МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Новосибирский национальный исследовательский

государственный университет»

Физический факультет

Доманова Е. Д.

Матричная экспонента.
Теория и практика.

учебно-методическая разработка

Новосибирск

2020

Учебно-методическая разработка содержит описание основных свойств матричной экспоненты, приемы ее построения и примеры использования при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Обсуждаются преимущества специальной фундаментальной системы решений перед классической, основанной на Жордановой нормальной форме.

Целевая аудитория: студенты 2 курса Физического факультета НГУ.

Разработка соответствует программе базового курса дифференциальных уравнений для студентов ФФ НГУ.

Автор Доманова Е. Д.

Глава 1

Однородные линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

1.1. Определение матричной экспоненты

Рассмотрим однородную систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \mathbf{A}\vec{y}, \quad \mathbf{A} \equiv const \tag{1.1}$$

Определение. Матричной экспонентой $\exp(\mathbf{A}t)$ называется решение задачи Коши $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t), \\ \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E} \end{cases}$

Как известно, линейное уравнение n-го порядка

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0 \tag{1.2}$$

можно свести к нормальной системе линейных уравнений первого порядка, положив $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = y'(t)$, ... $z_n(t) = y^{(n-1)}(t)$.

Если коэффициенты уравнения (3.1) не зависят от t, то любое решение соответствующей системы $\dfrac{d\vec{z}}{dt} = \mathbf{A}\vec{z}$ с постоянной матрицей $\mathbf{A}$ выражается через матричную экспоненту по формуле $\vec{z}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \cdot \vec{c}$, где $\vec{c}$ — некоторый числовой вектор.

Для построения матричной экспоненты в нашем распоряжении пока имеется, по сути, два способа (если не считать метода последовательного исключения переменных, который для систем порядка 3 и выше работает не всегда).

Первый способ - построение матричной экспоненты в виде ряда

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A} \cdot t + \mathbf{A}^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + ... + \mathbf{A}^n \cdot \frac{t^n}{n!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \cdot \frac{t^k}{k!} \qquad (1.3)$$

Иногда этот ряд удается легко «свернуть», например, если $\mathbf{A}^k = E$ для некоторого значения k.

Второй способ - через нормальную жорданову форму матрицы $\mathbf{A}$. А именно, если $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^{-1}$, то $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{T} \cdot \exp(\mathbf{J}t) \cdot \mathbf{T}^{-1}$. Для жордановой клетки $\mathbf{J}_k$ матричная экспонента $\exp(\mathbf{J}_k t)$ строится в конечном виде, но сама по себе жорданова форма матрицы, как мы видели, обладает одним существенным недостатком — ее структура (количество и размер клеток) может резко измениться при непрерывном изменении элементов матрицы $\mathbf{A}$. То есть малые отклонения в коэффициентах матрицы $\mathbf{A}$ могут привести к радикальному изменению нормальной жордановой формы.

Поэтому хотелось бы научиться строить матричную экспоненту в конечном виде, не прибегая к использованию жордановой формы. Этим мы и займемся в ближайшее время. Построение матричной экспоненты для произвольной матрицы $\mathbf{A}$ будет основано на специальной фундаментальной системе решений некоторого связанного с этой матрицей однородного линейного уравнения n-го порядка. То есть мы сначала научимся решать линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами, не сводя их к системам, а затем будем решать системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, основываясь на специальных решениях уравнений n-го порядка.

Рассмотрим однородное линейное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{1.4}$$

Его решения образуют линейное пространство, размерность которого равна порядку уравнения n, то есть уравнение (3.3) имеет ровно n линейно независимых решений

$$y_1(t), \quad y_2(t), \quad ... \quad , \quad y_n(t), \tag{1.5}$$

и любое решение уравнения (3.3) может быть представлено в виде линейной комбинации этих решений:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \, y_k(t). \tag{1.6}$$

. Формула (1.6) дает общее решение уравнения (3.3), а система функций (3.4), образующая базис пространства решений, называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) уравнения (3.3).

Допустим, мы нашли n решений уравнения (3.3). Как проверить, что они образуют базис в пространстве решений? Мы доказали, что функции (3.4) образуют ФСР уравнения, если и только если определитель *матрицы Вронского*

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & ... & y_n(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) & ... & y'_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & ... & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

не обращается в ноль хотя бы в одной точке t_0.

Построение ФСР линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами фактически сводится к *алгебраической* задаче разложения некоторого полинома на множители.

Как мы помним, однородное линейное уравнение первого порядка $y' = k \cdot y$ имеет решение $y = e^{kt}$. Попробуем найти частное решение уравнения (3.3) вида $y = e^{\lambda t}$. Подставляя эту функцию в уравнение (3.3), и деля его на $e^{\lambda t} \neq 0$, мы видим, что значение λ должно быть решением алгебраического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{1.8}$$

Таким образом, уравнению (3.3) мы сопоставили многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

который называется *характеристическим многочленом* этого уравнения, а уравнение (1.8) — *характеристическим уравнением* для уравнения (3.3). И наоборот, каждому многочлену $P(\lambda)$ можно поставить в соответствие дифференциальный оператор $P(\frac{d}{dt})$ и уравнение $L[y] = 0$, где $L[y] = P(\frac{d}{dt})[y]$.

В комплексной плоскости любой полином порядка n имеет n корней (с учетом их кратности). Рассмотрим несколько случаев.

Пусть уравнение (1.8) имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Это дает n частных решений уравнения (3.3):

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \ \ldots, \quad y_n(t) = e^{\lambda_n t}.$$

Матрица Вронского в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

и ее определитель равен

$$e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)t} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)t} \cdot \prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j).$$

Таким образом, если все корни λ_i различны, то вронскиан не обращается в ноль ни в при каких значениях t, следовательно, ФСР уравнения (3.3) построена.

К сожалению, корни уравнения (1.8) могут оказаться существенно комплексными, то есть $\lambda = \alpha + i\,\beta$, где $\beta \neq 0$. Тогда решение $y(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$ является комплекснозначной функцией. Однако, поскольку коэффициенты уравнения (1.8) вещественны, то комплексно-сопряженное число $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ также является корнем этого уравнения, и ему соответствует решение $y(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$.

Убедитесь самостоятельно, что функции $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$ образуют базис линейной оболочки функций $y_1(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$ и $y_2(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t - -i\sin\beta t)$. Проще говоря, пара корней $\lambda = \alpha + i\,\beta$ и $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$, где $\beta \neq 0$, дает нам два линейно независимых вещественных решения уравнения $y_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $y_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Далее мы доказали так называемую *формулу сдвига*: для любого числа $\gamma \in \mathbb{C}$ и произвольной достаточно гладкой функции $f(t)$

$$P(\frac{d}{dt})(e^{\gamma t}f(t)) = e^{\gamma t}P(\frac{d}{dt} + \gamma I)(f(t)).$$

Из этой формулы следует, что если корень λ имеет кратность $m > 1$, то ему соответствует серия из m линейно независимых решений

$$e^{\lambda t}, \quad t \cdot e^{\lambda t}, \ \dots\,, \quad t^{m-1}e^{\lambda t}.$$

(Упражнение. Докажите, что эти функции линейно независимы.)

