МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А.С.Романов

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие.

Новосибирск

ПРЕДИСЛОВИЕ

Раздел "Асимптотические методы"входит в курс лекций по теории функций комплексного переменного, читаемый на втором курсе физического факультета НГУ. Существует достаточно много учебников, каждый из которых практически полностью содержит классические разделы теории функций комплексного переменного, включаемые в данный курс лекций. При этом довольно сложно порекомендовать какое-либо учебное пособие, в котором основы асимптотических методов изложены, с одной стороны, достаточно полно, с другой стороны, достаточно просто – на уровне, соответствующем математической подготовке студентов второго курса физического факультета. Данный текст можно рассматривать как попытку написания учебного пособия, удовлетворяющего перечисленным выше требованиям. Вошедший в пособие материал получился несколько большим чем тот, который традиционно удается прочитать за 4 лекции, выделяемые на изучение асимптотических методов. При написании пособия в той или иной мере использованы все литературные источники, приведенные в конце текста. Однако основную часть материала можно найти в работах [3], [4], [6] и [7].

Структурно пособие разделено на 5 небольших глав, каждую из которых можно читать практически независимо от других. В рамках каждой главы используется сквозная двойная нумерация, при которой вторая цифра указывает на номер главы.

Автор будет благодарен всем, кто сообщит об обнаруженных ошибках, опечатках, неточностях, а также о собственных замечаниях и коментариях по адресу: <asrom@math.nsc.ru>

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели реальных явлений, как правило, содержат довольно сложные зависимости между числовыми параметрами, характеризующими данное явление. По этой причине найти решение в явном виде часто не удается. Однако в случае, когда известно, что некоторые из параметров очень малы или, наоборот, очень велики математическое описание явления обычно удается упростить. Методы, позволяющие получить достаточно простое, удобное и в существенном правильное описание изучаемого явления, используя стремление параметра либо к нулю либо к бесконечности, называют *асимптотическими.*

Пример 1. Если на тело массы m действуют возвращающая его в положение равновесия сила, пропорциональная (с коэффициентом k) величине отклонения, и сила сопротивления среды, пропорциональная (с коэффициентом α) квадрату скорости, то уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha(\dot{x})^2 + kx = 0.$$

В случае, когда среда "разрежается", т.е. $\alpha \to 0$, движение становится близким к гармоническим колебаниям частоты $\sqrt{\frac{k}{m}}$, описываемым уравнением

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

В случае, когда плотность среды возрастает, т.е. $\alpha \to \infty$, поделив на α, получаем в пределе уравнение $\dot{x} = 0$, и следовательно $x(t) \equiv const$.

Пример 2. Классический пример использования асимптотических оценок дает формула Тейлора, позволяющая аппроксимировать значения гладкой функции значениями соответствующего полинома.

Так ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!}$ сходится во всей комплексной плоскости C и является разложением функции $f(z) = e^{-z}$. Для произвольного $n \in N$ представим ряд в виде суммы двух функций

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!} = S_n(z) + R_n(z),$$

где $S_n(z)$ – частичная сумма ряда (полином Тейлора), а $R_n(z)$ – остаточный член.

При этом $f(0) = S_n(0)$ для всякого $n \in N$, а в произвольной фиксированной точке $z \neq 0$ остаточный член $R_n(z)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Следовательно, при увеличении степени полинома Тейлора абсолютная погрешность стремится к нулю, что позволяет вычислить значение функции в фиксированной точке с любой наперед заданной точностью.

Однако при изучении поведения функции в окрестности нуля часто более полезной оказывается другая оценка, связанная с формулой Тейлора,

$$e^{-z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^k}{k!} = o(z^n) \quad \textit{при} \quad z \to 0.$$

В этой оценке важно, что каждое слагаемое частичной суммы $S_n(z)$ является при $z \to 0$ величиной бесконечно малой по сравнению предыдущим слагаемым, а остаточный член $R_n(z)$ является величиной бесконечно малой по сравнению с последним слагаемым в частичной сумме ряда. Из этого следует, что для фиксированного n при замене функции на соответствующий полином Тейлора **относительная погрешность** стремится к нулю при $z \to 0$.

Несколько неожиданным оказывается факт, что для получения такого типа оценок могут использоваться *расходящиеся ряды.*

Пример 3. Еще в XVIII веке Леонардом Эйлером был рассмотрен расходящийся всюду кроме нуля степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! z^k, \qquad (*)$$

"небольшое"отличие которого от ряда из примера 2 заключается в том, что соответствующий факториал вместо знаменателя находится в числителе.

Оказалось, что этот ряд может быть получен в результате *формального* разложения в степенной ряд функциии

$$E(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{1+zt},$$

являющейся аналитической в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси.

Заметим, что при $n \in N$

$$\frac{1}{1+zt} = \sum_{k=0}^{n} (-zt)^k + \frac{(-zt)^{n+1}}{1+zt}.$$

Учитывая явное выражение для эйлерова интеграла

$$\int\limits_0^\infty t^k e^{-t}\,dt = \Gamma(k+1) = k!,$$

функцию $E(z)$ можно представить в виде

$$E(z) = S_n(z) + R_n(z),$$

где

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^k \int\limits_0^\infty t^k e^{-t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! z^k$$

– частичная сумма ряда (*), а

$$R_n(z) = (-z)^{n+1} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t} t^{n+1}\,dt}{1+zt}$$

– остаточный член.

Поскольку $S_n(z) - S_{n-1}(z) = (-1)^k k! z^k$, то последовательность частичных сумм не имеет конечного предела ни в одной точке отличной от нуля.

Таким образом получается парадоксальная ситуация - однозначно определенной в комплексной плоскости с разрезом аналитической функции $E(z)$ ставится в соответствие ряд, расходящийся всюду кроме точки $z = 0$. Возникает вопрос: в каком смысле расходящийся ряд (*) характеризует данную функцию, и какую полезную информацию о поведении функции $E(z)$ можно получить, использую данный ряд?

Фиксировав точку $z \neq 0$, легко заметить, что абсолютная погрешность $|E(z) - S_n(z)|$ растет при увеличении номера n. Поэтому мы не можем использовать частичные суммы ряда (*) для нахождения значения функции $E(z)$ в точке $z \neq 0$.

Однако ситуация выглядит иначе, если зафиксировать номер n и устремить z к нулю. Рассмотрим сектор

$$\Omega = \{z \in C \mid \; 0 < |z|, \; |\arg z| < \pi - \delta\},$$

где $0 < \delta < \pi$.

Существует постоянная $M < \infty$ такая, что для любых $z \in \Omega$ и $t \in [0, \infty)$

$$|1+zt|^{-1} < M, \quad \text{и следовательно} \quad |R_n(z)| \leq M(n+1)!|z|^{n+1}.$$

Таким образом при $z \to 0$ внутри сектора Ω остаточный член , как и в примере 2, является величиной бесконечно малой по сравнению с последним слагаемым в частичной сумме ряда, и при замене функции частичной суммой ряда (*) погрешность стремится к нулю при $z \to 0$. При этом можно заметить, что каждое слагаемое в частичной сумме ряда также является величиной бесконечно малой по сравнению с предыдущим слагаемым. Несложно проверить, что среди всех степенных рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ только найденный Эйлером расходящийся ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k k! z^k$ обладает тем свойством, что для любого $n \in N$

$$E(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + o(z^n), \quad \textit{при}\ z \to 0,\ z \in \Omega. \tag{**}$$

Таким образом асимптотические формулы (**) однозначно определяют коэффициенты степенного ряда (*).

В данном случае мы имеем дело с некоторым новым взглядом на вопрос представимости функций степенными рядами, основанным на оценке *относительной* (а не абсолютной, как в классическом случае) погрешности приближения значений функции частичными суммами ряда. Возникающие при таком подходе ряды принято называть *асимптотическими.* При этом довольно часто асимптотические ряды оказываются расходящимися и используются не столько для оценки значения функции в конкретной точке сколько для изучения поведения функции при стремлении аргумента к некоторому предельному значению.

I. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ СУММ И ИНТЕГРАЛОВ

1. Асимптотические оценки.

Пусть D – подмножество комплексной плоскости C, имеющее предельную точку ω. Рассмотрим комплекснозначные функции f и g, определенные на множестве D.

Определение.

1. Функцию $f(z)$ называют бесконечно малой по сравнению с функцией $g(z)$ при $z \to \omega$, если существует функция $\alpha(z)$ такая, что $f(z) = \alpha(z)g(z)$ и $\alpha(z) \to 0$ при $z \to \omega$, $z \in D$. При этом также говорят, что функция $f(z)$ является *о малым* от $g(z)$ при $z \to \omega$, и используют обозначение $f(z) = o(g(z))$ при $z \to \omega$.

2. Говорят, что функция $f(z)$ является *о большим* от $g(z)$ при $z \to \omega$, и используют обозначение $f(z) = O(g(z))$ при $z \to \omega$, если существуют функция $\beta(z)$ и окрестность U точки ω такие, что $f(z) = \beta(z)g(z)$ и $|\beta(z)| \leq K < \infty$ при $z \in U \cap D$.

Функции $f(z)$ и $g(z)$ называют функциями одного порядка при $z \to \omega$, если одновременно $f(z) = O(g(z))$ и $g(z) = O(f(z))$.

3. Функции $f(z)$ и $g(z)$ называют *эквивалентными* при $z \to \omega$, и используют обозначение $f(z) \sim g(z)$ при $z \to \omega$, если существует функция $\gamma(z)$ такая, что $f(z) = \gamma(z)g(z)$ и $\gamma(z) \to 1$ при $z \to \omega$, $z \in D$.

Замечание. Если существует проколатая окрестность $\dot{U}$ точки ω такая, что функция $g(z) \neq 0$ при $z \in \dot{U} \cap D$, то

1^*.

$$f(z) = o(g(z)) \ \textit{при}\ z \to \omega \iff \lim_{z \to \omega} \frac{f(z)}{g(z)} = 0.$$

2^*.

$$f(z) \sim g(z) \ \textit{при}\ z \to \omega \iff \lim_{z \to \omega} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

Пример 1.1. При $z \to 0$ для любого $n \in N$

1.

$$e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = o(z^n);$$

2.

$$e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = O(z^{n+1});$$

3.
$$e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \sim \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Из определений нетрудно получить некоторые правила действий с символами $o,\ O$. Пусть $z \to \omega$, $z \in D$, тогда

$$o(f(z)) + o(f(z)) = o(f(z)),$$
$$o(f(z))o(g(z)) = o(f(z)g(z)),$$
$$o(o(f(z)) = o(f(z).$$

Точно такие же формулы справедливы для символа O. Кроме этого, имеют место формулы

$$o(f(z)) + O(f(z)) = O(f(z)),$$
$$o(f(z))O(g(z)) = o(f(z)g(z)),$$
$$O(o(f(z)) = o(f(z),\ o(O(f(z)) = o(f(z).$$

Формулы, содержащие соотношения вида

$$f(z) = o(g(z)),\ f(z) = O(g(z)),\ f(z) \sim g(z),$$

называют *асимптотическими формулами* или *асимптотическими оценками.*

2. Простейшие оценки сумм.

Нас будет интересовать асимптотическое поведение сумм вида

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

при $n \to \infty$.

Один из основных методов получения асимптотических оценок для сумм – это приближенная замена суммы соответствующим интегралом.

Теорема 1.1. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна, непрерывна и монотонна при $x \geq 0$. Тогда

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k) = \int\limits_0^n f(x)\,dx + O(1) + O(f(n)) \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть для определенности функция $f(x)$ не убывает. Тогда

$$\int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le f(k) \le \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx.$$

Суммируя неравенства, получаем

$$\int\limits_{0}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \textit{и} \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \le \int\limits_{0}^{n} f(x)\,dx.$$

Следовательно

$$\int\limits_{0}^{n} f(x)\,dx + f(0) \le S(n) \le \int\limits_{0}^{n} f(x)\,dx + f(n),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Пример 2.1. Пользуясь теоремой легко получить оценку для частичных сумм гармонического ряда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int\limits_{0}^{n} \frac{dx}{x} + O(1) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) = \ln n + O(1).$$

Теорема 2.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \ge 0$. Тогда

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int\limits_{0}^{n} f(x)\,dx\Big| \le |f(0)| + \int\limits_{0}^{n} |f'(x)|\,dx.$$

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$f(k) - f(x) = \int\limits_{x}^{k} f'(t)\,dt,$$

следовательно

$$\Big|f(k) - \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx\Big| = \Big|\int\limits_{k-1}^{k} [f(k) - f(x)]\,dx\Big| =$$

$$\Big|\int\limits_{k-1}^{k}\Big(\int\limits_{x}^{k} f'(t)\,dt\Big)\,dx\Big| \le \int\limits_{k-1}^{k}\Big(\int\limits_{k-1}^{k} |f'(t)\,dt\Big)\,dx = \int\limits_{k-1}^{k} |f'(t)|\,dt.$$

Поэтому

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int\limits_{0}^{n} f(x)\,dx\Big| \le |f(0)| + \sum_{k=1}^{n}\Big|f(k) - \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx\Big| \le$$

$$|f(0)| + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{k-1}^{k} |f'(t)|\,dt = |f(0)| + \int\limits_{0}^{n} |f'(t)|\,dt.$$

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение

Теорема 3.1. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ интегрируема, а ее производная $f'(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[x_0, +\infty)$. Тогда при $n > x_0$

$$\Big|\sum_{k=n}^{\infty} f(k) - \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx\Big| \le |f(n)| + \int\limits_{n}^{\infty} |f'(x)|\,dx.$$

Пример 3.1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha}$ при $\alpha > 1$. Поскольку в данном случае

$$\int\limits_{n}^{\infty} |f'(x)|\,dx = n^{-\alpha}, \qquad \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha - 1},$$

то по теореме 3 при $n \to +\infty$ получаем

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} = \frac{n^{-\alpha+1}}{(\alpha-1)} + O(n^{-\alpha}).$$

3. Оценки интегралов со слабой особенностью.

