

# Обратная задача для математической модели распространения коронавируса COVID-19 в Российской Федерации

О. Криворотько, С. Кабанихин, Н.Ю. Зятков, Н.Т. Banks, А. Романюха, V. Kashtanova, J. Cheng, S. Zhang, A. Takuadina



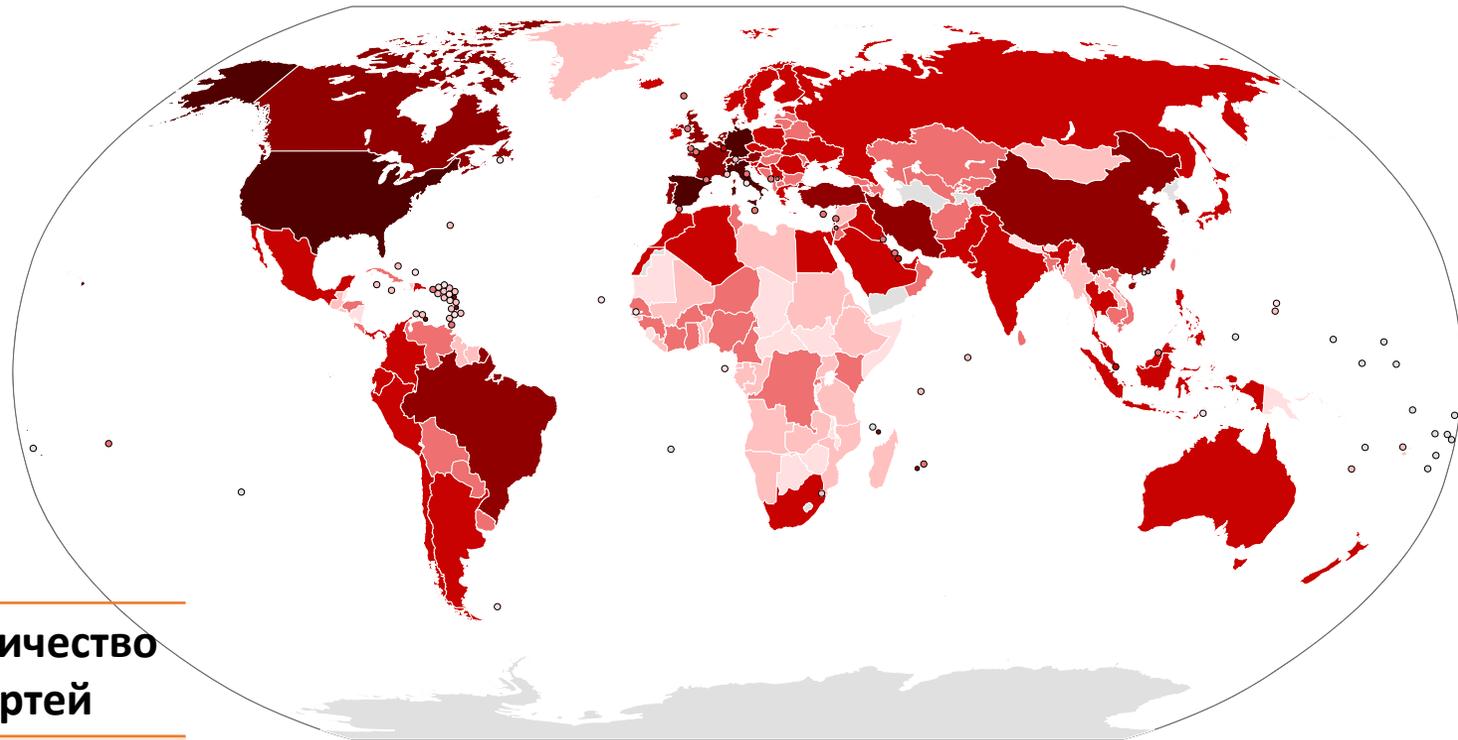
10 апреля 2020

# Динамика распространённости COVID-19 в мире на 07.04.2020

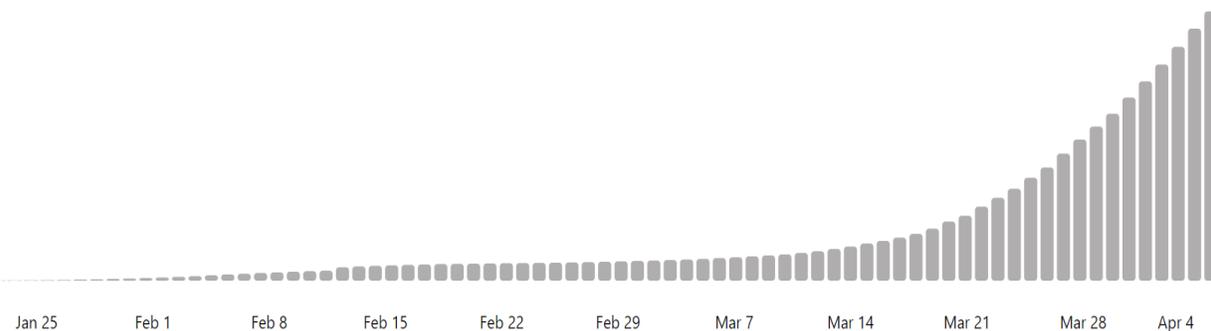
**Зарегистрировано: 1 347 892**

**Вылечено: 277 402**

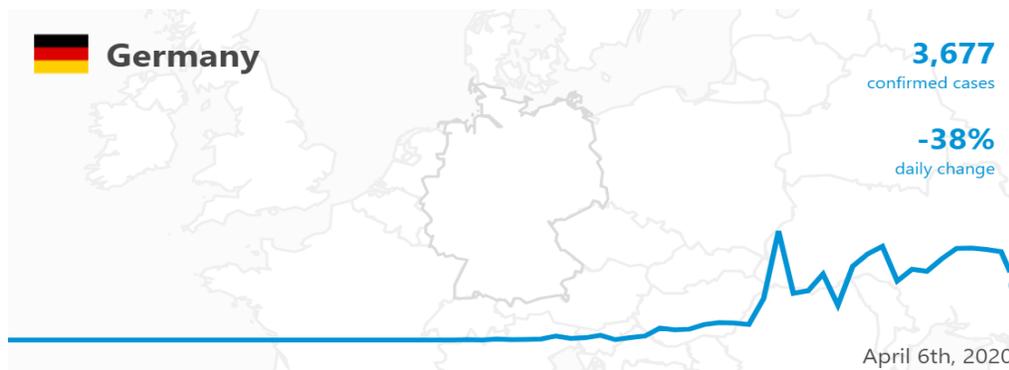
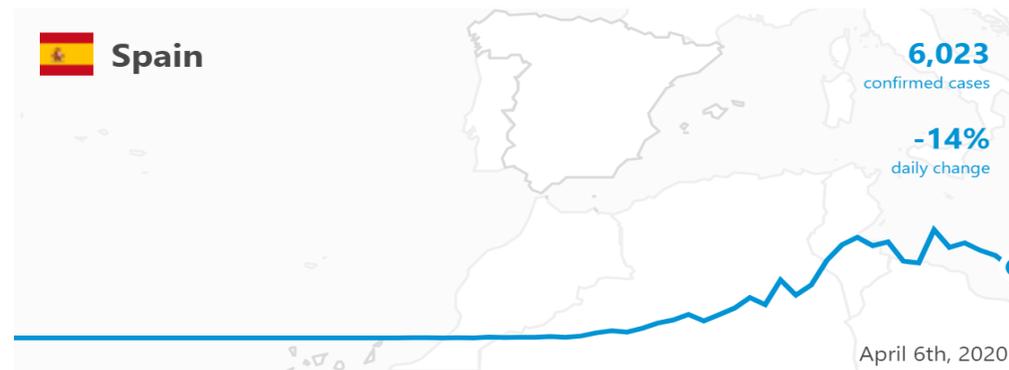
**Умерло: 74 808**



Страна	Подтвержденные случаи	Количество выздоровлений	Количество смертей
США	368 241	19 828	10 986
Испания	136 675	40 437	13 341
Италия	132 547	22 837	16 523
Германия	103 375	28 700	1 810
Франция	98 984	17 429	8 926



# Динамика распространённости COVID-19 в эндемичных странах на 06.04.2020



## Математические модели эпидемиологии: краткая история

W.H. Frost (1937)	Математическая модель эпидемии туберкулеза
H.T. Waaler (1962)	Целостная линейная математическая модель распространения эпидемии туберкулеза (включающая описание процессов заражения, развития латентной (бессимптомной) инфекции и болезни и дальнейшего распространения инфекции) – 5 уравнений
C.S. ReVelle (1967)	Первая математическая модель эпидемического процесса туберкулеза, основанная на нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнениях. Сформулировал задачу оптимальной с экономической точки зрения стратегии борьбы с туберкулезом – 5 уравнений
A.A. Романюха (2004)	Разработка математических моделей распространения туберкулеза, опубликованные на территории бывшего СССР – 6 уравнений