Пара комплексно-сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\,\beta$ кратности $m > 1$ дает серию из $2m$ линейно независимых решений

$$\begin{gathered} e^{\alpha t}\cos\beta t, \ \ t \cdot e^{\alpha t}\cos\beta t, \dots\,, \ \ t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ e^{\alpha t}\sin\beta t, \ \ t \cdot e^{\alpha t}\sin\beta t, \dots\,, \ \ x^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t. \end{gathered}$$

Таким образом, если $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots\,, \ \lambda_s$ — различные корни полинома $P(\lambda)$ кратности $k_1, \ k_2, \ \dots\,, \ k_s$ соответственно, то мы можем построить n решений уравнения (3.3), поскольку $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$. Осталось убедиться, что эти решения линейно независимы, тогда они образуют ФСР уравнения (3.3).

Теорема. Если $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots\,, \ \lambda_s$ — различные корни полинома $P(\lambda)$ кратности $k_1, \ k_2, \ \dots\,, \ k_s$ соответственно, то функции

$$\bigcup_{j=1}^{s}\{e^{\lambda_j t}, \quad t \cdot e^{\lambda_j t}, \ \dots\,, \quad t^{k_j-1}e^{\lambda_j t}\}$$

образуют ФСР уравнения (3.3).

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, то есть указанные функции линейно зависимы. Это значит, что некоторая их линейная комбинация равна нулю, хотя не все ее коэффициенты равны нулю. Сгруппируем слагаемые, содержащие экспоненты с одинаковыми показателями, и заметим, что линейная комбинация степенных функций — это полином. Тогда

$$Q_1(t)e^{\lambda_1 t} + Q_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + Q_s(t)e^{\lambda_s t} \equiv 0, \tag{1.9}$$

где $Q_j(t)$ — полином степени $(k_j - 1)$, причем не все $Q_j(t)$ равны нулю. Для определенности будем считать, что $Q_s(t)$ — ненулевой многочлен.

Умножим (1.9) на $e^{-\lambda_1 t}$

$$Q_1(t) + Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + ... + Q_s(t)e^{(\lambda_s-\lambda_1)t} \equiv 0, \tag{1.10}$$

продифференцируем k_1 раз. Степень полинома $Q_1(t)$ равна $(k_1 - 1)$, поэтому $\dfrac{d^{k_1}}{dt^{k_1}}Q_1(t) \equiv 0$.

Заметим, что если $a \neq 0$, то $\dfrac{d}{dt}(Q(t)e^{at}) = \tilde{Q}e^{at}$, где полиномы $Q(t)$ и $\tilde{Q}$ имеют одинаковую степень. Если же их степень равна нулю, то $Q(t) = \tilde{Q} = const$. Тогда после k_1-кратного дифференцирования (1.10) получим тождество

$$\tilde{Q}_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + ... + \tilde{Q}_s(t)e^{(\lambda_s-\lambda_1)t} \equiv 0, \tag{1.11}$$

где $\tilde{Q}_j(t)$ — полиномы степени $(k_j - 1)$, причем $\tilde{Q}_s(t)$ отличен от нуля.

Умножая (1.11) на $e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$ и дифференцируя полученное тождество k_2 раз, получаем выражение вида (1.11), но с меньшим количеством слагаемых. Повторяя этот процесс, в итоге получим тождество

$$\tilde{Q}_s(t)e^{(\lambda_s-\lambda_{s-1})t} \equiv 0,$$

откуда следует, что $\tilde{Q}_s(t) \equiv 0$. Но это невозможно, поскольку по предположению $Q_s(t)$ был отличен от нуля.

Следовательно, предположение о линейной зависимости было неверным. Теорема доказана.

ФСР, построенную по изложенным выше правилам, мы будем называть *классической*.

Глава 2

Построение матричной экспоненты

Специальная ФСР для линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Функции $\psi_k(t)$.

Определение функций $\psi_k(t)$.

Напомним, что наша ближайшая цель — построить специальную ФСР и с ее помощью дать конечное представление матричной экспоненты.

Допустим, что мы нашли все корни характеристического многочлена

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$$

и каким-нибудь образом занумеровали их: λ_1, λ_2, ... , λ_n. Если корень кратный, то он выписан в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Тогда характеристический многочлен можно разложить в произведение (над полем комплексных чисел)

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

Функции $\psi_k(t)$, $k = 1, ..., n$, определим следующим образом:

$$\begin{cases} (\frac{d}{dt} - \lambda_1)\psi_1 = 0, \quad \psi_1(0) = 1; \\ (\frac{d}{dt} - \lambda_2)\psi_2 = 0, \quad \psi_2(0) = 0; \\ ... \\ (\frac{d}{dt} - \lambda_k)\psi_k = 0, \quad \psi_k(0) = 0; \\ ... \\ (\frac{d}{dt} - \lambda_n)\psi_n = 0, \quad \psi_n(0) = 0. \end{cases}$$

Приведем систему дифференциальных уравнений к нормальному виду:

$$\begin{cases} \psi'_1 = \lambda_1\psi_1, \qquad \psi_1(0) = 1; \\ \psi'_2 = \lambda_2\psi_2 + \psi_1, \quad \psi_2(0) = 0; \\ ... \\ \psi'_k = \lambda_k\psi_k + \psi_{k-1}, \quad \psi_k(0) = 0; \\ ... \\ \psi'_n = \lambda_n\psi_n + \psi_{n-1}, \quad \psi_n(0) = 0. \end{cases}$$

Вводя в рассмотрение вектор $\vec{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}$, представим данную систему в матричном виде:

$$\frac{d}{dt}\vec{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} \vec{\psi}(t); \quad \vec{\psi}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Поскольку функции $\psi_k(t)$ вводятся рекуррентно, то $\psi_k(t)$ является решением укороченной системы (можно остановить рекурсию на k-том шаге). Поэтому $\psi_k(t) = \psi_k(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$. Кроме того, в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров, функции $\psi_k(t) = \psi_k(t, \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k)$ непрерывно зависят от $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$.

Интегральные рекуррентные формулы.

Из определения сразу же следует, что $\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$.

Поскольку $\psi_2(t)$ является решением неоднородного уравнения, можно построить ее методом вариации постоянных: $\psi_2(t) = C(t) \cdot e^{\lambda_2 t}$, где $C'(t) = e^{-\lambda_2 t}\psi_1(t)$. Положим $C(0) = 0$ для того, чтобы $\psi_2(0) = 0$. Тогда $C(t) = \int\limits_0^t e^{-\lambda_2 \tau}\psi_1(\tau)d\tau$ и $\psi_2(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda_2(t-\tau)}\psi_1(\tau)d\tau$.

