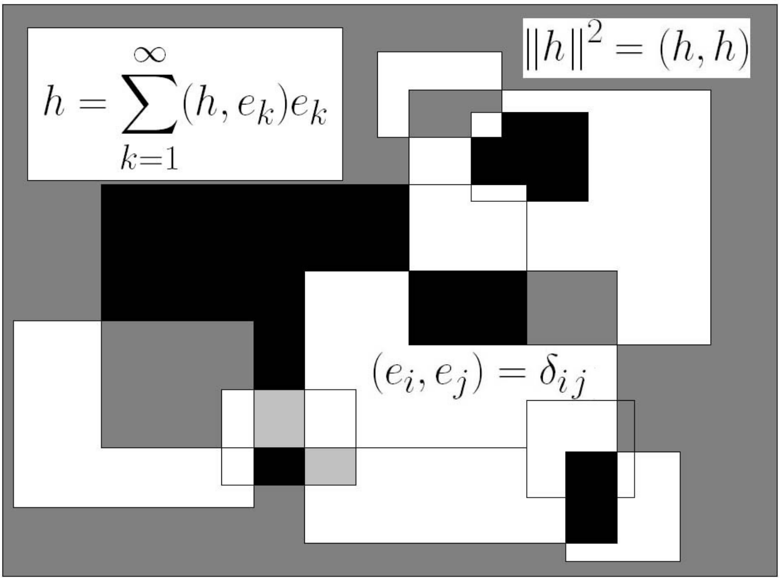
И. В. Подвигин

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

в примерах и задачах



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра высшей математики

И. В. ПОДВИГИН

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Новосибирск
2012

ББК В162я73-1
УДК 517.982.22
П440

Подвигин И. В. Гильбертово пространство в примерах и задачах: Учеб.-метод. пособие/ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 72 с.

Пособие содержит необходимые для практических занятий первоначальные теоретические сведения из теории гильбертовых пространств, а также задачи и примеры, необходимые для усвоения материала и показывающие сущность конкретных определений. Ряд примеров и задач требует от читателя достаточно высокой математической подготовки.

Предназначено для студентов и преподавателей физического факультета НГУ.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доцент С. А. Тресков.

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Новосибирский государственный университет"* на 2009–2018 годы.

Оглавление

Предисловие

Сепарабельное гильбертово пространство является естественным обобщением конечномерного (евклидова) пространства и поэтому имеет широкое применение в различных теориях.

Данное пособие имеет целью расширить кругозор студентов с помощью разнообразных примеров и конструкций, возникающих на "практике".

В первой части пособия рассматривается "приближение к гильбертовым пространствам сверху" – метрические и линейные нормированные пространства и связанные с ними понятия. "Приближение снизу" – конечномерные пространства (изучаемые в линейной алгебре) – здесь приведены в качестве наглядных примеров. Сами гильбертовы пространства изучаются во второй части.

В целом пособие следует главе "Геометрия пространств со скалярным произведением" курса лекций по основам функционального анализа, читаемого на втором курсе физического факультета.

Задачи и примеры были использованы из приведенной в конце литературы. Большинство задач отведено на самостоятельную работу. Некоторые из них рассчитаны на студентов с высоким уровнем математической подготовки. К наиболее сложным задачам приводятся указания.

1. Шкала пространств

Мы начнем изучение с метрических и линейных нормированных пространств, чьи свойства унаследуют гильбертовы пространства.

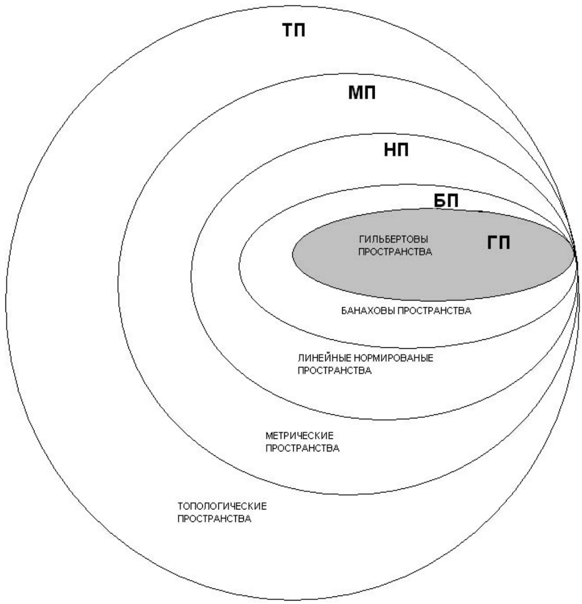


Рис. 1. Шкала пространств

1.1. Метрические пространства

Пусть M – множество и функция $d : M \times M \mapsto \mathbb{R}^+$ удовлетворяет свойствам:

1) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;

2) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (неравенство треугольника);

3) $d(u,v) = d(v,u)$ (симметричность).

Тогда d – *метрика* на M, а $\mathbf{M} = (M,d)$ – *метрическое пространство (МП).* Величину $d(u,v)$ называют также *расстоянием* между u и v. Множество $B(u,r) = \{v \in M : d(u,v) \leq r\}$ – *замкнутый шар* радиуса r с центром в u. Последовательность u_n называется *фундаментальной*, если для произвольно малого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что $d(u_n, u_m) < \varepsilon$ для всех $n, m \geq N$. Последовательность u_n *сходится* к u, если $d(u_n, u)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Примеры

Пример 1.1.1. Первым примером полного МП будет конечномерное евклидово пространство $\mathrm{E}^n = (\mathbb{R}^n, d)$ с метрикой $d(x,y) = |x-y| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$.

