lambda} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

для любого  $\lambda > 0$ , согласно замечанию 15.2 получаем представление вида (15.3)

$$f(u) = \frac{1}{2} \times (2e^{-2u}) + \frac{1}{3} \times (3e^{-3u}) + \frac{1}{6} \times (6e^{-6u}),$$

т. е.  $p_1 = 1/2$ ,  $f_1(u) = 2e^{-2u}$ ;  $p_2 = 1/3$ ,  $f_2(u) = 3e^{-3u}$ ;  $p_3 = 1/6$ ,  $f_3(u) = 6e^{-6u}$ . Плотности  $f_i(u)$  являются табличными (см. пример 13.1 и замечание 13.3) и с учетом формулы (13.13) получаем следующий алгоритм метода суперпозиции:

- если  $\alpha_1 < 1/2$ , то выборочное значение случайной величины  $\xi$  реализуется по формуле  $\xi_0 = -(1/2) \ln \alpha_2$ ;
- если  $1/2 \leq \alpha_1 < 1/2 + 1/3 = 5/6$ , то  $\xi_0 = -(1/3) \ln \alpha_2$ ;
- если  $\alpha_1 \geq 5/6$ , то  $\xi_0 = -(1/6) \ln \alpha_2$ .

**РЕШЕНИЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ  
«МЕТОД ДИСКРЕТНОЙ СУПЕРПОЗИЦИИ»**

Экзаменационные задачи по теме «Моделирование случайной величины методом дискретной суперпозиции» сконструированы согласно технологии 15.1 (для случаев двух и трех слагаемых в сумме (15.3)). При решении этих задач нужно, согласно замечанию 15.2, получить представление (15.3) и выписать соответствующие моделирующие формулы для  $i = 1, 2, 3$ . При оформлении задач следует учитывать замечание 15.3. Можно также отметить, что в представлении (15.3) одна из плотностей является табличной (с точностью до обозначений параметров  $\lambda, i, a, b$ ) – см. замечание 13.3; здесь можно использовать формулы (13.3), (13.5), (13.6), не представляя преобразования соответствующего уравнения (13.8) и результаты проверки 13.1.

**ЗАДАЧА Г1 (1.5 балла).** Сформулируйте метод дискретной суперпозиции и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = \frac{3 \cos \sqrt{u}}{8\sqrt{u}} + \frac{1}{\pi^2}, \quad 0 < u < \frac{\pi^2}{4}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Данная плотность не является плотностью элементарного распределения, так как последовательные преобразования уравнения (13.8) вида

$$\int_0^{\xi_0} \left( \frac{3 \cos \sqrt{u}}{8\sqrt{u}} + \frac{1}{\pi^2} \right) du = \alpha_0, \quad \frac{3 \sin \sqrt{u}}{4} \Big|_0^{\xi_0} + \frac{u}{\pi^2} \Big|_0^{\xi_0} = \alpha_0, \quad (15.13)$$

приводят к соотношению  $(3 \sin \sqrt{\xi_0})/4 + \xi_0/\pi^2 = \alpha_0$ , которое неразрешимо относительно  $\xi_0$ . С учетом замечания 15.2 по аналогии с выкладками

(15.13) вычисляем

$$p_1 = \int_0^{\pi^2/4} \frac{3 \cos \sqrt{u} du}{8\sqrt{u}} = \frac{3 \sin \sqrt{u}}{4} \Big|_0^{\pi^2/4} = \frac{3}{4}, \quad p_2 = \int_0^{\pi^2/4} \frac{du}{\pi^2} = \frac{1}{4}$$

и получаем представление  $f(u) = p_1 f_1(u) + p_2 f_2(u)$ , где

$$f_1(u) = \frac{\cos \sqrt{u}}{2\sqrt{u}}, \quad f_2(u) \equiv \frac{4}{\pi^2}, \quad 0 < u < \frac{\pi^2}{4}.$$

С учетом выкладок (15.13) выведем моделирующую формулу для плотности  $f_1(u)$ . Преобразуя соответствующее уравнение (13.8), последовательно получаем:

$$\int_0^{\xi_0} \frac{\cos \sqrt{u} du}{2\sqrt{u}} = \alpha_2, \quad \sin \sqrt{\xi_0} = \alpha_2 \quad \text{и, наконец,} \quad \xi_0 = (\arcsin \alpha_2)^2.$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_2 = 0$  дает  $\xi_0 = (\arcsin 0)^2 = 0$ , а при  $\alpha_2 = 1$  имеем  $\xi_0 = (\arcsin 1)^2 = (\pi/2)^2 = \pi^2/4$ .

Плотность  $f_2(u)$  является табличной (это равномерное распределение на интервале  $(0, \pi^2/4)$ ) – см. замечание 13.3 и соотношение (13.16); соответствующая моделирующая формула:  $\xi_0 = \pi^2 \alpha_2/4$ .

Алгоритм метода дискретной суперпозиции для реализации выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  имеет вид: *если*  $\alpha_1 < 3/4$ , *то*  $\xi_0 = (\arcsin \alpha_2)^2$ ; *иначе*  $\xi_0 = \pi^2 \alpha_2/4$ .

**ЗАДАЧА Г2 (1.5 балла).** Сформулируйте метод дискретной суперпозиции и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = \frac{u^5}{32} + \frac{u^3}{8} + \frac{1}{12}, \quad 0 < u < 2.$$

**РЕШЕНИЕ.** Данная плотность не является плотностью элементарного распределения, так как последовательные преобразования уравнения (13.8) вида

$$\int_0^{\xi_0} \left( \frac{u^5}{32} + \frac{u^3}{8} + \frac{1}{12} \right) du = \alpha_0, \quad \frac{u^6}{192} \Big|_0^{\xi_0} + \frac{u^4}{32} \Big|_0^{\xi_0} + \frac{u}{12} \Big|_0^{\xi_0} = \alpha_0, \quad (15.14)$$

приводят к соотношению  $\xi_0^6/192 + \xi_0^4/32 + \xi_0/12 = \alpha_0$ , которое неразрешимо относительно  $\xi_0$ . С учетом замечания 15.2 по аналогии с выкладками (15.14) вычисляем

$$p_1 = \int_0^2 \frac{u^5 du}{32} = \frac{u^6}{192} \Big|_0^2 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \int_0^2 \frac{u^3 du}{8} = \frac{1}{2}, \quad p_3 = \int_0^2 \frac{du}{12} = \frac{1}{6}$$

и получаем представление  $f(u) = p_1 f_1(u) + p_2 f_2(u) + p_3 f_3(u)$ , где

$$f_1(u) = \frac{3u^5}{32}, \quad f_2(u) = \frac{u^3}{4}, \quad f_3(u) \equiv \frac{1}{2}, \quad 0 < u < 2.$$

С учетом выкладок (15.14) выведем моделирующие формулы для плотностей  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$ . Преобразуя соответствующие уравнения вида (13.8), последовательно получаем:

$$\int_0^{\xi_0} \frac{3u^5 du}{32} = \alpha_2, \quad \frac{\xi_0^6}{64} = \alpha_0 \quad \text{и, наконец,} \quad \xi_0 = 2\sqrt[6]{\alpha_0};$$

$$\int_0^{\xi_0} \frac{u^3 du}{4} = \alpha_2, \quad \frac{\xi_0^4}{16} = \alpha_2 \quad \text{и, наконец,} \quad \xi_0 = 2\sqrt[4]{\alpha_2}.$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_2 = 0$  дает  $\xi_0 = 0$ , а при  $\alpha_2 = 1$  имеем  $\xi_0 = 2$ .

Плотность  $f_3(u)$  является табличной (это равномерное распределение на интервале  $(0, 2)$ ) – см. замечание 13.3 и соотношение (13.16); соответствующая моделирующая формула:  $\xi_0 = 2\alpha_2$ .

Алгоритм метода дискретной суперпозиции для реализации выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  имеет вид: *если*  $\alpha_1 < 1/3$ , *то*  $\xi_0 = 2\sqrt[6]{\alpha_2}$ ; *если*  $1/3 \leq \alpha_1 < 1/3 + 1/2 = 5/6$ , *то*  $\xi_0 = 2\sqrt[4]{\alpha_2}$ ; *а если*  $\alpha_1 \geq 5/6$ , *то*  $\xi_0 = 2\alpha_2$ .

**ЗАДАЧА Г3 (1.5 балла).** Сформулируйте метод дискретной суперпозиции и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения

$$f(u) = \frac{\sin u}{4} + \frac{e^u}{4(e^{\pi/2} - 1)} + \frac{1}{\pi}, \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}.$$

**РЕШЕНИЕ.** Данная плотность не является плотностью элементарного распределения, так как последовательные преобразования уравнения (13.8) вида

$$\int_0^{\xi_0} \left( \frac{\sin u}{4} + \frac{e^u}{4(e^{\pi/2} - 1)} + \frac{1}{\pi} \right) du = \alpha_0,$$



$$\left. \frac{-\cos u}{4} \right|_0^{\xi_0} + \left. \frac{e^u - 1}{4(e^{\pi/2} - 1)} \right|_0^{\xi_0} + \left. \frac{u}{\pi} \right|_0^{\xi_0} = \alpha_0 \quad (15.15)$$

приводят к соотношению

$$\frac{1 - \cos \xi_0}{4} + \frac{e^{\xi_0} - 1}{4(e^{\pi/2} - 1)} + \frac{\xi_0}{\pi} = \alpha_0,$$

которое неразрешимо относительно  $\xi_0$ . С учетом замечания 15.2 по аналогии с выкладками (15.15) вычисляем

$$p_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u \, du}{4} = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{e^u \, du}{4(e^{\pi/2} - 1)} = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\pi} = \frac{1}{2},$$

и получаем представление  $f(u) = p_1 f_1(u) + p_2 f_2(u) + p_3 f_3(u)$ , где

$$f_1(u) = \sin u, \quad f_2(u) = \frac{e^u}{e^{\pi/2} - 1}, \quad f_3(u) \equiv \frac{2}{\pi}, \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}.$$

С учетом выкладок (15.15) выведем моделирующие формулы для плотностей  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$ . Преобразуя соответствующее уравнение (13.8), для первой плотности последовательно получаем:

$$\int_0^{\xi_0} \sin u \, du = \alpha_2, \quad 1 - \cos \xi_0 = \alpha_2 \quad \text{и, наконец,} \quad \xi_0 = \arccos \alpha'_2,$$

где  $\alpha'_2 = 1 - \alpha_2$ . Проверка 13.1 при  $\alpha_2 = 0$  дает  $\alpha'_2 = 1$  и  $\xi_0 = \arccos 1 = 0$ , а при  $\alpha_2 = 1$  имеем  $\alpha'_2 = 0$  и  $\xi_0 = \arccos 0 = \pi/2$ .

Соответствующие преобразования для второй плотности имеют вид:

$$\int_0^{\xi_0} \frac{e^u \, du}{e^{\pi/2} - 1} = \alpha_2, \quad \frac{e^{\xi_0} - 1}{e^{\pi/2} - 1} = \alpha_2 \quad \text{и, наконец,} \quad \xi_0 = \ln(1 + (e^{\pi/2} - 1)\alpha_2); \quad (15.16)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_2 = 0$  дает  $\xi_0 = \ln(1 + (e^{\pi/2} - 1) \times 0) = \ln 1 = 0$ , а при  $\alpha_2 = 1$  имеем  $\xi_0 = \ln(1 + (e^{\pi/2} - 1) \times 1) = \ln e^{\pi/2} = \pi/2$ .

Плотность  $f_3(u)$  является табличной (это равномерное распределение на интервале  $(0, \pi/2)$ ) – см. замечание 13.3 и соотношение (13.16); соответствующая моделирующая формула:  $\xi_0 = \pi\alpha_2/2$ .

Алгоритм метода дискретной суперпозиции для реализации выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  имеет вид: *если*  $\alpha_1 < 1/4$ , *то*  $\xi_0 = \arccos \alpha_2$ ; *если*  $1/4 \leq \alpha_1 < 1/2$ , *то*  $\xi_0 = \ln(1 + (e^{\pi/2} - 1)\alpha_2)$ ; *а если*  $\alpha_1 \geq 1/2$ , *то*  $\xi_0 = \pi\alpha_2/2$ .

**16. Обоснование метода исключения.  
 Конструирование плотностей случайных  
 величин, эффективно моделируемых  
 мажорантным методом исключения**

**16.1. Общая конструкция метода исключения.** В теории статистического моделирования широко используются так называемые *методы исключения* (иногда применяются термины *методы отбора* и *методы отказов*, которые также соответствуют, хотя и в меньшей степени, английскому термину *rejection technique*) – см., например, [1].

Суть этих методов состоит в следующем. Пусть случайный вектор (случайная точка)  $\theta$  распределен в некотором множестве  $X$  и дано подмножество  $A \subseteq X$ .