Повторяя эти вычисления для других значений k, приходим к рекуррентным формулам в интегральном виде:

$$\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}; \quad \psi_k(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)}\psi_{k-1}(\tau)d\tau, \quad k > 1.$$

Пример. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k$, то

$$\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \psi_2(t) = te^{\lambda_1 t}, \quad \psi_3(t) = \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t}, \quad ..., \quad \psi_k(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_1 t}.$$

Доказательство проведите самостоятельно методом математической индукции.

Пример. Если все корни λ_1, λ_2, ... ,λ_k различны, то

$$\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \qquad \psi_2(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$\psi_3(t) = \frac{e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_3 t}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)},$$

$$\psi_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{e^{\lambda_i t}}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)}.$$

Пример. Рассмотрим уравнение второго порядка $P(\frac{d}{dt})y = 0$, где $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)$. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то классическая ФСР этого уравнения состоит из функций $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ и $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$.

При $\lambda_2 \to \lambda_1$ эта система вырождается, превращаясь в одну функцию $e^{\lambda_1 t}$, а при $\lambda_2 = \lambda_1$ ФСР состоит из функций $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ и $\varphi_2(t) = t\cdot e^{\lambda_1 t}$.

Функции $\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ и $\psi_2(t) = \dfrac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}$ также образуют ФСР рассматриваемого уравнения при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (докажите это). Но, в отличие от классической ФСР, эта система не вырождается при $\lambda_2 \to \lambda_1$.

Действительно, пусть $\lambda_2 = \lambda_1 + \varepsilon$. Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$\psi_2(t) = \frac{e^{\lambda_2 t}-e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{e^{\lambda_1 t}(e^{\varepsilon t}-1)}{\varepsilon} \to e^{\lambda_1 t}\cdot t.$$

Далее мы увидим, что этот факт (отсутствие вырождения специальной ФСР при непрерывном изменении корней характеристического многочлена) имеет место для уравнения любого порядка.

Нерекуррентное определение функций $\psi_k(t)$.

Введем в рассмотрение многочлены $P_1(\lambda) = \lambda - \lambda_1$,

$P_2(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2) = P_1(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_2)$,

$P_3(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdot(\lambda-\lambda_3) = P_2(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_3)$,

...,

$P_n(\lambda) = P_{n-1}(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_n).$

Теорема. Для произвольного $k = 2, ..., n$ функция $\psi_k(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} P_k(\frac{d}{dt})[y] = 0, \\ y(0) = y'(0) = ... = y^{(k-2)} = 0, \quad y^{(k-1)} = 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Доказательство будем вести методом математической индукции.

Непосредственно из определения функции $\psi_2(t)$ получаем:

$$P_2(\frac{d}{dt})[\psi_2(t)] = (\frac{d}{dt} - \lambda_1)(\frac{d}{dt} - \lambda_2)[\psi_2(t)] = (\frac{d}{dt} - \lambda_1)[\psi_1(t)] = 0,$$

поскольку $(\frac{d}{dt} - \lambda_2)[\psi_2(t)] = \psi_1(t)$ и $(\frac{d}{dt} - \lambda_1)[\psi_1(t)] = 0$.

Кроме того, положив в уравнении $\psi'_2(t) = \lambda_2\psi_2(t) + \psi_1(t)$ значение $t = 0$ и вспоминая, что $\psi_2(0) = 0$, а $\psi_2(0) = 1$, убеждаемся, что $\psi'_2(0) = 1$.

Предположим, что утверждение теоремы верно для всех значений k, меньших некоторого l. Докажем, что тогда оно верно и для $k = l + 1$.

$$P_{l+1}(\frac{d}{dt})[\psi_{l+1}(t)] = P_l(\frac{d}{dt})(\frac{d}{dt} - \lambda_{l+1})[\psi_{l+1}(t)] = P_l(\frac{d}{dt})[\psi_l(t)] = 0,$$

поскольку $(\frac{d}{dt} - \lambda_{l+1})[\psi_{l+1}(t)] = \psi_l(t)$.

Далее,

$\psi'_{l+1}(0) = \lambda_{l+1}\psi_{l+1}(0) + \psi_l(0) = \lambda_{l+1} \cdot 0 + 0 = 0,$

$\psi''_{l+1}(0) = \lambda_{l+1}\psi'_{l+1}(0) + \psi'_l(0) = \lambda_{l+1} \cdot 0 + 0 = 0,$

$\cdots$,

$\psi_{l+1}^{(l-1)}(0) = \lambda_{l+1}\psi_{l+1}^{(l-2)}(0) + \psi_l^{(l-2)}(0) = \lambda_{l+1} \cdot 0 + 0 = 0,$

$\psi_{l+1}^{(l)}(0) = \lambda_{l+1}\psi_{l+1}^{(l-1)}(0) + \psi_l^{(l-1)}(0) = \lambda_{l+1} \cdot 0 + 1 = 1.$

(Здесь, как обычно, $y^{(l)}$ означает производную $\dfrac{d^l y}{dt^l}$).

Итак, теорема доказана.

Следствие. Поскольку коэффициенты многочлена $P_k(\lambda)$ являются симметрическими функциями его корней, а начальные данные для $\psi_k(t)$ не зависят от параметров, то в силу единственности решения задачи Коши (2.1) функция $\psi_k(t)$ также является симметрической функцией параметров λ_1, λ_2, ... , λ_k, то есть не меняется при любых их перестановках.

Далее, коэффициенты многочлена $P_k(\lambda)$ являются непрерывными функциями его корней, поэтому функция $\psi_k(t)$ также непрерывно зависит от коэффициентов уравнения $P_k(\dfrac{d}{dt})[y] = 0$.

Следствие. Для любого значения $m \geq k$ функция $\psi_k(t)$ удовлетворяет уравнению $P_m(\dfrac{d}{dt})[\psi_k(t)] = 0$. В частности, $P_n(\dfrac{d}{dt})[\psi_k(t)] = 0$, то есть каждая из функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ... , $\psi_n(t)$ является решением дифференциального уравнения (3.3) .

Доказательство. Мы только что установили, что $P_k(\dfrac{d}{dt})[\psi_k(t)] = 0$. При $m > k$ разложим многочлен $P_m(\lambda)$ в произведение, поменяв порядок множителей:

$$P_m(\lambda) = P_k(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_{k+1}) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_m) =$$
$$= (\lambda - \lambda_m) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_{k+1}) \cdot P_k(\lambda) = Q_{m-k}(\lambda) \cdot P_k(\lambda).$$

Поэтому $P_m(\dfrac{d}{dt})[\psi_k(t)] = Q_{m-k}(\dfrac{d}{dt})P_k(\dfrac{d}{dt})[\psi_k(t)] = 0.$

Теорема. Функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ... , $\psi_n(t)$ образуют ФСР дифференциального уравнения (3.3) .