Свойства метрики легко проверяются (см. пример 1.3.1). Полнота есть следствие *критерия Коши* в $\mathbb{R}$: последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна. Действительно, пусть последовательность $\{x_k \in \mathbb{R}^n\}, x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$ – фундаментальна, значит для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $k, p > N$ верно неравенство $|x_k - x_p| < \varepsilon$. Тогда для каждой координаты также будет верно неравенство $|x_j^{(k)} - x_j^{(p)}| < \varepsilon,\ j = 1, ..., n$. Применяя критерий Коши, получаем, что $x_j^{(k)} \to y_j,\ j = 1, ..., n$. Отсюда уже легко показать, что $x_k \to y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Пример 1.1.2. Пусть M – произвольное множество. Определим на нем две функции: $d_1(u,v) = 1$, если $u \neq v$ и 0 иначе; $d_2(u,v) = \infty$, если $u \neq v$ и 0 иначе. Тогда $\mathbf{M}_1 = (M, d_1)$ – МП, а $\mathbf{M}_2 = (M, d_2)$ не является МП.

Действительно, легко проверить, что свойства 1–3 для обеих функций выполняются, однако d_1 действует в $\mathbb{R}^+$, а d_2 нет.

Пример 1.1.3. Пусть $H(\mathbb{R}^n)$ – множество непустых компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ (т. е. замкнутых и ограниченных). Определим функцию $d(A,B) = \max\{\sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{y\in B}|x-y|, \sup\limits_{y\in B}\inf\limits_{x\in A}|x-y|\}$, тогда $\mathbf{M} = (H(\mathbb{R}^n), d)$ – полное МП. Функция d называется *метрикой Хаусдорфа.*

Справедливость свойства 3 для d видна из ее определения. Проверим 1 и 2. Итак,

$$d(A,B) = 0 \Leftrightarrow \max\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}|x-y|, \sup_{y\in B}\inf_{x\in A}|x-y|\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}|x-y| = 0 \text{ и } \sup_{y\in B}\inf_{x\in A}|x-y| = 0.$$

Это означает, что для всех точек $x \in A$ $\inf\limits_{y\in B}|x-y| = 0$ и для всех точек $y \in B$ $\inf\limits_{x\in A}|x-y| = 0$. Но так как B компактно, то равенство $\inf\limits_{y\in B}|x-y| = 0$ справедливо лишь для $x \in B$, аналогично и для A. Сравнивая последние два предложения, видим, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, откуда следует равенство A и B. Покажем теперь, что неравенство треугольника тоже справедливо. Нужно показать, что

$$\max\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}|x-y|, \sup_{y\in B}\inf_{x\in A}|x-y|\} \le$$

$$\max\{\sup_{x\in A}\inf_{z\in C}|x-z|, \sup_{z\in C}\inf_{x\in A}|x-z|\} + \max\{\sup_{z\in C}\inf_{y\in B}|y-z|, \sup_{y\in B}\inf_{z\in C}|y-z|\}.$$

Пусть для определенности максимумы в каждом из выражений есть первые входящие в максимумы выражения, т. е.

$$\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}|x-y| \le \sup_{x\in A}\inf_{z\in C}|x-z| + \sup_{z\in C}\inf_{y\in B}|y-z|.$$

Сложное на первый взгляд неравенство на самом деле оказывается следствием неравенства треугольника для метрики из примера 1.1. Действительно, возьмем $x \in A, y \in B, z \in C$, тогда $|x-y| \le |x-z| + |z-y|$. Отсюда получаем:

$$\inf_{y\in B}|x-y| \le |x-z| + \inf_{y\in B}|y-z|,$$

$$\inf_{y\in B}|x-y| \le \inf_{z\in C}|x-z| + \inf_{z\in C}\inf_{y\in B}|y-z|,$$

$$\inf_{y\in B}|x-y| \le \inf_{z\in C}|x-z| + \sup_{z\in C}\inf_{y\in B}|y-z|.$$

Взяв $\sup\limits_{x\in A}$ от обеих частей последнего неравенства, получим требуемое неравенство. Аналогично рассматриваются все остальные случаи.

Прежде, чем доказывать полноту, введем определение. Пусть A – компактное множество, тогда *расширением множества* A радиуса $r > 0$ (обозначается $A + r$) называется объединение всех замкнутых шаров радиуса r с центром в A:

$$A + r = \bigcup\{B(x,r)|x \in A\}.$$

Используя это понятие и определение метрики Хаусдорфа, можно установить, что

$$d(A,B) < \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B + \varepsilon \text{ и } B \subset A + \varepsilon.$$

Ввиду симметричности метрики достаточно показать, что $d(A,B) < \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B+\varepsilon$. Предположим, что $d(A,B) < \varepsilon$. Тогда для каждой точки $x \in A$ верно $d(x,B) < \varepsilon$, откуда следует, что $x \in B + \varepsilon$, таким образом, $A \subset B + \varepsilon$. Обратно, если $A \subset B + \varepsilon$, тогда для каждой точки $x \in A$ найдется точка $y \in B$ такая, что $d(x,y) < \varepsilon$. Из этого следует, что $d(x,B) < \varepsilon$ для всех $x \in A$ и поэтому $d(A,B) < \varepsilon$.

Пусть $K_1 \supseteq K_2 \supseteq ... \supseteq K_n \supseteq ...$ – последовательность компактных множеств, $K = \cap_{j=1}^{\infty} K_j$. Тогда покажем, что $\lim_{j\to\infty} d(K_j, K) = 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N > 0$, что для всех $n > N$ $K \subset K_n + \varepsilon$ и $K_n \subset K + \varepsilon$. Действительно, первое включение $K \subset K_n + \varepsilon$ следует из $K \subset K_n$. Далее ясно, что $K \subset \mathrm{int}(K+\varepsilon) \subset K + \varepsilon$ ($\mathrm{int}(A)$ – *внутренность множества* A, т. е. наибольшее открытое множество, содержащееся в A). Но тогда начиная с некоторого номера $n > N$ будет выполняться нужное включение: $K_n \subset \mathrm{int}(\mathrm{K} + \varepsilon)$.