**АЛГОРИТМ 16.1.** *Проводится некоторое статистическое испытание  $T$  и считается, что  $T$  состоялась, если численная реализация  $\theta_0$  вектора  $\theta$  принадлежит  $A$ , и  $T$  не состоялась, если  $\zeta_0 \notin A$ .*

Назовем *трудоемкостью*  $\tilde{s}$  алгоритма 16.1 средние затраты на построение выборочных значений  $\theta_j$  вектора  $\theta$  до реализации  $T$ . Величина  $\tilde{s}$  пропорциональна математическому ожиданию целочисленной случайной величины  $\beta$ , имеющей геометрическое распределение с параметром  $p = \mathbf{P}(\theta \in A)$ :

$$\tilde{s} \sim s = \mathbf{E}\beta = \frac{1}{p} = \frac{1}{\mathbf{P}(\theta \in A)}. \quad (16.1)$$

Очевидно, что  $s \geq 1$ . Оптимизация алгоритма 16.1 связана с приближением величины  $s$  к единице.

**16.2. Мажорантный метод исключения.** В подавляющем числе случаев алгоритм 16.1 применяется в следующей ситуации. Пусть требуется численно получать выборочные значения  $\xi_j$  случайного вектора (случайной величины)  $\xi$ , распределенного в области  $U \in R^d$  согласно плотности  $f(\mathbf{u})$ , которая пропорциональна заданной неотрицательной функции  $g(\mathbf{u})$ , т. е.

$$f(\mathbf{u}) = \frac{g(\mathbf{u})}{G}, \quad G = \int_U g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (16.2)$$

Предполагается, что ни один из рассмотренных ранее методов не дает эффективного алгоритма реализации значений  $\xi_j$ . Надежду на построение моделирующего алгоритма для случайного вектора с плотностью (16.2) дает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 16.1. Пусть точка  $(\xi, \eta)$  равномерно распределена в области

$$G = \{\mathbf{u} \in U, 0 < v < g(\mathbf{u})\}, \quad (16.3)$$

т. е. в «подграфике» функции  $g(\mathbf{u})$ ; при этом  $\xi \in U$  и  $\eta \in (0, g(\xi))$ . Тогда случайный вектор  $\xi$  распределен согласно плотности (16.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что  $(d + 1)$ -мерная точка  $(\xi, \eta)$  равномерно распределена в области  $G$ , означает, что совместная плотность  $f_{(\xi, \eta)}(\mathbf{u}, v)$  тождественно равна  $1/\bar{G}$  при  $(\mathbf{u}, v) \in G$  и нулю иначе. Согласно многомерному варианту формулы (14.2), имеем

$$f_{\xi}(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\xi, \eta)}(\mathbf{u}, v) dv = \int_0^{g(\mathbf{u})} \frac{dv}{\bar{G}} = \frac{g(\mathbf{u})}{\bar{G}} = f(\mathbf{u}).$$

Утверждение 16.1 доказано.

Таким образом, если получить выборочное значение  $(\xi_0, \eta_0)$  точки  $(\xi, \eta)$ , равномерно распределенной в  $G$ , то значение  $\xi_0$  будет распределено согласно плотности (16.2).

Возникает вопрос: каким образом можно реализовать точку, равномерно распределенную в «подграфике» заданной функции? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение, которое является по сути обратным к утверждению 16.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16.2. Пусть случайный вектор  $\xi^{(1)}$  распределен согласно плотности

$$f^{(1)}(\mathbf{u}) = \frac{g^{(1)}(\mathbf{u})}{\bar{G}^{(1)}}, \quad \bar{G}^{(1)} = \int_U g^{(1)}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (16.3)$$

а условное распределение при фиксированном значении  $\xi^{(1)} = \xi_0^{(1)}$  случайной величины  $\eta$  является равномерным на интервале  $(0, g^{(1)}(\xi_0^{(1)}))$ . Тогда случайная точка  $(\xi^{(1)}, \eta)$  равномерно распределена в «подграфике»  $G^{(1)} = \{\mathbf{u} \in U, 0 < v < g^{(1)}(\mathbf{u})\}$  функции  $g^{(1)}(\mathbf{u})$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что случайная величина  $\eta$  условно равномерно распределена на интервале  $(0, g_1(\xi_0^{(1)}))$  означает, что плотность  $f_{\eta}(v|\mathbf{u}) = f_{\eta}(v|\xi^{(1)} = \mathbf{u})$  тождественно равна  $1/g^{(1)}(\mathbf{u})$  при  $v \in (0, g^{(1)}(\mathbf{u}))$  и нулю иначе. Согласно многомерному варианту формулы (14.2) для  $\xi = \xi^{(1)}$  и  $\eta = \eta$ , имеем, что плотность распределения случайной точки  $(\xi^{(1)}, \eta)$  равна

$$f_{(\xi^{(1)}, \eta)}(\mathbf{u}, v) = f^{(1)}(\mathbf{u})f_{\eta}(v|\mathbf{u}) = \frac{g^{(1)}(\mathbf{u})}{\bar{G}^{(1)}} \times \frac{1}{g^{(1)}(\mathbf{u})} \equiv \frac{1}{\bar{G}^{(1)}}, \quad (\mathbf{u}, v) \in G^{(1)}.$$

Утверждение 16.2 доказано.

Если в утверждении 16.2 выбрать  $\xi^{(1)} = \xi$ , то в совокупности с утверждением 16.1 получаем логический круг: нам нужно разыграть выборочное значение  $(\xi_0, \eta_0)$  случайной точки  $(\xi, \eta)$ , равномерно распределенной в «подграфике»  $G$  (и тогда компонента  $\xi_0$  имеет требуемое распределение с плотностью (16.2)), но для этого нужно реализовать выборочное значение  $\xi_0$  вектора  $\xi$  согласно плотности (16.2). Имеется еще, однако, утверждение 10.1, из которого следует, что если погрузить «подграфик»  $G$  в область  $G^{(1)}$  в системе координат  $(\mathbf{u}, v)$  (т. е.  $G \subseteq G^{(1)}$ ) и реализовать выборочное значение  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  случайного вектора  $(\xi^{(1)}, \eta)$ , равномерно распределенного в  $G^{(1)}$ , то при условии  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0) \in G$  пара  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  равномерно распределена в  $G$ . Тогда, согласно утверждению 16.1, вектор  $\xi_0^{(1)}$  имеет требуемое распределение с плотностью (16.2).

Конструирование области  $G^{(1)}$  связано с расширением «подграфика»  $G$  в направлении оси  $v$ . Другими словами, рассматривается мажоранта  $g^{(1)}(\mathbf{u})$  функции  $g(\mathbf{u})$  такая, что  $g(\mathbf{u}) \leq g^{(1)}(\mathbf{u})$  при  $\mathbf{u} \in U$ . Первое требование к мажоранте  $g^{(1)}(\mathbf{u})$  таково, что для плотности (16.3) имеется эффективный алгоритм (формула) вида  $\xi_0^{(1)} = \psi^{(1)}(\bar{\alpha}_1)$  для реализации выборочного значения  $\xi_0^{(1)}$  случайного вектора  $\xi^{(1)}$  согласно одному из вариантов алгоритма 14.1 (здесь  $\bar{\alpha}_1$  – соответствующий набор стандартных случайных чисел). Это дает *мажорантный метод исключения*.

АЛГОРИТМ 16.2 (см., например, [1]). 1. Реализуем выборочное значение  $\xi_0^{(1)}$  согласно плотности (16.3):  $\xi_0^{(1)} = \psi^{(1)}(\bar{\alpha}_1)$ , а также значение  $\eta_0 = \alpha_2 g^{(1)}(\xi_0^{(1)})$ .

2. Если

$$\eta_0 < g(\xi_0^{(1)}), \quad (16.4)$$

то в качестве искомого выборочного значения  $\xi_0$  вектора  $\xi$  принимаем  $\xi_0 = \xi_0^{(1)}$ . В случае, когда неравенство (16.4) не выполнено, повторяем п. 1 данного алгоритма и т. д.

Согласно утверждению 16.2, точка  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$ , реализуемая в п. 1 алгоритма 16.2, равномерно распределена в области  $G^{(1)}$ . Если выполнено условие (16.4), то пара  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  принадлежит области  $G$  и, согласно утверждению 10.1, равномерно распределена в этой области, и тогда, согласно утверждению 16.1, величину  $\xi_0^{(1)}$  можно принять в качестве искомого выборочного значения  $\xi_0$ .

Согласно формуле (16.1) и утверждению 10.1, трудоемкость  $\tilde{s}$  алгоритма 16.2 пропорциональна величине

$$s = \frac{1}{\mathbf{P}((\xi^{(1)}, \eta) \in G)} = \frac{\bar{G}^{(1)}}{\bar{G}}. \quad (16.5)$$

Таким образом, мажоранту  $g^{(1)}(\mathbf{u})$  функции  $g(\mathbf{u})$  следует подбирать так, чтобы объемы  $\bar{G}^{(1)}$  и  $\bar{G}$  были близки; это выполнено при  $g^{(1)}(\mathbf{u}) \approx g(\mathbf{u})$ .

Как указано выше, мажорантный метод исключения используется намного чаще других методов отбора, поэтому в литературе часто алгоритм 16.2 называется просто *методом исключения*.

ПРИМЕР 16.1 (1.5 балла). Рассмотрим случайную величину  $\xi$ , имеющую плотность распределения  $f(u)$ , пропорциональную функции

$$g(u) = \left(1 + \frac{\sin u}{2}\right) e^{-u}, \quad u > 0. \quad (16.6)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{+\infty} g(u) du = \left(-e^{-u} - \frac{(\cos u + \sin u) e^{-u}}{4}\right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{5}{4}, \quad (16.7)$$

т. е.

$$f(u) = \frac{4}{5} \left(1 + \frac{\sin u}{2}\right) e^{-u}, \quad u > 0.$$

Из соотношения (16.7) следует, что функция  $f(u)$  не является плотностью элементарного распределения, т. е. уравнение метода обратной функции распределения  $\int_0^{\xi_0} f(u) du = \alpha_0$  (см. соотношение (13.8)) приводит к уравнению  $(4 + \cos \xi_0 + \sin \xi_0) e^{-\xi_0} = 5\alpha'_0$ ,  $\alpha'_0 = 1 - \alpha_0$ , которое неразрешимо относительно  $\xi_0$ .

В силу того что  $|\sin u| \leq 1$ , в качестве мажоранты функции (16.6) можно взять функцию  $g^{(1)}(u) = 3e^{-u}/2$ . Легко вычислить интеграл  $\int_0^{+\infty} g^{(1)}(u) du = 3/2$ . Следовательно,  $f^{(1)}(u) = e^{-u}$ ,  $u > 0$ . Это частный случай табличной (экспоненциальной) плотности (13.11) для  $\lambda = 1$  – см. пример 13.1 и замечание 13.3. Отсюда получаем следующий алгоритм метода исключения.

1. Согласно табличной формуле (13.13) получаем выборочное значение  $\xi_0^{(1)} = -\ln \alpha_1$ . Реализуем также величину  $\eta_0 = \alpha_2 g^{(1)}(\xi_1) = 3\alpha_2 \exp(-\xi_0^{(1)})/2$ .

2. Проверяем неравенство  $\eta < g(\xi_0^{(1)})$  или  $3\alpha_2 < 2 + \sin \xi_0^{(1)}$ . Если это неравенство выполнено, то полагаем, что выборочное значение  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  равно  $\xi_0 = \xi_0^{(1)}$ , иначе повторяем п. 1 и т. д.

Трудоемкость этого алгоритма пропорциональна величине  $s = 3/2 : 5/4 = 1.2$  (см. соотношение (16.5)). Описание примера 16.1 закончено.

**16.3. Моделирование распределения с полиномиальной плотностью.** Приведем еще один важный

ПРИМЕР 16.2 (1 балл). Рассмотрим случайную величину  $\xi$ , имеющую полиномиальную плотность распределения

$$f(u) = \sum_{i=0}^N c_i u^i, \quad 0 < u < 1 \quad (16.8)$$

(см. также подразд. 13.4 и формулу (13.10)). Для реализации выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  используют различные алгоритмы в зависимости от вида коэффициентов  $\{c_i\}$ . Так, метод обратной функции распределения (алгоритм 13.1) заведомо реализуем для  $N = 0$  (при этом  $f(u) \equiv 1$ ,  $0 < u < 1$  и  $\xi_0 = \alpha_0$ ), для  $N = 1$  (при этом  $\xi_0 = (-c_0 + \sqrt{c_0^2 + 2c_1\alpha_0})/c_1$ ), а также для случая  $c_i = (i+1)$  и  $c_j = 0$  при  $j \neq i$  (см. пример 13.2); при этом

$$f(u) = (i+1)u^i \quad \text{и} \quad \xi_0 = \alpha_0^{1/(i+1)} = \sqrt[i+1]{\alpha_0}. \quad (16.9)$$

В общем случае (при  $N > 1$  и при наличии достаточно большого числа ненулевых коэффициентов  $c_i$ ) попытка применить метод обратной функции распределения приводит к уравнению  $\sum_{i=0}^N c_i \xi_0^{i+1}/(i+1) = \alpha_0$ , которое, как правило, неразрешимо относительно  $\xi_0$  и нужно использовать специальные алгоритмы моделирования (метод суперпозиции, метод исключения и др.).