Доказательство. Мы уже знаем, что каждая из функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$,

... , $\psi_n(t)$ является решением уравнения (3.3). Таким образом, мы получили n решений дифференциального уравнения порядка n. Осталось показать, что они линейно независимы. Для этого достаточно установить, что определитель Вронского данной системы функций отличен от нуля хотя бы в одной точке t_0.

Положим $t_0 = 0$, тогда из начальных условий

$$\begin{pmatrix} \psi_1(0) & \psi_2(0) & \dots & \psi_n(0) \\ \psi'_1(0) & \psi'_2(0) & \dots & \psi'_n(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(0) & \psi_2^{(n-1)}(0) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь звездочки обозначают некоторые неизвестные нам числа. Но их значения нас не интересуют, поскольку определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. Таким образом, определитель матрицы Вронского в точке $t_0 = 0$ равен единице, следовательно, построенная система решений уравнения (3.3) линейно независима на любом интервале вещественной прямой.

Итак, функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ... , $\psi_n(t)$ образуют ФСР дифференциального уравнения (3.3). Мы будем называть ее *специальной* ФСР.

Отметим, что линейная независимость системы функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ... , $\psi_n(t)$ была установлена для любого набора корней λ_1, λ_2, ... , λ_n независимо от их кратности. Добавляя к этому непрерывную зависимость решений от параметров λ_j, получаем замечательное свойство: при малых изменениях корней характеристического многочлена специальная ФСР не вырождается.

Глава 3

Полиномиальное представление матричной экспоненты.

Рассмотрим систему однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \mathbf{A}\vec{y}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{A} \equiv const$ — матрица размера $n \times n$.

Напомним, что по определению матричной экспонентой $\exp(\mathbf{A}t)$ называется решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t), \\ \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E} \end{cases} \tag{3.2}$$

(Наряду с $\exp(\mathbf{A}t)$ мы будем использовать также более компактное обозначение $e^{\mathbf{A}t}$)

Другими словами, $\exp(\mathbf{A}t)$ — фундаментальная матрица решений системы (3.1), удовлетворяющая условию $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E}$. Мы подробно изучили свойства этой фундаментальной матрицы, и поняли, что с ее помощью можно легко записать решение задачи Коши для системы (3.1) с начальными данными $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$:

$$\vec{y}(t) = \exp(\mathbf{A}(t - t_0))\vec{y}_0,$$

а также частное решение неоднородной системы с правой частью $\vec{f}(t)$:

$$\vec{y}_*(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \exp(\mathbf{A}(t-\tau))\vec{f}(\tau)\,d\tau.$$

Но, к сожалению, до сих пор у нас не было эффективного способа построения матричной экспоненты.

Мы видели, что можно построить матричную экспоненту $\exp(\mathbf{A}t)$ в виде ряда по степеням матрицы $\mathbf{A}$:

$$\exp(\mathbf{A}t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k. \tag{3.3}$$

(Фактически, это представление можно считать определением матричной экспоненты, эквивалентным данному ранее.)

Теорема Гамильтона – Кэли утверждает, что любая матрица является «корнем» своего характеристического многочлена, то есть $P(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, где $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$. Поскольку многочлен $P(\lambda)$ имеет степень n, это значит, что матрица $\mathbf{A}^n$ является линейной комбинацией матриц $\mathbf{A}^k$, где $k < n$. Понятно, что и более высокие степени матрицы $\mathbf{A}$ также выражаются через $\mathbf{A}^k$, $k < n$. Таким образом, ряд (3.3) можно заменить полиномом степени не выше $(n-1)$.

С одним из способов это сделать вы познакомились в курсе линейной алгебры (см. лекции на ресурсе http://phys.nsu.ru/ulyanov/). Следующая теорема дает другой способ построения матричной экспоненты с помощью ψ–функций, которые были введены и изучены на прошлой лекции.

Теорема.

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot\psi_1(t) + \Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_2(t) + \Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\Big(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_3(t) + \ldots$$
$$\ldots + \Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\Big(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(\mathbf{A}-\lambda_{n-1}\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_n(t) =$$

$$= \mathbf{E} \cdot \psi_1(t) + P_1(\mathbf{A}) \cdot \psi_2(t) + P_2(\mathbf{A}) \cdot \psi_3(t) + ... + P_{n-1}(\mathbf{A}) \cdot \psi_n(t)$$

Доказательство. Проверим, что функция

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{E} \cdot \psi_1(t) + P_1(\mathbf{A}) \cdot \psi_2(t) + P_2(\mathbf{A}) \cdot \psi_3(t) + ... + P_{n-1}(\mathbf{A}) \cdot \psi_n(t)$$

удовлетворяет определению (3.2).

Проверка начальных условий. Поскольку $\psi_1(0) = 1$ и $\psi_k(0) = 0$ при $k > 1$, то $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E}$.

Убедимся, что $\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{A\Phi}(t)$. Продифференцируем $\mathbf{\Phi}(t)$ почленно, затем вспомним, каким уравнениям первого порядка удовлетворяют функции $\psi_k(t)$ и сгруппируем слагаемые с одинаковыми $\psi_k(t)$ (при этом при переходе на новую строку будем постепенно опускать аргументы функций, чтобы не загромождать и без того перегруженную запись):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{E} \cdot \psi\,'_1(t) + P_1(\mathbf{A}) \cdot \psi\,'_2(t) + P_2(\mathbf{A}) \cdot \psi\,'_3(t) + ... + P_{n-1}(\mathbf{A}) \cdot \psi\,'_n(t) =$$

$$= \mathbf{E} \cdot \lambda_1\psi_1 + P_1(\mathbf{A}) \cdot (\lambda_2\psi_2 + \psi_1) + P_2(\mathbf{A}) \cdot (\lambda_3\psi_3 + \psi_2) + ... + P_{n-1}(\mathbf{A}) \cdot (\lambda_n\psi_n + \psi_{n-1}) =$$

$$= \psi_1 \cdot (\lambda_1\mathbf{E} + P_1) + \psi_2 \cdot (\lambda_2 P_1 + P_2) + \psi_3 \cdot (\lambda_3 P_2 + P_3) + ...$$
$$... + \psi_{n-1}(\lambda_{n-1}P_{n-2} + P_{n-1}) + \psi_n\lambda_n P_{n-1} \quad (3.4)$$

Перепишем определения многочленов $P_k(\lambda)$:

$P_1(\lambda) = \lambda - \lambda_1$, откуда $P_1(\lambda) + \lambda_1 = \lambda$ и $P_1(\mathbf{A}) + \lambda_1\mathbf{E} = \mathbf{A}$,

$P_2(\lambda) = P_1(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_2) \Rightarrow P_2(\mathbf{A}) + \lambda_2 P_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}P_1(\mathbf{A})$,

$P_3(\lambda) = P_2(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_3) \Rightarrow P_3(\mathbf{A}) + \lambda_3 P_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}P_2(\mathbf{A})$,

$...,$

$$P_{n-1}(\lambda) = P_{n-2}(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_{n-1}) \Rightarrow P_{n-1}(\mathbf{A})+\lambda_{n-1}P_{n-2}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}P_{n-2}(\mathbf{A}),$$

$$P_n(\lambda) = P_{n-1}(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_n) \Rightarrow P_n(\mathbf{A})+\lambda_n P_{n-1}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}P_{n-1}(\mathbf{A}).$$

Поскольку $P_n(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{n}(\lambda-\lambda_k)$ — характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$, то по теореме Гамильтона-Кэли $P_n(\mathbf{A}) = 0$. Поэтому последнее равенство можно записать в виде $\lambda_n P_{n-1}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}P_{n-1}(\mathbf{A})$.