J. Zhang (2005)	Модель вспышки тяжёлого острого респираторного синдрома (SARS) в Китае 2003 года – 7 уравнений
M. Tahir (2010)	Модель эпидемии ближневосточного респираторного синдрома (MERS) в Саудовской Аравии и Южной Корее
A. Zlojutro (12.2019)	Включение пассажиропотоков в простейшую SEIR (4х-камерную) модель с использованием графов
T. Chen (01.2020)	Математическая модель распространения коронавируса COVID-19 от источника инфекции (летучих мышей) к человеку в провинции Ухань – 14 уравнений
J. Cheng (02.2020)	Обратная задача для системы 4 интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием с информацией о количестве инфицированных и вылеченных индивидуумов за 2 недели
О.И. Криворотько, С.И. Кабанихин (02.2020)	Обратная задача для системы 6 дифференциальных уравнений. Прогнозирование и идентифицируемость
R. Sameni (03.2020)	Математическая модель распространения COVID-19 с реальными данными – 5 уравнений

# Математическая модель распространения коронавируса COVID-19 в регионах Российской Федерации

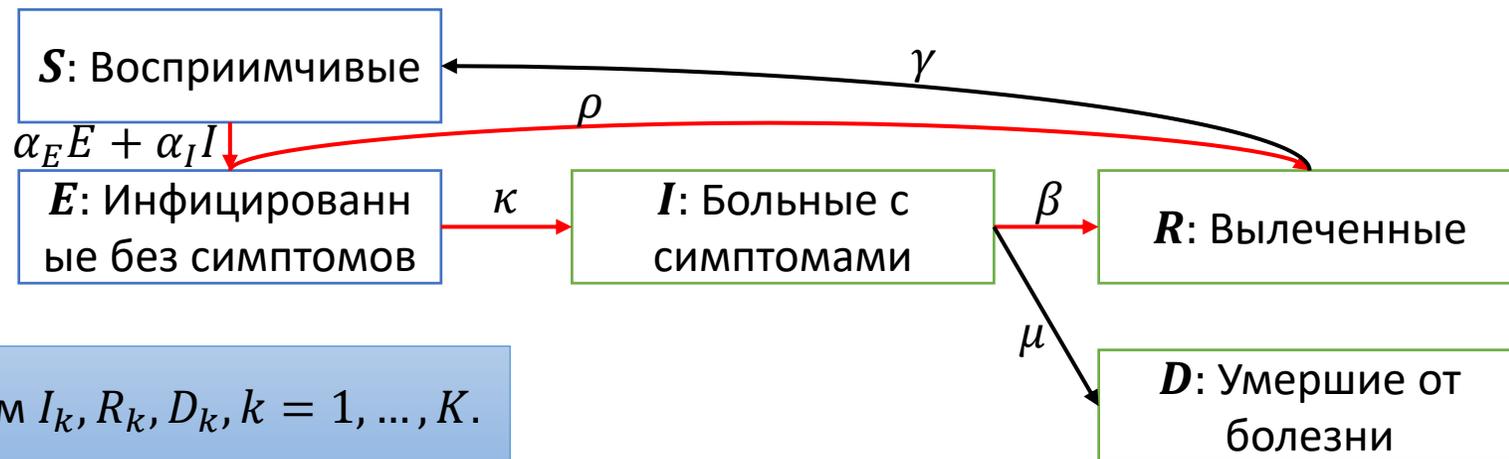
$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_E \frac{S(t)E(t)}{N(t)} - \alpha_I \frac{S(t)I(t)}{N(t)} + \gamma R(t), \\ \frac{\partial E}{\partial t} = \alpha_E \frac{S(t)E(t)}{N(t)} + \alpha_I \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \kappa E(t) - \rho E(t), \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \kappa E(t) - \beta I(t) - \mu I(t), \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \beta I(t) + \rho E(t) - \gamma R(t), \\ \frac{\partial D}{\partial t} = \mu I(t). \end{cases}$$