Пусть $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < \omega < \infty, \varepsilon \in C$, функция $f \in C[0,\omega]$. Рассмотрим сектор $S = \{\varepsilon \in C \mid 0 < |\varepsilon| < \omega, |\mathrm{arg}\varepsilon| < \pi - \delta, \delta > 0\}$ и найдем асимптотику интеграла

$$F(\varepsilon,\alpha,\beta) = \int\limits_{0}^{\omega}\frac{f(t)t^{\beta-1}\,dt}{(t+\varepsilon)^{\alpha}} \tag{1.1}$$

при $\varepsilon \to 0, \varepsilon \in S$.

Изучим вначале асимптотическое поведение интеграла типа бета-функции

$$\Phi(\varepsilon, \alpha, \beta) = \int\limits_0^\omega \frac{t^{\beta-1}\, dt}{(t+\varepsilon)^\alpha}.$$

Отметим, что функция $\Phi(\varepsilon, \alpha, \beta)$ является аналитической по переменной ε в секторе S, и при $\alpha \geq \beta$ интеграл $\Phi(0, \alpha, \beta)$ расходится в нуле. Поскольку асимптотика интеграла зависит от соотношения параметров α и β, рассмотрим различные возможные случаи.

1. Пусть $\alpha > \beta$. Запишем интеграл (1.1) в виде

$$\Phi(\varepsilon, \alpha, \beta) = \Big(\int\limits_0^\infty - \int\limits_\omega^\infty\Big) \frac{t^{\beta-1}\, dt}{(t+\varepsilon)^\alpha} = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Функция Φ_2 является аналитической по ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$ и допускает разложение в сходящийся степенной ряд

$$\Phi_2(\varepsilon, \alpha, \beta) = -\int\limits_\omega^\infty \frac{t^{\beta-\alpha-1}\, dt}{(1+\varepsilon t^{-1})^\alpha} =$$

$$-\int\limits_\omega^\infty \sum_{n=0}^\infty \binom{n}{-\alpha} \varepsilon^n t^{\beta-\alpha-n-1}\, dt = \sum_{n=0}^\infty \binom{n}{-\alpha} \frac{\omega^{\beta-\alpha-n}}{\beta-\alpha-n} \varepsilon^n.$$

При вещественном $\varepsilon > 0$, делая в интеграле замену переменной $t = \varepsilon\tau$, находим

$$\Phi_1(\varepsilon, \alpha, \beta) = \varepsilon^{\beta-\alpha} \int\limits_0^\infty \frac{\tau^{\beta-1}\, d\tau}{(1+\tau)^\alpha} = \varepsilon^{\beta-\alpha}\, B(\beta, \alpha-\beta). \qquad (2.1)$$

Поскольку функции Φ_1 и $\varepsilon^{\beta-\alpha}$ являются аналитическими при $\varepsilon \notin (-\infty, 0]$, то из единственности аналитического продолжения следует, что равенство (2.1) будет выполняться и в секторе S.

Таким образом

$$\Phi(\varepsilon, \alpha, \beta) = \varepsilon^{\beta-\alpha}\, B(\beta, \alpha-\beta) + \sum_{n=0}^\infty \binom{n}{-\alpha} \frac{\omega^{\beta-\alpha-n}}{\beta-\alpha-n} \varepsilon^n =$$

$$\varepsilon^{\beta-\alpha}\, B(\beta, \alpha-\beta) + \frac{\omega^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} + O(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0, \varepsilon \in S$.

Для главного члена асимптотики явное выражение

$$\Phi(\varepsilon, \alpha, \beta) \sim \varepsilon^{\beta-\alpha} B(\beta, \alpha-\beta).$$

2. Пусть $\alpha = \beta$.

Делая замену переменной в интеграле, получаем

$$\Phi(\varepsilon, \alpha, \alpha) = \int\limits_0^{\omega} \frac{t^{\alpha-1}\, dt}{(t+\varepsilon)^{\alpha}} = \int\limits_0^{\frac{\omega}{\varepsilon}} \frac{u^{\alpha-1}\, du}{(1+u)^{\alpha}}.$$

Дифференцируя по ε, находим

$$\frac{d\Phi}{d\varepsilon} = -\frac{\omega^{\alpha}}{\varepsilon(\omega+\varepsilon)^{\alpha}} =$$

$$-\varepsilon^{-1}(1+\frac{\varepsilon}{\omega})^{-\alpha} = -\frac{1}{\varepsilon} + h(\varepsilon),$$

где $h(\varepsilon)$ – функция аналитическая в окрестности нуля.

Пусть $H(\varepsilon)$ – первообразная функции $h(\varepsilon)$ такая, что $H(0) = 0$. Тогда

$$\Phi(\varepsilon, \alpha, \alpha) = -\ln\varepsilon + H(\varepsilon) + C_0 = -\ln\varepsilon + C_0 + O(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0, \varepsilon \in S$.

Главный член асимптотики в данном случае имеет вид

$$\Phi(\varepsilon, \alpha, \alpha) \sim -\ln\varepsilon.$$

3. Если $\alpha < \beta$, то интеграл $\Phi(0, \alpha, \beta)$ оказывается сходящимся и легко вычисляется, при этом

$$\Phi(\varepsilon, \alpha, \beta) \sim \frac{\omega^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha}.$$

Из полученных оценок следует, что при $\alpha > \beta$ и $\beta_1 > \beta$

$$\Phi(\varepsilon, \alpha, \beta_1) = o(\Phi(\varepsilon, \alpha, \beta))$$

при $\varepsilon \to 0, \varepsilon \in S$.

Теперь мы можем найти асимптотику интеграла (1.1).

Теорема 4.1 Пусть $\alpha \geq \beta > 0, 0 < \omega < \infty, \varepsilon \in S = \{\varepsilon \in C \mid 0 < |\varepsilon| < \omega, |\arg\varepsilon| < \pi - \delta, \delta > 0\}$, функция $f \in C^1[0,\omega]$ и $f(0) \neq 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0, \varepsilon \in S$ главный член асимптотики интеграла

$$F(\varepsilon,\alpha,\beta) = \int\limits_0^\omega \frac{f(t)t^{\beta-1}\,dt}{(t+\varepsilon)^\alpha}$$

определяется соотношениями:

1) при $\alpha > \beta$

$$F(\varepsilon,\alpha,\beta) \sim f(0)\,B(\beta,\alpha-\beta)\varepsilon^{\beta-\alpha};$$

2) при $\alpha = \beta$

$$F(\varepsilon,\alpha,\alpha) \sim -f(0)\ln\varepsilon.$$

Результат теоремы следует из оценок для интеграла $\Phi(\varepsilon,\alpha,\alpha)$ и равенства $f(t) = f(0) + O(t)$ при $t \in [0,\omega]$.

Задачи и упражнения.

1. Описать классы функций, для которых верны следующие соотношения:
a) $o(O(f^2(x))) + o(f(x))O(f^3(x)) = o(f^2(x))$ при $x \to x_0$;
b) $o(O(f^2(x))) + o(f(x))O(f^3(x)) = o(f^3(x))$ при $x \to x_0$;
c) $o(O(f^2(x))) + o(f(x))O(f^3(x)) = o(f^4(x))$ при $x \to x_0$.

2. Показать, что при $n \to +\infty$

$$a)\ \sum_{k=2}^n k^\alpha(\ln k)^\beta \sim \frac{n^{\alpha+1}(\ln k)^\beta}{\alpha+1} \quad (\alpha > -1);$$

$$b)\ \sum_{k=2}^n \frac{(\ln k)^\alpha}{k} \sim \frac{(\ln k)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha > -1).$$

3. Пусть функция $f \in C^1[0,\omega]$ и $f(0) \neq 0$. Найти главные члены асимптотики при $\varepsilon \to +0$ интегралов:

$$a)\ \int\limits_0^\omega \frac{f(t)}{t+\varepsilon}\,dt, \quad b)\ \int\limits_0^\omega \frac{f(t)}{t^2+\varepsilon^2}\,dt, \quad c)\ \int\limits_0^\omega \frac{f(t)}{(t^2+\varepsilon^2)^\alpha}\,dt.$$

II. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

1. Асимптотические последовательности и разложения.

Рассмотрим множество D, лежащее на действительной прямой или на комплексной плоскости и имеющее предельную точку ω. Пусть U – некоторая окрестность точки ω.

Определение. Последовательность функций $\{\varphi_n : U \cap D \to C\}$ называется **асимптотической последовательностью** при $z \to \omega$, если для любого $n \in N$

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z))$$

при $z \to \omega$.

Пример 1.2 1. Последовательность $\{\varphi_n(z) = (z-\omega)^n\}, z, \omega \in C$, является асимптотической при $z \to \omega$.

2. Последовательность $\{\varphi_n(z) = (z)^{-n}\}, |z| > 1, z \in C$, является асимптотической при $z \to \infty$.

3. Последовательность $\{\varphi_n(x) = (x)^{-n}e^x\}, x > 0$, является асимптотической при $x \to +\infty$. Отметим, что в данном примере все функции $\varphi_n(x)$ являются бесконечно большими при $x \to +\infty$.

Далее мы будем предполагать, что для любой окрестности U предельной точки ω функции $\varphi_n(z), n \in N$, не обращаются тождественно в нуль на множестве $U \cap D$.

Определение. Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ – асимптотическая последовательность функций при $z \to \omega$. Формальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(z)$, где a_k – постоянные, называется **асимптотическим разложением** функции $f(z)$, если для любого $n \in N$

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(z) = o(\varphi_n(z)), \quad z \to \omega. \tag{1.2}$$

При этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(z)$ называют также **асимптотическим рядом** функции $f(z)$ и употребляют запись

$$f(z) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(z), \quad z \to \omega.$$

Сходящиеся ряды Тейлора, конечно, являются асимтотическими рядами для своих сумм: к примеру, $e^x \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ при $x \to 0$. Однако термин *асимптотический ряд* обычно используется по отношению к рядам, которые расходятся или же сходимость которых не установлена. Так ряд, построенный во введении в примере Эйлера, является расходящимся асимптотическим рядом функции $E(z)$, в частности, на действительной оси

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{1+xt} \simeq \sum_{n=0}^\infty (-1)^n n! x^n, \quad x \to +0.$$

Замечание. В определении асимптотического разложения вместо равенств (1.2) иногда более удобно использовать эквивалентные им условия:

$$f(z) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(z) = O(\varphi_{n+1}(z)), \qquad n \in N,\ z \to \omega. \tag{2.2}$$

Если $\{\varphi_n(z)\}$ – асимптотическая последовательность, то $O(\varphi_{n+1}(z)) = o(\varphi_n(z))$, следовательно из выполнения соотношений (2.2) следует выполнение равенств (1.2). С другой стороны, из выполнения равенств (1.2) следует, что

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n+1} a_k \varphi_k(z) = o(\varphi_{n+1}(z))$$

или

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(z) = a_{n+1}\varphi_{n+1}(z) + o(\varphi_{n+1}(z)) = O(\varphi_{n+1}(z)).$$

Определение. Пусть $\{\varphi_n(z)\}$ – асимптотическая последовательность функций при $z \to \omega$. Функция f называется **асимптотическим нулем** относительно последовательности $\{\varphi_n(z)\}$, если $f(z) = o(\varphi_n(z))$ для любого $n \in N$.

Пример 2.2. Функция e^{-1/x^2} является асимптотическим нулем относительно последовательности $\{x^n\}, n \in N, x \to 0, x \in R$.

Определение. Функции f и g называют *асимптотически совпадающими* при $z \to \omega$ относительно асимптотической последовательности $\{\varphi_n(z)\}$, если $f - g$ – разность этих функций является асимптотическим нулем относительно последовательности $\{\varphi_n(z)\}$.

Для асимптотически совпадающих функций мы будем использовать обозначение $f \asymp g$.

Теорема 1.2. Пусть $\{\varphi_k(z)\}$ – асимптотическая последовательность при $z \to \omega$. Если функции f и g допускают асимптотические разложения по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(z)\}$, то эти разложения совпадают тогда и только тогда, когда функции f и g асимптотически совпадают относительно последовательности $\{\varphi_n(z)\}$.