Для случая  $c_i \geq 0$ , в частности, удается представить плотность (16.8) в виде

$$f(u) = \sum_{i=0}^N p_i f_i(u); \quad p_i = \frac{c_i}{i+1}; \quad f_i(u) = (i+1)u^i \quad (16.10)$$

и построить следующий метод суперпозиции.

1. Реализуя выборочное значение  $\alpha_1$  стандартного случайного числа  $\alpha$ , согласно вероятностям  $\{c_i/(i+1)\}$ , используя алгоритм 11.1 или его модификации, выбираем номер  $m$ .

2. Реализуем выборочное значение  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  согласно плотности  $f_m(u) = (m+1)u^m$  по формуле вида (16.9):  $\xi_0 = \sqrt[m+1]{\alpha_2}$ .

В случае наличия отрицательных чисел среди коэффициентов  $\{c_i\}$  величины  $\{p_i\}$  из соотношения (16.10) нельзя считать вероятностями, так как они не являются положительными числами (хотя соотношение  $\sum_{i=0}^N p_i = 1$  выполнено в любом случае). Для функции (16.8) можно построить мажоранту

$$f(u) \leq g^{(1)}(u) = \sum_{i=0}^N c_i^+ u^i, \quad (16.11)$$

где  $c_i^+ = c_i$  при  $c_i \geq 0$  и  $c_i^+ = 0$  при  $c_i < 0$ . Тогда можно предложить следующий метод исключения (см. алгоритм 16.2).

1. Реализуем выборочное значение случайной величины  $\xi_0^{(1)}$ , распределенной согласно плотности  $f^{(1)}(u) = \sum_{i=0}^N p_i^+ f_i(u)$ , где

$$p_i^+ = \frac{c_i^+}{(i+1) \int_0^1 g^{(1)}(w) dw} = \frac{c_i^+}{(i+1) \sum_{j=0}^N (c_j^+ / (j+1))},$$

согласно сформулированному выше алгоритму метода суперпозиции (при этом используются два стандартных случайных числа  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ).

2. Реализуем также значение  $\eta_0 = \alpha_3 g^{(1)}(\xi_0^{(1)})$ .

3. Проверяем неравенство  $\eta_0 < f(\xi_0^{(1)})$ . Если оно выполнено, то полагаем, что выборочное значение  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  равно  $\xi_0 = \xi_0^{(1)}$ , иначе повторяем пп. 1, 2 и т. д.

Трудоёмкость этого алгоритма (среднее число повторений пп. 1 и 2 до выполнения неравенства  $\eta_0 < f(\xi_0^{(1)})$ ) пропорциональна величине  $s^{(1)} = \int_0^1 g^{(1)}(w) dw = \sum_{i=0}^N (c_i^+ / (i+1))$  (см. соотношение (16.5)).

Выбор мажоранты вида (16.11) неоднозначен. Можно, например, рассмотреть функцию  $g^{(2)}(u) = \sum_{i=0}^N |c_i| u^i$  и использовать для нее сформулированный алгоритм метода исключения с заменой  $\xi^{(1)}$  на  $\xi^{(2)}$ . Такой выбор мажоранты заведомо хуже, чем (16.11), т. к.  $g^{(2)}(u) > g^{(1)}(u)$  и  $s^{(2)} = \int_0^1 g^{(2)}(w) dw = \sum_{i=0}^N (|c_i| / (i+1)) > s^{(1)}$ .

Однако несложно построить пример, в котором мажоранта (16.11) не является лучшей. Рассмотрим случайную величину  $\xi$  с квадратичной плотностью распределения  $f(u) = 6u - 6u^2$ ,  $0 < u < 1$ . В этом случае  $g^{(1)}(u) = 6u$  и трудоёмкость соответствующего алгоритма метода исключения пропорциональна величине  $s^{(1)} = \int_0^1 6w dw = 3$ . С другой

стороны, для метода исключения с постоянной мажорантой

$$g^{(3)}(u) \equiv \max_{u \in (0,1)} f(u) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

имеем  $s^{(3)} = 3/2$ . Эта величина в два раза меньше, чем  $s^{(1)}$ .

**16.4. Технология «порчи» моделируемой плотности.** При построении примера 16.1 использовалась следующая

**ТЕХНОЛОГИЯ 16.1.** *Конструируем сначала плотность  $f^{(1)}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in U \subseteq R^d$ ) вектора  $\xi^{(1)}$ , для которого существует эффективный алгоритм (формула) численной реализации:  $\xi_0^{(1)} = \psi^{(1)}(\bar{\alpha}_1)$  (этот алгоритм используется затем в первом пункте алгоритма 16.2). Для построения функции  $f^{(1)}(\mathbf{u})$  можно использовать весь арсенал конструирования моделируемых плотностей (технологии 13.1, 14.1, 15.1 и др.). Далее преобразуем плотность  $f^{(1)}(\mathbf{u})$  таким образом, чтобы она превратилась в функцию  $g(\mathbf{u})$ , пропорциональную «немоделируемой» плотности  $f(\mathbf{u})$  (по сути мы «портим» моделируемую плотность  $f^{(1)}(\mathbf{u})$ ). Одним из простейших преобразований является умножение плотности  $f^{(1)}(\mathbf{u})$  на мало меняющуюся функцию  $Y(\mathbf{u})$ :*

$$g(\mathbf{u}) = f^{(1)}(\mathbf{u})Y(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U; \quad \text{где } 0 < A \leq Y(\mathbf{u}) \leq B \quad (16.12)$$

и  $(B - A)$  – близкая к нулю положительная величина. В качестве мажоранты тогда можно взять  $g^{(1)}(\mathbf{u}) = B f^{(1)}(\mathbf{u})$ . Плотность, пропорциональная этой функции, очевидно, равна  $f^{(1)}(\mathbf{u})$ . Интегрируя неотрицательные функции  $g^{(1)}(\mathbf{u})$  и  $g(\mathbf{u})$  по области  $U$  с учетом соотношения  $A f^{(1)}(\mathbf{u}) = A g^{(1)}(\mathbf{u})/B \leq g(\mathbf{u})$ , получаем  $A \bar{G}^{(1)}/B \leq \bar{G}$ , и тогда

$$s = \frac{\bar{G}^{(1)}}{\bar{G}} \leq \frac{B}{A}, \quad (16.13)$$

т. е. при  $A \approx B$  величина  $s$  из соотношения (16.5) для алгоритма 16.2 невелика (близка к единице).

Для удобства выкладок в равенстве (16.12) вместо плотности  $f^{(1)}(\mathbf{u})$  можно рассматривать пропорциональную ей функцию  $\tilde{g}^{(1)}(\mathbf{u})$  (опуская, к примеру, нормирующую константу).

**ЗАМЕЧАНИЕ 16.1.** *Для предлагаемой технологии 16.1 неравенство (16.4) имеет вид*

$$\eta_0 = \alpha_2 g^{(1)}(\xi_0^{(1)}) = \alpha_2 B f^{(1)}(\xi^{(1)}) < g(\xi^{(1)}) = f^{(1)}(\xi^{(1)})Y(\xi^{(1)}),$$



и оно может быть упрощено, по крайней мере, до вида

$$\alpha_2 B < Y(\xi^{(1)}); \quad (16.14)$$

это упрощение следует проделывать при реализации соответствующего алгоритма 16.2.

**16.5. Примеры применения технологии 16.1.** В примере 16.1 в качестве  $f^{(1)}(u)$  из равенства (16.12) выбрана табличная плотность  $f^{(1)}(u) = e^{-u}$ ,  $u > 0$ , а в качестве  $Y(u)$  использована функция  $Y(u) = 1 + \sin(u/2)$ . Для оценки величины  $s$  из соотношения (16.5) формула (16.13) не нужна, так как, в силу выкладок (16.7), величина  $\bar{G}$  вычисляется точно.

**ПРИМЕР 16.3 (2 балла).** Рассмотрим случайную величину  $\xi$ , имеющей плотность распределения  $f(u)$ , пропорциональную функции

$$g(u) = \frac{1}{u^2 \lg(u+10) + 10}, \quad 0 < u < 1.$$

Интеграл  $\bar{G} = \int_0^1 (1/(u^2 \lg(u+10) + 10)) du$  не берется, поэтому функция  $f(u)$  не является плотностью элементарного распределения. Заметим, что  $g(u) \leq g^{(1)}(u) = 1/(u^2 + 10)$ , т. е. здесь

$$Y(u) = \frac{u^2 + 10}{u^2 \lg(u+10) + 10}, \quad \text{причем} \quad \frac{11}{\lg 11 + 10} < Y(u) < 1. \quad (16.15)$$

Вычислим интеграл

$$\bar{G}^{(1)} = \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 10} = \frac{1}{\sqrt{10}} \int_0^1 \frac{d(u/\sqrt{10})}{(u/\sqrt{10})^2 + 1} = \frac{\text{arctg}(1/\sqrt{10})}{\sqrt{10}}. \quad (16.16)$$

Таким образом,

$$f^{(1)}(u) = \frac{\sqrt{10}}{\text{arctg}(1/\sqrt{10})(u^2 + 10)}, \quad 0 < u < 1.$$

Формула метода обратной функции распределения для выборочного значения  $\xi_0^{(1)}$  случайной величины  $\xi^{(1)}$  получается (с учетом выкладок (16.16)) из цепочки равенств

$$\frac{\sqrt{10}}{\text{arctg}(1/\sqrt{10})} \int_0^{\xi_0^{(1)}} \frac{du}{u^2 + 10} = \alpha_0, \quad \text{arctg}(\xi_0^{(1)}/\sqrt{10}) = \alpha_0 \text{arctg}(1/\sqrt{10})$$

и, наконец,  $\xi_0^{(1)} = \sqrt{10} \operatorname{tg}(\alpha_0 \operatorname{arctg}(1/\sqrt{10}))$ . Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\xi_0 = \sqrt{10} \operatorname{tg}(0 \times \operatorname{arctg}(1/\sqrt{10})) = 0$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\xi_0 = \sqrt{10} \operatorname{tg}(1 \times \operatorname{arctg}(1/\sqrt{10})) = 1$ .

Тогда получаем следующий алгоритм метода исключения.

1. Реализуем выборочные значения  $\xi_0^{(1)} = \sqrt{10} \operatorname{tg}(\alpha_1 \operatorname{arctg}(1/\sqrt{10}))$  и  $\eta_0 = \alpha_2 / \left( (\xi_0^{(1)})^2 + 10 \right)$ .

2. Проверяем неравенство  $\eta_0 < g(\xi_0^{(1)})$  или

$$\alpha_2 \left( (\xi_0^{(1)})^2 \operatorname{lg}(\xi_0^{(1)} + 10) + 10 \right) < (\xi_0^{(1)})^2 + 10.$$

Если это неравенство выполнено, то полагаем, что выборочное значение  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  равно  $\xi_0 = \xi_0^{(1)}$ , иначе повторяем п. 1 и т. д.

Согласно соотношениям (16.13) и (16.15), величина  $s$  из равенства (16.5) для построенного алгоритма оценивается сверху величиной  $s < (\operatorname{lg} 11 + 10)/11 \approx 1.004$ .

ПРИМЕР 16.4 (2 балла). Рассмотрим двумерный случайный вектор  $\xi = (\mu, \nu)$ , имеющий плотность распределения  $f(u, v)$ , пропорциональную функции

$$g(u, v) = e^u e^v (\sin u + \sin v), \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2}. \quad (16.17)$$

Выкладки, аналогичные (16.7), показывают, что

$$\bar{G} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} g(u, v) du dv = (e^{\pi/2} - 1)(e^{\pi/2} + 1) \quad (16.18)$$

(проверьте это!) и что ни одно из представлений (14.2) и (14.3) плотности

$$f(u, v) = \frac{e^u e^v (\sin u + \sin v)}{(e^\pi - 1)}, \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2}$$

не дает эффективных алгоритмов моделирования компонент  $\mu$  и  $\nu$ . По аналогии с примером 16.1 в качестве мажоранты функции (16.17) берем

$$g(u, v) \leq \tilde{g}_1(u, v) = 2e^u e^v, \quad \text{т. е.} \quad Y(u, v) = \frac{\sin u + \sin v}{2}.$$

При этом

$$\bar{G}^{(1)} = 2(e^{\pi/2} - 1)^2 \quad \text{и} \quad f^{(1)}(u, v) = \frac{e^u}{e^{\pi/2} - 1} \times \frac{e^v}{e^{\pi/2} - 1}, \quad (16.19)$$

где  $0 < u < \pi/2$ ,  $0 < v < \pi/2$ , т. е. соответствующий вектор  $\xi^{(1)} = (\mu^{(1)}, \nu^{(1)})$  имеет независимые одинаково распределенные компоненты с элементарными распределениями (см. выкладки (15.16)). Тогда получаем следующий алгоритм метода исключения.