Пусть теперь A_n – фундаментальная последовательность компактных множеств, т. е. $d(A_n, A_m) < \varepsilon$ начиная с некоторого номера N. Тогда найдется константа M такая, что $d(A_1, A_n) < M$ для всех n, и поэтому $A_n \subset A_1 + M$, т. е. все A_n ограничены одним множеством. Рассмотрим убывающую последовательность компактных множеств $K_n = \mathrm{cl}(\cup_{j=n}^{\infty} A_j)$ ($\mathrm{cl}(A)$ – *замыкание множества* A, т. е. наименьшее замкнутое множество, содержащее A). Тогда по уже доказанному факту K_n сходится к K. Покажем, что и A_n сходится к K. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что начиная с некоторого номера будут выполняться соотношения

$$A_n \subset K + \varepsilon \text{ и } K \subset A_n + \varepsilon.$$

Ясно, что существует номер N_1, что при $n > N_1$ $K_n \subset K + \varepsilon$. Вспоминая определение множеств K_n, получаем:

$$\cup_{j=n}^{\infty} A_j \subset K + \varepsilon \quad \text{и, следовательно,} \quad A_n \subset K + \varepsilon.$$

Из фундаментальности последовательности A_n следует, что существует N_2 такое, что для всех $n, m > N_2$ верно включение $A_m \subset A_n + \varepsilon$. Зафиксировав $n > N_2$, получим, что

$$\cup_{j=m}^{\infty} A_j \subset A_n + \varepsilon \quad \text{и, следовательно,} \quad \mathrm{cl}(\cup_{j=m}^{\infty} A_j) \subset A_n + \varepsilon.$$

Отсюда получаем второе требуемое соотношение: $K \subset A_n + \varepsilon$. Полнота доказана.

Пример 1.1.4. Пусть $\mathfrak{B}^n$ – борелевская σ-алгебра подмножеств куба $[0,1]^n$, т. е. минимальное по включению семейство множеств, содержащее все n-мерные подынтервалы куба $[0,1]^n$ и замкнутое относительно счетных объединений и дополнений. Пусть λ – мера Лебега на $[0,1]^n$. Считая два множества одинаковыми, если они отличаются на множество меры нуль, определим метрику на $\mathfrak{B}^n$ следующим образом: $d(A, B) = \lambda(A \triangle B)$. Тогда $(\mathfrak{B}^n, d)$ – полное МП. Оно называется *метрической булевой алгеброй*, а метрика d – *метрикой Фреше – Никодима.*

Действительно, свойства метрики 1 и 3 следуют из определения. Неравенство треугольника вытекает из соотношения

$$A \triangle B \subseteq A \triangle C \cup C \triangle B,$$

справедливость которого можно проверить, нарисовав круги Эйлера для трех множеств A, B и C в общем положении. Рассмотрим полноту. Возьмем фундаментальную последовательность множеств A_n, т. е. $d(A_n, A_m) < \varepsilon$, начиная с некоторого номера N. Переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $d(A_n, A_m) < 2^{-n}$ для всех n и $m \geq n$. Тогда $d(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n}$ для всех n.

Покажем, что A_n сходится в метрике Фреше – Никодима к

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Из определения множества A и свойства меры (счетная аддитивность) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $n > N$:

$$\lambda\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \triangle A\Big) = \lambda\Big(\big(\bigcap_{m=1}^{n} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\big) \triangle A\Big) < \varepsilon.$$

Кроме того, так как

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cup (A_{n+1} \setminus A_n) \cup (A_{n+2} \setminus A_{n+1}) \cup ...,$$

то

$$\lambda\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \triangle A_n\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \setminus A_n\Big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda\Big(A_{k+1} \setminus A_k\Big)$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda\Big(A_{k+1} \triangle A_k\Big) = \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1}.$$

Выбирая $n > N$ таким, чтобы $2^{-n+1} < \varepsilon$, получим:

$$d(A_n, A) \le d(A_n, \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) + d(A, \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$$
$$= \lambda\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \triangle A_n\Big) + \lambda\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \triangle A\Big) < 2\varepsilon.$$

Таким образом, полнота доказана.

Пример 1.1.5. В евклидовом пространстве шар большего радиуса никак не может быть подмножеством шара меньшего радиуса. Однако в абстрактных метрических пространствах может быть не так.

Пусть $\mathbf{M} = (M, d)$, где $M = B(0,3)$ – замкнутый круг евклидовой плоскости, d – евклидова метрика на нем. Тогда возьмем $B_1 = M$ и $B_2 = B(z,4), z = (2,0)$. Получим $B_2 \subset B_1$, но $4 = r_2 > r_1 = 3$.

Задачи

1.1.1. Пусть $d(x,y)$ – метрика. Показать, что функции $d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $d_2(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$ и $d_3(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ тоже метрики.

1.1.2. Найти в метрике Хаусдорфа в $\mathbb{R}^2$ и в метрике Фреше – Никодима расстояние между единичным кругом $B(0,1)$ и квадратом $V = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \le 1, i = 1,2\}$.

Показать, что следующие пространства являются метрическими (1.1.3–1.1.9):

1.1.3. $\mathbf{M} = (\mathbb{N}, d_k), k = 1,2$, где $d_1(m,n) = (1 + \frac{1}{m+n})\delta_{mn}$ и $d_2(m,n) = \frac{|m-n|}{mn}$, где $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n \\ 0, & \text{если } m \ne n \end{cases}$ – *символ Кронекера.*

1.1.4. $\mathbf{M} = (s, d)$, где s – множество комплекснозначных последовательностей $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $x_k \in \mathbb{C}$ и метрика $d(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|}$.

1.1.5. $\mathbf{M} = (S, d)$, где S – множество измеримых функций на $[0, 1]$ (функции, совпадающие почти всюду, считаются одинаковыми) и $d(f, g) = \int_0^1 \frac{|f-g|}{1+|f-g|} dx$.