Доказательство. Если функции f и g имеют один и тотже асимптотический ряд, т.е.

$$f(z) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z) \simeq g(z), \quad z \to \omega,$$

то из определения асимптотического разложения следует, что для любого $n \in N$

$$f(z) - g(z) = o(\varphi_n(z)),$$

т.е. функции f и g асимптотически совпадают относительно последовательности $\{\varphi_n(z)\}$.

Если же $f(z) \asymp g(z)$ и

$$f(z) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z), \quad g(z) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(z),$$

то из определения асимптотического разложения следует, что

$$f(z) = a_1\varphi_1(z) + o(\varphi_1(z)) \ \ \textit{и} \ \ g(z) = b_1\varphi_1(z) + o(\varphi_1(z))$$

или

$$(a_1 - b_1)\varphi_1(z) = o(\varphi_1(z)).$$

Последнее равенство, очевидно, возможно лишь при $(a_1 - b_1) = 0$, т.е. $a_1 = b_1$.

Тогда из определения асимптотического разложения мы получаем

$$f(z) = a_1\varphi_1(z) + a_2\varphi_2(z) + o(\varphi_2(z)) \ \ \textit{и} \ \ g(z) = a_1\varphi_1(z) + b_2\varphi_2(z) + o(\varphi_2(z))$$

или

$$(a_2 - b_2)\varphi_2(z) = o(\varphi_2(z)).$$

И следовательно $a_2 = b_2$.

Повторяя аналогичные рассуждения мы получим, что $a_n = b_n$ для любого $n \in N$.

Следствие. Если функция f допускает асимптотическое разложение по последовательности $\{\varphi_n\}$, то асимптотический ряд, соответствующий данной функции, равенствами (1) определяется однозначно. С другой стороны двум поточечно различным, но асимптотически сопадающим функциям может соответствовать один асимптотический ряд.

Замечание. В общем случае разложение функции по наперед заданной асимптотической последовательности может и не существовать. Поэтому одна из задач как раз и состоит в отыскании достаточно простой асимптотической последовательности позволяющей адекватно описать асимптотическое поведение данной функции.

2. Свойства асимптотических разложений.

Из определения асимптотического разложения и того, что линейная комбинация бесконечно малых функций является функцией бесконечно малой ($\alpha o(\varphi) + \beta o(\varphi)) = o(\varphi)$) следует очевидное утверждение

Теорема 2.2. Если функции f и g допускают асимптотические разложения $f \simeq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n,\ g \simeq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$, то их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также допускает асимптотическое разложение, причем

$$(\alpha f + \beta g) \simeq \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)\varphi_n.$$

Менее очевидной является возможность почленного интегрирования асимптотических разложений функций действительного переменного.

Теорема 3.2. Пусть непрерывные положительные на промежутке $[a, \omega)$ функции $\varphi_k(x), n \in N$, образуют асимптотическую последовательность при $x \to \omega$, функция f непрерывна на $[a, \omega)$ и имеет асимптотическое разложение $f(x) \simeq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, а интегралы

$$\Phi_n(x) = \int\limits_x^{\omega} \varphi_n(t)\,dt \ \text{ и } F(x) = \int\limits_x^{\omega} f(t)\,dt$$

сходятся при $x \in [a, \omega)$. Тогда функции $\Phi_n(x)$ образуют асимптотическую последовательность при $x \to \omega$, а для функции F справедливо асимптотическое разложение $F(x) \simeq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Phi_n(x)$.

Доказательство. Поскольку из положительности функций $\varphi_n(x)$ и сходимости соответствующих интегралов следует, что $\Phi_n(x) \neq 0$ при $x \in [a, \omega)$ и $\Phi_n(x) \to 0$ при $x \to \omega$, то мы можем воспользоваться правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to\omega} \frac{\Phi_{n+1}(x)}{\Phi_n(x)} = \lim_{x\to\omega} \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)} = 0.$$

Это означает, что последовательность $\{\Phi_n(x)\}$ является асимптотической при $x \to \omega$.

Поскольку функция f допускает асимптотическое разложение, то

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) + r_n(x), \tag{3.2}$$

где $r_n(x) = o(\varphi_n(x))$.

Функция $r_n(x)$ непрерывна и при любом $x \in [a, \omega)$ существует интеграл $R_n(x) = \int\limits_x^\omega r_n(t)\,dt$. Вновь применяя правило Лопиталя, мы получаем $R_n(x) = o(\Phi_n(x))$.

Поэтому интегрируя равенство (3.2), получаем

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k(x) + R_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k(x) + o(\Phi_n(x)).$$

Замечание. В отличие от интегрирования, почленное дифференцирование асимптотических разложений гладких функций в общем случае приводит к неверным результатам. К примеру, функция $f(x) = e^{-x}\sin(e^x)$ непрерывно дифференцируема и является асимптотическим нулем относительно последовательности $\{x^{-n}\}$ при $x \to +\infty$, т.е. функция имеет тривиальное асимптотическое разложение. Производные функций x^{-n} вновь образуют асимптотическую при $x \to +\infty$ последовательность $\{-nx^{-n-1}\}$, но производная исходной функции $f'(x) = -e^{-x}\sin(e^x) + \cos(e^x)$ не только не является асимптотическим нулем, но вообще не имеет асимптотического разложения по последовательности $\{-nx^{-n-1}\}$ при $x \to +\infty$.

3. Степенные асимптотические разложения.

Степенными называют разложения по асимптотическим последовательностям вида $\{(z-a)^n\}$ при $z \to a$ или $\{(z-a)^{-n}\}$ при $z \to \infty$. Простой заменой переменной эти последовательности приводятся к случаю асимптотической последовательности $\{z^n\}$ при $z \to 0$. Для асимптотической последовательности с $\varphi_n(z) = z^n$ произведение членов последовательности $\varphi_n(z) \cdot \varphi_m(z) = z^{n+m}$ вновь является членом этой последовательности, а производная ${\varphi'}_n(z) = nz^{n-1}$ и первообразная $\Phi_n(z) = z^{n+1}/n+1$ отличаются от соответствующих членов исходной последовательности лишь постоянными множителями. Поэтому степенные асимптотические разложения обладают некоторыми дополнительными свойствами, которые не выполняются в общем случае.

Теорема 4.2. Пусть 0 – предельная точка множества E и функции $f : E \to C,\ g : E \to C$ имеют асимптотические разложения

$$f(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ g(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \ \textit{при}\ z \to 0.$$

Тогда при $z \to 0$

1) $(\alpha f + \beta g)(z) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$;

2) $(f \cdot g)(z) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *где* $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$;

3) *если* $b_0 \neq 0$, *то* $(f/g)(z) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n$, где кэффициенты d_n находятся из соотношений $a_0 = b_0 d_0,\ \ldots,\ \ a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k d_{n-k}, \ldots$.

Доказательство. 1) Это частный случай теоремы 2.2.

2) По условию

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + o(z^n),\ g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + o(z^n).$$

Умножая эти равенства, получаем

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) =$$

$$(a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) z^n + o(z^n).$$

3) Поскольку $b_0 \neq 0$, то $g(z) \neq 0$ для близких к нулю значений z, и, следовательно определено отношение $f(z)/g(z) = h(z)$. Пусть $h(z) = d_0 + d_1 z + \ldots + d_n z^n + r_n(z)$, покажем, что $r_n(z) = o(z^n)$. Из равенства $f(z) = g(z) \cdot h(z)$ получаем, что

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + o(z^n) =$$

$$(b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + o(z^n))(d_0 + d_1 z + \ldots + d_n z^n + o(z^n)) =$$

$$(b_0 d_0) + (b_0 d_1 + b_1 d_0) z + \ldots + (\sum_{k=0}^{n} b_k d_{n-k}) z^n + b_0 r_n(z) + o(r_n(z)) + o(z^n).$$

Вспоминая определение коэффициентов d_n, получаем $o(z^n) = b_0 r_n(z) + o(r_n(z)) + o(z^n)$, откуда следует, что $r_n(z) = o(z^n)$.

Теорема 5.2. Пусть 0 – предельная точка множеств E и S. Функции $f : E \to S$ и $g : S \to C$ имеют асимптотические разложения

$$f(z) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

при $z \to 0$,

$$g(w) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$$

при $w \to 0$.

Тогда при $z \to 0$

$$g(f(z)) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где коэффициенты c_n находятся формальной подстановкой ряда для функции $f(z)$ в ряд для функции $g(w)$ и суммированием получаемых в результате коэффициентов при одинаковых степенях z.

Доказательство. По условию

$$f(z) \simeq \sum_{k=1}^{N} a_k z^k + o(z^N)$$

и

$$g(w) \simeq \sum_{m=0}^{N} b_m w^m + o(w^N).$$

Поэтому

$$g(f(z)) = \sum_{m=0}^{N} b_m f^m(z) + o(f^N(z)) =$$

$$\sum_{n=0}^{N} c_n z^n + o(f^N(z)) + R_N(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n + o(z^N),$$

поскольку $o(f^N(z)) = o(O(z^N)) = o(z^N)$, а все слагаемые входящие в $R_N(z)$ являются бесконечно малыми по сравнению с z^n при $z \to 0$.

Следующие результаты касаются интегрирования и дифференцирования степенных асимптотических разложений функций действительного переменного.

Теорема 6.2 Пусть $f : (0, a) \to R$ и $f(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *при* $x \to 0$. Тогда

1) если функция f непрерывна на интервале $(0, a)$, то

$$\int\limits_0^x f(t)\ dt \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1};$$

2) если функция $f \in C^1(0, a)$ и ее производная допускает асимптотическое разложение

$$f'(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^n,$$

то это разложение можно получить формальным дифференцированием разложения функции f , причем $a'_n = (n+1)a_{n+1}$.

Доказательство. 1) Это утверждение является следствием теоремы 1.3.

2) Для любого $x \in (0, a)$ интеграл $\int\limits_0^x f'(t)\ dt$ существует, поскольку $f'(t)$ непрерывна на $(0, x]$ и ограничена, т.к. $\lim\limits_{t \to +0} f'(t) = a'_0$. Из формулы Ньютона-Лейбница и существования предела $\lim\limits_{t \to +0} f(t) = a_0$ следует, что

$$f(x) = a_0 + \int\limits_0^x f'(t)\ dt.$$

Подставляя в это равенство асимптотическое разложение $f'(t)$ и пользуясь результатом пункта 1) получаем

$$f(x) \simeq a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Равенства $a'_n = (n+1)a_{n+1}$ следуют из единственности асимптотического разложения функции $f(x)$.

4. Асимптотические разложения аналитических функций.

Асимптотические разложения аналитических функций комплексного переменного обладают некоторыми дополнительными свойствами.

Теорема 7.2 Пусть однолистная функция $f(z)$ аналитична в секторе $S = \{z \in C \mid |z| > R > 0, \alpha < \arg z < \beta, 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi\}$ и разлагается в асимптотический ряд $f(z) \simeq \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^{-n}$, *при* $z \to \infty, z \in S$.

Тогда при $z \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(z) = \int\limits_z^\infty f(t)\ dt \simeq \sum_{n=2}^\infty \frac{c_n}{(n-1)z^{n-1}},$$

где интеграл берется по произвольному пути, лежащему в секторе S.

Доказательство. Из оценки $f(z) = O(z^{-2})$ при $z \to \infty$ следует сходимость интеграла $\int\limits_z^\infty f(t)\ dt$.

Пусть $n \geq 2$, тогда $f(z) = \sum\limits_{k=2}^n c_k z^{-k} + r_n(z)$, где функция $r_n(z) = O(z^{-(n+1)})$ и является аналитической в секторе S. Поскольку в данном случае интеграл не зависит от пути, интегрируя по лучу получаем $\int\limits_z^\infty r_n(t)\ dt = O(z^{-n})$. Следовательно для любого $n \geq 2$

$$F(z) = \int\limits_z^\infty f(t)\ dt = \sum_{k=2}^\infty \frac{c_k}{(k-1)z^{k-1}} + O(z^{-n}).$$

В отличие от общего случая, степенной асимптотический ряд аналитической функции можно почленно дифференцировать. Доказательство этого факта основано на возможности представления аналитической функции интегралом Коши.

Теорема 8.2 Пусть однолистная функция $f(z)$ аналитична в секторе $S = \{z \in C \mid |z| > R > 0, \alpha < \arg z < \beta, 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi\}$ и разлагается в асимптотический ряд $f(z) \simeq \sum\limits_{n=0}^\infty c_n z^{-n}$, *при* $z \to \infty, z \in S$.

Тогда в любом замкнутом секторе $\tilde{S}$, лежащем внутри S, справедливо асимптотическое разложение

$$f'(z) \simeq -\sum_{n=1}^\infty \frac{nc_n}{z^{n+1}}, \text{ при } z \to \infty, z \in \tilde{S}.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} + r_n(z), \quad |r_n(z)| \leq M_n |z|^{-n-1},$$

и функция $r_n(z)$ является аналитической в секторе S.