1. Реализуем выборочные значения  $\mu_0^{(1)} = \ln(1 + (e^{\pi/2} - 1)\alpha_1)$ ,  $\nu_0^{(1)} = \ln(1 + (e^{\pi/2} - 1)\alpha_2)$ , а также

$$\eta_0 = 2\alpha_3 e^{\mu_0^{(1)}} e^{\nu_0^{(1)}} = 2\alpha_3 (1 + (e^{\pi/2} - 1)\alpha_1) (1 + (e^{\pi/2} - 1)\alpha_2).$$

2. Проверяем неравенство  $\eta_0 < g(\mu_0^{(1)}, \nu_0^{(1)})$  или

$$2\alpha_3 < \sin \mu_0^{(1)} + \sin \nu_0^{(1)}.$$

Если это неравенство выполнено, то полагаем, что выборочные значения  $\mu_0$ ,  $\nu_0$  случайных величин  $\mu$  и  $\nu$  равны  $\mu_0 = \mu_0^{(1)}$ ,  $\nu_0 = \nu_0^{(1)}$ , иначе повторяем п. 1 и т. д.

Из соотношений (16.5), (16.18) и (16.19) следует, что трудоемкость этого алгоритма пропорциональна величине  $s = 2(e^{\pi/2} - 1)/(e^{\pi/2} + 1)$ , т. е.  $s \approx 1.3$ .

#### РЕШЕНИЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ»

Экзаменационные задачи по теме «Моделирование случайной величины методом исключения» сконструированы согласно технологии 16.1. Как правило, ставится задача моделирования случайной величины, имеющей плотность распределения, пропорциональную функции вида  $g(u) = Y(u) \times \tilde{g}^{(1)}(u)$ , где функция  $\tilde{g}^{(1)}(u)$  пропорциональна простой (конкретнее – табличной – см. замечание 13.3) плотности  $f^{(1)}(u) = \tilde{g}^{(1)}(u)/\tilde{G}^{(1)}$  (и можно использовать формулы (13.3) и (13.5) без соответствующей проверки 13.1), а функция  $Y(u)$  легко оценивается сверху и снизу положительными числами:  $0 < A \leq Y(u) \leq B$ . В качестве мажоранты целесообразно взять  $g^{(1)}(u) = B\tilde{g}^{(1)}(u)$ . Величина  $s$ , пропорциональная трудоемкости соответствующего метода исключения, оценивается сверху величиной  $s \leq B/A$ .

ЗАДАЧА Д1 (1.5 балла). Сформулируйте метод исключения и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения  $f(u)$ , пропорциональную функции

$$g(u) = \left(2 + \frac{\arcsin u}{5\pi}\right) u^3, \quad 0 < u < 1.$$

Оцените сверху трудоемкость метода.

РЕШЕНИЕ. Несложно убедиться в том, что плотность  $f(u)$  не является элементарной. Заметим, что  $g(u) = Y(u) \times \tilde{g}^{(1)}(u)$ , где  $\tilde{g}^{(1)}(u) = u^3$  и  $Y(u) = 2 + (\arcsin u)/(5\pi)$ , причем, в силу монотонности функции  $\arcsin u$  на интервале  $(0, 1)$ , выполнено неравенство  $2 < Y(u) < 2.1$ . Тогда  $g(u) < g^{(1)}(u) = 2.1 u^3$ . Вычислим интеграл  $\bar{G}^{(1)} = \int_0^1 g^{(1)}(u) du = 2.1/4$ . Плотность, пропорциональная мажоранте  $g^{(1)}(u)$ , является табличной (степенной):  $f^{(1)}(u) = 4u^3$ ,  $0 < u < 1$  (см. пример 13.2 и замечание 13.3); соответствующая моделирующая формула:  $\xi_0^{(1)} = \sqrt[4]{\alpha_0}$ . Сформулируем соответствующий алгоритм метода исключения.

1. Реализуем выборочное значение  $\xi_0^{(1)}$  по формуле  $\xi_0^{(1)} = \sqrt[4]{\alpha_1}$ , а также величину  $\eta_0 = \alpha_2 g^{(1)}(\xi_0^{(1)}) = 2.1 \alpha_2 (\xi_0^{(1)})^3$ . Точка  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  равномерно распределена в «подграфике» мажоранты  $g^{(1)}(u)$ .

2. Проверяем неравенство  $\eta_0 < g(\xi_0^{(1)})$  или

$$10.5 \pi \alpha_2 < 10\pi + \arcsin \sqrt[4]{\alpha_1}. \quad (16.20)$$

Если это неравенство выполнено, то точка  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  принадлежит «подграфику» функции  $g(u)$  и является равномерно распределенной в этом множестве. Тогда в качестве выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  берем  $\xi_0 = \xi_0^{(1)}$ . Если же неравенство (16.20) не выполнено, то повторяем п. 1 и т. д.

Трудоемкость  $s$  (т. е. среднее число попыток розыгрыша пар  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  до выполнения неравенства (16.20)) оценивается сверху величиной  $s < 2.1/2 = 1.05$ .

ЗАДАЧА Д2 (1.5 балла). Сформулируйте метод исключения и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения  $f(u)$ , пропорциональную функции

$$g(u) = \left(1 + \frac{\operatorname{arctg} u}{5\pi}\right) e^{-2u}, \quad u > 0.$$

Оцените сверху трудоемкость метода.

**РЕШЕНИЕ.** Несложно убедиться в том, что плотность  $f(u)$  не является элементарной. Заметим, что  $g(u) = Y(u) \times \tilde{g}^{(1)}(u)$ , где  $\tilde{g}^{(1)}(u) = e^{-2u}$  и  $Y(u) = 1 + (\arctg u)/(5\pi)$ , причем, в силу монотонности функции  $\arctg u$  на интервале  $(0, +\infty)$ , выполнено неравенство  $1 < Y(u) < 1.1$ . Тогда  $g(u) < g^{(1)}(u) = 2.1 e^{-2u}$ . Несложно вычислить интеграл  $\bar{G}^{(1)} = \int_0^1 g^{(1)}(u) du = 1.1/2$ . Плотность, пропорциональная мажоранте  $g^{(1)}(u)$ , является табличной (экспонциальной):  $f^{(1)}(u) = 2e^{-2u}$ ,  $u > 0$  (см. пример 13.1 и замечание 13.3); соответствующая моделирующая формула:  $\xi_0^{(1)} = -(\ln \alpha_0)/2$ . Сформулируем соответствующий алгоритм метода исключения.

1. Реализуем выборочное значение  $\xi_0^{(1)}$  по формуле  $\xi_0^{(1)} = -(\ln \alpha_1)/2$ , а также величину  $\eta_0 = \alpha_2 g^{(1)}(\xi_0^{(1)}) = 1.1 \alpha_2 e^{-2\xi_0^{(1)}}$ . Точка  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  равномерно распределена в «подграфике» мажоранты  $g^{(1)}(u)$ .

2. Проверяем неравенство  $\eta_0 < g(\xi_0^{(1)})$  или

$$5.5 \pi \alpha_2 < 5\pi + \arctg(-(1/2) \ln \alpha_1). \quad (16.21)$$

Если это неравенство выполнено, то точка  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  принадлежит «подграфику» функции  $g(u)$  и является равномерно распределенной в этом множестве. Тогда в качестве выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  берем  $\xi_0 = \xi_0^{(1)}$ . Если же неравенство (16.21) не выполнено, то повторяем п. 1 и т. д.

Трудоёмкость  $s$  (т. е. среднее число попыток розыгрыша пар  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  до выполнения неравенства (16.21)) оценивается сверху величиной  $s < 1.1$ .

**ЗАДАЧА ДЗ** (1.5 балла). Сформулируйте метод исключения и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения  $f(u)$ , пропорциональную функции

$$g(u) = \left( 4 + \frac{\ln(1 + (e - 1)u)}{2} \right) \cos\left(\frac{\pi u}{2}\right), \quad 0 < u < 1.$$

Оцените сверху трудоёмкость метода.

**РЕШЕНИЕ.** Несложно убедиться в том, что плотность  $f(u)$  не является элементарной. Заметим, что  $g(u) = Y(u) \tilde{g}^{(1)}(u)$ , где  $\tilde{g}^{(1)}(u) = \cos(\pi u/2)$  и  $Y(u) = 4 + (1/2) \ln(1 + (e - 1)u)$ , причем, в силу монотонности функции  $\ln(1 + (e - 1)u)$  на интервале  $(0, 1)$ , выполнено неравенство  $4 < Y(u) < 4.5$ . Тогда  $g(u) < g^{(1)}(u) = 4.5 \cos(\pi u/2)$ . Вычислим интеграл  $\bar{G}^{(1)} = \int_0^1 g^{(1)}(u) du = 4.5 \times 2/\pi$ . Плотность, пропорциональная

мажоранте  $g^{(1)}(u)$  имеет вид:  $f^{(1)}(u) = (\pi/2) \cos(\pi u/2)$ ,  $0 < u < 1$ . Формула метода обратной функции распределения для выборочного значения  $\xi_0^{(1)}$  случайной величины  $\xi^{(1)}$  получается из цепочки равенств

$$\int_0^{\xi_0^{(1)}} \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi u}{2}\right) du = \alpha_0, \quad \sin\left(\frac{\pi u}{2}\right) \Big|_0^{\xi_0^{(1)}} = \alpha_0 \quad \text{и} \quad \xi_0^{(1)} = (2/\pi) \arcsin \alpha_0. \quad (16.22)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_0 = 0$  дает  $\xi_0 = (2/\pi) \arcsin 0 = 0$ , а при  $\alpha_0 = 1$  имеем  $\xi_0 = (2/\pi) \arcsin 1 = 1$ .

Сформулируем соответствующий алгоритм метода исключения.

1. Реализуем выборочное значение  $\xi_0^{(1)} = (2/\pi) \arcsin \alpha_1$ , а также  $\eta_0 = \alpha_2 g^{(1)}(\xi_0^{(1)}) = 4.5 \alpha_2 \cos(\pi \xi_0^{(1)}/2)$ . Точка  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  равномерно распределена в «подграфике» мажоранты  $g^{(1)}(u)$ .

2. Проверяем неравенство  $\eta_0 < g(\xi_0^{(1)})$  или

$$9\pi\alpha_2 < 8 + \ln(1 + (e-1)(2/\pi) \arcsin \alpha_1). \quad (16.23)$$

Если это неравенство выполнено, то точка  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  принадлежит «подграфику» функции  $g(u)$  и является равномерно распределенной в этом множестве. Тогда в качестве выборочного значения  $\xi_0$  случайной величины  $\xi$  берем  $\xi_0 = \xi_0^{(1)}$ . Если же неравенство (16.23) не выполнено, то повторяем п. 1 и т. д.

Трудоемкость  $s$  (т. е. среднее число попыток розыгрыша пар  $(\xi_0^{(1)}, \eta_0)$  до выполнения неравенства (16.23)) оценивается сверху величиной  $s < 4.5/4 = 1.125$ .

## 17. Некоторые специальные методы моделирования непрерывных случайных величин

**17.1. Моделирование гамма-распределения с целым параметром.** Как и в случае моделирования дискретных случайных величин (см. разд. 11, 12) для некоторых распределений непрерывных случайных величин удастся построить эффективные алгоритмы моделирования, основанные на особых вероятностных свойствах рассматриваемых распределений. Приведем два важных примера таких ситуаций.

Рассмотрим случайную величину  $\xi^{(\lambda, n)}$ , имеющую *распределение Эрланга* (или *гамма-распределение Пирсона* с натуральным параметром

ром  $n$  – см., например, [2]) с плотностью

$$f^{(\lambda,n)}(u) = \frac{\lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u}}{(n-1)!}, \quad u > 0; \quad n \geq 1, \quad \lambda > 0.$$

При  $n > 1$  это распределение не является элементарным. Для моделирования случайной величины  $\xi^{(\lambda,n)}$  широко используется следующее свойство гамма-распределения (см., например, [2]).