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + D(t)$$

$$S(0) = S_0, E(0) = E_0, \\ I(0) = I_0, R(0) = R_0, D(0) = D_0$$

Неизвестные параметры:  $q = (\alpha_E, \alpha_I, \kappa, \rho, \beta, E_0)$

Дополнительная информация:  
 $I(t_k) = I_k, R(t_k) = R_k, D(t_k) = D_k,$   
 $k = 1, \dots, K.$



**Обратная задача:** найти  $q$  по измерениям  $I_k, R_k, D_k, k = 1, \dots, K.$

## Параметры математической модели распространения коронавируса

Параметр	Описание	Усредненное значение
$\alpha_I$	Параметр заражения между инфицированным и восприимчивым населением, который связан с контагиозностью вируса и социальными факторами	0.005
$\alpha_E$	Параметр заражения между бессимптомной и восприимчивой группами населения ( $\alpha_E \gg \alpha_I$ )	0.65
$\gamma$	Скорость повторного заражения. Этот параметр является обратной величиной уровня иммунитета вируса (0 – устойчивый иммунитет, 0.001 – вероятность повторного заражения)	(0, 0.001)
$\kappa$	Частота появления симптомов в открытых случаях, что приводит к переходу от бессимптомной к зараженной популяции	0.05
$\rho$	Скорость восстановления выявленных случаев (случаи, которые выявлены, но выздоравливают без каких-либо симптомов)	0.08
$\beta$	Скорость выздоровления зараженных случаев	0.1
$\mu$	Уровень смертности зараженных случаев	0.02

# Методы оптимизации

$$J(q, y_0) = \sum_{i \in I} \sum_{k=0}^K \omega_i |y_i(t_k; q) - f_{ik}|^2 \rightarrow \min_q$$

Глобальные методы



Локальные методы

Эвристические

Полуаналитические  
Тензорное разложение

Машинное обучение  
- Стохастические градиенты  
- Метод опорных векторов  
- Линейная регрессия  
- Нейронные сети

Нулевого порядка  
Нелдера-Мида

Градиентные  
- Итерации Ландвебера  
- Сопряженные градиенты  
- Левенберга-Марквардта

- Генетический алгоритм
- Имитация отжига
- Роя частиц
- Дифференциальной эволюции

- Реш би
- Сто
- гло
- Пар

- 
- 
- 

- Аппроксима
- функционала
- обученных д
- Не используете
- функционала
- Многоуровне
- параллелиза

- Зависит от структуры функционала;
- Медленная сходимость к локальному минимуму;
- Параллелизуемость по итерациям.

## Оптимизация: метод дифференциальной эволюции

1. Инициализация популяции:  $q_{i,G}^j \in [q_l^j, q_u^j], i = 1, \dots, Np, j = 1, 2, \dots, 7$ .
2. Мутация: создается донорный вектор  $v_{i,G+1} = q_{r_1,G} + F(q_{r_2,G} - q_{r_3,G}), F \in [0, 2]$  - весовой параметр.
3. Скрещивание:

$$u_{i,G+1}^j = \begin{cases} v_{i,G+1}^j, & \text{если } \text{rand}_{i,j} \leq Cr \text{ или } j = j_{\text{rand}}, \\ q_{i,G}^j, & \text{иначе,} \end{cases} j = 1, 2, \dots, 7.$$

4. Отбор:

$$q_{i,G+1} = \begin{cases} u_{i,G+1}, & J(u_{i,G+1}) < J(q_{i,G}), \\ q_{i,G}, & \text{иначе.} \end{cases}, i = 1, \dots, Np.$$

5. Условие остановки:  $J(q_{G+1}) < \varepsilon$ .

**В численных расчетах:**  $Np = 10^4$  - количество потомков,  $Cr = 0.7$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  – параметр остановки,  $G = 4.4 \cdot 10^5$  – количество итераций. Реализация в среде Python, библиотека SciPy.optimize.

## Градиентные методы: градиент целевого функционала

$$\frac{dy}{dt} = \mu(t, y, q), \quad y(t_0) = y_0 \quad + \quad y_i(t_k) = f_{ik}$$