Фиксируем $R_1 > R, \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$ и пусть сектор $\tilde{S} = \{z \in C \mid |z| > R_1, \alpha_1 < \arg z < \beta_1\}$. Тогда существует число $0 < \lambda < 1$ такое, что для любого $z \in \tilde{S}$ окружность $\gamma(z)$, определяемая равенством $|t - z| = \lambda|z|$, целиком лежит в секторе S. Используя интегральную формулу Коши получаем, что при любом $z \in \tilde{S}$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(z)} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{kc_k}{z^{k+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(z)} \frac{r_n(t)\,dt}{(t-z)^2}.$$

Для произвольной точки t окружности $\gamma(z)$ выполняется неравенство $|t| \geq (1-\lambda)|z|$. Поэтому для остаточного члена получаем оценку

$$\Big|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(z)} \frac{r_n(t)\,dt}{(t-z)^2}\Big| \leq M_n \lambda^{-1} |z|^{-1} \max_{t \in \gamma(z)} |t|^{-n-1} \leq \tilde{M}_n |z|^{-n-2},$$

которая и завершает доказательство теоремы.

Несколько неожиданным оказывается тот факт, что всякий формальный степенной ряд оказывается асимптотическим рядом некоторой аналитической функции.

Теорема 9.2. Для всякого формального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ и для любого сектора
$S = \{z \in C \mid |z| > R > 0, |\arg z| < \alpha < \pi\}$ существует функция $f(z)$, аналитическая в секторе S и такая, что $f(z) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ *при* $z \to \infty, z \in S$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $R > 1$. При фиксированном действительном числе $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ для любого $z \in S$ выполняется оценка $\operatorname{Re} z^\gamma > 0$. Положим $b_n = |c_n|^{-1}$ при $c_n \neq 0$ и $b_n = 0$ при $c_n = 0$.

Поскольку $|1 - e^{-t}| \leq |t|$ при $\operatorname{Re} t \geq 0$, то аналитические функции

$$\varphi_n(z) = 1 - \exp(-b_n z^\gamma)$$

допускают оценку

$$|\varphi_n(z)| \leq b_n |z|^\gamma \quad \textit{при } z \in S.$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z) z^{-n}. \tag{4.2}$$

Поскольку при $z \in S$ ряд (1.4) мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |R|^{\gamma-n}$, то по теореме Вейерштрасса функция $f(z)$ является аналитической в секторе S.

Осталось показать, что формальный степенной ряд является асимптотическим для функции $f(z)$. Имеем

$$z^N \Big[f(z) - \sum_{n=0}^{N} c_n z^{-n} \Big] =$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \varphi_n(z) z^{N-n} - \sum_{n=0}^{n} c_n \exp(-b_n z^{\gamma}) z^{N-n}.$$

Второе слагаемое стремится к нулю, т.к. $\mathrm{Re}\,(-b_n z^{\gamma}) < 0$ при $z \in S$ и $c_n \neq 0$. Для первого же слагаемого выполняется оценка

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \varphi_n(z) z^{N-n}| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^{\gamma+N-n} < K|z|^{\gamma-1}.$$

Таким образом

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N} c_n z^{-n} = o(z^{-N})$$

при $z \to \infty, z \in S$, что и завершает доказательство теоремы.

Вообще говоря, асимптотические ряды могут оказаться расходящимися, однако степенные асимптотические разложения аналитических в окрестности бесконечно удаленной точки функций сходятся.

Теорема 10.2. Если однолистная аналитическая в области $|z| > a$ функция $f(z)$ допускает асимптотическое разложение

$$f(z) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

при $z \to \infty$, то асимптотический ряд сходится к $f(z)$ при $|z| > a$.

Доказательство. Функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

сходящийся при $|z| > a$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)\,dt}{z^{n+1}},$$

а γ – произвольная окружность $|z| = R, R > a$. Поскольку $f(z)$ стремится к a_0 при $z \to \infty$, она ограничена, т.е. $|f(z)| \le M < \infty$ при $|z| \ge r > a$. Устремляя радиус R к бесконечности, из неравенств для коэффициентов ряда Лорана

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n}$$

получаем, что $c_n = 0$ при $n > 0$. Таким образом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n},$$

причем ряд сходится при $|z| > a$. Равенство коэффициентов $a_n = c_{-n}$ при $n \ge 0$ следует из единственности разложения функции по последовательности $\{z^{-n}\}$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

5. Асимптотики корней уравнений.

а). Рассмотрим задачу об асимптотической оценке нулей функции

$$f(z) = \sin\, z + \frac{1}{z},$$

близких к точкам $z_n = \pi\, n$. Подставляя $\lambda_n = \pi\, n + \varepsilon_1(n)$ в уравнение $f(z) = 0$, получаем

$$(-1)^n \sin \varepsilon_1(n) + \frac{1}{\pi\, n + \varepsilon_1(n)} = 0.$$

Поскольку $\sin \varepsilon_1(n) = \varepsilon_1(n) + o(\varepsilon_1(n))$, то

$$\varepsilon_1(n) = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi\, n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Подставляя в уравнение $f(z) = 0$ второе приближение

$$\lambda_n = \pi\, n + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi\, n} + \varepsilon_2(n),$$

получаем

$$(-1)^n \sin\Big[\frac{(-1)^{n-1}}{\pi\, n} + \varepsilon_2(n)\Big] = -\frac{1}{\pi\, n + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi\, n} + \varepsilon_2(n)}. \tag{5.2}$$

Правую часть равенства (5.2) можно записать в виде

$$-\frac{1}{\pi\, n} + (-1)^n \frac{1}{\pi^3\, n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big),$$

а левую в виде

$$(-1)^n \varepsilon_2(n) - \frac{1}{\pi\, n} + \frac{1}{6\pi^3\, n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Откуда получаем

$$\varepsilon_2(n) = \frac{1}{\pi^3\, n^3}\Big[1 - \frac{(-1)^n}{6}\Big] + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Таким образом находим для λ_n следующее приближение

$$\lambda_n = \pi\, n + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi\, n} + \frac{1}{\pi^3\, n^3}\Big[1 - \frac{(-1)^n}{6}\Big] + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Этот процесс можно неограниченно продолжать. И на каждом шаге погрешность будет величиной бесконечно малой по сравнению с последним слагаемым, т.е. мы можем найти асимптотическое разложение для λ_n.

b). Пусть $z_0 \in C$, функция $f(z)$ является аналитической в окрестности точки z_0 и имеет в ней простой нуль, т.е. $f(z_0) = 0, f'(z_0) \neq 0$. По теореме об обратной функции при малых по модулю значениях $\varepsilon \in C$ уравнение

$$f(z) = \varepsilon$$

имеет корень $z(\varepsilon)$, близкий к точке z_0. Найдем асимптотику $z(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Функция $z(\varepsilon)$ является аналитической в точке $\varepsilon = 0$ и представима рядом Тейлора

$$z(\varepsilon) = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varepsilon^k, \tag{6.2}$$

который сходится в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$. Коэффициенты ряда (6.2) могут быть найдены по формуле Бурмана - Лагранжа

$$b_k = \frac{1}{k!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big[\frac{(z - z_0)^k}{(f(z))^k}\Big].$$

Из разложения следует, что

$$z(\varepsilon) = z_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Таким образом ряд (6.2), является асимптотическим рядом функции $z(\varepsilon)$.

Для нахождения первых членов разложения можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Аналитическая функция $f(z)$ разлагается в окрестности точки z_0 в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Поскольку $f(z(\varepsilon)) = \varepsilon$, то выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \varepsilon^k\Big)^n - \varepsilon = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях ε, получаем систему уравнений, позволяющую последовательно найти коэффициенты $b_1, b_2, ...$

c). Рассмотрим уравнение

$$f(z) = \varepsilon,$$

в котором функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0 и имеет в этой точке нуль порядка n , т.е.

$$f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \ f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Тогда в окрестности точки z_0

$$f(z) = (z - z_0)^n \, g(z),$$

где функция $g(z)$ – аналитическая и отлична от нуля в точке z_0.

Уравнение $w^n = \varepsilon$ при $\varepsilon \neq 0$ имеет ровно n различных корней

$$w_k = e^{2\pi i k/n} \sqrt[n]{\varepsilon}, \quad 0 \leq k \leq n - 1,$$

где $\sqrt[n]{*}$ регулярная ветвь корня такая, что $\sqrt[n]{\varepsilon} > 0$ при $\varepsilon > 0$.

Следовательно уравнение

$$f(z) = \Big((z - z_0) \, \sqrt[n]{g(z)}\Big)^n = \varepsilon$$

распадается на n независимых уравнений

$$h_k(z) = (z - z_0)\ \sqrt[n]{g(z)} = e^{2\pi ik/n}\ \sqrt[n]{\varepsilon}, \quad 0 \le k \le n-1. \tag{7.2}$$

Поскольку $h_k'(z_0) = \sqrt[n]{g(z_0)} \ne 0$, то для каждого из уравнений (7.2) выполнены условия пункта b). Следовательно при малых по модулю $\varepsilon \in C$ уравнение $f(z) = \varepsilon$ имеет ровно n решений

$$z_k(\varepsilon) = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(e^{2\pi ik/n}\ \sqrt[n]{\varepsilon}\right)^k.$$

Ряды сходятся при достаточно малых по модулю значениях ε, а коэффициенты этих рядов могут быть найдены по формуле Бурмана-Лагранжа. В частности,

$$b_1 = \sqrt[n]{\frac{n!}{f^{(n)}(z_0)}}.$$

6. Интегрирование по частям.

Асимптотические разложения некоторых интегралов, зависящих от параметра, могут быть получены последовательным интегрированием по частям. Члены асимптотического ряда находятся один за другим повторным применением этой операции, а асимптотический характер полученного ряда затем устанавливается исследованием остаточного члена, который имеет интегральный вид. Этот метод имеет довольно ограниченную сферу применения. Мы не будем формулировать какие-либо утверждения общего характера, а проиллюстрируем основные идеи на примере асимптотического разложения неполной гамма-функции

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t}\, dt \quad (a > 0, x > 0).$$

Раскладывая показательную функцию в ряд и интегрируя его почленно, получаем ряд

$$\gamma(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+a}}{(n+a)n!},$$

который сходится к функции $\gamma(a, x)$ при всех $x > 0$.

Поскольку ряд является асимптотическим при $x \to +0$, то его частичные суммы дают хорошую аппроксимацию функции $\gamma(a,x)$ при малых положительных значениях аргумента x. Для нахождения значений функции $\gamma(a,x)$ при больших x этот ряд хотя и сходится всюду, но приспособлен плохо, поскольку не является асимптотическим при $x \to +\infty$. Его частичные суммы, соответствующие фиксированному n, стремятся к бесконечности при $x \to +\infty$, а значения функции остаются ограниченными. К примеру, при $a = 1/2$ и $x = 10$ частичная сумма $S_5(10) \approx -288$, в то время как значение функции положительно и $\gamma(1/2, 10) \approx \sqrt{\pi}$ с ошибкой порядка 10^{-5}. С ростом значения x погрешность увеличивается, так $S_5(100) \approx -142712729$. Следовательно для нахождения значений функции при больших x нужно другое разложение.

Нам удобней найти асимптотический при $x \to +\infty$ ряд для функции

$$\Gamma(a,x) = \Gamma(a) - \gamma(a,x) = \int\limits_x^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt,$$

отличающейся от функции $\gamma(a,x)$ постоянным слагаемым.

Проинтегрируем один раз по частям

$$\Gamma(a,x) = \int\limits_x^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt = e^{-x} x^{a-1} + (a-1) \int\limits_x^\infty t^{a-2} e^{-t}\, dt =$$

$$= e^{-x} x^{a-1} + (a-1)\Gamma(a-1, x).$$

Повторяя этот прием, находим, что при натуральных значениях a функция $\Gamma(a,x)$ является произведением e^{-x} на многочлен степени $a-1$. Для произвольного положительного a после n-кратного интегрирования по частям получаем

$$\Gamma(a,x) = e^{-x} x^{a-1} + (a-1) e^{-x} x^{a-2} + ... + (a-1)...(a-n+1) e^{-x} x^{a-n} +$$

$$(a-1)...(a-n) \int\limits_x^\infty t^{a-n-1} e^{-t}\, dt =$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k+1)} e^{-x} x^{a-k} + \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \Gamma(a-n, x).$$

Оценим остаточный член при $n > a - 1$

$$\Big| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \int\limits_x^\infty t^{a-n-1} e^{-t}\, dt \Big| < \Big| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \Big| x^{a-n-1} \int\limits_x^\infty e^{-t}\, dt =$$

$$\left|\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)}\right|e^{-x}x^{a-n-1}.$$

Поскольку при $x \to +\infty$ погрешность является бесконечно малой величиной по сравнению с последним слагаемым частичной суммы, то получаемое разложение является асимптотическим, и

$$\Gamma(a,x) \simeq e^{-x}x^a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k+1)}x^{a-k}.$$

Частным случаем этой формулы является асимптотическое при $x \to +\infty$ разложение функции ошибок

$$\mathrm{Erf}(x) = \int\limits_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma(1/2, x^2).$$

Используя свойства гамма-функции можно найти различные формы записи для коэффициентов асимптотического ряда

$$\mathrm{Erf}(x) \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(3/2\ -k)x^{2k-1}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\Gamma(k-1/2)}{x^{2k-1}} = \frac{e^{-x^2}}{2x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k}x^{-2k}.$$

Задачи и упражнения.