1.1.6. $\mathbf{M} = (\mathbb{S}^2, d)$, где $\mathbb{S}^2$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ и $d(x, y)$ – длина кратчайшей дуги большой окружности, соединяющей точки x и y на $\mathbb{S}^2$ *(расстояние вдоль геодезической).*

1.1.7. $\mathbf{M} = (M_{\mathbb{P}}, d_k), k = 1, 2, 3$, где $M_{\mathbb{P}}$ – множество вещественнозначных случайных величин вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ и

1) $d_1(X, Y) = \mathbb{P}(X \neq Y)$ *(индикаторная метрика);*

2) $d_2(X, Y) = \inf\limits_{\varepsilon}\{\mathbb{P}(|X - Y| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon\}$ *(метрика Ки Фана);*

3) $d_3(X, Y) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\mathbb{F}_X(x) - \mathbb{F}_Y(x)|$, где $\mathbb{F}_X, \mathbb{F}_Y$ – функции распределения случайных величин X и Y *(метрика Колмогорова).*

1.1.8. $\mathbf{M} = (\mathfrak{M}, d_k), k = 1, 2, 3$, где $\mathfrak{M}$ – множество борелевских вероятностных мер на отрезке $[0, 1]$ (т. е. меры определены на множествах из $\mathfrak{B}$ (пример 1.1.4.)) и

1) $d_1(\mu_1, \mu_2) = \sqrt{1 - \int_0^1 \sqrt{\rho_1 \rho_2} d\nu}$, меры μ_1 и μ_2 абсолютно непрерывны относительно ν, т. е. $\mu_k(A) = \int_A \rho_k d\nu, k = 1, 2$ *(метрика Хеллингера);*

2) $$d_2(\mu_1, \mu_2) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \begin{array}{l} \mu_1([a, b]) \leq \mu_2([a - \varepsilon, b + \varepsilon]) + \varepsilon, \\ \mu_2([a, b]) \leq \mu_1([a - \varepsilon, b + \varepsilon]) + \varepsilon. \end{array} \right\}$$
(метрика Прохорова);

3) $d_3(\mu_1, \mu_2) = \inf\limits_{L}\{\int_0^1 \int_0^1 |x - y| dL(x, y)\}$, где L – мера на квадрате $[0, 1]^2$ такая, что $L([0, 1] \times A) = \mu_2(A)$, $L(A \times [0, 1]) = \mu_1(A)$ *(метрика Канторовича).*

1.1.9. $\mathbf{M} = (2^N, d)$, где 2^N – множество двоичных слов (кодов, состоящих из 0 и 1) длины N и $d(x, y) = \frac{1}{N}\#\{x_k \neq y_k, k = 1, 2, \cdots, N\}$, где $\#A$ обозначает число элементов множества A *(метрика Хемминга).*

1.1.10. Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) – метрические пространства. Показать, что $(M_1 \times M_2, d)$ – тоже метрическое пространство, где:
1) $d(z_1, z_2) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$;
2) $d(z_1, z_2) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$;
3) $d(z_1, z_2) = [d_1^2(x_1, x_2) + d_2^2(y_1, y_2)]^{1/2}$.

1.1.11. Исследовать полноту метрических пространств из задач 1.1.3–1.1.5.

1.2. Линейные пространства

Множество $\mathbf{L}$ называется *линейным (векторным)* пространством над числовым *полем* $\mathbb{F}$ (обычно $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), если выполнены условия:

1. ($\mathbf{L}$ – *абелева группа по сложению*). На $\mathbf{L}$ определена операция *сложения* $+$, сопоставляющая двум элементам (*векторам*) $x, y \in \mathbf{L}$ новый элемент $x + y \in \mathbf{L}$ и удовлетворяющая свойствам:

   1) $x + y = y + x$ (коммутативность);

   2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность);

   3) существует вектор $0 \in \mathbf{L}$ такой, что $0 + x = x$ для всех $x \in \mathbf{L}$ (существование нуля);

   4) для каждого $x \in \mathbf{L}$ существует вектор $-x \in \mathbf{L}$ такой, что $(-x) + x = 0$ (существование обратного).

2. Определена операция *умножения* $\cdot$, сопоставляющая числу $\alpha \in \mathbb{F}$ и вектору $x \in \mathbf{L}$ новый вектор $\alpha \cdot x \in \mathbf{L}$ и удовлетворяющая свойствам:

   5) $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;

   6) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

   7) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

   8) $1 \cdot x = x$.

Следует различать умножение и сложение между числами и векторами.

Подмножество $\mathbf{L}'$ линейного пространства $\mathbf{L}$ $(\mathbf{L}' \subseteq \mathbf{L})$ называется *подпространством* (обозначаем $\mathbf{L}' \preceq \mathbf{L}$ или $\mathbf{L}' \prec \mathbf{L}$, если строгое включение), если оно само является линейным пространством, т. е. $x, y \in \mathbf{L}' \Rightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbf{L}'$. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{L}$ – *линейно независимы*, если справедливо утверждение $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Бесконечная система векторов линейно независима, если каждая конечная подсистема линейно независима. Максимальная линейно независимая система – *базис (Гамеля)* линейного пространства. Число векторов в базисе – *размерность* линейного пространства.

Примеры

Пример 1.2.1. Конечномерное вещественное (или комплексное) арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) с покоординатным сложением и умножением на вещественное (или комплексное) число – линейное пространство. Базис состоит из n векторов $e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, 1 на k-м месте. Подпространствами являются k-мерные арифметические пространства, $k = 0, 1, \ldots, n$, т. е. $\{0\} \prec \mathbb{R}^1 \prec \mathbb{R}^2 \prec \cdots \prec \mathbb{R}^k \prec \cdots \prec \mathbb{R}^n$ (аналогично для комплексного пространства).

Пример 1.2.2. Множество функций $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (обозначается $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) с поточечным сложением и умножением на вещественное число – линейное пространство.

Его подпространствами являются:

1) $C(\mathbb{R})$ – множество непрерывных функций;

2) $C^\infty(\mathbb{R})$ – множество бесконечно дифференцируемых функций;

3) $C^k(\mathbb{R})$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций;

4) $P(\mathbb{R})$ – множество многочленов;

5) $S(\mathbb{R})$ – множество быстроубывающих функций.