Подставим вычисленные значения выражений $P_k(\mathbf{A}) + \lambda_k P_{k-1}(\mathbf{A})$ в (3.4) и продолжим вычисления:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = \psi_1\mathbf{A} + \psi_2\mathbf{A}P_1(\mathbf{A}) + \psi_3\mathbf{A}P_2(\mathbf{A}) + ... + +\psi_n\mathbf{A}P_{n-1}(\mathbf{A}) =$$

$$= \mathbf{A}(\psi_1\mathbf{E} + \psi_2 P_1(\mathbf{A}) + \psi_3 P_2(\mathbf{A}) + ... + \psi_n P_{n-1}(\mathbf{A})) = \mathbf{A\Phi}(t)$$

В силу единственности решения задачи Коши функция $\mathbf{\Phi}(t)$ является матричной экспонентой $\exp(\mathbf{A}t)$.

Следствие. Если вектор-функция $\vec{y}(t)$ является решением системы (3.1), то каждая ее компонента $y_j(t)$ является решением уравнения $P(\frac{d}{dt})[y_j(t)] = 0$, где $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ — характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$.

Доказательство. Любое решение системы (3.1) можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\vec{c} = (\mathbf{E}\cdot\psi_1(t)+P_1(\mathbf{A})\cdot\psi_2(t)+P_2(\mathbf{A})\cdot\psi_3(t)+...+P_{n-1}(\mathbf{A})\cdot\psi_n(t))\vec{c}$$

Это значит, что $\vec{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n}\vec{v}_k\cdot\psi_k(t)$, где $\vec{v}_k$ — некоторые числовые векторы.

Отсюда сразу же следует, что $y_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} v_{kj}\cdot\psi_k(t)$, то есть каждая компонента $y_j(t)$ является линейной комбинацией функций $\psi_k(t)$. Но, как мы установили ранее, каждая функция $\psi_k(t)$ является решением уравнения $P(\frac{d}{dt})[y(t)] = 0$, следовательно, и их линейная комбинация также является решением этого уравнения.

Наконец, полиномиальное представление позволяет оценить рост матричной экспоненты как функции от t.

Теорема. (Неравенство Гельфанда –Шилова) Если значение δ таково, что $\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant \delta$ для всех значений $k = 1, ..., n$, то при $t \geqslant 0$

$$\|\exp(\mathbf{A}t)\| \leqslant (1 + 2\|\mathbf{A}\|t + ... + \frac{(2\|\mathbf{A}\|t)^{n-1}}{(n-1)!}) \cdot e^{\delta t}$$

Доказательство. Заметим, что для любого собственного числа матрицы $\mathbf{A}$ справедлива оценка $|\lambda_k| \leqslant \|\mathbf{A}\|$.

Действительно, по определению $\|\mathbf{A}\| = \sup\limits_{\vec{u}\neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$, поэтому

$$\|\mathbf{A}\vec{u}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\vec{u}\|.$$

Если $\vec{u}$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, то $\mathbf{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}$, и

$$\|\mathbf{A}\vec{u}\| = \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|.$$

Отсюда и следует, что $|\lambda_k| \leqslant \|\mathbf{A}\|$.

Тогда для любого значения $j = 1, ..., n$

$$\|\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{E}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\lambda_j\mathbf{E}\| = \|\mathbf{A}\| + |\lambda_j| \leqslant 2\|\mathbf{A}\|.$$

Поскольку $P_k(\mathbf{A}) = \prod\limits_{j=1}^{k}(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{E})$, то

$$\|P_k(\mathbf{A})\| \leqslant \prod_{j=1}^{k} \|\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}\| \leqslant (2\|\mathbf{A}\|)^k.$$

Теперь покажем, что для любого $k = 1, ..., n$ имеет место оценка

$$|\psi_k(t)| \leqslant \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{\delta t}.$$

Для $k = 1$

$$|\psi_1(t)| = |e^{\lambda_1 t}| = |e^{(\operatorname{Re}\lambda_1)t}||e^{i(\operatorname{Im}\lambda_1)t}| = |e^{(\operatorname{Re}\lambda_1)t}| = e^{(\operatorname{Re}\lambda_1)t} \leqslant e^{\delta t}.$$

Допустим, что для некоторого k оценка $|\psi_k(t)| \leqslant \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{\delta t}$ установлена. Докажем, что она верна и для $k+1$. Воспользуемся интегральной рекуррентной формулой:

$$|\psi_{k+1}(t)| = |\int_0^t e^{\lambda_{k+1}(t-\tau)} \psi_k(\tau) d\tau| \leqslant \int_0^t |e^{\lambda_{k+1}(t-\tau)}| \cdot |\psi_k(\tau)| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t e^{(\operatorname{Re}\lambda_{k+1})(t-\tau)} \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} e^{\delta\tau} d\tau \leqslant \int_0^t e^{\delta(t-\tau)} \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} e^{\delta\tau} d\tau =$$

$$= e^{\delta t} \int_0^t \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} d\tau = \frac{t^k}{k!} \cdot e^{\delta t}.$$

Применим полученные оценки к слагаемым в полиномиальном представлении матричной экспоненты:

$$\|\exp(\mathbf{A}t)\| \leqslant \|\mathbf{E}\psi_1(t)\| + \|P_1(\mathbf{A})\psi_2(t)\| + \|P_2(\mathbf{A})\psi_3(t)\| + ... + \|P_{n-1}(\mathbf{A})\psi_n(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{\delta t} + (2\|\mathbf{A}\|) t e^{\delta t} + (2\|\mathbf{A}\|)^2 \frac{t^2}{2} e^{\delta t} + ... + (2\|\mathbf{A}\|)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\delta t} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + 2\|\mathbf{A}\|t + ... + \frac{(2\|\mathbf{A}\|t)^{n-1}}{(n-1)!}) \cdot e^{\delta t}$$

Глава 4

Практика.

Среди всех фундаментальных матриц $\mathbf{Y}(t)$ есть только одна, обладающая свойством $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E}$, что делает ее чрезвычайно удобной.