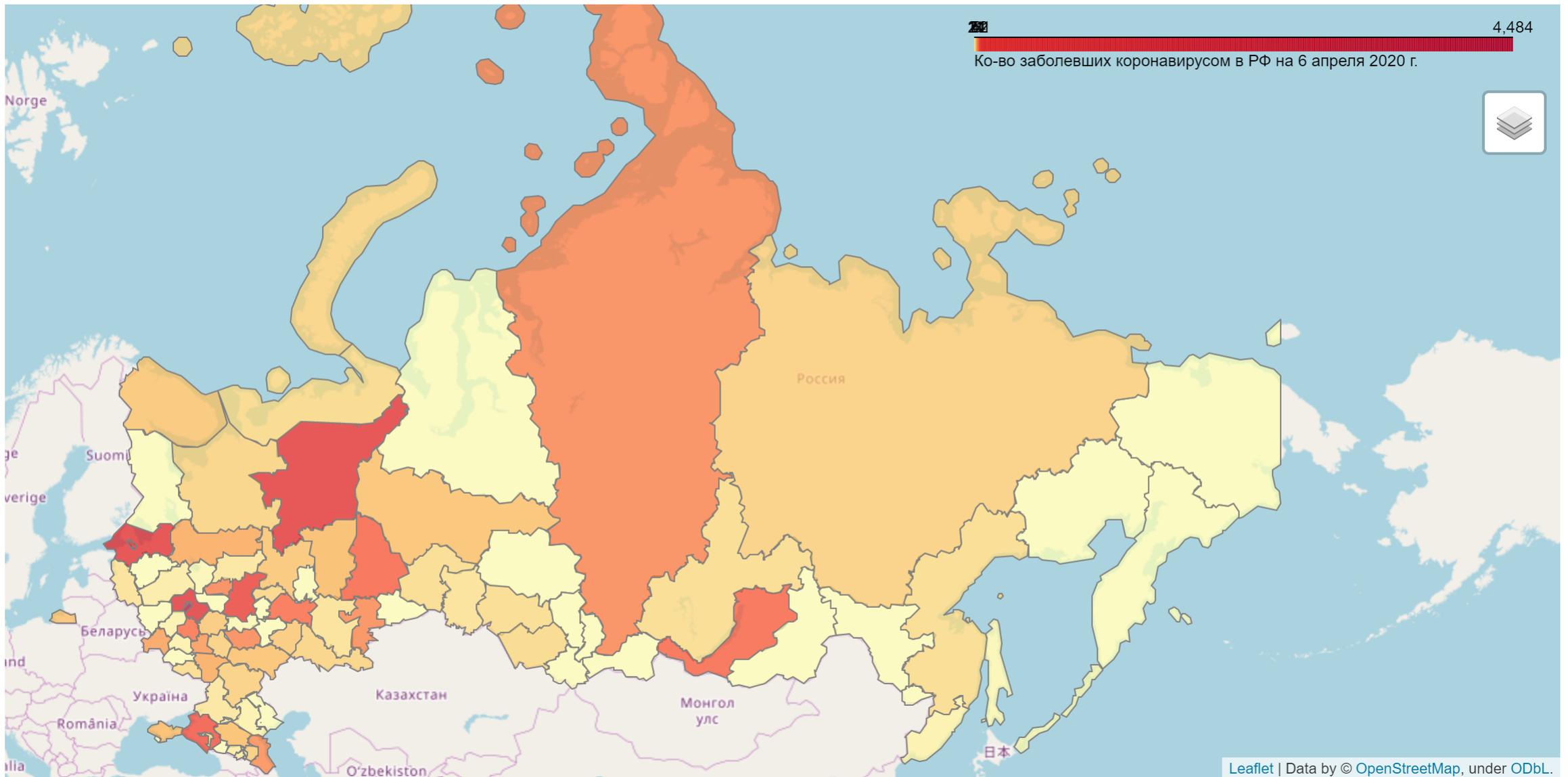
$$(q_{n+1}, y_{0_{n+1}}) = (q_n, y_{0_n}) - \alpha_n J'(q_n, y_{0_n}), \alpha_n > 0.$$

$$J(q, y_0) = \sum_{k=1}^K \sum_i \omega_i (y_i(t_k; q) - f_{ik})^2 \rightarrow \min_{q, y_0}$$

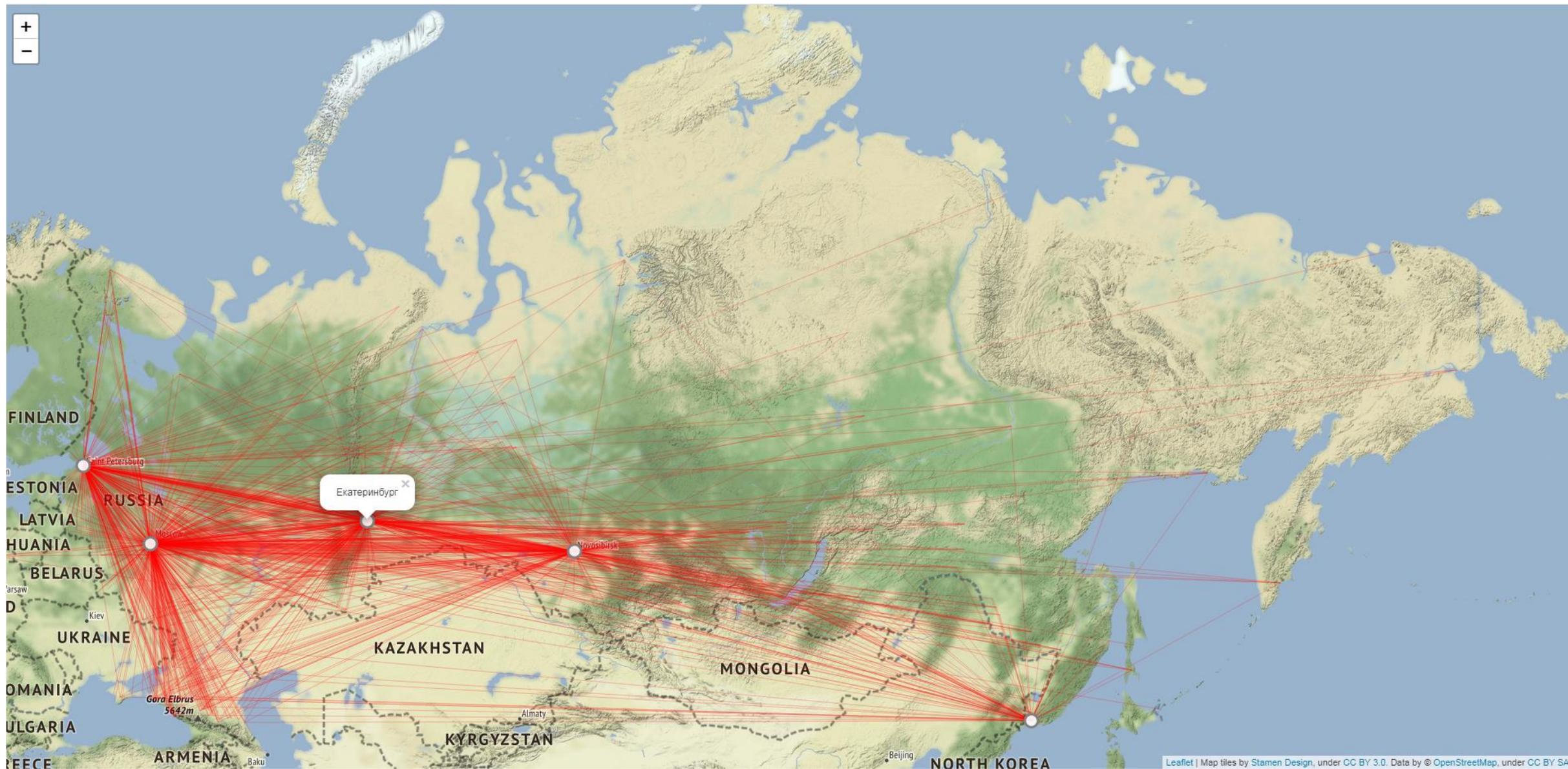
$$J'(q, y_0) = \left( - \int_{t_0}^T \Psi^T(t) \mu_q(y(t), q) dt, -\Psi(t_0) \right)$$