**УТВЕРЖДЕНИЕ 17.1.** *Если случайные величины  $\xi^{(\lambda,n)}$  и  $\xi^{(\lambda,m)}$  независимы, то  $\xi^{(\lambda,n)} + \xi^{(\lambda,m)} = \xi^{(\lambda,n+m)}$ ; равенство означает здесь совпадение распределений соответствующих случайных величин.*

Это утверждение позволяет представить случайную величину  $\xi^{(\lambda,n)}$  в виде суммы из  $n$  слагаемых  $\xi^{(\lambda,n)} = \sum_{j=1}^n (\xi^{(\lambda,1)})^{(j)}$ , каждое из которых представляет собой случайную величину, распределенную согласно экспоненциальной плотности  $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$ ,  $u > 0$ . Эта плотность рассмотрена в примере 13.1 и там же получена простая (табличная) моделирующая формула  $\xi_0 = -(1/\lambda) \ln \alpha_0$  (см. соотношение (13.13) и замечание 13.3). Следовательно, для получения выборочного значения  $\xi_0^{(\lambda,n)}$  случайной величины  $\xi^{(\lambda,n)}$  можно предложить формулу

$$\xi_0^{(\lambda,n)} = \left( -\frac{\ln \alpha_1}{\lambda} \right) + \dots + \left( -\frac{\ln \alpha_n}{\lambda} \right) = -\frac{\ln(\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n)}{\lambda},$$

где  $\{\alpha_j\}$  – реализации стандартной случайной величины  $\alpha$ .

**17.2. Моделирование гауссовского распределения.** Теперь рассмотрим специальный алгоритм моделирования *стандартной нормальной случайной величины*  $\gamma$  с параметрами  $(0, 1)$  и плотностью распределения

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}, \quad -\infty < u < +\infty \quad (17.1)$$

(см., например, [2]). Напомним, что эта функция была предъявлена в разд. 13 как пример плотности распределения, не являющегося элементарным (в смысле возможности применения метода обратной функции распределения) – см. формулу (13.9).

**УТВЕРЖДЕНИЕ 17.2.** *Случайные величины*

$$\gamma_1 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin 2\pi\alpha_2, \quad \gamma_2 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi\alpha_2, \quad (17.2)$$

где  $(\alpha_1, \alpha_2)$  – пара независимых стандартных случайных чисел, являются независимыми и распределенными согласно плотности (17.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор  $(\gamma_1, \gamma_2)$ , рассматриваемый в декартовых координатах  $(u, v)$ , в полярных координатах  $(r, t)$ , где  $u = r \sin t$ ,  $v = r \cos t$ , имеет вид  $(\rho_0, \varphi_0)$ , причем  $\rho_0 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1}$  и  $\varphi_0 = 2\pi\alpha_2$ . Функция распределения случайной величины  $\rho$  равна

$$F_\rho(r) = \mathbf{P}(\sqrt{-2 \ln \alpha} < r) = \mathbf{P}(\alpha > e^{-r^2/2}) = 1 - e^{-r^2/2};$$

здесь  $r > 0$ . Дифференцируя последнюю функцию по  $r$ , получаем плотность распределения  $f_\rho(r) = re^{-r^2/2}$ ,  $r > 0$ . Случайная величина  $\varphi$  имеет равномерное распределение на интервале  $(0, 2\pi)$  с плотностью  $f_\varphi(t) \equiv 1/(2\pi)$ ,  $0 < t < 2\pi$ . Совместная плотность независимых случайных величин  $(\rho, \varphi)$  имеет вид

$$f_{\rho, \varphi}(r, t) = \frac{re^{-r^2/2}}{2\pi}, \quad r > 0, \quad 0 < t < 2\pi.$$

Заметим, что  $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ . Согласно теореме о замене случайных переменных (см. утверждение 13.1), учитывая, что якобиан  $J(r, t)$  перехода от полярных координат  $(r, t)$  к декартовым равен  $1/r$ , получаем, что плотность случайного вектора  $(\gamma_1, \gamma_2)$  имеет вид

$$\begin{aligned} f_{(\gamma_1, \gamma_2)}(u, v) &= f_{(\rho, \theta)}(r(u, v), t(u, v)) J(r(u, v), t(u, v)) = \\ &= \frac{\sqrt{u^2 + v^2} \times e^{-(u^2+v^2)/2}}{2\pi\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что случайные величины  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  независимы и имеют стандартное нормальное распределение (17.1). Утверждение 17.2 доказано.

Заметим, что пара  $(\sin 2\pi\alpha_2, \cos 2\pi\alpha_2)$  образует двумерный изотропный вектор (см., например, [1]). Кроме того, квадрат длины двумерного вектора (17.2), равный  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = -2 \ln \alpha_1$ , имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda = 1/2$  (см. формулы (13.1), (13.3)).



## Приложение 1

### Конструирование и решение экзаменационных задач по теме «Выборка по важности»

Напомним (см. разд. 2–5), что стандартный алгоритм метода Монте-Карло для вычисления интеграла  $I = \int g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  состоит в представлении его в виде математического ожидания

$$I = \int \frac{g(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{E}\zeta, \quad \zeta = q(\boldsymbol{\xi}) = \frac{g(\boldsymbol{\xi})}{f(\boldsymbol{\xi})}, \quad \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in R^d$$

(здесь вектор  $\boldsymbol{\xi}$  имеет плотность распределения  $f(\mathbf{x})$ ) и приближении  $I$  на основе закона больших чисел:  $I \approx (1/n) \sum_{i=1}^n \zeta_i$ ; здесь  $\zeta_j = q(\boldsymbol{\xi}_j)$  – получаемые на ЭВМ выборочные значения случайной величины  $\zeta$ . При фиксированном уровне погрешности затраты этого алгоритма пропорциональны величине  $S = t \times \mathbf{D}\zeta$ , где  $t$  – среднее время ЭВМ для реализации одного выборочного значения  $\zeta_j$  (это время, в свою очередь, зависит от затрат на реализацию выборочного значения  $\boldsymbol{\xi}_j$  случайного вектора  $\boldsymbol{\xi}$  согласно плотности  $f(\mathbf{x})$ ). При выборе плотности  $f(\mathbf{x})$  следует минимизировать величину  $S$ , т. е. требуется, чтобы:

- выборочные значения  $\boldsymbol{\xi}_j$  реализовывались на ЭВМ достаточно быстро;
- дисперсия  $\mathbf{D}\zeta$  случайной величины  $\zeta$  была мала.

Большинство модификаций стандартного алгоритма метода Монте-Карло связано с уменьшением дисперсии  $\mathbf{D}\zeta$  (см. разд. 4, 5). Дисперсия, в частности, будет тем меньше, чем ближе плотность  $f(\mathbf{x})$  к плотности вида  $|g(\mathbf{x})|/\tilde{I}$  (здесь  $\tilde{I} = \int |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$ ; при  $g(\mathbf{x}) \geq 0$  величина  $\tilde{I}$  совпадает с  $I$ ); на этом основан метод существенной выборки или выборки по важности (см. разд. 4). Технология создания примеров интегралов, для вычисления которых целесообразно применять выборку по важности, во многом схожа с технологией 16.1.

**ТЕХНОЛОГИЯ П1.** *Конструируем эффективно моделируемую плотность распределения  $f(\mathbf{x})$  вектора  $\boldsymbol{\xi}$  (как правило, компоненты этого вектора берутся независимыми или попарно зависимыми – см. подразд. 14.5) и выбираем функцию  $q(\mathbf{x})$ , заключенную между близкими положительными константами:  $0 < m_1 \leq q(\mathbf{x}) \leq m_2$  (т. е. разность  $(m_2 - m_1)$  невелика). Ставится задача вычисления интеграла*

$$I = \int g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \times q(\mathbf{x}).$$

Здесь надо позаботиться о том, чтобы получаемый интеграл не брался аналитически (т. е., как и в технологии 17.1, умножение на функцию  $q(\mathbf{x})$  должно «портить» моделируемую плотность  $f(\mathbf{x})$ ). В этом случае в стандартном алгоритме метода Монте-Карло берем  $\zeta = q(\boldsymbol{\xi})$ . Согласно утверждению 4.3, дисперсия  $\mathbf{D}\zeta$  ограничена сверху величиной  $(m_2 - m_1)^2/4$ .

В данном приложении рассмотрены алгоритмы вычисления четырехкратных интегралов (т. е.  $d = 4$ ). Согласно теории кубатурных формул (см., например, [5]), именно начиная с этой размерности методы Монте-Карло начинают превосходить по эффективности детерминированные (сеточные) алгоритмы численного интегрирования, т. е. здесь предпринята попытка показать «реальные» задачи.

ПРИМЕР П1 (2 балла). Рассмотрим алгоритм выборки по важности для вычисления четырехкратного интеграла

$$I = \int_0^{1/(4\pi)} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^{(2)} + (x^{(3)})^2 + (x^{(4)})^2}{2}\right) \times \\ \times \sqrt{1 + \frac{\sin^3(x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)})}{12}} dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} dx^{(4)}.$$

Здесь и далее верхний и нижний индекс при первом символе интеграла обозначают интервал изменения переменной  $x^{(1)}$ , индексы при втором символе интеграла – интервал изменения  $x^{(2)}$  и т. д. Возьмем  $q(\mathbf{x}) = \sqrt{1 + (1/12) \sin^3(x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)})}$  (значения этой функции заключены между  $m_1 = \sqrt{11/12}$  и  $m_2 = \sqrt{13/12}$ ), а в качестве плотности  $f(\mathbf{x})$  выбираем

$$f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = e^{-\frac{x^{(2)} + (x^{(3)})^2 + (x^{(4)})^2}{2}} = \\ = (4\pi) \times \frac{e^{-x^{(2)}/2}}{2} \times \frac{e^{-(x^{(3)})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{e^{-(x^{(4)})^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad 0 < x^{(1)} < \frac{1}{4\pi}, \quad x^{(2)} > 0,$$

$-\infty < x^{(3)} < +\infty$ ,  $-\infty < x^{(4)} < +\infty$ . При выборе плотности учтены: замечание 13.3, соображения из примера 14.3 и утверждение 17.2.

Имеем  $I = \mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}q(\boldsymbol{\xi})$ , где  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \xi^{(4)})$ , причем компоненты  $\xi^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  независимы. Компонента  $\xi^{(1)}$  имеет табличное (равномерное) распределение на интервале  $(0, 1/(4\pi))$  (см. замечание 13.3), и для реализации соответствующих выборочных значений  $\xi_i^{(1)}$

следует использовать формулу (13.16). Компонента  $\xi^{(2)}$  также имеет табличное (на сей раз экспоненциальное) распределение с параметром  $\lambda = 1/2$ , и для реализации соответствующих выборочных значений  $\xi_i^{(2)}$  следует использовать формулу (13.13). Компоненты  $\xi^{(3)}, \xi^{(4)}$  имеют стандартное нормальное распределение, и пары выборочных значений  $(\xi_i^{(3)}, \xi_i^{(4)})$  можно получать по формулам (17.2). Получаем следующий алгоритм выборки по важности.

Реализуем выборочные значения компонент вектора  $\xi$  по формулам:  $\xi_i^{(1)} = \alpha_{1,i}/(4\pi)$ ,  $\xi_i^{(2)} = -2 \ln \alpha_{2,i}$ ,

$$\xi_i^{(3)} = \sqrt{-2 \ln \alpha_{3,i}} \sin 2\pi\alpha_{4,i}, \quad \xi_i^{(4)} = \sqrt{-2 \ln \alpha_{3,i}} \cos 2\pi\alpha_{4,i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $\alpha_j$  – реализации стандартной случайной величины  $\alpha$ , и приближенно вычисляем

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{\sin^3(\xi_i^{(1)} \xi_i^{(2)} \xi_i^{(3)} \xi_i^{(4)})}{12}}.$$

Т. к.  $m_1 \approx 0.957$  и  $m_2 \approx 1.041$ , то  $\mathbf{D}\zeta \leq (m_2 - m_1)^2/4 \approx 1.764 \cdot 10^{-3}$ . Это достаточно малая величина и, следовательно, предложенный алгоритм выборки по важности эффективен.

ПРИМЕР П2 (2.5 балла). Рассмотрим алгоритм выборки по важности для вычисления четырехкратного интеграла

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{96e (x^{(1)})^2 (x^{(3)})^3 x^{(4)} e^{-x^{(4)}(x^{(4)} + x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)})}}{(e-1)((x^{(3)})^4 + 1)^2} dx,$$

где  $d\mathbf{x} = dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} dx^{(4)}$ . Возьмем  $q(\mathbf{x}) = q(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = \exp(-x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)})$  (значения этой функции заключены между  $m_1 = 1/e \approx 0.368$  и  $m_2 = 1$ ), а в качестве плотности  $f(\mathbf{x})$  выбираем

$$f(\mathbf{x}) = (3(x^{(1)})^2) \times (2x^{(2)}) \times \frac{8(x^{(3)})^3}{((x^{(3)})^4 + 1)^2} \times \left( \frac{2e x^{(4)} e^{-(x^{(4)})^2}}{e-1} \right),$$

где  $0 < x^{(j)} < 1$ ;  $j = 1, 2, 3, 4$ . При выборе плотности учтены: замечание 13.3 и соображения из примера 14.3.