Более того, они упорядочены следующим образом:

$$C^\infty(\mathbb{R}) \prec C^k(\mathbb{R}) \prec C(\mathbb{R}) \prec \mathbb{R}^\mathbb{R},$$

$$S(\mathbb{R}) \prec C^\infty(\mathbb{R}),\ P(\mathbb{R}) \prec C^\infty(\mathbb{R}),\ P(\mathbb{R}) \cap S(\mathbb{R}) = \{0\}.$$

Пример 1.2.3. Линейные пространства $P(\mathbb{R})$ и $S(\mathbb{R})$ бесконечномерны (следовательно, и все пространства из примера 1.2.2 бесконечномерны).

Действительно, рассмотрим систему многочленов $\{x^k, k \geq 0\} \subseteq P(\mathbb{R})$ и покажем, что она линейно независима. Возьмем произвольную конечную линейную комбинацию и приравняем ее к нулю:

$$\alpha_1 x^{n_1} + \alpha_2 x^{n_2} + \cdots + \alpha_k x^{n_k} \equiv 0.$$

Многочлен тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда все $\alpha_i = 0$.

Аналогично показывается, что система $\{e^{-x^2} x^k, k \geq 0\} \subseteq S(\mathbb{R})$ линейно независима.

Пример 1.2.4. Множество $\Omega_{n,k,m}$ k-мерных m-гладких дифференциальных форм в $\mathbb{R}^n$ – линейное пространство. Это множество отображений $\omega^k : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^k \mapsto \mathbb{R}$ вида

$$\omega^k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} A_{i_1 \ldots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

$$A_{i_1 \ldots, i_k}(x) \in C^m(\mathbb{R}^n)$$

с обычными для отображений операциями сложения и умножения на число (можно умножать даже на гладкие функции). Если зафиксировать точку $x \in \mathbb{R}^n$, то множество $\Omega_{n,k,m}(x)$ значений форм в этой точке будет C_n^k-мерным линейным пространством.

Действительно, базисом будут все формы вида

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},\ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n,$$

которых в точности C_n^k штук.

Пример 1.2.5. Множество $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ с операциями $x \oplus y = xy$ и $\alpha \odot x = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ – линейное пространство.

Непосредственно проверяется, что все свойства операций выполняются. Нулевым элементом является обычная 1, обратным к x будет $\frac{1}{x}$. Кроме того, ясно, что каждый элемент $x = e^{\ln x} = \ln x \odot e$, таким образом, это пространство одномерно и базисом является e (или любое другое положительное число).

Пример 1.2.6. Линейную зависимость системы дифференцируемых функций можно установить с помощью *определителя Вронского.*

Пусть $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – $n-1$ раз дифференцируемые на интервале (a, b) линейно зависимые функции, тогда их определитель Вронского равен

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0,\ x \in (a, b).$$

Обратное утверждение не верно. Чтобы это выяснить, можно рассмотреть две линейно независимые функции на $\mathbb{R}$:

$$y_1(x) = x^2 I_{\{x \ge 0\}},\ y_2(x) = x^2 I_{\{x \le 0\}},$$

где $I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ – *индикатор множества* A, или *характеристическая функция множества* A.

У них определитель Вронского тождественно равен нулю на всем $\mathbb{R}$:

$$W = \begin{vmatrix} x^2 I_{\{x \ge 0\}} & x^2 I_{\{x \le 0\}} \\ 2x I_{\{x \ge 0\}} & 2x I_{\{x \le 0\}} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Таким образом, если определитель Вронского не равен нулю, то система линейно независима.

Задачи

1.2.1. Показать, что в каждом линейном пространстве нулевой и обратный элементы единственны.

1.2.2. Показать, что пересечение линейных подпространств — снова линейное подпространство.

1.2.3. Как устроено векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$ *(поле вычетов по модулю 2)*?

Являются ли следующие множества с естественными операциями линейными пространствами? Найти их размерность и указать порядок (1.2.4–1.2.8):

1.2.4.

1. Множество монотонных функций.
2. Множество убывающих (возрастающих) функций.
3. Множество функций непрерывных справа (слева).
4. Множество четных (нечетных) функций.
5. Множество периодических функций (с соизмеримыми периодами и без).
6. Множество функций, являющихся поточечным пределом непрерывных функций.
7. Множество измеримых функций.
8. Множество положительных функций.

1.2.5.

1. $M_n(\mathbb{R})$ – множество вещественных квадратных матриц порядка n.
2. $GL_n(\mathbb{R})$ – множество вещественных невырожденных матриц порядка n (т. е. $\det A \neq 0$).
3. $O_n(\mathbb{R})$ – множество ортогональных матриц порядка n (т. е. $A^T = A^{-1}$).
4. $Sim_n(\mathbb{R})$ – множество симметрических матриц порядка n (т. е. $A^T = A$).
5. $Kos_n(\mathbb{R})$ – множество кососимметрических матриц порядка n (т. е. $A^T = -A$).
6. $Tr_n^0(\mathbb{R})$ – множество вещественных матриц порядка n с нулевым следом (т. е. $trA = \sum_{k=1}^n a_{kk} = 0$).

1.2.6.

1. Множество обобщенных функций (распределений).
2. Множество регулярных обобщенных функций.
3. Множество сингулярных обобщенных функций.
4. Множество обобщенных функций медленного роста.
5. Множество обобщенных функций, имеющих обобщенную производную.
6. Множество основных (пробных) функций.
7. Множество обобщенных функций, носитель которых состоит не более чем из конечного числа точек.

1.2.7.

1. $\mathrm{R}[a,b]$ – множество интегрируемых по Риману функций на отрезке $[a,b]$.
2. $\mathrm{L}(a,b)$ – множество интегрируемых по Лебегу функций на интервале (a,b).

1.2.8.

1. Множество борелевских мер на отрезке $[0,1]$.
2. Множество вероятностных борелевских мер на отрезке $[0,1]$.
3. Множество абсолютно непрерывных (относительно меры Лебега) мер на отрезке $[0,1]$.
4. Множество сингулярных (не являющихся абсолютно непрерывными) мер на отрезке $[0,1]$.

Являются ли независимыми следующие системы функций (1.2.9–1.2.11)?