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = -\mu_y^T(y(t), q)\Psi, \\ \Psi(T) = 0, \\ [\Psi_i]_{t=t_k} = 2\omega_i (y_i(t_k; q) - f_{ik}), k = 1, \dots, K, i \in I \subset \{1, \dots, N\}. \end{cases}$$

# Динамика распространённости COVID-19 в Российской Федерации на 06.04.2020



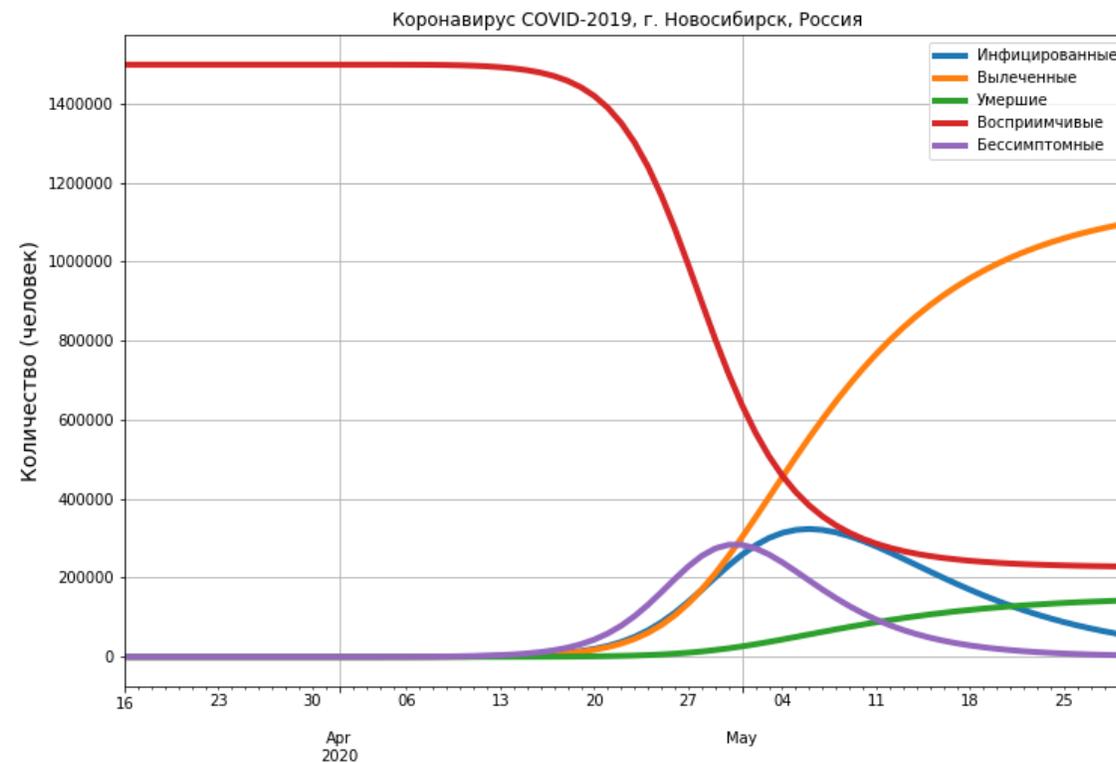
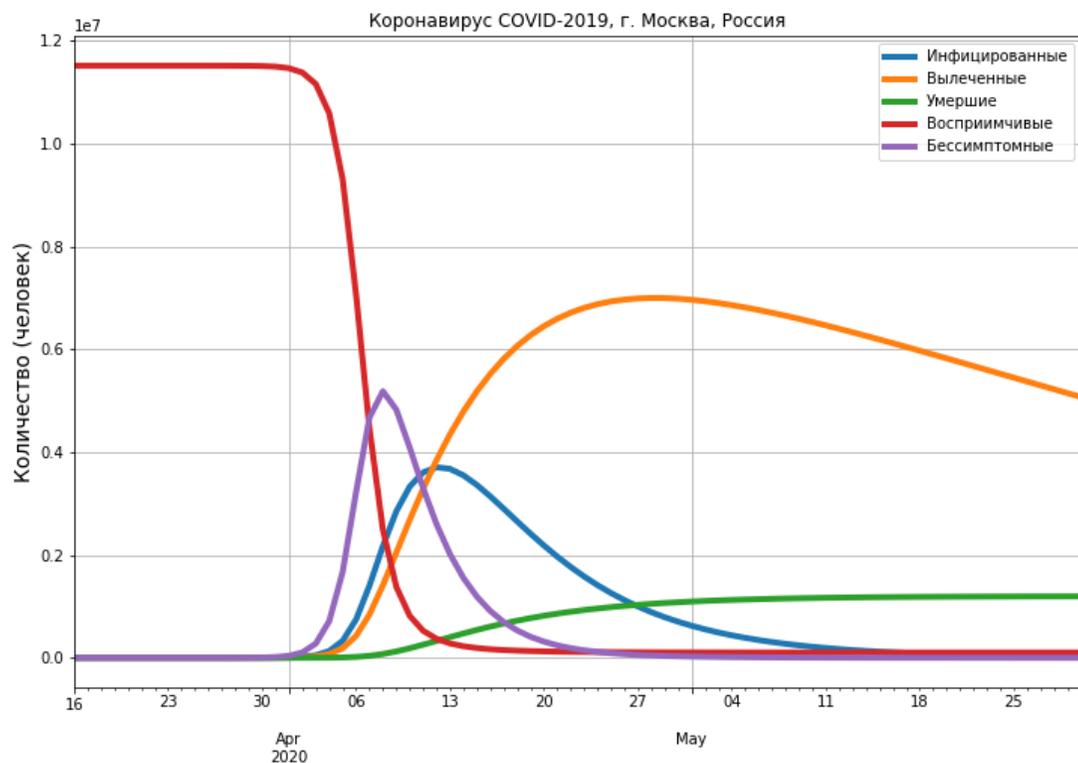
# Транспортные потоки между регионами Российской Федерации (самолеты, поезда, автобусы)



## Численные эксперименты для г. Москвы и Новосибирска до 30 мая 2020 года

Между 900 городами Российской Федерации были учтены перемещения людей (самолеты, поезда, автобусы) до 30 марта 2020 года. В силу постановления Президента РФ с 30 марта 2020 года был введен режим частичной изоляции во многих регионах РФ, а также значительно сокращены пассажиропотоки между городами (информация с сайта [www.tutu.ru](http://www.tutu.ru)).