Имеем  $I = \mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}q(\xi)$ , где  $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \xi^{(4)})$ , причем компоненты  $\xi^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  независимы. Компоненты  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$  имеют табличное (степенное) распределение (см. пример 13.2 и замечание 13.3),

и для реализации соответствующих выборочных значений  $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}$  следует использовать формулу (13.15):

$$\xi_i^{(1)} = \sqrt[3]{\alpha_{1,i}}, \quad \xi_i^{(2)} = \sqrt{\alpha_{2,i}}. \quad (P1)$$

Формула метода обратной функции распределения для выборочных значений  $\xi_i^{(3)}$  случайной величины  $\xi^{(3)}$  получается из цепочки равенств

$$\int_0^{\xi_i^{(3)}} \frac{8(x^{(3)})^3 dx^{(3)}}{((x^{(3)})^4 + 1)^2} = \alpha_{3,i}, \quad -\frac{2}{(x^{(3)})^4 + 1} \Big|_0^{\xi_i^{(3)}} = \alpha_{3,i}, \quad 2 - \frac{2}{(\xi_i^{(3)})^4 + 1} = \alpha_{3,i}$$

и, наконец,

$$\xi_i^{(3)} = \sqrt[4]{\frac{\alpha_{3,i}}{2 - \alpha_{3,i}}}. \quad (P2)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_{3,i} = 0$  дает  $\xi_i^{(3)} = \sqrt[4]{0/(2-0)} = 0$ , а при  $\alpha_{3,i} = 1$  имеем  $\xi_i^{(3)} = \sqrt[4]{1/(2-1)} = 1$ .

Формула метода обратной функции распределения для выборочных значений  $\xi_i^{(4)}$  случайной величины  $\xi^{(4)}$  получается из цепочки равенств

$$\int_0^{\xi_i^{(4)}} \frac{2e x^{(4)} e^{-(x^{(4)})^2} dx^{(4)}}{e-1} = \alpha_{4,i}, \quad \frac{e}{e-1} - \frac{e^{1-(\eta_i^{(4)})^2}}{e-1} = \alpha_{4,i}$$

и, наконец,

$$\eta_i^{(4)} = \sqrt{-\ln(1 - \alpha_{4,i} + \alpha_{4,i}/e)}. \quad (P3)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_{4,i} = 0$  дает  $\xi_i^{(4)} = \sqrt{-\ln(1-0+0/e)} = 0$ , а при  $\alpha_{4,i} = 1$  имеем  $\xi_i^{(4)} = \sqrt{-\ln(1-1+1/e)} = 1$ .

Получаем следующий алгоритм выборки по важности.

Используя формулы (P1)–(P3), реализуем значения  $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \xi_i^{(3)}, \xi_i^{(4)}$  и приближенно вычисляем  $I \approx (1/n) \sum_{j=1}^n \exp(-\xi_i^{(1)} \xi_i^{(2)} \xi_i^{(3)} \xi_i^{(4)})$ .

Справедливо неравенство  $\mathbf{D}\zeta \leq (m_2 - m_1)^2/4 \approx 0.010$ . Это достаточно малая величина и, следовательно, предложенный алгоритм выборки по важности эффективен.

ПРИМЕР ПЗ (3 балла). Рассмотрим алгоритм выборки по важности для вычисления четырехкратного интеграла

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{6(x^{(1)})^2(1-(x^{(1)})^2)^{1/2} \cos(x^{(1)}x^{(2)})(x^{(3)})^2}{\sin x^{(1)} \ln(1+x^{(3)}) \sqrt{9+16(x^{(3)})^2} (1+x^{(3)}x^{(4)})} \right) \times$$

$$\times \frac{16 + (x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)} + 2)^4}{(x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)} + 2)^2} dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} dx^{(4)}.$$

Возьмем

$$q(\mathbf{x}) = q(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = \frac{16 + (x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)} + 2)^4}{4(x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}x^{(4)} + 2)^2} = w^2 + \frac{1}{w^2},$$

где  $w = (x_1x_2x_3x_4 + 2)/2$ . Учитывая, что  $w \in (1; 1.5)$  и что функция  $t(w) = w^2 + 1/w^2$  возрастает на этом промежутке (действительно,  $t'(w) = 2w - 2/w^3 = 2(w-1)(w+1)(w^2+1)/w^3 > 0$ ), имеем  $m_1 = 2$  и  $m_2 = 9/4 + 4/9 = 97/36$ . В качестве плотности  $f(\mathbf{x})$  выбираем

$$f(\mathbf{x}) = \left( (3x^{(1)}(1 - (x^{(1)})^2)^{1/2}) \times \frac{x^{(1)} \cos(x^{(1)}x^{(2)})}{\sin x^{(1)}} \right) \times \\ \times \left( \frac{2x^{(3)}}{\sqrt{(x^{(3)})^2 + (3/4)^2}} \times \frac{x^{(3)}}{\ln(1 + x^{(3)})(1 + x^{(3)}x^{(4)})} \right), \quad 0 < x^{(j)} < 1;$$

$j = 1, 2, 3, 4$ . При выборе плотности учтены соображения из подразд. 14.5. Имеем  $I = \mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}q(\boldsymbol{\xi})$ , где  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \xi^{(4)})$ , причем компоненты  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$  и  $\xi^{(3)}, \xi^{(4)}$  попарно зависимы.

Формула метода обратной функции распределения для выборочных значений  $\xi_i^{(1)}$  случайной величины  $\xi^{(1)}$  получается из цепочки равенств

$$\int_0^{\xi_i^{(1)}} 3x^{(1)}(1 - (x^{(1)})^2)^{1/2} dx^{(1)} = \alpha_{1,i}, \quad 1 - (1 - (\xi_i^{(1)})^2)^{3/2} = \alpha_{1,i}$$

и, наконец,

$$\xi_i^{(1)} = \sqrt{1 - (\alpha'_{1,i})^{2/3}}, \quad \alpha'_{1,i} = 1 - \alpha_{1,i}. \quad (P4)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_{1,i} = 0$  дает  $\alpha'_{1,i} = 1$  и  $\xi_i^{(1)} = \sqrt{1 - 1^{2/3}} = 0$ , а при  $\alpha_{1,i} = 1$  имеем  $\alpha'_{1,i} = 0$  и  $\xi_i^{(1)} = \sqrt{1 - 0^{2/3}} = 1$ .

Формула метода обратной функции распределения для выборочных значений  $\xi_i^{(2)}$  случайной величины  $\xi^{(2)}$  получается из цепочки равенств

$$\int_0^{\xi_i^{(2)}} \frac{\xi_i^{(1)} \cos(\xi_i^{(1)}x^{(2)}) dx^{(2)}}{\sin \xi_i^{(1)}} = \alpha_{2,i}, \quad \frac{\sin(\xi_i^{(1)}\xi_i^{(2)})}{\sin \xi_i^{(1)}} = \alpha_{2,i}$$

и, наконец,

$$\xi_i^{(2)} = \frac{\arcsin(\alpha_{2,i} \sin \xi_i^{(1)})}{\xi_i^{(1)}}. \quad (P5)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_{2,i} = 0$  дает  $\xi_i^{(2)} = (1/\xi_i^{(1)}) \arcsin(0 \times \sin \xi_i^{(1)}) = 0$ , а при  $\alpha_{2,i} = 1$  имеем  $\xi_i^{(2)} = (1/\xi_i^{(1)}) \arcsin(1 \times \sin \xi_i^{(1)}) = \xi_i^{(1)}/\xi_i^{(1)} = 1$ .

Формула метода обратной функции распределения для выборочных значений  $\xi_i^{(3)}$  случайной величины  $\xi^{(3)}$  получается из цепочки равенств

$$\int_0^{\xi_i^{(3)}} \frac{2x^{(3)} dx^{(3)}}{\sqrt{(x^{(3)})^2 + (3/4)^2}} = \alpha_{3,i}, \quad 2 \left( \sqrt{(\xi_i^{(3)})^2 + (3/4)^2} - 3/4 \right) = \alpha_{3,i}$$

и, наконец,

$$\xi_i^{(3)} = \frac{\sqrt{\alpha_{3,i}(3 + \alpha_{3,i})}}{2}. \quad (P6)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_{3,i} = 0$  дает  $\xi_i^{(3)} = (1/2)\sqrt{0(3+0)} = 0$ , а при  $\alpha_{3,i} = 1$  имеем  $\xi_i^{(3)} = (1/2)\sqrt{1(3+1)} = 1$ .

Формула метода обратной функции распределения для выборочных значений  $\xi_i^{(4)}$  случайной величины  $\xi^{(4)}$  получается из цепочки равенств

$$\int_0^{\xi_i^{(4)}} \frac{\xi_i^{(3)} dx^{(4)}}{\ln(1 + \xi_i^{(3)})(1 + \xi_i^{(3)}x^{(4)})} = \alpha_{4,i}, \quad \frac{\ln(1 + \xi_i^{(3)}\xi_i^{(4)})}{\ln(1 + \xi_i^{(3)})} = \alpha_{4,i}$$

и, наконец,

$$\xi_{4,i} = \frac{\exp(\alpha_{4,i}(\ln(1 + \xi_i^{(3)}))) - 1}{\xi_i^{(3)}}. \quad (P7)$$

Проверка 13.1 при  $\alpha_{4,i} = 0$  дает

$$\xi_i^{(4)} = (1/\xi_i^{(3)}) (\exp(0 \times \ln(1 + \xi_i^{(3)})) - 1) = 0,$$

а при  $\alpha_{4,i} = 1$  имеем

$$\xi_i^{(4)} = (1/\xi_i^{(3)}) (\exp(1 \times \ln(1 + \xi_i^{(3)})) - 1) = (1 + \xi_i^{(3)} - 1)/\xi_i^{(3)} = 1.$$

Получаем следующий алгоритм выборки по важности.

Используя формулы (P4)–(P7), реализуем значения  $\xi_i^{(1)}$ ,  $\xi_i^{(2)}$ ,  $\xi_i^{(3)}$ ,  $\xi_i^{(4)}$  и приближенно вычисляем

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\theta_i} + \theta_i \right), \quad \text{где } \theta_i = (\xi_i^{(1)}\xi_i^{(2)}\xi_i^{(3)}\xi_i^{(4)} + 2)^2/4.$$

Справедливо неравенство  $\mathbf{D}\zeta \leq (m_2 - m_1)^2/4 \approx 0.120$ . Это достаточно малая величина и, следовательно, предложенный алгоритм выборки по важности эффективен.

**РЕШЕНИЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ  
ПО ТЕМЕ «ВЫБОРКА ПО ВАЖНОСТИ»**

Экзаменационные задачи по теме «Выборка по важности» сконструированы согласно технологии П1. Ставится задача вычисления интеграла  $I = \int g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , причем подынтегральная функция  $g(\mathbf{x})$  имеет вид  $g(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{x}) \times \tilde{q}(\mathbf{x})$ , где функция  $\tilde{f}(\mathbf{x})$  пропорциональна простой эффективно моделируемой плотности  $f(\mathbf{x}) = H\tilde{f}(\mathbf{x})$  случайного вектора  $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \xi^{(4)})$  с независимыми компонентами, распределенными, как правило, согласно табличным плотностям (см. замечание 13.3); для моделирования выборочных значений  $\xi_i^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ;  $i = 1, \dots, n$  можно использовать соответствующие табличные формулы (13.3), (13.5), (13.6) (при этом проверка 13.1 не требуется). Функция  $\tilde{q}(\mathbf{x})$  легко оценивается сверху и снизу положительными числами  $A \leq \tilde{q}(\mathbf{x}) \leq B$ . В стандартном алгоритме метода Монте-Карло имеем  $\zeta = q(\xi) = (1/H) \times \tilde{q}(\xi)$ , при этом  $m_1 \leq q(\mathbf{x}) \leq m_2$ , где  $m_1 = A/H$ ,  $m_2 = B/H$ . Дисперсия  $D\zeta$  оценивается сверху величиной  $(m_2 - m_1)^2/4$ . Малость этой величины обосновывает эффективность соответствующего алгоритма выборки по важности.

**ЗАДАЧА И1 (1.5 балла).** Сформулируйте метод выборки по важности и продемонстрируйте его на примере вычисления интеграла

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{+\infty} \left( x^{(2)} (x^{(3)})^2 e^{-4x^{(4)}} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{2 + \cos(6x^{(1)}(x^{(2)})^3(x^{(3)})^7(x^{(4)})^9)} \right) dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} dx^{(4)}.$$

Оцените дисперсию соответствующей оценки.

