ВОПРОСЫ ДЛЯ ЭКЗАМЕНА

по математическому анализу

2-й курс, 2-й поток, весенний семестр 2020 года

1. Мера прямоугольников и ее свойства.
2. Определение и свойства элементарных множеств.
3. Мера элементарных множеств и ее простейшие свойства.
4. Счетная полуаддитивность и счетная аддитивность меры элементарных множеств.
5. Понятие внешней меры и ее свойства.
6. Определение измеримых множеств. Замкнутость класса измеримых множеств относительно теоретико-множественных операций.
7. Аддитивность меры измеримых множеств.
8. Измеримость счетных объединений и пересечений.
9. Счетная аддитивность меры.
10. Непрерывность меры.
11. Измеримость открытых и замкнутых множеств.
12. Пример неизмеримого множества.
13. Понятие измеримых функций и их эквивалентные определения. Прообразы борелевских множеств при измеримых отображениях.
14. Супремум, инфимум и предел последовательности измеримых функций.
15. Аппроксимация измеримых функций ступенчатыми.
16. Измеримость непрерывных функций. Суперпозиция измеримой и непрерывной функций.
17. Сумма, произведение, отношение измеримых функций.
18. Свойства, выполняемые почти всюду. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова.
19. Понятие суммируемости для ступенчатых функций на множестве конечной меры. Эквивалентность суммируемости и абсолютной суммируемости.
20. Линейность, монотонность и аддитивность интеграла от ступенчатых функций.
21. Суммируемые измеримые функции на множестве конечной меры. Интеграл Лебега от измеримой функции.
22. Примеры суммируемых и несуммируемых функций двух переменных.
23. Абсолютная суммируемость, линейность, монотонность и аддитивность интеграла Лебега.
24. Счетная аддитивность интеграла.
25. Абсолютная непрерывность интеграла.
26. Неравенство Чебышева и следствие из него.
27. Теоремы Лебега, Леви и Фату о предельном переходе под знаком интеграла.
28. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.
29. Распространение основных свойств интеграла на множества бесконечной меры. Доказательство теорем о предельном переходе для интегралов по множеству бесконечной меры.
30. Сравнение интегралов Римана и Лебега в одномерном случае.

31. Подграфики неотрицательных суммируемых функций. Теорема о геометрическом смысле интеграла Лебега.

32. Лемма об аппроксимации измеримых множеств при помощи элементарных.

33. Теорема Лебега — Кавальери.

34. Теорема Фубини.

35. Частичное обращение теоремы Фубини.

36. Бесконечно дифференцируемые финитные функции. Существование бесконечно дифференцируемой функции с носителем в данном открытом множестве, равной единице на данном компакте.

37. Теорема о разбиении единицы.

38. Замена переменных в интеграле от непрерывной финитной функции в одномерном случае.

39. Замена переменных в интеграле от непрерывной финитной функции в многомерном случае.

40. Теорема о мерах образов измеримых множеств при диффеоморфизмах (без доказательства).

41. Теорема о замене переменных в интегралах от суммируемых функций.

42. Параллелепипеды, порожденные системами векторов в R^n. Геометрический смысл определителя.

43. Матрица Грама системы векторов. Формула k-мерного объема k-мерного параллелепипеда в R^n. Вычисление объема параллелепипеда путем умножения площади грани на высоту. Неравенство Адамара.

44. Определение измеримого множества на элементарном многообразии размерности k в пространстве R^n и доказательство его корректности.

45. Интегралы первого рода от функций на элементарных многообразиях.

46. Элементарные измеримые "куски" произвольного многообразия; их пересечения и разности.

47. Понятия меры множеств и интегралов первого рода для произвольных многообразий. Доказательство корректности определений.

48. Интегралы первого рода по кривым и поверхностям в R^3.

49. Специальные параметризации в окрестности границы области.

50. Понятия внешних и внутренних по отношению к данной области векторов, выходящих из граничных точек. Формальные отличия внешних и внутренних векторов.

51. Нормали к $(n-1)$-мерной поверхности, ограничивающей область в R^n. Их вычисление и свойства.

52. Основная формула интегрального исчисления в R^n.

53. Формулы Грина и Гаусса — Остроградского.

54. Ориентация кривой. Согласование параметризаций и ориентаций. Понятие криволинейного интеграла второго рода.

55. Формула Грина для интегралов второго рода.

56. Ориентированные поверхности в R^3. Согласование параметризаций и ориентаций, поверхностный интеграл второго рода.

57. Замкнутые кривые, ограничивающие области на гладких ориентированных многообразиях в R^3. Наглядные предствления о согласовании ориентации этих кривых с ориентациями поверхностей.

58. Ротор векторного поля. Формула Стокса (без доказательства).

Список литературы

[1] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М.: Наука, 1981.

[2] М. Спивак, *Математический анализ на многообразиях*, М.: Мир, 1968.

[3] Ю.Г. Решетняк, *Курс математического анализа*, Часть II, книга 2, Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2001.

[4] С.М. Никольский, *Курс математического анализа*, т. 2, М.: Наука, 1975.

Содержание большинства вопросов для экзамена имеется в литературных источниках [1]–[4]. Конкретные ссылки приведены ниже. Правда, в некоторых случаях форма изложения отличается от использованной в лекционном курсе.

Вопросы 1–12 см. [1], гл. V, § 1.
Вопросы 13–18 см. [1], гл. V, § 4.
Вопросы 19–30 см. [1], гл. V, § 5.
Вопросы 31–35 см. [1], гл. V, § 6.
Вопросы 36–39 см. [2], гл. 3, пункты 3.11–3.13.
Вопросы 42–48 см. [3], гл. 15, §§ 3–4.
Вопросы 53–58 см. [4], гл. 13, §§ 13.1–13.11.