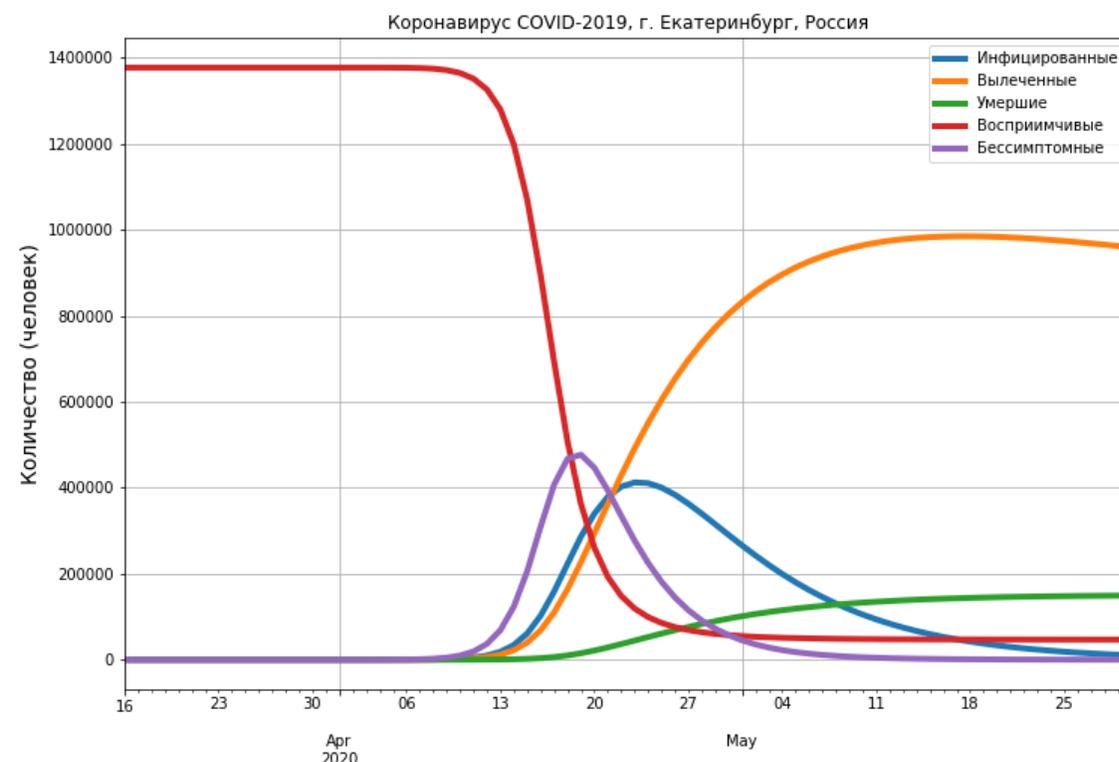
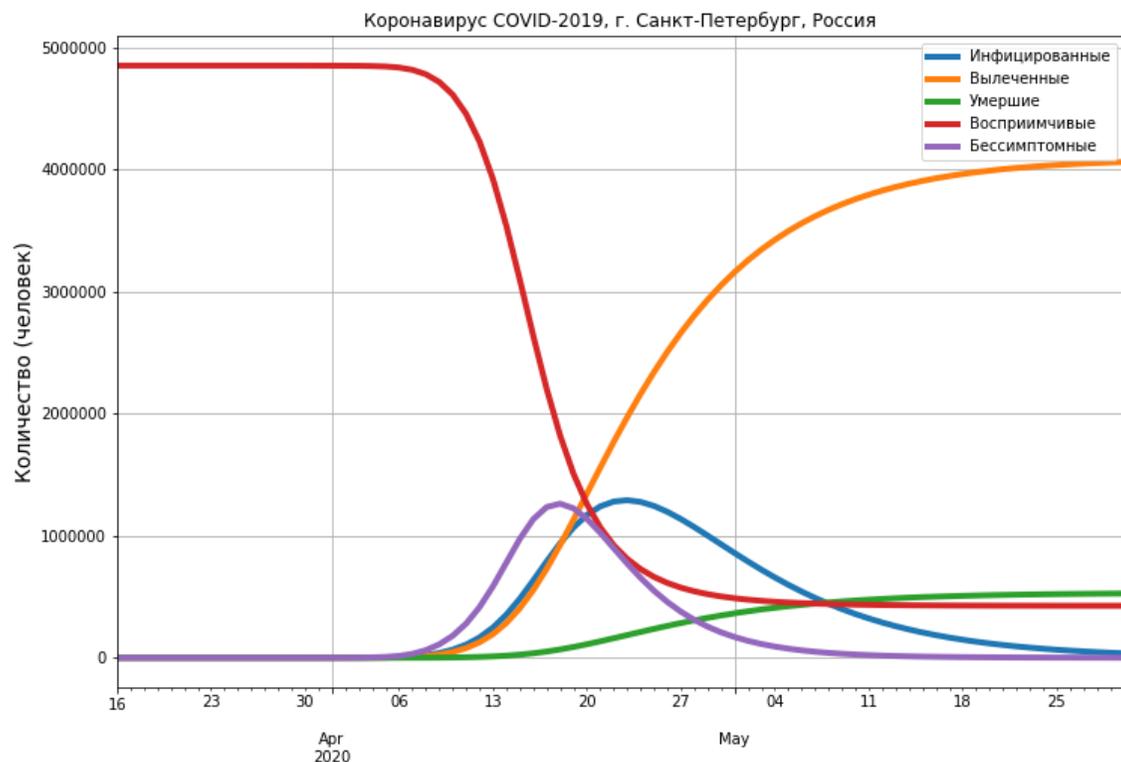
Полагаем, что пассажиропотоки в 2020 году совпадают с 2019 годом.