**РЕШЕНИЕ.** В качестве плотности  $f(\mathbf{x})$  выбираем

$$f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = 1 \times (2x^{(2)}) \times (3(x^{(3)})^2) \times (4e^{-4x^{(4)}}),$$

где  $0 < x^{(j)} < 1$ ,  $j = 1, 2, 3$  и  $x^{(4)} > 0$ , а функция  $q(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})/f(\mathbf{x})$  имеет вид

$$q(\mathbf{x}) = q(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = \frac{1}{24} \times \sqrt{2 + \cos(6x^{(1)}(x^{(2)})^3(x^{(3)})^7(x^{(4)})^9)}.$$

Учитывая, что  $-1 \leq \cos u \leq 1$ , получаем неравенства  $m_1 \leq q(\mathbf{x}) \leq m_2$ , где  $m_1 = 1/24$  и  $m_2 = \sqrt{3}/24$ .

Имеем  $I = \mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}q(\boldsymbol{\xi})$ , где  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \xi^{(4)})$ , причем компоненты  $\xi^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  независимы. Компонента  $\xi^{(1)}$  имеет табличное (равномерное) распределение на интервале  $(0, 1)$  (см. замечание 13.3), и для реализации соответствующих выборочных значений  $\xi_i^{(1)}$  следует использовать формулу (13.16). Компоненты  $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}$  имеют табличные (степенные) распределения, и для реализации соответствующих выборочных значений  $\xi_i^{(2)}, \xi_i^{(3)}$  следует использовать формулу (13.15). Компонента  $\xi^{(4)}$  также имеет табличное (на сей раз экспоненциальное) распределение с параметром  $\lambda = 4$ , и для реализации соответствующих выборочных значений  $\xi_i^{(4)}$  следует использовать формулу (13.13).

Получаем следующий алгоритм выборки по важности.

*Реализуем выборочные значения компонент вектора  $\boldsymbol{\xi}$  по формулам:  $\xi_i^{(1)} = \alpha_{1,i}$ ,  $\xi_i^{(2)} = \sqrt{\alpha_{2,i}}$ ,  $\xi_i^{(3)} = \sqrt[4]{\alpha_{3,i}}$ ,  $\xi_i^{(4)} = (-\ln \alpha_{4,i})/4$ , где  $i = 1, \dots, n$ , а  $\alpha_j$  – реализации стандартной случайной величины  $\alpha$ , и приближенно вычисляем*

$$I \approx \frac{1}{24n} \sum_{i=1}^n \sqrt{2 + \cos \left( 6\xi_i^{(1)} (\xi_i^{(2)})^3 (\xi_i^{(3)})^7 (\xi_i^{(4)})^9 \right)}.$$

Справедливо неравенство  $\mathbf{D}\zeta \leq (m_2 - m_1)^2/4 \approx 2.33 \times 10^{-4}$ . Это достаточно малая величина и, следовательно, предложенный алгоритм выборки по важности эффективен.

**ЗАДАЧА И2 (1.5 балла).** Сформулируйте метод выборки по важности и продемонстрируйте его на примере вычисления интеграла

$$I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left( e^{-10x^{(1)} - \pi x^{(2)}} \times \cos x^{(4)} \times \right. \\ \left. \times \arcsin \left( \frac{1}{1 + x^{(1)}(x^{(2)})^2(x^{(3)})^3(x^{(4)})^4} \right) \right) dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} dx^{(4)}.$$

Оцените дисперсию соответствующей оценки.

**РЕШЕНИЕ.** В качестве плотности  $f(\mathbf{x})$  выбираем

$$f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = (10 e^{-10x^{(1)}}) \times (\pi e^{-\pi x^{(2)}}) \times 1 \times (\cos x^{(4)}),$$

где  $x^{(1)} > 0$ ,  $x^{(2)} > 0$ ,  $0 < x^{(3)} < 1$ ,  $0 < x^{(4)} < \pi/2$ , а функция  $q(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})/f(\mathbf{x})$  имеет вид

$$q(\mathbf{x}) = q(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = \frac{1}{10\pi} \times \arcsin \left( \frac{1}{1 + x^{(1)}(x^{(2)})^2(x^{(3)})^3(x^{(4)})^4} \right).$$



Т.к.  $0 < \arcsin u < \pi/2$  при  $0 < u < 1$ , то выполнены неравенства  $m_1 \leq q(\mathbf{x}) \leq m_2$ , где  $m_1 = 0$  и  $m_2 = 1/20$ .

Имеем  $I = \mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}q(\boldsymbol{\xi})$ , где  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \xi^{(4)})$ , причем компоненты  $\xi^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  независимы. Компоненты  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$  имеют табличные (экспоненциальные) распределения с параметрами  $\lambda = 4$  и  $\lambda = \pi$  соответственно (см. замечание 13.3), и для реализации выборочных значений  $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}$  следует использовать формулу (13.13). Компонента  $\xi^{(3)}$  также имеет табличное (равномерное) распределение на интервале  $(0, 1)$ , и для реализации соответствующих выборочных значений  $\xi_i^{(3)}$  следует использовать формулу (13.16). Для компоненты  $\xi^{(4)}$  несложно вывести формулу метода обратной функции распределения:  $\int_0^{\xi_i^{(4)}} \cos x^{(4)} dx^{(4)} = \alpha_{4,i}$ , или  $\sin \xi_i^{(4)} = \alpha_{4,i}$ , или  $\xi_i^{(4)} = \arcsin \alpha_{4,i}$ .

Получаем следующий алгоритм выборки по важности.

*Реализуем выборочные значения компонент вектора  $\boldsymbol{\xi}$  по формулам:  $\xi_i^{(1)} = (-\ln \alpha_{1,i})/10$ ,  $\xi_i^{(2)} = (-\ln \alpha_{2,i})/\pi$ ,  $\xi_i^{(3)} = \alpha_{3,i}$ ,  $\xi_i^{(4)} = \arcsin \alpha_{4,i}$ , где  $i = 1, \dots, n$ , а  $\alpha_j$  — реализации стандартной случайной величины  $\alpha$ , и приближенно вычисляем*

$$I \approx \frac{1}{10\pi n} \sum_{i=1}^n \arcsin \left( \frac{1}{1 + \xi_i^{(1)} (\xi_i^{(2)})^2 (\xi_i^{(3)})^3 (\xi_i^{(4)})^4} \right).$$

Справедливо неравенство  $\mathbf{D}\zeta \leq (m_2 - m_1)^2/4 \approx 6.25 \times 10^{-4}$ . Это достаточно малая величина и, следовательно, предложенный алгоритм выборки по важности эффективен.

**ЗАДАЧА ИЗ (1.5 балла).** Сформулируйте метод выборки по важности и продемонстрируйте его на примере вычисления интеграла

$$I = \int_0^1 \int_0^{+\infty} \int_0^1 \int_0^1 \left( \cos \left( \frac{\pi x^{(1)}}{2} \right) e^{-2x^{(2)}} (x^{(3)})^3 \times \right. \\ \left. \times \arctg \left( (x^{(1)})^2 x^{(2)} + (x^{(3)})^3 (x^{(4)})^4 \right) \right) dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} dx^{(4)}.$$

Оцените дисперсию соответствующей оценки.

**РЕШЕНИЕ.** В качестве плотности  $f(\mathbf{x})$  выбираем

$$f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = \left( \frac{\pi}{2} \cos \left( \frac{\pi x^{(1)}}{2} \right) \right) \times (2e^{-2x^{(2)}}) \times (4(x^{(3)})^3) \times 1,$$

$0 < x^{(1)} < 1$ ;  $x^{(2)} > 0$ ;  $0 < x^{(3)} < 1$ ;  $0 < x^{(4)} < 1$ . Функция  $q(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})/f(\mathbf{x})$  имеет вид

$$q(\mathbf{x}) = q(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = \frac{1}{4\pi} \times \operatorname{arctg} \left( (x^{(1)})^2 x^{(2)} + (x^{(3)})^3 (x^{(4)})^4 \right).$$

Т.к.  $0 < \operatorname{arctg} u < \pi/2$  при  $u > 0$ , то выполнены неравенства  $m_1 \leq q(\mathbf{x}) \leq m_2$ , где  $m_1 = 0$  и  $m_2 = 1/8$ .

Имеем  $I = \mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}q(\boldsymbol{\xi})$ , где  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \xi^{(4)})$ , причем компоненты  $\xi^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  независимы. Для компоненты  $\xi^{(1)}$  несложно вывести формулу метода обратной функции распределения (см. выкладки (16.22)):  $\xi_i^{(1)} = (2/\pi) \arcsin \alpha_{1,i}$ . Компонента  $\xi^{(2)}$  имеет табличное (экспоненциальное) распределение с параметром  $\lambda = 2$ , и для реализации соответствующих выборочных значений  $\xi_i^{(2)}$  следует использовать формулу (13.13). Компонента  $\xi^{(3)}$  имеет табличное (степенное) распределение (см. замечание 13.3), и для реализации выборочных значений  $\xi_i^{(3)}$  следует использовать формулу (13.15). Компонента  $\xi^{(4)}$  также имеет табличное (равномерное) распределение, и для реализации соответствующих выборочных значений  $\xi_i^{(4)}$  следует использовать формулу (13.16).

Получаем следующий алгоритм выборки по важности.

*Реализуем выборочные значения компонент вектора  $\boldsymbol{\xi}$  по формулам:  $\xi_i^{(1)} = (2/\pi) \arcsin \alpha_{1,i}$ ,  $\xi_i^{(2)} = (-\ln \alpha_{2,i})/2$ ,  $\xi_i^{(3)} = \sqrt[4]{\alpha_{3,i}}$ ,  $\xi_i^{(4)} = \alpha_{4,i}$ , где  $i = 1, \dots, n$ , а  $\alpha_j$  – реализации стандартной случайной величины  $\alpha$ , и приближенно вычисляем*

$$I \approx \frac{1}{4\pi n} \sum_{i=1}^n \operatorname{arctg} \left( (\xi_i^{(1)})^2 \xi_i^{(2)} + (\xi_i^{(3)})^3 (\xi_i^{(4)})^4 \right).$$

Справедливо неравенство  $\mathbf{D}\zeta \leq (m_2 - m_1)^2/4 \approx 3.91 \times 10^{-3}$ . Это достаточно малая величина и, следовательно, предложенный алгоритм выборки по важности эффективен.

## Приложение 2

### Экзаменационные билеты

#### Билет 1

1. Задача по теме «*Моделирование случайного вектора*».
2. Вычисление математического ожидания и дисперсии методом Монте-Карло.

#### Билет 2

1. Задача по теме «*Моделирование случайного вектора*».
2. Вычисление интеграла методом Монте-Карло.

#### Билет 3

1. Задача по теме «*Моделирование случайного вектора*».
2. Погрешность и трудоемкость метода Монте-Карло.

#### Билет 4

1. Задача по теме «*Метод обратной функции распределения*».
2. Метод выборки по важности.

#### Билет 5

1. Задача по теме «*Метод дискретной суперпозиции*».
2. Методы уменьшения дисперсии (основные идеи): выделение главной части, интегрирование по части области, выборка по группам.

#### Билет 6

1. Задача по теме «*Метод дискретной суперпозиции*».
2. Случайные элементы в задачах теории переноса.

#### Билет 7

1. Задача по теме «*Метод исключения*».
2. Интегральное уравнение второго рода, ряд Неймана. Линейный функционал, как интеграл бесконечно возрастающей кратности.

#### Билет 8

1. Задача по теме «*Метод исключения*».
2. Однородная цепь Маркова, обрывающаяся с вероятностью единица, и ее моделирование.

#### Билет 9

1. Задача по теме «*Метод исключения*».
2. Оценка по столкновениям для вычисления линейного функционала от решения интегрального уравнения второго рода. Прямое моделирование. Локальные оценки.

**Билет 10**

1. Задача по теме «*Метод исключения*».
2. Физические датчики случайных чисел и генераторы псевдослучайных чисел. Метод вычетов и его свойства.

**Билет 11**

1. Задача по теме «*Выборка по важности*».
2. Стандартный метод моделирования дискретных распределений и его трудоемкость.

**Билет 12**

1. Задача по теме «*Выборка по важности*».
2. Моделирование равномерного дискретного распределения. Квантильный метод.

**Билет 13**

1. Задача по теме «*Выборка по важности*».
2. Метод обратной функции распределения. Конструирование моделируемых плотностей.

**Билет 14**

1. Задача по теме «*Метод дискретной суперпозиции*».
2. Моделирование случайных векторов. Конструирование двумерного моделируемого вектора с зависимыми компонентами.