1.2.9. Система из трех функций: $\sin x$, $\cos x$ и e^x над полем $\mathbb{R}$ и над полем $\mathbb{C}$.

1.2.10. Система из трех сингулярных обобщенных функций: δ, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+i\cdot 0}$ над полем $\mathbb{C}$.

1.2.11. Произвольное семейство функций, определенных на $\mathbb{R}$ с попарно непересекающимися носителями (*носитель* – замыкание множества, на котором функция принимает ненулевые значения). Показать, что если носители являются отрезками, то семейство обязательно не более, чем счетное.

1.2.12. Используя определитель Вронского, выяснить линейно независимы ли системы.

1. Система из трех *целозначных* многочленов на $\mathbb{R}$:
$$\left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array}\right) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \text{ при } k = 3, 5, 7;$$
2. Система из $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$;
3. Система из $\cos x, \cos 2x, \cos 3x$;
4. Система из e^x, e^{2x}, e^{3x}.

1.3. Нормированные пространства

Пусть $\mathbf{L}$ – линейное пространство и функция $\|\cdot\| : \mathbf{L} \mapsto \mathbb{R}^+$ обладает свойствами:

1) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (неравенство треугольника);
3) $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha|\|u\|$ (положительная однородность).

Тогда $\|\cdot\|$ – *норма* на $\mathbf{L}$, а $\mathbf{N} = (\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ – линейное *нормированное пространство (НП)*. На всяком линейном пространстве можно определить хотя бы одну норму. Нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой $d(u, v) = \|u - v\|$.

Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на линейном пространстве $\mathbf{L}$ *эквивалентны*, если найдутся такие константы $c_1, c_2 > 0$, что для всех $x \in \mathbf{L}$ верно неравенство
$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1.$$

Примеры

Пример 1.3.1. Нормированными пространствами являются:

1) $l_p^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ или $l_p^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, $p \in [1, \infty]$, с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } p \neq \infty \text{ и}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|;$$

2) $l_p(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}_p^\infty, \|\cdot\|_p)$ или $l_p(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}_p^\infty, \|\cdot\|_p)$, $p \in [1, \infty]$, где $\mathbb{R}_p^\infty(\mathbb{C}_p^\infty)$ – множество последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с $\|x\|_p < \infty$ с аналогичной нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } p \neq \infty \text{ и}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le \infty} |x_k|.$$

Действительно, единственные сложные моменты – это линейность пространств и неравенство треугольника для нормы. Оба этих факта следуют из неравенств

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$
$$\max_{1 \le k \le n} |x_k + y_k| \le \max_{1 \le k \le n} |x_k| + \max_{1 \le k \le n} |y_k|, \ n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Первое из них называется *неравенством Минковского.*

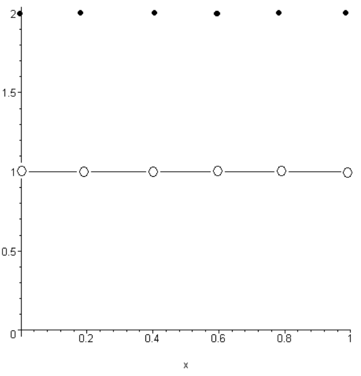
Пример 1.3.2. Интегральными аналогами предыдущих пространств являются *лебеговские функциональные пространства* $\mathrm{L_p(X)}$, т. е. множество вещественнозначных (комплекснозначных) функций f, определенных на $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\int_X |f|^p dx < \infty$ (при этом функции, совпадающие на множестве меры ноль, считаются одинаковыми). Нормой является функционал

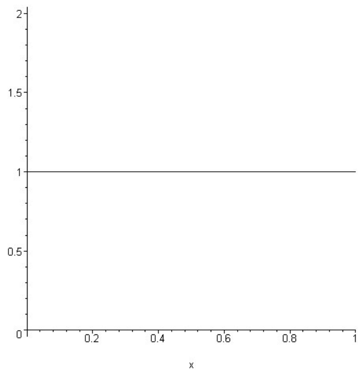
$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } p \neq \infty \text{ и}$$
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \lambda\{f(x) > a\} = 0\}.$$

Второй функционал называется *существенным супремумом.* Чтобы лучше понять, что это за функционал, рассмотрим пример. Возьмем на отрезке $[0,1]$ функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1; \\ 1, & \text{во всех остальных точках.} \end{cases}$$

Тогда $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = 2$, а $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = 1$. Так как в лебеговском функциональном пространстве функции, отличающиеся на множестве меры ноль, считаются одинаковыми, то $f(x) = 1$, поэтому существенный супремум есть обычный супремум для функции, тождественно равной 1.





Доказательство линейности пространства и неравенства треугольника для нормы опирается на неравенства:

$$\left(\int_X |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f+g| \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f| + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |g|.$$

Первое из них называется *неравенством Минковского.*

Пример 1.3.3. На линейном пространстве матриц $M_{n,m}(\mathbb{C})$ можно определить следующие нормы:

$$\|A\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \quad \textit{(1-норма по строкам);}$$

$$\|A\| = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \textit{(1-норма по столбцам);}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2} \quad \textit{(норма Фробениуса);}$$

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{(p-норма).}$$

Все свойства нормы легко доказываются непосредственно или с использованием примера 1.3.1, а также при помощи отождествления матрицы с вектором длины mn.

Пример 1.3.4. Линейное пространство непрерывных на отрезке функций $C[a,b]$ становится НП, если его снабдить нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Пример 1.3.5. *Пространства Соболева* $W_p^l(X)$.

Пусть X – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $l \in \mathbb{N}$ и $p \in [1,\infty]$. Пусть $f \in \mathrm{L}_1(\mathrm{X})$. *Обобщенной производной (по Соболеву)* порядка α (α –

мультииндекс, т. е. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{Z}^+$) называется функция f_α, удовлетворяющая соотношению

$$D^\alpha f(\varphi) = \int_X f_\alpha \varphi dx = f_\alpha(\varphi)$$

для любой пробной функции φ, т. е. производная порядка α от регулярного распределения, порожденного f, является регулярным распределением, порожденным f_α. Как и классическую производную, обобщенную производную будем обозначать $f_\alpha = D^\alpha f$.