1. Какому условию должна удовлетворять числовая последовательность $\{a_n\}$, чтобы для любой асимптотической при $z \to \omega$ последовательности $\{\varphi_n(z)\}$ последовательность $\{\psi_n(z) = a_n\varphi_n(z)\}$ была асимптотической при $z \to \omega$.

2. Для всякой ли функции $f : (-1, 1) \to R$ можно подобрать асимптотическую при $x \to 0$ последовательность, по которой функция f будет допускать асимптотическое разложение?

3. Привести примеры функций $f(z)$ и асимптотических $z \to \omega$ последовательностей $\{\varphi_n(z)\}$ таких, что

$$f(z) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(z)$$

и при этом в некоторой проколотой окрестности точки ω
a) ряд сходится к функции $f(z)$;
b) ряд сходится к функции $g(z) \neq f(z)$;
c) ряд расходится.

4. Показать, что последовательности функций
a) $\varphi_n(z) = z^{-n}$,
b) $\psi_n(z) = (z-1)z^{-2n}$,
c) $\omega_n(z) = (z^2 - z + 1)z^{-3n}$
являются асимптотическими при $z \to \infty$, а функция $f(z) = (1+z)^{-1}$ допускает асимптотическое разложение по каждой из этих последовательностей.

5. Пусть $U = (1, +\infty)$, функция f непрерывна в U и имеет асимптотическое разложение

$$f(x) \simeq a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots \quad \textit{при } x \to +\infty.$$

Показать, что для любого $x \in U$ интеграл

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt$$

сходится и имеет асимптотическое разложение:

$$F(x) \simeq \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} \ldots + \frac{a_{n+1}}{nx^n} + \ldots$$

6. Найти степенные асимптотические разложения функций:
a) $f(z) = (z^2 - 2z - 3)^{-1}$ при $z \to \infty$;
b) $g(x) = x^3 e^{-x}$ при $x \to +\infty,\ x \in R$;
c) $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ при $x \to 0$.

7. Пусть $x \in R$. Для функции $f(x) = e^x \sin e^{-x}$ при $x \to +\infty$ найти:
a) асимптотическое разложение по последовательности $\{e^{-nx}\}$;
b)асимптотическое разложение по последовательности $\{x^{-n}\}$.

8. Найти при $x \to +\infty$ асимптотические разложения интегралов:

$$a)\ \int\limits_x^{+\infty} t^{-1} e^{x-t}\, dt, \qquad b)\ \int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

III. ИНТЕГРАЛЫ ЛАПЛАСА

1. Идея метода Лапласа.

Интегралами Лапласа называют интегралы вида

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx, \tag{1.3}$$

где $f(x)$ *и* $S(x)$ – вещественные функции, а λ – положительный параметр.

Нас будет интересовать асимптотика интеграла (1.3) при $\lambda \to +\infty$. Как правило, мы будем предполагать, что функции $f(x)$ и $S(x)$ являются гладкими.

Идея метода Лапласа основана на трех основных соображениях:

a)**Принцип локализации.** Если функция $S(x)$ имеет единственный и притом строгий максимум в точке $x_0 \in [a,b]$, то функция $exp(\lambda S(x))$ тоже имеет в точке x_0 строгий максимум, тем более ярко выраженный, чем больше значение параметра λ. При условии $f(x) \neq 0$ вблизи точки x_0 интеграл (1.3) можно заменить интегралом по сколь угодно малой окрестности точки x_0, допуская относительную погрешность, стремящуюся к нулю при $\lambda \to +\infty$.

b) **Редукция к каноническому интегралу.** Поскольку теперь интеграл берется по малой окрестности точки x_0, то используя соответствующую замену переменной и формулу Тейлора, оценка исходного интеграла сводится к оценке интеграла специального вида.

c) **Асимптотика канонических интегралов.** Для канонических интегралов вида

$$W(\lambda) = \int\limits_0^\varepsilon x^k e^{-\lambda x^m}\,dx,$$

получаются явные асимптотические формулы.

Проиллюстрируем идею изучаемого метода на примере, не останавливаясь пока на строгом обосновании получаемых оценок.

Пример 1.3. Пусть $a < x_0 < b$, $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) \neq 0$ и $f(x) = f(x_0) + o(x - x_0), S(x) = S(x_0) + S''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ при $x \to x_0$.

При малом $\varepsilon > 0$ и $\lambda \to +\infty$ получаем

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx \sim \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx \sim$$

$$f(x_0)e^{\lambda S(x_0)}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2}\,dt.$$

Поскольку x_0 точка максимума, то $S''(x_0) < 0$. Сделаем замену переменной $\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2 = -u^2$ в последнем интеграле

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2}\,dt = \sqrt{-\frac{2}{\lambda S''(x_0)}}\int\limits_{-h(\lambda)}^{h(\lambda)} e^{-u^2}\,du,$$

где $h(\lambda) = \sqrt{-\frac{\lambda S''(x_0)}{2}}\varepsilon \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Учитывая значение интеграла Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi},$$

находим главный член асимптотики интеграла Лапласа

$$F(\lambda) \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \quad \textit{при } \lambda \to +\infty.$$

2. Принцип локализации.

Лемма 1.3 Пусть $\sup\limits_{a<x<b} S(x) = \mu < \infty$ и при некотором значении $\lambda = \lambda_0 > 0$ интеграл (1.3) сходится абсолютно.

Тогда он сходится абсолютно при любом $\lambda \geq \lambda_0$ и существует постоянная $L < \infty$ такая, что

$$|F(\lambda)| \leq \int\limits_a^b |f(x)|e^{\lambda S(x)}\,dx \leq Le^{\lambda\mu}.$$

Доказательство. При $\lambda \geq \lambda_0$ верна оценка $e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)} \leq e^{(\lambda-\lambda_0)\mu}$ поэтому получаем

$$|F(\lambda)| = \Big|\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx\Big| = \Big|\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda_0 S(x)}e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)}\,dx\Big| \leq$$

$$e^{(\lambda-\lambda_0)\mu}\int\limits_a^b |f(x)|e^{\lambda_0 S(x)}\,dx \le \Big(e^{-\lambda_0\mu}\int\limits_a^b |f(x)|e^{\lambda_0 S(x)}\,dx\Big)e^{\lambda\mu} = Le^{\lambda\mu}.$$

Для краткости обозначим промежуток интегрирования $[a,b]$ символом I и для произвольного множества $E\subset R$ введем обозначение

$$F_E(\lambda) := \int\limits_{E\cap I} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx.$$

Лемма 2.3. Пусть интеграл (1.3) сходится абсолютно при некотором значении $\lambda=\lambda_0$ и точка $x_0\in[a,b]$ такова, что $S(x_0)=\sup\limits_{a<x<b} S(x)=\alpha$. Если функции $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны в точке x_0, $f(x_0)\ne 0$, то для любого $\varepsilon>0$ и любой достаточно малой окрестности U точки x_0 выполняется оценка

$$\Big|F_U(\lambda)\Big| = \Big|\int\limits_{U\cap I} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx\Big| \ge Be^{\lambda(\alpha-\varepsilon)},$$

где $B>0$ – постоянная, $\lambda\ge\max\{\lambda_0,0\}$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon>0$ и выберем окрестность U точки x_0 такую, что при $x\in U$ выполняются неравенства $|f(x)|\ge\frac{1}{2}|f(x_0)|$ и $S(x_0)-\varepsilon\le S(x)\le S(x_0)$. При этих условиях функция $f(x)$ не меняет знак в пределах окрестности U, и мы получаем оценку

$$\Big|\int\limits_{U\cap I} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx\Big| = \int\limits_{U\cap I} |f(x)|e^{\lambda S(x)}\,dx \ge$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{U\cap I} |f(x_0)|e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}\,dx = Be^{\lambda(\alpha-\varepsilon)}.$$

Теорема 3.3. (Принцип локализации.) Пусть интеграл (1.3) сходится абсолютно при некотором значении $\lambda=\lambda_0$ и точка $x_0\in[a,b]$ такова, что для любой окрестности U точки x_0

$$\alpha = S(x_0) > \sup_{I\setminus U} S(x).$$

Если функции $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны в точке $x_0, f(x_0)\ne 0$, то для любой окрестности U точки x_0 выполняется оценка

$$F(\lambda) = F_U(\lambda)\Big(1+O(\lambda^{-\infty})\Big) \ \textit{при}\ \lambda\to+\infty,$$

где $O(\lambda^{-\infty})$ – функция являющаяся асимптотическим нулем относительно последовательности $\{\lambda^{-n}\}, n \in N$.

Доказательство. Пусть U – произвольная окрестность точки x_0, выберем окрестность $V \subset U$ такую, что функция $f(x)$ не меняет в ней знак. Тогда для любой окрестности $W \subset V$ выполняется неравенство

$$\Big|F_V(\lambda)\Big| = \Big|\int\limits_{V\cap I} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx\Big| \geq \Big|\int\limits_{W\cap I} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx\Big| = \Big|F_W(\lambda)\Big|.$$

Из леммы 2.3 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся окрестность W и постоянная $B > 0$ такие, что

$$\Big|F_V(\lambda)\Big| \geq \Big|F_W(\lambda)\Big| \geq Be^{\lambda(\alpha-\varepsilon)}. \tag{2.3}$$

Пусть $\mu = \sup\limits_{I\setminus V} S(x)$, тогда по лемме 1.3 получаем

$$\Big|F_{I\setminus U}(\lambda)\Big| \leq L_1 e^{\lambda\mu}, \quad \Big|F_{U\setminus V}(\lambda)\Big| \leq L_2 e^{\lambda\mu}. \tag{3.3}$$

Если $\beta > 0$, то функция $e^{-\lambda\beta} = O(\lambda^{-\infty})$ *при* $\lambda \to +\infty$. Поэтому, выбирая $\varepsilon < \alpha - \mu$, из оценок (2.3) и (3.3) получаем

$$F_{U\setminus V}(\lambda) = F_V(\lambda)O_1(\lambda^{-\infty}) = F_U(\lambda)O_2(\lambda^{-\infty})$$

и

$$F_{I\setminus U}(\lambda) = F_V(\lambda)O_3(\lambda^{-\infty}) = F_U(\lambda)O_4(\lambda^{-\infty}).$$

Таким образом при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = F_U(\lambda) + F_{I\setminus U}(\lambda) = F_U(\lambda)\Big(1 + O(\lambda^{-\infty})\Big) \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

3. Редукция к каноническому интегралу.

Нас будет интересовать строение функции в окрестности критической точки. Оказывается, что существуют локальные координаты, в которых функция записывается как степенная.

Лемма 4.3. (Лемма Морса.) Пусть I – окрестность или полуокрестность точки $x_0 \in R$, функция $S : I \to R$ такова, что $S \in C^{n+k}(I)$ и

$$S'(x_0) = S''(x_0) = \ldots = S^{(n-1)}(x_0) = 0,\ S^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда существуют окрестности I_x точки x_0, I_y точки $0 \in R$ и диффеоморфизм $\varphi \in C^k(I_y, I_x)$ такие, что при $y \in I_y$

$$S(\varphi(y)) = S(x_0) + \alpha y^n,$$

где $\alpha = \operatorname{sgn} S^{(n)}(x_0)$.

Доказательство. Из формулы Тейлора получаем, что в окрестности точки x_0

$$S(x) = S(x_0) + \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

где $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

Отсуда следует

$$S(x) - S(x_0) = (x - x_0)^n h(x),$$

где функция $h \in C^k$ и $h(x_0) = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0$.

Рассмотрим функцию $y = \psi(x) = (x - x_0)\sqrt[n]{|h(x)|}$. Поскольку

$$\psi'(x_0) = \sqrt[n]{|h(x_0)|} = \sqrt[n]{\frac{|S^{(n)}(x_0)|}{n!}} \neq 0,$$

то в некоторой окрестности I_x точки x_0 производная $\psi'(x) \neq 0$, а сама функция ψ монотонна.

Поэтому существует обратная к функции ψ функция $\varphi = \psi^{-1}$, определенная на промежутке $I_y = \psi(I_x)$, содержащем точку $0 = \psi(x_0)$. Так как $\psi \in C^k(I_x, I_y)$, то по теореме об обратной функции $\varphi \in C^k(I_y, I_x)$ и

$$\varphi'(0) = (\psi'(x_0))^{-1} = \sqrt[n]{\frac{n!}{|S^{(n)}(x_0)|}}.$$

При этом из построения функции φ следует равенство

$$S(\varphi(y)) = S(x_0) + \alpha y^n,$$

где $\alpha = \operatorname{sgn} S^{(n)}(x_0)$.