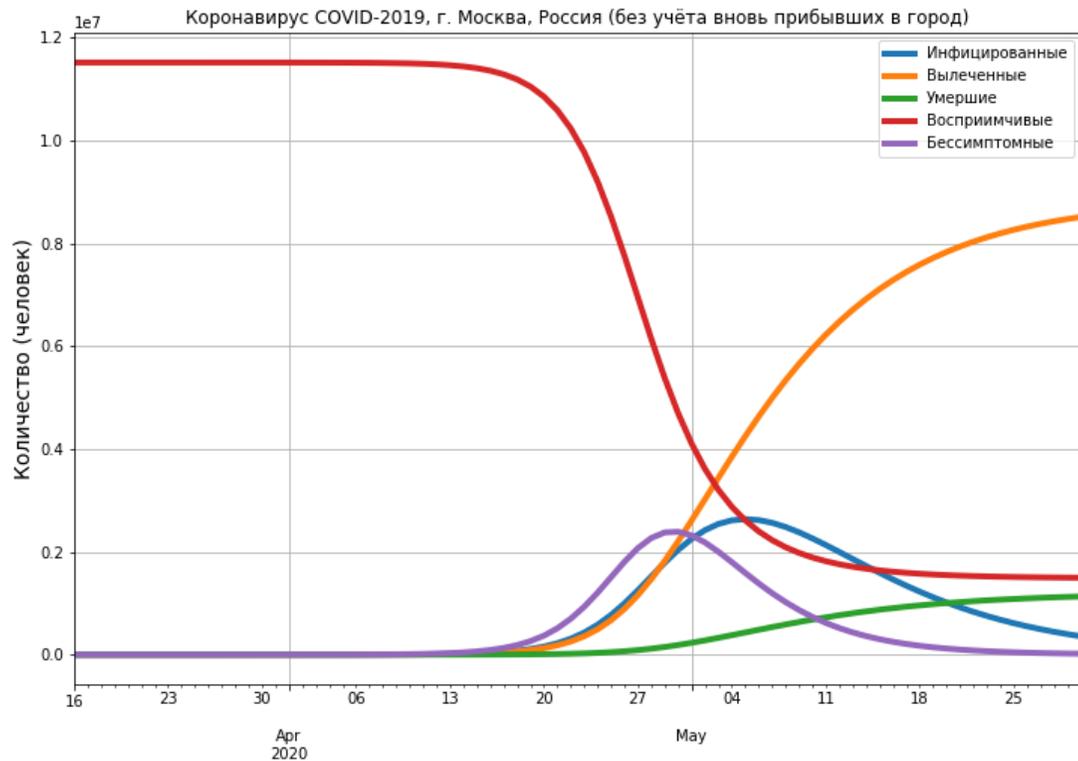
## Численные эксперименты для г. Санкт-Петербурга и Екатеринбурга до 30 мая 2020 года

Данные  $I_k$  (инфицированные с симптомами),  $R_k$  (вылеченные),  $D_k$  (умершие) обратной задачи были взяты за период 16 марта 2020 по 07 апреля 2020 года с ежедневного отчета ВОЗ и Правительства РФ ([www.стопкоронавирус.рф](http://www.стопкоронавирус.рф)).

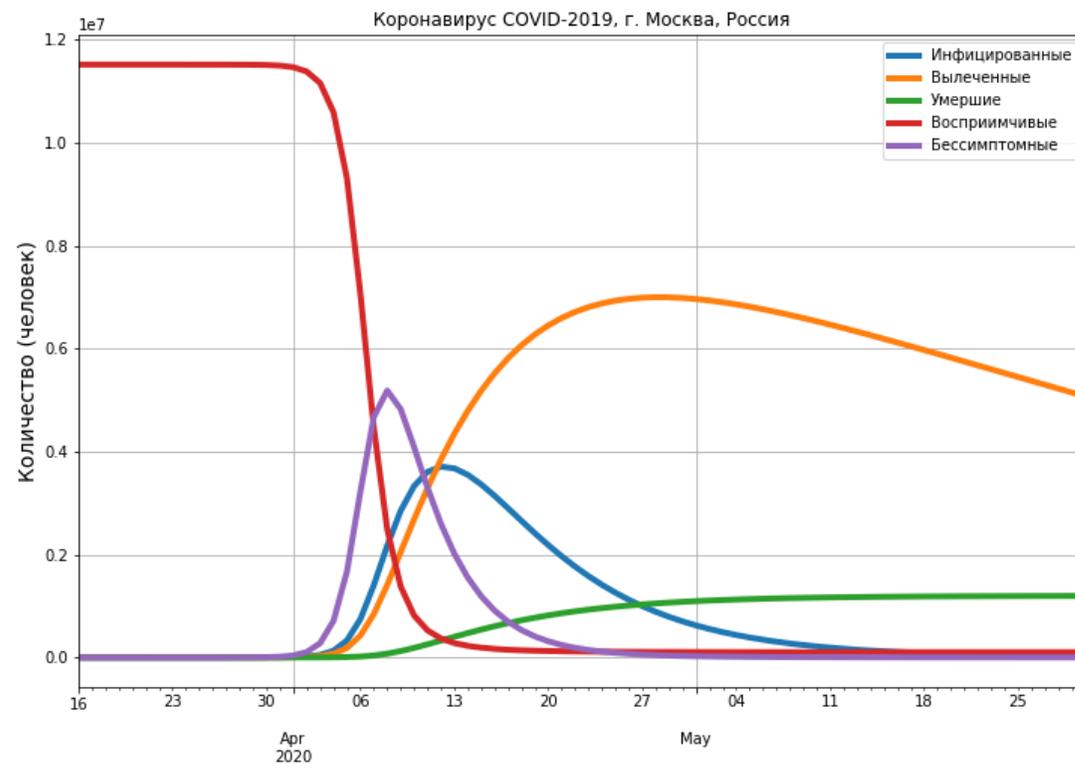
Предполагаем, что у населения формируется иммунитет к вирусу, то есть  $\gamma = 0$ . Коэффициент смертности в каждом городе  $i$  вычислялся как  $\mu^i = \sum_k D_k^i / (I_k^i + R_k^i + D_k^i)$ .



