# Круглый стол «Математическая логика: современное состояние и перспективы»

13 ноября 2019 г. Генеральная конференция ЮНЕСКО провозгласила 14 января Всемирным днём логики. «Дата 14 января была выбрана не случайно, но как дань уважения памяти двух великих ученых-логиков XX века: Курта Гёделя (умер 14 января 1978 года), чья доказанная теорема о неполноте дала толчок изучению логики в XX веке, и Альфреда Тарского (родился 14 января 1901 года), теоретические труды которого перекликались с теориями Гёделя» — пишет генеральный директор ЮНЕСКО Одрэ Азуле.

По этому случаю 18 января 2020 г. в Новосибирском государственном университете состоялся круглый стол «Математическая логика: современное состояние и перспективы». В рамках круглого стола о современных проблемах математической логики и теории вычислимости рассказали академики Ю.Л. Ершов и С.С. Гончаров. В последовавшем обсуждении также приняли участие Е.Е. Витяев, А.С. Морозов, С.П. Одинцов, Д.Е. Пальчунов, Д.К. Пономарев, В.Л. Селиванов и другие специалисты по математической логике и теоретической информатике. Круглый стол поддержан Математическим центром в Академгородке.

В **выступлении С.С. Гончарова** обсуждались значимость логических знаний и история логики: начиная с древних времён, логика возникает из потребностей жизни — в частности, из юридических проблем и проблем обоснованности построения научных знаний. В этой связи логика важна в построении как университетского, так и школьного образования.

В школьном образовании логика была включена в образовательную программу ещё в гимназиях в Российской империи. В советское время вместо логической программы образования фундаментальную роль играла программа по геометрии, где вводились элементы доказательства на основе евклидовой геометрии. Геометрия вырабатывала навыки точного проведения логических рассуждений, которые являются элементом общей культуры. Эти рассуждения базируются на геометрической наглядности, а также демонстрируют некорректность в неправильных логических выводах.

Подобная методика рассуждений хорошо и понятно работает на конечных объектах и в приложениях из реальной жизни. Следующий этап развития логической науки связан с проблемами построения анализа бесконечно малых. Эти задачи, а также развитие теории множеств, привели к проблеме правильности работы с бесконечными объектами. В рамках развития логики для бесконечных объектов ключевой вклад внесли профессор А. Тарский, заложивший основы математической семантики, базирующиеся на теории моделей, и профессор К. Гёдель, доказавший знаменитую теорему о неполноте рекурсивно аксиоматизируемых расширений аксиоматики Пеано для арифметики. Следует отметить, что наряду с А.Тарским фундаментальный вклад в проблемы современной логики внёс выдающийся советский математик, академик А.И. Мальцев, доказавший принципиальный результат теории моделей — теорему компактности.

В настоящее время большой вызов в современной математической логике связан с теорией квантовой механики, в которой уже работает новая логико-вероятностная техника. Развитие этой техники чрезвычайно важно также в связи с задачами прогнозирования и построения систем с элементами искусственного интеллекта.

В выступлении С.С. Гончарова также были обсуждены проблемы современной теории разрешимых и вычислимых моделей, проблемы теории вычислимости. Обсуждались проблемы теории С.С. Гончарова и А. Сорби, изучающей вычислимые нумерации для классов арифметической и аналитической иерархий, иерархии Ершова. Особое внимание было обращено на исследования в теории вычислимых функционалов и отношений конечных типов, построенной академиком Ю.Л. Ершовым. Эта теория основана на синтезе идей логики, теории нумераций, топологии и анализа. Вычислимые функционалы являются важным инструментом моделирования управления процессами в рамках гибридных моделей, сочетающих непрерывные процессы и их дискретное управление.

Профессор **В.Л. Селиванов** выступил с обсуждением перспективных направлений теории вычислений на непрерывных структурах. Было выделено три направления: спектры степеней топологических структур, эффективная дескриптивная теория множеств, а также вычислимость в числовых полях и численные методы.

Классическая дескриптивная теория множеств (ДТМ) изучает топологическую сложность множеств, функций и отношений эквивалентности в польских пространствах (т.е. в счетно-базируемых пространствах, топология которых метризуема с помощью подходящей полной метрики). Классическая ДТМ изобилует глубокими результатами и приложениями в функциональном анализе, теории множеств, теории меры, теории вероятностей и т.д.

Однако классическая ДТМ не применима ко многим пространствам (вроде областей Ершова-Скотта), важным в теоретической информатике. В.Л. Селивановым многие понятия и результаты ДТМ были перенесены на ω-непрерывные области. Это потребовало модификации определения иерархии Бореля (которая для польских пространств остается эквивалентной классическому определению Бореля-Лебега). Был поставлен вопрос о существовании естественного класса пространств, включающего польские пространства и ω-непрерывные области, и имеющего унифицированную ДТМ.

В 2013 г. М. де Брехт предложил решение этого вопроса, введя в рассмотрение класс так называемых квазипольских пространств, который стал весьма популярным и активно изучается многими исследователями. Причиной этого является то, что квазипольские пространства возникают и в других областях математики и информатики (например, многие важные спектральные пространства являются квазипольскими).

Для популярного в последнее время вычислимого анализа (претендующего на роль математической основы численных методов) принципиально важны эффективные версии упомянутых выше понятий и теорий. Недавно (независимо де Брехтом–Паули–Шрёдером и Рохасом–Селивановым–Стуллом–Хойрупом) предложено определение вычислимого квазипольского пространства, хорошо соответствующее «классическому» понятию квазипольского пространства. Получены полезные характеризации вычислимых квазипольских пространств, являющиеся эффективными версиями известных характеризаций квазипольских пространств.