Доказанная лемма позволяет свести оценку исходного интеграла (1.3) к оценке интеграла специального вида по некоторой окрестности начала координат.

Лемма 5.3. (Лемма о редукции.) Пусть интеграл

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx,$$

сходится абсолютно при некотором значении $\lambda = \lambda_0$. Точка $x_0 \in R$ является точкой строгого максимума функции $S(x)$ на $[a, b]$ и в некоторой окрестности точки x_0 функция $S \in C^{n+1}$, при этом

$$S'(x_0) = S''(x_0) = \ldots = S^{(n-1)}(x_0) = 0,\ S^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

а функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$.

Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \int\limits_{I_y} f(\varphi(y))\varphi'(y) e^{-\lambda y^n}\, dy \Big(1 + O(\lambda^{-\infty})\Big), \tag{4.3}$$

где I_y – сколь угодно малая окрестность точки $0 \in R$, а φ – соответствующий диффеоморфизм, построенный в лемме Морса.

Доказательство. Последовательно применяя принцип локализации и замену переменной $x = \varphi(y)$, получаем

$$F(\lambda) = \int\limits_{I_x} f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx \Big(1 + O(\lambda^{-\infty})\Big) =$$

$$e^{\lambda S(x_0)} \int\limits_{I_y} f(\varphi(y))\varphi'(y) e^{-\lambda y^n}\, dy \Big(1 + O(\lambda^{-\infty})\Big).$$

Знак минус в показателе экспоненты объясняется тем, что по условию x_0 является точкой максимума функции $S(x)$.

4. Оценки канонических интегралов.

Нам осталось установить явные оценки для интегралов специального вида, получаемых в лемме о редукции.

Лемма 6.3. (Лемма Ватсона.) Пусть $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < d \leq \infty$ и функция $f \in C([0, d], R)$.

Тогда при $\lambda \to +\infty$ для интеграла

$$W(\lambda) = \int\limits_0^d x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha}\, dx \tag{5.3}$$

выполняются следующие оценки:

1. Если $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + O(x^{n+1})$ при $x \to 0$, то

$$W(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma\Big(\frac{\beta + k}{\alpha}\Big) \lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}} + O\Big(\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}\Big); \tag{6.3}$$

2. Если f– бесконечно дифференцируема при $x = 0$, то

$$W(\lambda) \simeq \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\Gamma\Big(\frac{\beta+k}{\alpha}\Big)\lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}}, \tag{7.3}$$

при этом асимптотическое разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Доказательство. Из условий леммы следует абсолютная сходимость интеграла (5.3) при $\lambda > 0$. Поскольку при любом $\varepsilon > 0$ функция $S(x) = -x^{\alpha}$ на промежутке $x \geq \varepsilon$ имеет строгий максимум в точке $x = \varepsilon$ и $e^{-\lambda\varepsilon^{\alpha}} = O(\lambda^{-\infty})$ *при* $\lambda \to +\infty$, то по лемме 1.3 получаем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{d} x^{\beta-1}f(x)e^{-\lambda x^{\alpha}}\,dx = O(\lambda^{-\infty}) \text{ \textit{при} } \lambda \to +\infty.$$

Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + r_n(x)$, где $|r_n(x)| \leq Cx^{n+1}$ на отрезке $[0, \varepsilon]$. Тогда

$$W(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\int\limits_{0}^{\varepsilon} x^{k+\beta-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}\,dx + c(\lambda)\int\limits_{0}^{\varepsilon} x^{n+\beta}e^{-\lambda x^{\alpha}}\,dx + O(\lambda^{-\infty}), \tag{8.3}$$

где $c(\lambda)$ – ограниченная функция.

Вновь используя лемму 1.3, получаем при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon} x^{k+\beta-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} x^{k+\beta-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}\,dx + O(\lambda^{-\infty}).$$

Последний интеграл посредством замены переменной $t = \lambda x^{\alpha}$ сводится к гамма-функции

$$\int\limits_{0}^{\infty} x^{k+\beta-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}\,dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma\Big(\frac{\beta+k}{\alpha}\Big)\lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}}.$$

Подставляя в равенство (8.3) найденное выражение для интеграла, получаем формулу (6.3).

Разложение (7.3) является следствием равенства (6.3) и формулы Тейлора.

Возможность дифференцирования разложения (7.3) проверяется непосредственно. Если по формуле (7.3) записать асимптотическое разложение для производной интеграла (5.3) по параметру λ, то оно совпадает с результатом формального дифференцирования разложения (7.3).

Пример 2.3. Используя лемму Ватсона, легко найти асимптотическое разложение преобразования Лапласа функции $\cos t$ при вещественном $\lambda \to +\infty$.

$$L\{\cos t\}(\lambda) = \int\limits_0^\infty \cos t e^{-t\lambda}\, dt \simeq \sum_{k=0}^\infty \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!}\Gamma(1+k)\lambda^{-(1+k)} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \lambda^{-(1+2n)}.$$

Разложение найденного в явном виде преобразования Лапласа дает тотже самый ряд

$$L\{\cos t\}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2+1} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1+\frac{1}{\lambda^2}} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \lambda^{-(1+2n)}.$$

5. Главный член асимптотики интеграла Лапласа.

Формулируемая ниже теорема позволяет находить главный член асимптотики интеграла Лапласа в наиболее часто встречающихся на практике ситуациях.

Теорема 7.3. Пусть в интеграле (1.3) функции f и g непрерывны, а промежуток интегрирования содержит только в одну точку x_0, в которой функция S достигает своего максимума. Предположим также, что в окрестности точки x_0 функция S принадлежит классу гладкости C^k, а функция $f(x) = f(x_0) + O(x - x_0)$ при $x \to x_0$, где $f(x_0) \neq 0$.

Тогда:

1) если $x_0 = a, k = 2$ и $S'(x_0) \neq 0$ (*т.е.* $S'(x_0) < 0$), то

$$F(\lambda) = \frac{e^{\lambda S(x_0)}}{\lambda}\Big(\frac{f(x_0)}{-S'(x_0)}\Big)[1 + O(\lambda^{-1})] \quad \text{\textit{при} } \lambda \to +\infty;$$

2) если $a < x_0 < b, k = 3$ и $S''(x_0) \neq 0$ (*т.е.* $S''(x_0) < 0$), то

$$F(\lambda) = \frac{e^{\lambda S(x_0)}}{\lambda^{1/2}}\Big(f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}}\Big)[1 + O(\lambda^{-1/2})] \quad \text{\textit{при} } \lambda \to +\infty;$$

3) если $x_0 = a, k = 3, S'(x_0) = 0)$ и $S''(x_0) \neq 0$ (*т.е.* $S''(x_0) < 0$), то

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\frac{e^{\lambda S(x_0)}}{\lambda^{1/2}}\Big(f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}}\Big)[1 + O(\lambda^{-1/2})] \quad \text{\textit{при} } \lambda \to +\infty.$$

Доказательство. По лемме 5.3 о редукции получаем
1)

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \int\limits_0^{\varepsilon} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{-\lambda y}\, dy\Big(1 + O(\lambda^{-\infty})\Big);$$

2)

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{-\lambda y^2}\, dy\Big(1 + O(\lambda^{-\infty})\Big) =$$

$$e^{\lambda S(x_0)}\Big(\int\limits_0^{\varepsilon} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{-\lambda y^2}\, dy + \int\limits_0^{\varepsilon} f(\varphi(-y))\varphi'(-y)e^{-\lambda y^2}\, dy\Big)\Big(1 + O(\lambda^{-\infty})\Big);$$

3)

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \int\limits_0^{\varepsilon} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{-\lambda y^2}\, dy\Big(1 + O(\lambda^{-\infty})\Big),$$

где φ – диффеоморфизм построенный в лемме Морса.

Остается применить лемму Ватсона для функции $h(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$ и использовать полученные в лемме Морса выражения для $\varphi(0)$ и $\varphi'(0)$.

Пример 3.3. Асимптотика гамма-функции.

Гамма-функцию можно записать в виде интеграла Лапласа

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\lambda} e^{-t}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} e^{\lambda \ln t}\, dt,$$

но при $t \to +\infty$ функция $S(t) = \ln t$ монотонно возрастает, а функция $f(t) = e^{-t}$ монотонно стремится к нулю, поэтому непосредственно воспользоваться теоремой 7.3 не удается. Однако, делая при $\lambda > 0$ замену переменной $t = \lambda x$, мы получаем интеграл

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda(x - \ln x)}\, dx,$$

в котором функция $f(x) \equiv 1$, а функция $S(x) = \ln x - x$ имеет строгий максимум в точке $x = 1$, причем $S'(1) = 0, S''(1) = -1$.

Следовательно по теореме 7.3

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda}\Big(\frac{\lambda}{e}\Big)^{\lambda}[1 + O(\lambda^{-1/2})] \text{ } \textit{при } \lambda \to +\infty.$$

Откуда, в частности, получается классическая формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n [1 + O(n^{-1/2})] \ \textit{при}\ n \to \infty, n \in N.$$

Замечание. Теорема 7.3 дает формулы для нахождения главного члена асимптотики интеграла Лапласа в некоторых типичных случаях и при условии, что $f(x_0) \neq 0$. Однако последовательное использование принципа локализации, леммы Морса и леммы Ватсона позволяет находить и последующие члены асимптотики интеграла в довольно общих ситуациях. В частности, можно показать, что

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda}\Big(\frac{\lambda}{e}\Big)^\lambda \Big(1 + \frac{1}{12\lambda} + \frac{1}{288\lambda^2} - \frac{139}{51840\lambda^3} + \dots\Big).$$

Задачи и упражнения.

1. Пусть $[a, b]$ – конечный отрезок, функции $f(x), S(x) \in C^\infty$, $S(x) > 0$. Доказать, что при $\lambda \to +\infty$ выполняются следующие асимптотические равенства:

1) если $S'(x) < 0$ при $x \in [a, b]$ и $f(a) \neq 0$, то

$$\int\limits_a^b f(x)[S(x)]^\lambda\, dx = -\frac{f(a)}{\lambda S'(a)}[S(a)]^{\lambda+1}(1 + O(\lambda^{-1}));$$

2) если функция $S(x)$ достигает максимума только в точке $x_0 \in (a, b)$, при этом $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) \neq 0$ и $f(x_0) \neq 0$, то

$$\int\limits_a^b f(x)[S(x)]^\lambda\, dx = f(x_0)\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}[S(x_0)]^{\lambda+1/2}(1 + O(\lambda^{-1/2})).$$

2. Найти главный член асимптотики интеграла

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

3. Найти главный член асимптотики интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

4. Найти главный член асимптотики интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} t^{\alpha t} t^{x}\, dt \quad \textit{при} \quad \alpha > 0\ , x \to +\infty.$$

5. Найти главный член асимптотики интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} (1+t)^{n} e^{-nt}\, dt \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

6. Найти главный член асимптотики полинома Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1}\ \cos\theta)^n\, d\theta \quad \textit{при} \quad x > 1,\ n \to +\infty.$$

IV. МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

1. Интегралы Фурье.

Интегралами Фурье называют интегралы вида

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)}\, dx, \tag{1.4}$$

где $S(x)$ – веществензначная функция, а λ – положительный параметр. Функцию $S(x)$ обычно называют **фазовой функцией.**

Нас интересует асимптотическое поведение интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Для преобразования Фурье

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x}\, dx,$$

которое является частным случаем интегралов вида (1.4), качественный результат дает классическая

Лемма Римана-Лебега. Если $f \in L_1(-\infty, \infty)$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x}\, dx \to 0 \qquad \textit{при } \lambda \to +\infty.$$

Более точной информации о скорости убывания интеграла при этих условиях получить нельзя.

2. Фазовая функция без стационарных точек.

В случае, когда функции f и S являются гладкими, и фазовая функция не имеет стационарных точек, асимптотика интеграла (1.4) легко вычисляется с помощью интегрирования по частям. Введем обозначение для встречающегося в последующих формулировках дифференциального оператора

$$L = -\frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx}.$$

Теорема 1.4. Пусть $I = [a, b]$ – конечный отрезок, $f(x) \in C^n(I), S(x) \in C^{n+1}(I)$ и $S'(x) \neq 0$ при $x \in I$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)}\, dx =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (i\lambda)^{-k-1} \Big[e^{i\lambda S(x)} (L^k \Big(\frac{f(x)}{S'(x)} \Big)) \Big] \Big|_a^b + o(\lambda^{-n}). \qquad (2.4)$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)}\, d\Big(e^{i\lambda S(x)} \Big) =$$

$$(i\lambda)^{-1} \Big[e^{i\lambda S(x)} \frac{f(x)}{S'(x)} \Big] \Big|_a^b + (i\lambda)^{-1} \int\limits_a^b (L\Big(\frac{f(x)}{S'(x)} \Big))\, d\Big(e^{i\lambda S(x)} \Big) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (i\lambda)^{-k-1} \Big[e^{i\lambda S(x)} (L^k \Big(\frac{f(x)}{S'(x)} \Big)) \Big] \Big|_a^b + (i\lambda)^{-n} \int\limits_a^b \Big[L^{n-1} \Big(\frac{f(x)}{S'(x)} \Big) \Big]' e^{i\lambda S(x)}\, dx.$$

Поскольку $S'(x) \neq 0$, то функция $S(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$. Делая в последнем интеграле замену переменной $y = S(x)$, мы получаем интеграл вида

$$\int\limits_\alpha^\beta h(y) e^{i\lambda y}\, dy,$$

который, согласно лемме Римана - Лебега, стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$, что и дает нужную оценку для остаточного члена.