Действительно, любое решение системы $\dfrac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{A}\vec{y}$ выражается через фундаментальную матрицу по формуле $\vec{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \vec{c}$, где $\vec{c}$ — некоторый числовой вектор. Если поставить для системы задачу Коши $\vec{y}(0) = \vec{y_0}$, то из равенства $\vec{y_0} = \mathbf{Y}(0) \cdot \vec{c}$ в силу условия $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E}$ сразу же получается, что $\vec{c} = \vec{y_0}$. Таким образом, решение поставленной задачи Коши дается формулой $\vec{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \vec{y_0}$.

Такую замечательную фундаментальную матрицу называют матричной экспонентой и обозначают $\exp(\mathbf{A}t)$ по аналогии со скалярной функцией $y = e^{at}$, являющейся решением задачи Коши $\dot{y} = ay$, $y(0) = 1$. Итак,

$$\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{E} \tag{4.1}$$

Можно показать, что матричная экспонента, как и функция $y = e^{at}$, раскладывается в ряд по степеням t:

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A} \cdot t + \mathbf{A}^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + ... + \mathbf{A}^n \cdot \frac{t^n}{n!} + ... \tag{4.2}$$

Посмотрим, каким образом можно найти матричную экспоненту.

Первый способ основан на том, что любые две фундаментальные матрицы связаны друг с другом соотношением $\mathbf{Y}_2(t) = \mathbf{Y}_1(t) \cdot \mathbf{B}$. Достаточно найти какую-нибудь фундаментальную матрицу $\mathbf{Y}(t)$, тогда $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{B}$ с некоторой матрицей $\mathbf{B}$. При $t = 0$ матричная экспонента равна $\mathbf{E}$, то есть $\mathbf{Y}(0)\cdot\mathbf{B}=\mathbf{E}$, откуда $\mathbf{B}=\mathbf{Y}^{-1}(0)$.

Таким образом, взяв произвольную фундаментальную матрицу $\mathbf{Y}(t)$, можно построить матричную экспоненту по формуле

$$\exp(\mathbf{A}t)=\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{Y}^{-1}(0).$$

Пример 1. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$.

На предыдущем занятии (см. пример 5) мы нашли решение системы $\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ и ее фундаментальную матрицу

$$\mathbf{Y}(t)=e^t\begin{pmatrix}0&-2\sin 2t&2\cos 2t\\1&\cos 2t&\sin 2t\\-1&3\cos 2t&3\sin 2t\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\exp(\mathbf{A}t)=e^t\begin{pmatrix}0&-2\sin 2t&2\cos 2t\\1&\cos 2t&\sin 2t\\-1&3\cos 2t&3\sin 2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\\-1&3&0\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=e^t\begin{pmatrix}0&-2\sin 2t&2\cos 2t\\1&\cos 2t&\sin 2t\\-1&3\cos 2t&3\sin 2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3/4&-1/4\\0&1/4&1/4\\1/2&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=e^t\begin{pmatrix}\cos 2t&-0,5\sin 2t&-0,5\sin 2t\\0,5\sin 2t&0,75+0,25\cos 2t&-0,25+0,25\cos 2t\\1,5\sin 2t&-0,75+0,75\cos 2t&0,25+0,75\cos 2t\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{e^t}{4}\begin{pmatrix} 4\cos 2t & -2\sin 2t & -2\sin 2t \\ 2\sin 2t & 3+\cos 2t & -1+\cos 2t \\ 6\sin 2t & -3+3\cos 2t & 1+3\cos 2t \end{pmatrix}$$

Это и есть матричная экспонента.

Второй способ. Матричную экспоненту легко построить, используя специальный базис, состоящий из функций $\psi_k(t)$, с которыми мы познакомились на занятии 9.

Пусть λ_1, λ_2, ... , λ_n — корни характеристического многочлена $\det\Big(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\Big)$. Если корень кратный, то он выписан в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Напомним, что $\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $\psi_{k+1}(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda_{k+1}(t-\tau)}\psi_k(\tau)d\tau$. Тогда

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot\psi_1(t) + \Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_2(t) + \Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\Big(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_3(t) + \ldots$$
$$\ldots + \Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\Big(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(\mathbf{A}-\lambda_{n-1}\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_n(t) \quad (4.3)$$

Этот способ особенно эффективен в случае кратных корней, поскольку он не требует выяснения их геометрической кратности.

Пример 2. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен $\det\Big(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\Big) = (\lambda+1)^2$ имеет корень $\lambda = -1$ кратности 2. Поэтому $\psi_1(t) = e^{-t}$, $\psi_2(t) = te^{-t}$ и

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot e^{-t} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot te^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t}-2te^{-t} & 2te^{-t} \\ -2te^{-t} & e^{-t}+2te^{-t} \end{pmatrix}$$

Пример 3. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для матрицы $\mathbf{A}$ размера 2×2, имеющей собственные числа $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

$$\psi_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}, \;\; \psi_2(t) = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{(\alpha+i\beta)-(\alpha-i\beta)} = \frac{e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t}{\beta}$$

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + \Big(\mathbf{A} - (\alpha+i\beta)\mathbf{E}\Big)\cdot\frac{e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t}{\beta} =$$
$$= e^{\alpha t}\cos\beta t\cdot\mathbf{E} + \Big(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E}\Big)\cdot\frac{e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t}{\beta}$$

Если $\alpha = 0$, то $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot\cos\beta t + \mathbf{A}\cdot\dfrac{\sin\beta t}{\beta}$.

Если $\beta = 0$, то $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot e^{\alpha t} + \Big(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E}\Big)\cdot te^{\alpha t}$.

Пример 4. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для матрицы $\mathbf{A}$, являющейся жордановой клеткой, то есть имеющей вид $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_0 & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет единственное собственное число λ_0 кратности n. Поэтому $\psi_1(t) = e^{\lambda_0 t}$, $\psi_k(t) = \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_0 t}$, $1 < k \leqslant n$. Тогда

$$\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)^k = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{\dots}^{k-1} & 1 & & 0 \\ & 0 & \dots & \ddots & \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$(1 < k < n)$, (диагональ из единиц смещается вправо), и наконец $\Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)^n = \mathbf{0}$. Тогда по формуле (12.3)

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot e^{\lambda_0 t} + \Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)\cdot te^{\lambda_0 t} + \ldots + \Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)^{n-1}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_0 t} =$$

$$= e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} & \cdots & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \dfrac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 5. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$

Применить метод исключения для решения этой системы невозможно. Поэтому сразу приступим к построению матричной экспоненты.

Корни характеристического многочлена $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 0$. Соответственно, $\psi_1(t) = e^t$, $\psi_2(t) = te^t$, $\psi_3(t) = \int\limits_0^t \psi_2(\tau)d\tau = te^t - e^t + 1$. Таким образом, $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot e^t + \Big(\mathbf{A} - \mathbf{E}\Big)\cdot te^t + \Big(\mathbf{A} - \mathbf{E}\Big)^2 \cdot (te^t - e^t + 1)$.