Профессор **Е.Е. Витяев** выступил с обсуждением существующих логико-вероятностных методов: методы глубокого обучения, основанные на нейронных сетях, добились впечатляющих результатов и могут решать некоторые задачи на уровне человека, однако растёт понимание, что нейронным сетям нельзя доверять в областях, где цена ошибки слишком высока.

Отсюда возникает проблема — разработать методы объясняющего искусственного интеллекта, способного объяснять принятые решения. Такие методы разрабатываются в двух подходах:

(1) методы анализа работы нейронных сетей, которые бы отчасти объясняли работу нейронных сетей и принимаемых ими решений;

(2) логико-вероятностные методы глубокого обучения, как например, в AGI.

Однако последние сталкиваются с проблемой синтеза логики и вероятности, обсуждаемой на симпозиумах Progic (Probability + Logic), а также с проблемой «статистической двусмысленности». Обе проблемы приводят к тому, что существующее определение предсказания, как результата индуктивно-статистического вывода (Inductive-Statistical inference, I-S inference) не является удовлетворительным. В первом случае, оно может приводить к оценкам вероятности предсказываемых высказываний равным нулю, а во втором случае к противоречивым предсказаниям.

Чтобы избежать противоречий в I-S выводе, К. Гемпель предложил использовать максимально специфические правила, для которых он дал неформальное определение. В работе Е.Е. Витяева и С.П. Одинцова было сформулировано такое определение максимально специфических правил, для которого удалось доказать, что вывод по ним непротиворечив. Кроме того, семантика этих правил даёт непротиворечивые неподвижные точки, замкнутые относительно предсказаний некоторого множества атомарных высказываний.

Е.Е. Витяевым и соавторами было показано, что эти неподвижные точки позволяют формализовать следующие важные феномены:

1. Вероятностные формальные понятия.
2. Процесс восприятия.
3. Естественную классификацию.
4. Сознание.

Эти результаты позволяют утверждать, что глубокое логико-вероятностное обучение может быть получено как иерархия вероятностных формальных понятий, дающая «естественную» классификацию анализируемых объектов. Эта иерархия по своим свойствам будет антропоморфной — соответствовать человеческому восприятию и осознанию этих понятий как «естественных» классов.

Таким образом, разработка теории предсказания, основанной на I-S выводе и семантике неподвижных точек, позволит создать не только глубокое логико-вероятностное обучение для ИИ, но и формализовать многие когнитивные процессы. Мозг — это не логическое, а предсказывающее устройство, поэтому создание теории предсказания необходимо не только для ИИ, но и для моделирования когнитивных процессов.

**Д.К. Пономарев** выступил с обсуждением значения логики в информатике. Одним из ключевых методов информатики является постановка и решение задач через формальные, компьютерные языки. Для интересующей предметной области выбирается формальный язык, в котором можно описать класс задач, подлежащий решению. После этапа формализации возможность решения класса задач изучается на уровне формального языка уже с помощью методов математики и компьютерных наук — фактически исследуются свойства языка, как математические объекты. Подобным образом развились направления, такие как логическое программирование, методы представления знаний (о времени, пространстве, действиях, пр.), методы рассуждений о знаниях, и многие другие. Исследование вычислительной сложности типичных проблем в формальных языках с семантикой (например, проблем истинности/непротиворечивости/логического вывода утверждений в логических формализмах) позволило обозначить границы применимости ряда подходов в области информатики и дало импульс к созданию эффективных методов решения алгоритмически сложных задач.

Методы логики являются богатым инструментарием для информатики. Ряд информационных технологий, изменивших мир, был создан благодаря применению методов формальной логики. Например, алгоритмические результаты о проверке свойств булевых формул и методы их оптимизации являются фундаментом в разработке электронных компонент, позволяющим создавать компактные и энергоэффективные схемы, микропроцессоры. Применение логики первого порядка, как формализма запросов и ограничений целостности данных, позволило получить ряд фундаментальных алгоритмических результатов, которые определили развитие технологий баз данных и их воплощение в рамках реляционной алгебры. Возможность доказательной проверки свойств, формулируемых в ряде прикладных логик, открыло путь для верификации программ, коммуникационных протоколов и дало основу для разработки критически важных программных систем, таких как компиляторы, бортовое программное обеспечение, протоколы взаимодействия автономных станций и роботизированных систем.

Симбиоз логики и информатики дал методы автоматизированного доказательства теорем, которые не только применяются в указанных направлениях, но и предлагают новые инструменты образовательной и исследовательской деятельности для самой математики. Автоматизация логических рассуждений традиционно относится к сфере искусственного интеллекта, ей посвящена значительная часть исследований и разработок. Современные успехи и вызовы автоматизации в тех областях, которые ранее были доступны лишь человеку, ведут к созданию всё более сильных интеллектуальных систем. Не отрицая положительные аспекты этого процесса, следует отметить, что продвижение и здесь во многом зависит от совершенствования методов логики. Одним из ключевых остается вопрос комбинирования вычислений над данными численной природы и символьной природы в рамках единых формализмов. С этим связаны, в том числе, проблемы построения формальных систем, соединяющих логику и вероятность. Чрезвычайно востребованными в данном контексте являются специалисты, обладающие как фундаментальной математической базой, так и кругозором и интуицией в применении логических методов в информатике.