Следствие 1. Пусть функции $f(x), S(x)$ бесконечно дифференцируемы и $S'(x) \neq 0$ при $x \in I$. Тогда для интеграла (3.1) при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n)(i\lambda)^{-n-1}, \qquad (3.4)$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_n = \Big[e^{i\lambda S(x)} (L^n \Big(\frac{f(x)}{S'(x)} \Big)) \Big] \Big|_{x=a},$$

$$b_n = \Big[e^{i\lambda S(x)} (L^n \Big(\frac{f(x)}{S'(x)} \Big)) \Big] \Big|_{x=b}.$$

Из теоремы 1.4 вытекает также асимптотическая оценка для коэффициентов ряда Фурье.

Следствие 2. Пусть функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 2\pi]$ и

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi), \; 0 \le k \le n.$$

Тогда при $m \to +\infty$

$$c_m = \int\limits_0^{2\pi} eimx f(x)\, dx = o(m^{-n}).$$

Действительно, так как $e^{i2\pi m} = e^{i0} = 1$ при целом m, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi)$, то в формуле (2.4) сокращаются все слагаемые, кроме остаточного члена.

3. Вклад невырожденной стационарной точки.

В условии теоремы 1.4 содержится важное ограничение: $S'(x) \neq 0$ при $x \in I$, т.е. фазовая функция не имеет стационарных точек на отрезке интегрирования. При наличии у фазовой функции стационарных точек асимптотика интеграла $F(\lambda)$ имеет иной характер, чем в теореме 1.4. Рассмотрим модельную ситуацию: $S(x) = x^2$. На интервале $(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda}})$, содержащем стационарную точку $x = 0$, функция $\cos \lambda x^2$ не осцилирует. Поэтому интеграл $F(\lambda)$ будет иметь асимптотику $Cf(0)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

Для упрощения формулировок мы будем далее предполагать, что функции f и S являются бесконечно дифференцируемыми, хотя из доказательств можно заметить, что всякий раз нам будет достаточно существования конечного числа непрерывных производных.

Как и в методе Лапласа нам понадобятся оценки канонических интегралов.

Лемма 2.4. (Лемма Эрдейи.) Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на отрезке $[0, d]$ и $\alpha > 0$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_0^d f(x) e^{(i/2)\alpha\lambda x^2}\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\lambda}}\, f(0) e^{i\pi/4} + O(\lambda^{-1}).$$

Доказательство. Предположим вначале, что $f(x) \equiv 1$. Делая замену переменной $\sqrt{\alpha\lambda}\, x = t$, получаем

$$\int\limits_0^d e^{(i/2)\alpha\lambda x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \int\limits_0^{d\sqrt{\alpha\lambda}} e^{it^2/2}\, dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \Big(\int\limits_0^{\infty} e^{it^2/2}\, dt - \int\limits_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} e^{it^2/2}\, dt \Big).$$

Первый из интегралов, стоящих в скобках, это интеграл Френеля равный $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{i\pi/4}$. Второй интеграл легко оценить, интегрируя по частям

$$| \int\limits_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} e^{it^2/2}\, dt| = | - \frac{e^{it^2/2}}{it} \Big|_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} + \frac{1}{i} \int\limits_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} e^{it^2/2}\, \frac{dt}{t^2}| \leq$$

$$\frac{1}{d\sqrt{\alpha\lambda}} + \int\limits_{d\sqrt{\alpha\lambda}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{d\sqrt{\alpha\lambda}}.$$

Таким образом

$$\int\limits_0^d e^{(i/2)\alpha\lambda x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{i\pi/4} + O(\lambda^{-1}).$$

Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = f(0) + [f(x) - f(0)] = f(0) + xg(x),$$

где функция

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, d]$. Тогда

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, f(0) e^{i\pi/4} + O(\lambda^{-1}) + \int\limits_0^d x g(x) e^{(i/2)\alpha\lambda x^2}\, dx. \tag{4.4}$$

Оценим оставшийся интеграл при $\lambda \to +\infty$

$$|\int\limits_0^d xg(x)e^{(i/2)\alpha\lambda x^2}\,dx| = |\frac{1}{i\alpha\lambda}\int\limits_0^d g(x)\,d(e^{(i/2)\alpha\lambda x^2})| =$$

$$\frac{1}{\alpha\lambda}|g(d)e^{(i/2)\alpha\lambda d^2} - g(0) - \int\limits_0^d g'(x)e^{(i/2)\alpha\lambda x^2}\,dx| \leq$$

$$\frac{1}{\alpha\lambda}\Big(|g(d)| + |g(0)| + \int\limits_0^d |g'(x)|dx\Big) = O(\lambda^{-1}).$$

Подстановка этой оценки в равенство (4.4) завершает доказательство леммы.

Теперь мы можем найти главный член асимптотики интеграла Фурье при наличии невырожденной стационарной точки.

Теорема 3.4. Пусть функции $f(x), S(x)$ бесконечно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, функция $S(x)$ имеет единственную стационарную точку $x_0 \in (a, b)$ и $S''(x_0) > 0$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx =$$

$$f(x_0)e^{i\lambda S(x_0)}e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}).$$

Доказательство. Поскольку $S'(x)$ обращается в нуль лишь в точке x_0 и $S''(x_0) > 0$, то при $a \leq x < x_0$ производная $S'(x_0) < 0$ и функция $S(x)$ монотонно убывает, а при $x_0 < x \leq b$ производная $S'(x_0) > 0$ и функция $S(x)$ монотонно возрастает. Существует диффеоморфизм $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ такой, что $0 \in [\alpha, \beta], \varphi(0) = x_0$ и $S(\varphi(y)) = S(x_0) + y^2$. По лемме Морса $\varphi'(0) = \sqrt{\frac{2}{S''(x_0)}}$. Делая замену переменной в интеграле, получаем

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S(x_0)}\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{i\lambda y^2}\,dy.$$

Учитывая лемму Эрдейи, находим

$$\int\limits_0^\beta f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{i\lambda y^2}\,dy = \frac{1}{2}f(\varphi(0))\varphi'(0)e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O(\lambda^{-1}) =$$

$$\frac{1}{2}f(x_0)e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}). \tag{5.4}$$

Делая замену переменной $y = -u$, для интеграла по отрезку $[\alpha, x_0]$ получаем такую же оценку

$$\int\limits_\alpha^0 f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{i\lambda y^2}\,dy = \int\limits_0^{-\alpha} f(\varphi(-u))\varphi'(-u)e^{i\lambda u^2}\,du =$$

$$\frac{1}{2}f(x_0)e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}). \tag{6.4}$$

Сложение равенств (5.4) и (6.4) завершает доказательство теоремы.

Замечание. Если $S''(x_0) < 0$, то, используя сопряжение, получаем

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \overline{\int\limits_a^b \overline{f(x)}e^{i\lambda(-S(x))}\,dx} =$$

$$\overline{\overline{f(x_0)}e^{-i\lambda S(x_0)}e^{i\pi/4}}\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(x_0)}} + O(\lambda^{-1}) =$$

$$f(x_0)e^{i\lambda S(x_0)}e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x_0)|}} + O(\lambda^{-1}).$$

Пример 1.4. Найдем асимптотику функции Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(x\sin\varphi - n\varphi)}\,d\varphi \qquad \textit{при } x \to +\infty.$$

В данном примере $f(\varphi) = e^{-n\varphi}$, а фазовая функция $S(\varphi) = \sin\varphi$ имеет две стационарные точки $\varphi_1 = \pi/2,_2 = 3\pi/2$. При этом асимптотика функции Бесселя определяется суммой вкладов обеих стационарных точек.

Поскольку

$$S(\varphi_1) = 1, S''(\varphi_1) = -1, S(\varphi_2) = -1, S(\varphi_2) = 1,$$

то получаем

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\Big(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O(\lambda^{-1}).$$

Задачи и упражнения.

1. Найти асимптотическое разложение интеграла Френеля

$$\Phi(x) = \int\limits_x^{+\infty} e^{it^2}\,dt \quad \textit{при} \quad x \to +\infty.$$

2. Доказать, что при $\alpha > 0, \quad \lambda \to +\infty$

$$1) \int\limits_x^{+\infty} (1+x)^{-\alpha} e^{i\lambda x}\,dx = i\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2});$$

$$2) \int\limits_x^{+\infty} (1+x)^{-\alpha} \sin \lambda x\,dx = \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2});$$

$$3) \int\limits_x^{+\infty} (1+x)^{-\alpha} \cos \lambda x\,dx = \alpha\lambda^{-2} + O(\lambda^{-3}).$$

3. Найти главный член асимптотики интеграла

$$\int\limits_0^1 \cos t\; e^{i\lambda t^2}\,dt \quad \textit{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

V. МЕТОД ПЕРЕВАЛА

1. Идея метода.

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int\limits_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)}\, dz, \tag{1.5}$$

где γ – кусочно гладкая кривая в комплексной плоскости C, а функции $f(z)$ и $S(z)$ являются аналитическими в некоторой области D , содержащей кривую γ. Нас интересует асимптотика функции $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Идея метода основана на том, что согласно интегральной теореме Коши в односвязной области интеграл аналитической функции не зависит от выбора контура, соединяющего две фиксированные точки.

Предположим, что существует контур γ^* такой, что

1.

$$F(\lambda) = \int\limits_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)}\, dz = \int\limits_{\gamma^*} f(z) e^{\lambda S(z)}\, dz;$$

2. Существует единственная точка $z_0 \in \gamma^*$, в которой функция $\mathrm{Re} S(z)$ имеет строгий максимум и $f(z_0) \neq 0$;

3. $\mathrm{Im} S(z) \equiv const$ при $z \in \gamma^*$ в окрестности точки z_0.

Пусть γ_0^* малая дуга контура γ^*, содержащая точку z_0. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $\mathrm{Re} S(z) < \mathrm{Re} S(z_0) - \delta$ при $z \in \gamma^* \setminus \gamma_0^*$. Пусть $z = z(t) = x(t) + iy(t), t_0 \leq t \leq t_1$ регулярная параметризация контура γ^* такая, что $z(0) = z_0, z : [\alpha, \beta] \to \gamma_0^*$.

Используя принцип локализации, получаем

$$F(\lambda) = \int\limits_{\gamma^*} f(z) e^{\lambda S(z)}\, dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(z(t)) z'(t) e^{\lambda S(z(t))}\, dt =$$

$$e^{i\lambda \mathrm{Im} S(z_0)} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_*(t) e^{\lambda S_*(t)}\, dt\, (1 + O(\lambda^{-\infty})), \tag{2.5}$$

где $f_*(t) = f(z(t)) z'(t), S_*(t) = \mathrm{Re} S(z(t))$.

Поскольку функция $S_*(t)$ принимает только действительные значения, то асимптотику последнего интеграла можно найти с помощью метода Лапласа.

Контур, удовлетворяющий условиям 1, 2, 3, называют **перевальным** контуром. Причина такого названия будет ясна из следующего пункта.

2. Принципы нахождения перевального контура.

Пусть $S(z) = U(z) + iV(z)$ и $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ регулярная параметризация ($|z'(t)| \neq 0$) контура γ^* такая, что $z(0) = z_0$. Поскольку $t = 0$ – точка максимума функции $\mathrm{Re}S(z(t))$, то

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}S(z(t))|_{t=0} = U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0.$$

А так как $\mathrm{Im}S(z) \equiv const$ на γ^*, то

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Im}S(z(t))|_{t=0} = V'_x x'_t + V'_y y'_t = 0.$$

Таким образом мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0 \\ V'_x x'_t + V'_y y'_t = 0. \end{cases}$$

С учетом условий Коши - Римана ($U'_x = V'_y$, $U'_y = -V'_x$) получаем

$$\begin{cases} U'_x x'_t + U'_y y'_t = 0 \\ U'_x y'_t - U'_y x'_t = 0. \end{cases}$$

Так как определитель системы $\Delta = -({x'_t}^2 + {y'_t}^2) = |z'_t|^2 \neq 0$, то она имеет единственное решение

$$U'_x(z_0) = U'_y(z_0) = V'_x(z_0) = V'_y(z_0) = 0.$$

Таким образом интересующий нас контур γ^* обязательно должен проходить через точку z_0, в которой $\mathbf{S'(z_0) = 0}$.

Рассмотрим подробнее строение поверхности $u = U(x, y) = \mathrm{Re}S(z)$ в окрестности точки z_0, в которой $S'(z_0) = 0$.