Всякое (регулярное) распределение обладает производной, но не всякое обладает обобщенной производной (по Соболеву). К примеру,

$$H(x)' = \delta, \quad x' = [1],$$

т. е. *функция Хевисайда* $H(x) = I_{\{x \geq 0\}}$ не обладает обобщенной производной (так как δ-*функция Дирака* – не регулярное распределение), а x обладает.

Пространством Соболева $W_p^l(X)$ называется линейное пространство всех функций $f \in \mathrm{L_p(X)}$, у которых обобщенные производные $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq l$ ($|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$) также принадлежат $\mathrm{L_p(X)}$. Норма определяется как

$$\|f\|_{l,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ p \neq \infty,$$
$$\|f\|_{l,\infty} = \max_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Ясно, что обобщенная производная суммы есть сумма обобщенных производных, поэтому линейность пространства следует из неравенства Минковского. Из свойств нормы нужно лишь удостовериться в неравенстве треугольника при $p \neq \infty$. Пусть, например, $l = 1$ и $n = 2$, тогда

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{l,p} &= \left(\sum_{|\alpha|\le 1} \|D^\alpha (f+g)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\|D^{(0,0)}(f+g)\|_p^p + \|D^{(0,1)}(f+g)\|_p^p + \|D^{(1,0)}(f+g)\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\|f+g\|_p^p + \|D^{(0,1)}f + D^{(0,1)}g\|_p^p + \|D^{(1,0)}f + D^{(1,0)}g\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \Big((\|f\|_p + \|g\|_p)^p + (\|D^{(0,1)}f\|_p + \|D^{(0,1)}g\|_p)^p + \\
&\qquad\qquad + (\|D^{(1,0)}f\|_p + \|D^{(1,0)}g\|_p)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \Big(\|f\|_p^p + \|D^{(0,1)}f\|_p^p + \|D^{(1,0)}f\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \\
&\qquad + \Big(\|g\|_p^p + \|D^{(0,1)}g\|_p^p + \|D^{(1,0)}g\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{l,p} + \|g\|_{l,p},
\end{aligned}
$$

последнее неравенство – неравенство Минковского в l_p^3 для

$x = (\|f\|_p, \|D^{(0,1)}f\|_p, \|D^{(1,0)}f\|_p)$, $y = (\|g\|_p, \|D^{(0,1)}g\|_p, \|D^{(1,0)}g\|_p)$.

Пример 1.3.6. Покажем, что в пространстве $C[a,b]$ нормы $\|f\|_1 = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ и $\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ не эквивалентны.

Легко заметить, что справедливо неравенство

$$\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)|\,dx \le (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = (b-a)\|f\|_1.$$

Поэтому, чтобы показать неэквивалентность норм, нужно по любой константе $c > 0$ найти непрерывную функцию f такую, что

$$\|f\|_1 > c\|f\|_2.$$

Если $\frac{1}{c} > b - a$, то подойдет функция $f(x) = c$. Если же $\frac{1}{c} \leq b - a$, то возьмем функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x < b - \frac{1}{c} \\ c^2x - c^2b + c & b - \frac{1}{c} \leq x \leq b \end{cases}.$$

Задачи

1.3.1. Пусть $(\mathbf{L_1}, \|\cdot\|_1), (\mathbf{L_2}, \|\cdot\|_2)$ – НП над одним полем. Определим *прямое произведение* линейных пространств $\mathbf{L} = \mathbf{L_1} \otimes \mathbf{L_2}$ и нормы на нем. Пусть $x \in \mathbf{L_1}$ и $y \in \mathbf{L_2}$, тогда $[x, y] \in \mathbf{L}$ и

$$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2];$$

$$\alpha \cdot [x, y] = [\alpha \cdot x, \alpha \cdot y];$$

$$\|[x, y]\|' = \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}, \ \|[x, y]\|'' = (\|x\|_1^p + \|y\|_2^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Показать, что $(\mathbf{L}, \|\cdot\|')$ и $(\mathbf{L}, \|\cdot\|'')$ – НП.

В следующих линейных пространствах проверить аксиомы нормированного пространства (1.3.2–1.3.10).

1.3.2. Линейное пространство c всех сходящихся числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots,)$ с нормой $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

1.3.3. Линейное пространство c_0 всех сходящихся к нулю числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots,)$ с нормой $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

1.3.4. Линейное пространство bv всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots,)$, для которых норма $\|x\| = |x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|$ конечна.

1.3.5. Линейное пространство bv_0 всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots,)$, для которых $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ и норма $\|x\| = |x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|$ конечна.

1.3.6. Линейное пространство bs всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots,)$, для которых норма $\|x\| = \sup_n |\sum_{k=1}^{n} x_k|$ конечна.

1.3.7. Линейное пространство cs всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots,)$, для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится и норма $\|x\| = \sup_n |\sum_{k=1}^{n} x_k|$ конечна.

1.3.8. Линейное пространство $C^k[a, b]$ всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$ (на концах отрезка определены правые и левые производные, которые непрерывны справа и слева соответственно) с нормой

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{k} \max_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|.$$

1.3.9. Линейное пространство $A(D)$ определяется для открытого множества $D \subseteq \mathbb{C}$ как множество комплексных функций, которые ограничены и непрерывны на замыкании D и *аналитичны* в D с нормой $\|f\| = \sup_{z\in D} |f(z)|$.

1.3.10. Линейное пространство AP всех непрерывных на $\mathbb{R}$ *почти периодических (по Бору)* функций, т. е. функций, удовлетворяющих условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $L = L(\varepsilon)$, что в любом отрезке $[a, a + L]$ найдется точка τ, что $|f(\tau + x) - f(x)| < \varepsilon$ при $x \in \mathbb{R}$. Норма определяется как $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

1.3.11. Показать, что в $\mathbb{R}^n$ нормы из l_p^n эквивалентны.