## Численные эксперименты для г. Москвы до 30 мая 2020 года с\без учета перемещений



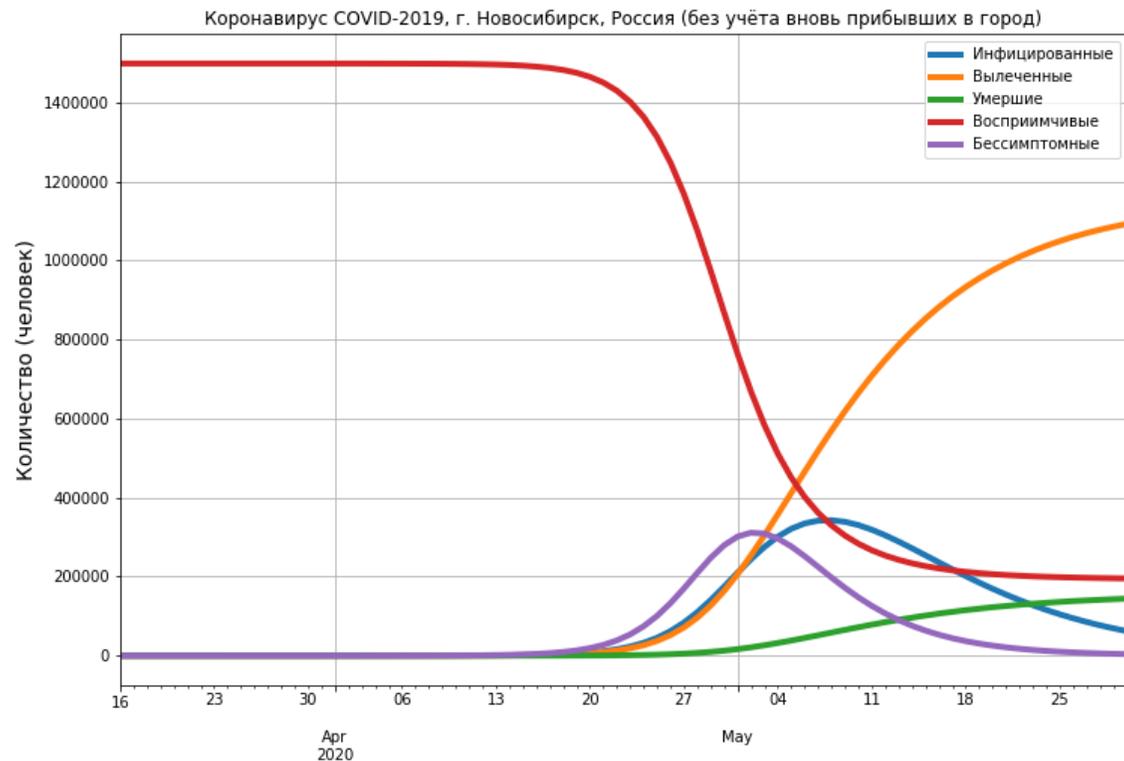
Без учета вновь прибывших в город



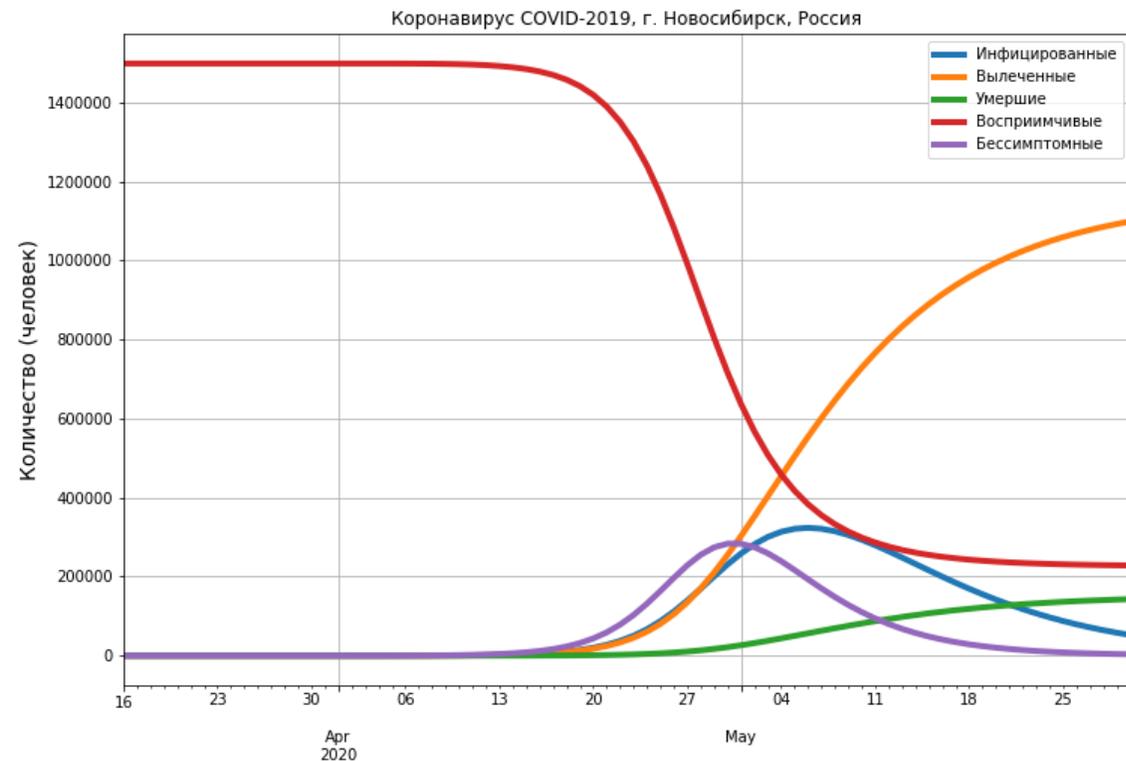
С учетом перемещений и карантинного режима

Учет пассажиропотоков сильно меняет картину распространения эпидемии в г. Москве.

# Численные эксперименты для г. Новосибирска до 30 мая 2020 года с\без учета перемещений



Без учета вновь прибывших в город



С учетом перемещений и карантинного режима

Учет пассажиропотоков незначительно влияет на распространение эпидемии в г. Новосибирске.

# *Прогнозирование распространенности COVID-19 в Российской Федерации на 25.04.2020*

# Спасибо за внимание!



**О.И. Криворотько, к.ф.-м.н.**  
*krivorotko.olya@mail.ru*  
+7-983-303-3083



**С.И. Кабанихин, чл.-корр. РАН**  
*ksi52@mail.ru*