**Билет 15**

1. Задача по теме «*Выборка по важности*».
2. Методы интегральной и дискретной суперпозиции. Конструирование моделируемых плотностей

**Билет 16**

1. Задача по теме «*Метод обратной функции распределения*».
2. Обоснование метода исключения. Конструирование плотностей случайных величин, эффективно моделируемых методом исключения.

**Билет 17**

1. Задача по теме «*Моделирование случайного вектора*».
2. Некоторые специальные методы моделирования непрерывных случайных величин.

## Приложение 3

### Домашнее задание

Опыт преподавания теории методов Монте-Карло на физическом и механико-математическом факультетах Новосибирского государственного университета показал целесообразность выполнения студентами следующего творческого домашнего задания.

1. Приведите  $k$  примеров  $d$ -мерных случайных величин, реализации которых целесообразно получать:

а) методом обратной функции распределения,  $k = 2$ ,  $d = 1$ ;

б) стандартным методом моделирования многомерной случайной величины,  $k = 2$ ,  $d = 2$ ;

в) методом интегральной суперпозиции,  $k = 1$ ,  $d = 1$ ;

г) методом дискретной суперпозиции,  $k = 2$ ,  $d = 1$ ;

д) мажорантным методом исключения,  $k = 2$ ,  $d = 1$ ;

е) мажорантным методом исключения,  $k = 1$ ,  $d = 2$ .

Опишите соответствующие алгоритмы, а для пунктов д, е оцените сверху трудоемкость построенных алгоритмов.

2. Приведите три примера четырехкратных интегралов, которые целесообразно вычислять методом Монте-Карло с использованием выборки по важности. Оцените дисперсию соответствующих стохастических оценок метода Монте-Карло.

Примеры следует оформлять как задачи по соответствующим темам. Образцами оформления являются:

– для п. 1а: примеры 13.1–13.8, задачи А1–А3;

– для п. 1б: примеры 14.1–14.3, задачи Б1–Б3;

– для п. 1в: пример 15.1;

– для п. 1г: примеры 15.2–15.4, задачи Г1–Г3;

– для п. 1д: примеры 16.1, 16.3, задачи Д1–Д3;

– для п. 1е: пример 16.4;

– для п. 2: примеры П1–П3, задачи И1–И3.

Задачи оцениваются баллом: от нуля до трех (таким образом, максимальный суммарный балл за все задание – 39). Примеры такого оценивания приведены в тексте данного пособия после заголовков перечисленных выше примеров и задач. Студенты, успешно выполнившие задание (т.е. набравшие 24 балла и выше), заслуживают поощрения в конце семестра (допуск до досрочного экзамена; отсутствие задачи в

экзаменационном билете и т. п.). Лучшие примеры используются при составлении экзаменационных билетов по методам Монте-Карло.

Для выполнения пунктов задания целесообразно использовать описанные в пособии технологии: для п. 1а – технологию 13.1, для п.п. 1б, 1в – технологию 14.1, для п. 1г – технологию 15.1, для п.п. 1д, 1е – технологию 16.1, для п. 2 – технологию П1.

Основой успешного использования описанных технологий является умение конструировать *элементарные плотности* (см. разд. 13), т. е. такие, для которых эффективно реализуем метод обратной функции распределения. Особо отметим, что эти плотности нужны не только в пункте 1а, непосредственно посвященном методу обратной функции распределения, но и во всех остальных пунктах. Так, для каждого примера п.п. 1б, 1в при использовании технологии 14.1 требуются две элементарные плотности (одна из которых – с параметром); также два моделируемых распределения, сосредоточенных на одном и том же интервале, нужны при применении технологии 15.1 в п. 1г; элементарная плотность, пропорциональная мажоранте, выбирается при применении технологии 16.1 (п. 1д), а в соответствующем двумерном случае (в п. 1е) требуются два элементарных распределения; наконец, в п. 2 в каждом примере выбираются по четыре элементарных плотности распределения (для компонент выбираемого четырехмерного случайного вектора). Итого требуется около трех десятков элементарных плотностей, причем для получения высокой оценки за задание следует стремиться к тому, чтобы все эти функции были разными и отличались от элементарных плотностей, используемых в известных пособиях. Такую возможность дает технология 13.1 («технология вложенных замен»). Здесь, однако, не следует использовать более трех вложенных замен (желательно, чтобы и сами плотности, и моделирующие формулы оставались «обозримыми», компактными). Кроме применения технологии 13.1 к повышению оценок за примеры может привести увеличение числа слагаемых в технологии 15.1, использование более оригинальных и сложных для исследования функций «порчи» в технологиях 16.1, П1 и др.

Некоторые дополнительные возможности построения моделируемых плотностей описаны в работе [11]. В частности, показан ряд альтернативных способов построения плотности распределения двумерного случайного вектора с зависимыми компонентами (рассмотрение непрямоугольных областей, замена переменных и др.), которые, однако, обладают меньшей степенью общности по сравнению с технологией 14.1.

## Приложение 4

### Планы лекций и семинаров

**Лекция 1.** Разделы 1–3.

**Лекция 2.** Разделы 4, 5.

**Лекция 3.** Разделы 6–9.

**Лекция 4.** Разделы 10–12.

**Лекция 5.** Раздел 13.

**Лекция 6.** Разделы 14, 15.

**Лекция 7.** Разделы 16, 17.

#### Семинарское занятие 1

Основные идеи метода Монте-Карло: вычисление математического ожидания, вычисление интеграла, решение интегральных уравнений, погрешность и трудоемкость метода, проблемы уменьшения трудоемкости, выборка по важности, численное моделирование случайных элементов.

**ЗАДАНИЕ:** Читать разд. 1–13.

**ДОКЛАДЫ СТУДЕНТОВ НА ЗАНЯТИИ 2:**

1.1. Пример 13.1 (моделирование экспоненциального распределения).

1.2. Примеры 13.2 и 13.3 (моделирование степенного распределения и распределения Парето).

#### Семинарское занятие 2

1. Повторение: основные идеи метода Монте-Карло.

2. Генераторы случайных и псевдослучайных чисел: свойства стандартных случайных чисел, способы их получения, метод вычетов и его свойства, тестирование.

3. Моделирование дискретных случайных величин: стандартный метод, среднее число вычитаний вероятностей, равномерное распределение, оптимизация стандартного алгоритма, квантильный метод.

4. Метод обратной функции распределения (начало): непрерывные случайные величины, функция распределения, плотность, обоснование метода обратной функции распределения, неэлементарные и элементарные распределения, моделирование экспоненциального распределения

(доклад 1.1), моделирование степенного распределения и распределения Парето (доклад 1.2).

ЗАДАНИЕ: Читать разд. 13–15 и прил. 3.

ДОКЛАДЫ СТУДЕНТОВ НА ЗАНЯТИИ 3:

2.1. Задача А1 (экзаменационная задача по методу обратной функции распределения).

2.2. Пример 14.1 («взвешенный» показатель экспоненты).

2.3. Задача Б2 (экзаменационная задача по моделированию случайных векторов).

2.4. Пример 15.1 (метод интегральной суперпозиции).

### Семинарское занятие 3

1. Домашнее задание: формулировка, срок – к занятию 6.

2. Метод обратной функции распределения (продолжение): технология 13.1, пример экзаменационной задачи (доклад 2.1), ошибки при построении элементарных распределений, проверка 13.1.

3. Стандартный метод моделирования случайных векторов: разложения совместной плотности, алгоритм моделирования, двумерный случай, технология 14.1, пример (доклад 2.2), экзаменационная задача (доклад 2.3).

4. Метод интегральной суперпозиции: постановка задачи, пример (доклад 2.4).

ЗАДАНИЕ: Читать разд. 15, 16. По домашнему заданию: построение элементарных плотностей (до 20 шт.); примеры для пунктов 1а)–1в).

ДОКЛАДЫ СТУДЕНТОВ НА ЗАНЯТИИ 4:

3.1. Пример 15.4 (метод дискретной суперпозиции).

3.2. Задача Г1 (экзаменационная задача по методу суперпозиции).

3.3. Пример 16.2 (моделирование полиномиальной плотности).

3.4. Пример 16.1 («испорченное» экспоненциальное распределение).

3.5. Задача Д1 (экзаменационная задача по методу исключения).

### Семинарское занятие 4

1. Метод дискретной суперпозиции: вид плотности, технология 15.1, пример (доклад 3.1), экзаменационная задача (доклад 3.2).

2. Мажорантный метод исключения: теоремы, обосновывающие метод; пример – полиномиальная плотность (доклад 3.3), технология 16.1, пример (доклад 3.4), экзаменационная задача (доклад 3.5).



**ЗАДАНИЕ:** Читать разд. 13–16 и прил. 1. По домашнему заданию: примеры для п.п. 1г)–1е).

**ДОКЛАДЫ СТУДЕНТОВ НА ЗАНЯТИИ 5:**

4.1. Задача И3 (экзаменационная задача по теме «Выборка по важности»).

4.2. Задача А2 (метод обратной функции распределения).

4.3. Задача Б3 (моделирование двумерного вектора).

4.4. Задача Г3 (метод суперпозиции).

4.5. Задача Д2 (метод исключения).

### **Семинарское занятие 5**

1. Выборка по важности: стандартный метод Монте-Карло для вычисления интеграла, его погрешность и трудоемкость, оптимальный выбор плотности, технология П1, экзаменационная задача (доклад 4.1).

2. Повторение: все технологии семестрового домашнего задания (примеры – доклады 4.2–4.5).

**ЗАДАНИЕ:** Читать разд. 1–9. Приготовить к сдаче домашнее задание.

**ДОКЛАДЫ СТУДЕНТОВ НА ЗАНЯТИИ 6:**

5.1. Раздел 5.1 (выделение главной части).

5.2. Раздел 5.2 (интегрирование по части области).

5.3. Раздел 5.3 (выборка по группам).

### **Семинарское занятие 6**

1. Прием домашнего задания.

2. Методы понижения дисперсии: включение особенности в плотность в методе выборки по важности; выделение главной части (доклад 5.1); интегрирование по части области (доклад 5.2); метод математических ожиданий; метод расщепления; метод симметризации переменных, выборка по группам (доклад 5.3).

3. Решение интегральных уравнений и численное интегрирование (разд. 6–9).

### **Семинарское занятие 7**

1. Об экзамене по курсу: порядок проведения, задачи, дополнительные вопросы.

2. Разбор домашнего задания: обзор типичных ошибок.

## Библиографический список

1. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006.
2. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
3. Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров, проверка гипотез. М.: Наука, 1984.
4. Войтишек А. В. Символьные и численные расчеты в физических приложениях. Часть II: Основы метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2006.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
6. Войтишек А. В. Дискретно-стохастические модификации стандартного метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2009.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
8. Войтишек А. В. Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2007.
9. Михайлов Г. А. Весовые алгоритмы статистического моделирования. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2003.
10. Дэйвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979.
11. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло. Семестровое домашнее задание. Новосибирск: НГУ, 2002.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
1. Вычисление математического ожидания и дисперсии методом Монте-Карло .....	4
2. Вычисление интеграла методом Монте-Карло .....	6
3. Погрешность и трудоемкость метода Монте-Карло .....	7
4. Метод выборки по важности .....	9
5. Методы понижения дисперсии (основные идеи) .....	13
6. Случайные элементы в задачах теории переноса .....	16
7. Интегральное уравнение второго рода, ряд Неймана. Линейный функционал, как интеграл бесконечно возрастающей кратности	19
8. Однородная цепь Маркова, обрывающаяся с вероятностью единица, и ее моделирование .....	21
9. Оценка по столкновениям для вычисления линейного функционала от решения интегрального уравнения второго рода. Прямое моделирование. Локальные оценки .....	23
10. Физические датчики стандартных случайных чисел и генераторы псевдослучайных чисел. Метод вычетов и его свойства .....	26
11. Стандартный метод моделирования дискретного распределения и его трудоемкость .....	32
12. Моделирование равномерного дискретного распределения. Квантильный метод .....	36
13. Метод обратной функции распределения. Конструирование моделируемых плотностей .....	38
14. Моделирование случайных векторов. Конструирование двумерного моделируемого вектора с зависимыми компонентами	53
15. Методы интегральной и дискретной суперпозиции. Конструиро- вание моделируемых плотностей .....	62
16. Обоснование метода исключения. Конструирование плотностей случайных величин, эффективно моделируемых методом исключения .....	74
17. Некоторые специальные методы моделирования непрерывных случайных величин .....	86

Приложение 1. Конструирование и решение экзаменационных задач по теме «Выборка по важности» .....	89
Приложение 2. Экзаменационные билеты .....	99
Приложение 3. Домашнее задание .....	101
Приложение 4. Планы лекций и семинаров .....	103
Библиографический список .....	106