Лемма 1.5. (Принцип максимума для гармоничесой функции.) Пусть функция $U(z)$ является гармонической в ограниченной односвязной области D и непрерывной в $\overline{D}$. Если $U(z)$ не является постоянной, то она не принимает своего максимального значения во внутренних точках области.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует точка $z_0 \in D$, в которой функция $U(z)$ принимает максимальное значение. Гармоническая функция $U(z)$ является действительной частью некоторой аналитической в области D функции $S(z)$. Функция $W(z) = e^{S(z)}$ будет так же аналитической в области D и ее модуль $|W(z)| = e^{U(z)}$ будет достигать максимального значения в точке z_0 - внутренней точке области D. По принципу максимума модуля аналитической функции получаем $W(z) \equiv const$, а следовательно и $U(z) \equiv const$, что противоречит условию теоремы.

В точке z_0 первый дифференциал функции $u = U(x, y)$ равен нулю, но, согласно принципу максимума, функция не имеет в этой точке экстремума. Поэтому график функции $u = U(x, y)$ в окрестности точки z_0 является седловой поверхностью. На рисунке это напоминает перевал между двумя вершинами. Поэтому точку z_0, в которой $\mathbf{S'(z_0) = 0}$, называют **точкой перевала,** а соответствующий контур γ^*, проходящий через эту точку **перевальным контуром.**

Пример 1.5. Рассмотрим функцию $S(z) = -z^2$. Точка $z = 0$ является точкой перевала данной функции. Выделим действительную и мнимую части функции $S(z) = u(z) + iv(z)$

$$u = y^2 - x^2, \quad v = 2xy.$$

Графиком действительной части является классическая седловая поверхность - гиперболический параболоид. Линиями уровня $u(z) = u(0) = 0$ являются ортогональные прямые $y = x$ и $y = -x$, делящие плоскость на четыре сектора. Секторы $D_k,\ k = 2, 3, 4$, получаются из сектора $D_1 = \{z \mid |arg\, z| < \frac{\pi}{4}\}$ поворотом на угол $\frac{k\pi}{2}$. При этом на всякой кривой, проходящей через точку $z = 0$ и расположенной внутри секторов D_2 и D_4, функция $u(z)$ в точке $z = 0$ имеет строгий минимум. А на всякой кривой, проходящей через точку $z = 0$ и расположенной внутри секторов D_1 и D_3, функция $u(z)$ в точке $z = 0$ имеет строгий максимум. Поскольку $v(z) = v(0) = 0$ на прямой $y = 0$, проходящей через секторы D_1 и D_3, то данная прямая и будет перевальным контуром, на котором функция $S(z) = -x^2$.

Несложно показать, что в окрестности *простой точки перевала* z_0, в которой $S'(z_0) = 0,\ S''(z_0) \neq 0$, качественно линии уровня функции $Re\, S(z)$ устороены также как в рассмотренной в примере ситуации.

Лемма 2.5. Пусть z_0 - простая точка перевала функции $S(z)$, т.е. $S'(z_0) = 0,\ S''(z_0) \neq 0$. Тогда в малой окрестности U точки z_0 линия уровня $Re\, S(z) = Re\, S(z_0)$ состоит из двух гладких кривых, которые ортогональны в точке z_0 и разбивают окрестность U на четыре сектора. Знаки функции $Re\,(S(z) - S(z_0))$ в соседних секторах различны, и через секторы, в которых $Re\, S(z) < Re\, S(z_0)$, проходит гладкая кривая γ^*, являющаяся перевальным контуром, т.е. $Re\, S(z) < Re\, S(z_0)$ и $Im\, S(z) = Im\, S(z_0)$ для всех $z \in \gamma^*$.

Доказательство. Простая точка перевала z_0 является нулем второго порядка функции $S(z)$, поэтому

$$w - w_0 = S(z) - S(z_0) = (z - z_0)^2 h(z),$$

где $h(z)$ - аналитическая в окрестности точки z_0 функция и $h(z_0) \neq 0$.

Положим $\xi = (z - z_0)\sqrt{-h(z)}$. Поскольку $h(z_0) \neq 0$, то функция $\sqrt{-h(z)}$ допускает выделение в окрестности точки z_0 двух однозначных аналитических ветвей. Пусть $\psi(z)$ - одна из этих ветвей, тогда

$$w - w_0 = -\xi^2, \quad \xi = (z - z_0)\psi(z).$$

Поскольку $\xi'(z_0) = \psi(z_0) \neq 0$, то по теореме об обратной функции существуют окрестность U точки z_0, окрестность V точки $\xi = 0$ и аналитическая функция $\varphi : V \to U$, такая что

$$S(\varphi(\xi)) = S(z_0) - \xi^2.$$

Функция φ осуществляет конформное отображение окрестности V на окрестность U, и при этом линии уровня функций $Re\,(-\xi^2)$ и $Im\,(-\xi^2)$, устроенные точно также как в рассмотренном выше примере, конформно отображаются в линии уровня функций $Re\,S(z)$ и $Im\,S(z)$ соответственно. При этом сами получаемые кривые будут гладкими, а углы между ними, в силу конформности отображения, будут равны углам между их прообразами. Перевальный контур γ^*, являющийся образом части прямой $Im\,\xi = 0$, лежащей в окрестности V, будет касаться в точке z_0 биссектрисы угла между линиями уровня $Re\,S(z) = Re\,S(z_0)$.

При нахождении асимптотики исходного интеграла желательно двигаться через перевал так, чтобы функция $\mathrm{Re}S(z)$ имела в точке z_0 наиболее ярко выраженный максимум.

Определение. Кривая $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ называется линией наискорейшего спуска функции $u = U(x, y)$, если вектор скорости этой линии пропорционален градиенту функции $u = U(x, y)$, т.е.

$$\begin{cases} x'_t = \alpha(t)U'_x \\ y'_t = \alpha(t)U'_y. \end{cases}$$

Лемма 3.5. (О линии наискорейшего спуска.) Пусть функция $W = U(x, y) + iV(x, y)$ аналитична в области $D \subset C$. Тогда линия наискорейшего спуска функции $U(x, y)$ задается уравнением $V(x, y) \equiv const$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} x'_t = \alpha(t)U'_x \\ y'_t = \alpha(t)U'_y. \end{cases}$$

Учитывая условия Коши - Римана ($U'_x = V'_y,\ U'_y = -V'_x$) получаем

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Im}S(z(t)) = V'_x x'_t + V'_y y'_t = V'_x\alpha(t)U'_x + V'_y\alpha(t)U'_y =$$

$$\alpha(t)[-U'_yU'_x + U'_xU'_y] = 0.$$

Следовательно $V(x,y) \equiv const$ вдоль линии наискорейшего спуска.

Таким образом перевальный контур является линией наискорейшего спуска, проходящей через точку перевала z_0, $(S'(z_0) = 0)$.

3. Нахождение главного члена асимптотики.

Выведем формулу главного члена асимптотики интеграла (1.5) для наиболее типичной ситуации. Мы будем предполагать существование перевального контура для рассматриваемого интеграла.

Теорема 4.5. Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ являются аналитическими, z_0 – простая точка перевала ($S'(z_0) = 0, S''(z_0) \neq 0$), $f(z_0) \neq 0$ и $z = z(t)$ – такая параметризация перевального контура, что $z_0 = z(0)$. Тогда

$$F(\lambda) = \int\limits_{\gamma} f(z)e^{\lambda S(z)}\,dz = f(z_0)e^{\lambda S(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(z_0)|}}e^{i\varphi_0}(1 + O(\lambda^{-1/2})),$$

где $\theta_0 = \mathrm{arg} z'(0)$.

Доказательство. Применяя к последнему интегралу в формуле (2.5) метод Лапласа (пункт 2 теоремы 7.3), получаем

$$F(\lambda) = \int\limits_{\gamma^*} f(z)e^{\lambda S(z)}\,dz = e^{i\lambda\mathrm{Im}S(z_0)}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f_*(t)e^{\lambda S_*(t)}\,dt\,(1 + O(\lambda^{-\infty})) =$$

$$e^{i\lambda\mathrm{Im}S(z_0)}e^{\lambda S_*(0)}f_*(0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''_*(0)|}}(1 + O(\lambda^{-1/2})).$$

Поскольку на перевальном контуре $\mathrm{Im}S(z(t)) \equiv const$ и $S'(z_0) = 0$, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}S_*(t)|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}S(z(t))|_{t=0} = S''(z_0)[z'(0)]^2.$$

Учитывая, что $S_*(0) = \mathrm{Re}S(z_0), f_*(0) = f(z_0)z'(0)$, находим

$$F(\lambda) = \int\limits_{\gamma} f(z)e^{\lambda S(z)}\,dz = f(z_0)e^{\lambda S(z_0)}z'(0)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(z_0)||z'(0)|^2}}(1+O(\lambda^{-1/2})) =$$

$$f(z_0)e^{\lambda S(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(z_0)|}}e^{i\theta_0}(1+O(\lambda^{-1/2})).$$

Пример 2.5. Асимптотику функции Бесселя

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(\lambda\sin\varphi - n\varphi)}\,d\varphi$$

при $\lambda \to +\infty$ мы уже находили при изучении метода стационарной фазы. Теперь найдем искомую асимптотику, используя метод перевала.

Стандартной заменой переменной $z = e^{i\varphi}$ функции Бесселя приводится к виду

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} e^{\lambda/2(z-1/z)}\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Таким образом функция $S(z) = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z}),\ S'(z) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{z^2}),\ S''(z) = -\frac{1}{z^3}$. Линия уровня $Re\,S(z) = Re\,S(z_k) = \frac{x}{2}(1-\frac{1}{|z|^2}) = 0$, проходящая через точки перевала $z_{1,2} = \pm i$, состоит из окружности $|z| = 1$ и прямой $x = 0$. Согласно лемме 2.5, перевальный контур должен быть касательным к биссектрисам соответствующих углов. Учитывая распределение знаков функции $Re\,S(z)$, получаем $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$ и $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$.

Таким образом

$$J_n(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\cos\Big(\lambda - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\Big)(1+O(\lambda^{-1/2})).$$

Замечание. Основные сложности при использовании метода перевала обычно бывают связаны с доказательством возможности деформации исходного контура в перевальный (с сохранением значения интеграла) и нахождением направления входа перевального контура в точку перевала. В примере, при нахождении асимптотики функции Бесселя, удается в явном виде найти линии уровня, проходящие через точки перевала. Поэтому направления перевального контура в точках перевала находятся довольно просто. В более общей ситуации для нахождения соответствующего угла могут быть использованы несколько иные соображения.

Предположим, что удается найти проходящий через точку перевала z_0 контур L такой, что функция $Re\, S(z)$ имеет в точке z_0 строгий максимум при $z \in L$. Контур L, вообще говоря, не является перевальным, но согласно лемме 2.5 в окрестности точки z_0 он будет проходить через те же секторы, через которые проходит перевальный контур. Поэтому направления входа в точку z_0 перевального контура и контура L не могут отличаться более чем на $\frac{\pi}{2}$.

Пусть $z = z(t)$ - параметризация перевального контура и $z(0) = z_0$. Тогда $Re\, S(z(t)) < Re\, S(z_0)$ и $Im\, S(z(t)) = Im\, S(z_0)$. Следовательно при $t \to 0$

$$0 > S(z(t)) - S(z_0) = \frac{1}{2} S''(z_0)(z'(0))^2 t^2 + o(t^2).$$

Откуда получаем

$$\pi = arg\,(S''(z_0)(z'(0))^2),$$

что позволяет найти направление входа перевального контура в точку z_0 с точностью до поворота на угол π. Учитывая имеющуюся на контуре L ориентацию, мы можем однозначно определить искомое значение $\theta_0 = z'(0)$.

Задачи и упражнения.

1. Пусть максимум функции $ReS(z)$ достигается только в начальной точке контура γ, и $S'(a) \neq 0$. Показать, что при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda) = \int\limits_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)}\, dz \simeq \lambda^{-1} e^{\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n}$$

и найти коэффициенты c_n.

2. Найти главный член асимптотики функции Эйри-Фока

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \cos(t^3/3 + tx)\, dt \quad \textit{при} \;\; x \to +\infty.$$

3. Найти главный член асимптотики интеграла

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(itx - t^{2n}/2n)}\, dt \quad \textit{при} \;\; x \to +\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Вазов. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Мир, 1968.

2. Г.Джеффрис, Б.Свирлс. Методы математической физики. Т. 3, Мир, 1970.

3. В.А.Зорич. Математический анализ. Т. 2, Наука,1984.

4. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Наука, 1987.

5. Э.Копсон. Асимптотические разложения. Мир, 1966.

6. Ю.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин. Лекции по теории функций комплексного переменного. Наука, 1976.

7. М.В.Федорюк. Метод перевала. Наука, 1977.

8. А.Эрдейи. Асимптотические разложения. Физматгиз, 1962.

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
E-mail: <asrom@math.nsc.ru>