Заметим, что здесь $\Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)^2 = -\Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)$. Поэтому после приведения подобных слагаемых получаем

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A}(e^t - 1) + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2e^t - 1 & -e^t + 1 & -e^t + 1 \\ 3e^t - 3 & -2e^t + 3 & -3e^t + 3 \\ -e^t + 1 & e^t - 1 & 2e^t - 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы можно получить в виде линейной комбинации столбцов фундаментальной матрицы

$$\exp(\mathbf{A}t)\cdot\vec{c} = C_1\begin{pmatrix} 2e^t - 1 \\ 3e^t - 3 \\ -e^t + 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -e^t + 1 \\ -2e^t + 3 \\ e^t - 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -e^t + 1 \\ -3e^t + 3 \\ 2e^t - 1 \end{pmatrix}.$$

В рассмотренном примере общее решение можно было бы записать проще, используя собственные векторы. Хотя собственное значение $\lambda = 1$ имеет кратность 2, но ранг матрицы $\Big(\mathbf{A} - \mathbf{E}\Big)$ равен 1. Следовательно, значению $\lambda = 1$ соответствует два линейно независимых собственных вектора, и матрица $\mathbf{A}$ имеет набор линейно независимых собственных векторов, образующих базис в $\mathbb{R}^3$. Найдем их.

$$\vec{u}^{[1]}\Big|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{[2]}\Big|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{[3]}\Big|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, фундаментальная матрица системы имеет вид

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^t \\ 3 & e^t & 0 \\ -1 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что в столбцах матричной экспоненты стоят линейные комбинации столбцов матрицы $\mathbf{Y}(t)$, например,

$$\begin{pmatrix} 2e^t - 1 \\ 3e^t - 3 \\ -e^t + 1 \end{pmatrix} = -\vec{y}^{[1]} + 3\vec{y}^{[2]} - \vec{y}^{[3]},$$

что еще раз иллюстрирует формулу $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{B}$.

Пример 6. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 2x - y - 2z \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$

В данном случае $\lambda_{1,2,3} = 1$, и мы не будем искать собственные векторы, а сразу перейдем к построению матричной экспоненты.

$\psi_1(t) = e^t, \;\; \psi_2(t) = te^t, \;\; \psi_3(t) = \dfrac{t^2}{2}e^t.$

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot e^t + \Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)\cdot te^t + \Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)^2\cdot\frac{t^2}{2}e^t.$$

Поскольку $\Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \mathbf{0}$, то

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^t + te^t & -te^t & -te^t \\ 2te^t & e^t - 2te^t & -2te^t \\ -te^t & te^t & e^t + te^t \end{pmatrix}.$$

Как видим, в случае кратных корней частные решения могут иметь вид $\begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix}\cdot e^{\lambda t}$, где $P_i(t)$ — многочлены, степень которых меньше или равна кратности собственного числа, а в некоторых случаях, как в примере 5, равна нулю. Какова эта степень — зависит от матрицы A, но «умная» формула (12.3) избавляет нас от необходимости изучать ее структуру.

Третий способ. Для построения матричной экспоненты используем матричный ряд (12.2).

Пример 7. Пусть $\mathbf{A}$ — матрица третьего порядка, имеющая характеристический многочлен $\lambda^3 - \lambda = 0$. По теореме Кэли любая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то есть $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$. Отсюда легко найти все степени матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$ и так далее. Итак, $\mathbf{A}^{2n} = \mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^{2n+1} = \mathbf{A}$. Тогда

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}\Big(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots\Big) + \mathbf{A}^2\Big(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots\Big) =$$
$$= \mathbf{E} + \mathbf{A}\,\mathrm{sh}\,t + \mathbf{A}^2(\mathrm{ch}\,t - 1).$$

Заметим, что равенство $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$ не означает, что порядок матрицы равен трем — собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ могут быть высокой кратности. Тем не менее, полученная формула матричной экспоненты остается справедливой.

Четвертый способ. Если матрица $\mathbf{A}$ имеет блочно-диагональную структуру $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_2 & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix}$, то

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{A}_1 t) & & \mathbf{0} \\ & \exp(\mathbf{A}_2 t) & \\ \mathbf{0} & & \exp(\mathbf{A}_3 t) \end{pmatrix}.$$

В частности, если матрица $\mathbf{A}$ диагональна: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

$$\text{то } \exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Иногда блочная природа матрицы не столь очевидна, тем не менее можно воспользоваться данным способом построения матричной экспоненты.

Пример 8. Рассмотрим систему с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем соответствующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 4y_5 \\ \dot{y}_2 = 2y_2 + y_4 \\ \dot{y}_3 = -y_3 \\ \dot{y}_4 = 2y_4 \\ \dot{y}_5 = -y_1 + y_5 \end{cases}$$

Она распадается на три подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 4y_5 \\ \dot{y}_5 = -y_1 + y_5 \end{cases}, \quad \dot{y}_3 = -y_3, \quad \begin{cases} \dot{y}_2 = 2y_2 + y_4 \\ \dot{y}_4 = 2y_4 \end{cases}.$$

Соответственно, $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем матричную экспоненту для каждой подсистемы.

$$\exp(\mathbf{A}_1 t) = e^t \cos 2t\mathbf{E} + e^t \frac{\sin 2t}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -0,5\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$\exp(\mathbf{A}_2 t) = e^{-t}, \quad \exp(\mathbf{A}_3 t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь осталось «разнести» эти блоки на соответствующие места матрицы $\exp(\mathbf{A}t)$. Итак,

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^t\cos 2t & 0 & 0 & 0 & 2e^t\sin 2t \\ 0 & e^{2t} & 0 & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ -0,5e^t\sin 2t & 0 & 0 & 0 & e^t\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Пятый способ. Если матрицы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ подобны, то есть существует такая невырожденная матрица $\mathbf{T}$, что $\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{T}^{-1}$, то $\exp(\mathbf{A}_1 t) = \mathbf{T}\cdot\exp(\mathbf{A}_2 t)\cdot\mathbf{T}^{-1}$.

Если матрица $\mathbf{A}$ имеет простую структуру, а именно, у нее есть n вещественных собственных чисел λ_1, λ_2, ... , λ_n и n линейно независимых собственных векторов $\vec{u}^{[1]}$, $\vec{u}^{[2]}$, ... , $\vec{u}^{[n]}$, то такую матрицу можно привести к диагональному виду

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}\cdot\mathbf{T}^{-1}$$

при помощи матрицы $\mathbf{T}$, в столбцах которой стоят собственные векторы $\vec{u}^{[1]}$, ... , $\vec{u}^{[n]}$ матрицы $\mathbf{A}$.

