Лекция 9 (МССж).

Центрированные простые волны.

Определение. Простая r–волна (соответственно l–волна) называется центрированной в точке (x_o,t_o), если все ее прямолинейные характеристики C_- (соответственно C_+) пересекаются в этой точке.

Пусть имеется простая r– волна центрированная в точке (x_o,t_o). Тогда в ее уравнении, переписанном в виде

$$x - x_o - (u - c)(t - t_o) = F(u) \qquad (1)$$

коэффициент $u - c$ и правая часть $F(u)$ постоянны вдоль любого принадлежащего r– волне луча с уравнением $x - x_o = к\,(t - t_o)$. Но, если вдоль этого луча (x,t) стремится к точке (x_o,t_o), то левая часть в (1) стремится к нулю. Следовательно, на каждом таком луче $F(u) = 0$, то есть функция $F \equiv 0$. Аналогично, для центрир. l–волны.

Уравнения

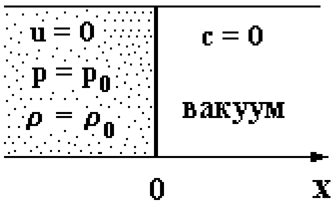
центрированной r-волны:	центрированной l-волны:
$r = u + \sigma(\rho) \equiv r_0 = \text{const}$,	$l = u - \sigma(\rho) \equiv l_0 = \text{const}$,
$x - x_o = (u - c)(t - t_o)$.	$x - x_o = (u + c)(t - t_o)$. (2)

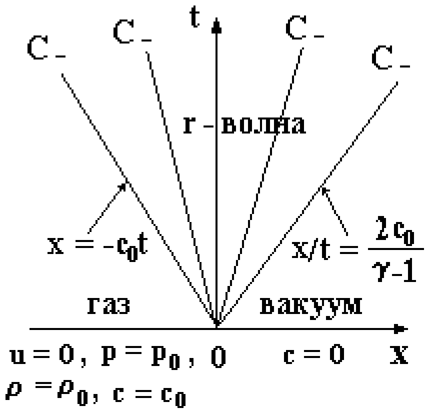
Центрированные простые волны дают пример решений с особенностью. В точке (x_o,t_o) основные величины разрывные (видно из формул (2)), а область существования решения есть некоторый сектор, не содержащий оси x. С увеличением времени t разрыв расплывается. Тем не менее, центрированные простые волны образуются вполне естественно, как будет видно из примеров.

Пример. Истечение газа в вакуум.

При $t = 0$ покоящийся газ и вакуум разделены перегородкой. Потом она мгновенно убирается. Определить течение газа при $t>0$. (Течение одномерное, с плоскими волнами). Уравнение состояния газа известно.

Область покоя (см. рис.) ограничена справа характеристикой C_-. В силу теоремы единственности в области определенности решения этими начальными данными, ограниченного справа характеристикой C_- с уравнением $x = - c_o t$ газ покоится ($u = 0$) и скорость звука $c = c_o$ при всех $t > 0$.





Непостоянное движение, примыкающее к области покоя вдоль этой характеристики C_- должно быть простой волной, а именно, r–волной. Однако, при $t = 0$ и $x > 0$ находится вакуум ($c = 0$). Поэтому никакая прямолинейная характеристика C_-, не будучи линией вакуума, не может достичь полуоси $\{t = 0, x > 0\}$ и имеется единственная возможность: простая r–волна должна быть *центририрована* в т. (0,0). Решение дается формулами (2), где r_o определяется условием на граничной характеристике C_- ($x = -c_o t$), на которой $u = 0$. Следовательно, $r_o = \sigma(\rho_o)$ и решение задачи дается соотношениями:

$$u + \sigma(\rho) \equiv \sigma(\rho_o) \quad (\text{или } u + \sigma(c) \equiv \sigma(c_o)), \qquad u - c = x/t.$$

На границе истекающего газа с вакуумом $c = 0$ и скорость истечения максимальна $u_m = \sigma(c_o)$.

Для политропного газа константа r_o выписывается в явном виде $r_o = 2c_o/(\gamma - 1)$ и решение имеет вид

$$u = 2(c_o + x/t)/(\gamma + 1), \quad c = 2[c_o - (\gamma - 1)(x/t)/2]/(\gamma + 1).$$

Скорость истечения газа $u_m = 2c_o/(\gamma - 1)$. Картина течения на плоскости событий изображена на рис. Правый фронт r–волны определяется из условия $c = 0$, то есть $x/t = 2c_o/(\gamma - 1)$.

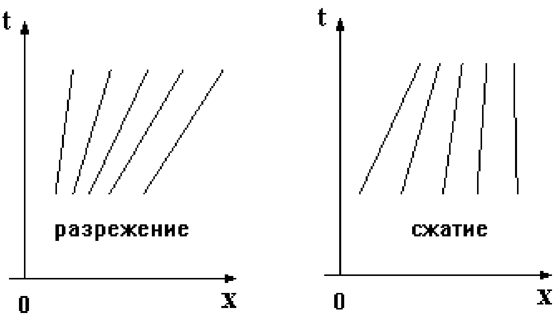
Таким образом, вырабатывается непрерывное решение при разрывных начальных данных.

<u>Волны сжатия и разрежения</u>.

Процесс распространения ПВ по частицам газа сопровождается увеличением (уменьшением) плотности ρ в каждой частице. Ясно, что направление изменения плотности ρ в частице со временем характеризуется знаком производной $D_o\rho = \partial\rho/\partial t + u\partial\rho/\partial x$.

Определение. Простая волна называется *волной сжатия* (соответственно волной *разрежения*), если плотность ρ в частице со временем возрастает ($D_o\rho > 0$) (соответств. убывает, $D_o\rho < 0$).

Эти волны можно различать, рисуя картину соответствующих прямолинейных характеристик на плоскости событий $R^2(x,t)$. Они образуют "веер", а так как наклон меняется, то "ручка веера", то есть та его часть, где прямые характеристики расположены теснее, может быть как сверху, так и снизу.



Теорема. В ПВ сжатия (разрежения) характеристики прямолинейного семейства сходятся (расходятся) с ростом t.

Док-во: Рассмотрим r-волну: $r = u + \sigma(\rho) \equiv r_o$. (3)
Характеристики семейства C_-: $dx/dt = u - c$ прямолинейны. Пусть это волна сжатия: $D_o\rho > 0$. Из уравнения неразрывности: $D_o\rho + \rho u_x = 0$ следует, что $u_x < 0$. Продифференцируем уравнение (3) по x: $u_x + \sigma'(\rho)\rho_x = 0$. Продифференцируем $u - c$ по x: $(u - c)_x = u_x - c_x = u_x - c'(\rho)\rho_x = u_x[1 + c'(\rho)/\sigma'(\rho)]$ - квадратная скобка > 0, так как для нормального газа $\sigma'(\rho) = c/\rho > 0$. Следовательно, $(u - c)_x < 0$, так как наклон характеристик к оси t с ростом x уменьшается, то есть эти характеристики сходятся с ростом времени t. Аналогично доказывается для волны разрежения.

Градиентная катастрофа.

В простых волнах сжатия непрерывное движение газа не может существовать как угодно долго (при всех t > 0). Сближающиеся с ростом t прямолинейные характеристики должны пересечься при конечном t. При сближении характеристик (когда необходимо $|(u - c)_x| \to \infty$) происходит *неограниченный* рост градиентов основных величин – абсолютных величин u_x, p_x и т. д., которые в точке пересечения характеристик обращаются в бесконечность. Явление неограниченного роста градиентов основных величин называется <u>градиентной катастрофой.</u>

Вычислим момент времени, соответствующий градиентной катастрофе. Рассмотрим r–волну: $r = r_o$. Уравнения газодинамики сводятся в этой области к уравнению для инварианта l (l – переменный инвариант *в* r– волне).

$$l_t + (u - c)\, l_x = 0. \qquad (4)$$

$u - c$ - постоянно вдоль C_- (характеристики C_- прямолинейны), на которой (вдоль нее) постоянен l**.** Следовательно,

$$u - c = f(l). \qquad (5)$$

Начальное условие $l|_{t = to} = l_0(x)$.

Подставим соотношение (5) в (4) и продифференцируем по x:

$$(l_x)_t + (u - c)\,(l_x)_x + f'(l)\, l_x^2 = 0 \quad \text{или} \quad D_- l_x + f'(l)\, l_x^2 = 0 \;\to$$

$$f'(l) + D_- l_x / l_x^2 = 0 \text{ или } f'(l) - D_-(1/l_x) = 0.$$

Вдоль C_-: $D_- \equiv d/dt$. Проинтегрируем вдоль некоторой C_- характеристики от 0 до t : ($l = l_o$ вдоль C_-)

$$-1/l_x + 1/lo_x + f'(l_o)t = 0 \;\text{ найдем}$$

$$l_x = lo_x/(1 + lo_x\, f'(l_o)t). \qquad (6)$$

$f'(l_o) \ge 0$ для нормального газа. Таким образом, если $lo_x > 0$ градиентной катастрофы нет, иначе в некоторый момент времени t наступает градиентная катастрофа. Приравняем в соотношении (6) знаменатель нулю и найдем $t = -1/[lo_x f'(l_o)]$. Тогда момент наступления градиентной катастрофы равен

$$\mathbf{t_{кат}} = \inf_{x,\; lo_x < 0} \left(-1/[lo_x\, f'(l_o)] \right).$$

Градиентная катастрофа - обычное явление в неравномерных движениях газа. Для ее предотвращения должны выполняться специальные ограничения, связанные со знаками градиентов инвариантов Римана. В момент наступления градиентной катастрофы основные величины становятся разрывными и при дальнейшем продолжении движения оно будет содержать сильные разрывы. Тем самым возникает необходимость изучить обобщенные движения газа, определяемые разрывными начальными данными.