Тогда $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{T}\cdot\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\cdot\mathbf{T}^{-1}.$

Легко видеть, что матрица

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \left(e^{\lambda_1 t}\vec{u}^{[1]} \,\middle|\, e^{\lambda_2 t}\vec{u}^{[2]} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, e^{\lambda_n t}\vec{u}^{[n]} \right)$$

является фундаментальной, и $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{B}$, где $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}$ — невырожденная матрица перехода.

В курсе линейной алгебры доказывается, что любая матрица подобна так называемой жордановой форме, то есть блочно-диагональной матрице, каждый блок которой является жордановой клеткой. Матричную экспоненту для жордановой клетки мы получили в примере 4, используя функции $\psi_k(t)$. Можно прийти к тому же результату другим путем.

Заметим, что жорданову клетку $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$ можно представить в виде $\mathbf{A} = \lambda_0\mathbf{E} + \mathbf{G}$, где $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

Известно, что если матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ коммутируют, то $\exp\big((\mathbf{B}+\mathbf{C})t\big) = \exp(\mathbf{B}t) \cdot \exp(\mathbf{C}t)$.

Так как единичная матрица коммутирует с любой матрицей, то $\exp\big((\lambda_0\mathbf{E}+\mathbf{G})t\big) = e^{\lambda_0 t}\mathbf{E} \cdot \exp(\mathbf{G}t)$.

Далее, по формуле (12.2)

$$\exp(\mathbf{G}t) = \mathbf{E} + \mathbf{G} \cdot t + \mathbf{G}^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{G}^k \cdot \frac{t^k}{k!} + \dots,$$

но так как $\mathbf{G}^k = \mathbf{0}$ при $k \geqslant n$, то ряд превращается в конечную сумму:

$$\exp(\mathbf{G}t) = \mathbf{E} + \mathbf{G}\cdot t + \mathbf{G}^2\cdot\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{G}^{n-1}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы пришли к уже известной нам формуле

$$\exp(\mathbf{A}t) = e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Как видим, матричная экспонента для жордановой клетки строится легко, однако алгоритм приведения матрицы к жордановой форме (особенно в случае кратных собственных чисел) достаточно сложен. Поэтому для построения матричной экспоненты мы рекомендуем использовать другие, более эффективные приемы.

Вопросы для самоконтроля

Найти матричную экспоненту $\exp(\mathbf{A}t)$.

1. Матрица $\mathbf{A}$ такова, что $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{E}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm 2)$

Ответ оставьте в виде $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(0)$.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответы и указания

1. $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} \cdot \cos t + \mathbf{A} \cdot \sin t$

2. Указание: найдите фундаментальную матрицу методом исключения

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & e^{2t} & -e^{-2t} \\ 1 & e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

3. $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A^2}\,\dfrac{t^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Указание: $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 = \mathbf{0}$

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

5. Указание: выделите подсистемы, соответствующие блокам матрицы $\mathbf{A}$.

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & 0 & 0 & e^{-t}\sin t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ -e^{-t}\sin t & 0 & 0 & e^{-t}\cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 4t & 0,5\sin 4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix}.$$

Задачи

1.1 Используя матричную экспоненту, решите матричные задачи Коши ($\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)$ — искомая матрица, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — числовые матрицы)

а) $\begin{cases} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{B} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{A} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{B} \end{cases}$

1.2 Известно, что $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t)$ и $\det \mathbf{Y}(0) \neq 0$. Какому уравнению удовлетворяет матрица $\mathbf{Y}^{-1}(t)$?

1.3 Решите матричную задачу Коши $\begin{cases} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{B} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{C} \end{cases}$ при условии, что матрица $\mathbf{A}$ невырождена ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — числовые матрицы).

2.1 Найдите матричную экспоненту для матрицы $\mathbf{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Найдите предел $\exp(\mathbf{A}_\varepsilon t)$ при $\varepsilon \to 1$ и убедитесь, что $\exp(\mathbf{A}_\varepsilon t)$ непрерывно зависит от ε.

2.2 Матрица $\mathbf{A}$ размера $(2n \times 2n)$ имеет следующую блочную структуру: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{B}$ — матрица размера $(n \times n)$. Найдите $\exp(\mathbf{A}t)$.

2.3 Решите матричную задачу Коши $\begin{cases} \ddot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}^2\,\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbf{E},\ \dot{\mathbf{Y}}(0) = \mathbf{0} \end{cases}$

3.1 Докажите, что если $\mathbf{A}$ — кососимметрическая матрица (то есть $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$), то $\exp \mathbf{A}$ — ортогональная матрица.

3.2 Пусть все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ имеют отрицательную вещественную часть. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \exp(\mathbf{A}t)dt$ сходится и

$$\mathbf{A^{-1}} = -\int\limits_0^{+\infty} \exp(\mathbf{A}t)dt.$$

Предложите аналогичную формулу для вычисления $\mathbf{A}^{-1}$, если все собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ имеют положительную вещественную часть.

Используя эти формулы, найдите $\mathbf{A}^{-1}$ в случае, когда матрица $\mathbf{A}$ является жордановой клеткой с собственным значением $\lambda_0 \neq 0$.

Ответы и указания к задачам

1.1 а) $\mathbf{Y} = \exp(\mathbf{A}t) \cdot \mathbf{B}$, б) $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \exp(\mathbf{A}t)$

1.2 *Указание*: матрица $\mathbf{Y}(t)$ невырождена во всех точках t, если $\det \mathbf{Y}(t_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке t_0.

Ответ: $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{Y}^{-1}) = -\mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{A}$

1.3 $\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{A}t)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

2.1 *Указание*: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \varepsilon$, $\lambda_3 = 2$.

Ответ: $$\exp(\mathbf{A}_\varepsilon t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^t - \varepsilon e^{\varepsilon t}}{1-\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon(e^t - e^{\varepsilon t})}{1-\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon(e^{\varepsilon t} - e^t)}{1-\varepsilon} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ \dfrac{e^t - e^{\varepsilon t}}{1-\varepsilon} & \dfrac{\varepsilon e^t - e^{\varepsilon t}}{1-\varepsilon} + e^{2t} & \dfrac{e^{\varepsilon t} - \varepsilon e^t}{1-\varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 1} \exp(\mathbf{A}_\varepsilon t) = \begin{pmatrix} e^t + te^t & te^t & -te^t \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ te^t & -e^t + te^t + e^{2t} & e^t - te^t \end{pmatrix}$$

2.2 $$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\mathbf{B}t) & \operatorname{sh}(\mathbf{B}t) \\ \operatorname{sh}(\mathbf{B}t) & \operatorname{ch}(\mathbf{B}t) \end{pmatrix}$$

2.3 $\mathbf{Y}(t) = \operatorname{ch}(\mathbf{A}t) = \dfrac{1}{2}\big(\exp(\mathbf{A}t) + \exp(-\mathbf{A}t)\big)$

3.1 *Указание*: воспользуйтесь представлением $\exp \mathbf{A}$ в виде «степенного» ряда.