1.3.12. Показать, что нормы в пространстве матриц $M_{n,m}(\mathbb{C})$ (пример 1.3.3) эквивалентны.

1.3.13. Показать, что нормы из задачи 1.3.1 эквивалентны.

1.3.14. Эквивалентны ли в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a,b]$ нормы:

$$\|f\|_1 = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \ \|f\|_2 = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|?$$

1.4. Банаховы пространства

Последовательность $\{x_n\}$ нормированного пространства $(\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ *сходится* к x, если $d(x_n, x) = \|x_n - x\|$ стремится к нулю. Точка x – *предельная* точка множества $M \subseteq \mathbf{L}$, если существует последовательность точек множества M, отличных от x, сходящаяся к x. *Замыкание* множества – объединение множества и его предельных точек. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (т. е. совпадает со своим замыканием). Множество называется *всюду плотным*, если его замыкание есть все пространство. Пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество. *Замкнутым подпространством* $\mathbf{N}'$ нормированного пространства $\mathbf{N}$ называется его замкнутое линейное подпространство (обозначаем его так же, как линейные подпространства $\mathbf{N}' \preceq \mathbf{N}$).

Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым пространством (БП)*. Всякое нормированное пространство можно *пополнить* до банахова пространства. Это означает, что существует банахово пространство, содержащее в себе данное нормированное с такой же нормой. Причем нормированное пространство плотно в этом банаховом пространстве. В качестве элементов пополнения можно брать классы эквивалентности фундаментальных последовательностей. При этом эквивалентными считаются последовательности x_n и y_n такие, что $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Нормой класса эквивалентности будет предел норм любой входящей в него фундаментальной последовательности.

Примеры

Пример 1.4.1. Пространства $l_p^n(\mathbb{R}), l_p(\mathbb{R}),\ p \neq \infty$ – сепарабельные БП.

Множество векторов с рациональными координатами будет счетным всюду плотным множеством. Счетность такого множества очевидна. Для доказательства всюду плотности нужно показать, что всякий вектор приближается векторами с рациональными координатами.

Рассмотрим более сложный случай $l_p(\mathbb{R})$. Возьмем $x = (x_1, x_2, ...)$ и последовательность финитных векторов $\widetilde{x}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ...)$, где $x_j^{(k)} \in \mathbb{Q}$, $x_j^{(k)} = 0$ при $j > k$ и $x_j^{(k)}$ сходится к x_j для всех j при стремлении k к бесконечности, причем $|x_j^{(k)} - x_j| \leq 1/k^2$ для всех $j \leq k$. Тогда

$$\|\widetilde{x}_k - x\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)} - x_j|^p = \sum_{j=1}^{k} |x_j^{(k)} - x_j|^p + \sum_{j=k+1}^{\infty} |x_j^{(k)} - x_j|^p$$
$$\leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k^{2p}} + \sum_{j=k+1}^{\infty} |x_j|^p = \frac{1}{k^{2p-1}} + \sum_{j=k+1}^{\infty} |x_j|^p < \varepsilon,$$

для достаточно больших k.

Полнота пространства показывается так же, как и в примере 1.1.1.

Пример 1.4.2. Лебеговские функциональные пространства $\mathrm{L_p(X)},\ p \neq \infty$ являются сепарабельными БП.

Полнота показывается нетривиально [16, с. 376, 383].

Счетным всюду плотным подмножеством (в случае, например, если $X = [a, b]$) является множество многочленов с рациональными коэффициентами или множество ступенчатых функций с рациональными значениями на отрезках с рациональными концами (или с двоично рациональными концами).

Действительно, в случае многочленов известно, что всякая непрерывная функция приближается многочленами по норме непрерывных функций и, следовательно, по норме пространства $\mathrm{L_p(a,b)}$, так как

$$\|\widetilde{f}-p\|_p \leq \max_{x\in[a,b]} |\widetilde{f}(x)-p(x)|(b-a)^{1/p},$$

где $\widetilde{f}(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция, а $p(x)$ – многочлен, приближающий $\widetilde{f}(x)$. Всякую функцию $f \in \mathrm{L_p(a,b)}$ можно приблизить непрерывными функциями, например, такими:

$$\widetilde{f}_\delta(x) = \delta^{-1} \int_a^b f(y)\omega\left(\frac{x-y}{\delta}\right)\,dy,$$

где $\omega(z)$ – *усредняющее ядро Соболева*, или *шапочка Соболева*, т. е. функция, обладающая свойствами:

1) $\omega(z)$ – бесконечно дифференцируемая функция;
2) $\omega(z) \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{R}$;
3) $\omega(z) = 0$ для всех $|z| \geq 1$;
4) $\int_{-1}^{1} \omega(z)\,dz = 1$.

Примером может служить функция $\omega(z) = c^{-1}e^{\frac{1}{z^2-1}}I_{\{|z|<1\}}$, где константа $c = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{z^2-1}}\,dz < \frac{2}{e} < 1$.

Непрерывность (по x) функции $\widetilde{f}_\delta(x)$ следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. А сходимость (при δ, стремящейся к нулю) к функции f следует из *неравенства Гёльдера* для интегралов

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'},$$

для $f \in \mathrm{L_p(a,b)}$, $g \in \mathrm{L_{p'}(a,b)}$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1,\ p,p' > 0$.

Действительно, обозначая $\widehat{f}(x) = fI_{[a,b]}(x)$, получим:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{f}_\delta - f\|_p^p &= \|\delta^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(y)\omega(\frac{x-y}{\delta})\,dy - \widehat{f}(x)\|_p^p \\
&= \|\delta^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(x-y)\omega(\frac{y}{\delta})\,dy - \delta^{-1}\widehat{f}(x)\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\frac{y}{\delta})\,dy\|_p^p \\
&= \delta^{-p}\|\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\widehat{f}(x-y) - \widehat{f}(x)\Big)\,\omega(\frac{y}{\delta})\,dy\|_p^p \\
&\le \delta^{-p}\int_a^b\left(\int_{-\delta}^{\delta}\Big|\widehat{f}(x-y) - \widehat{f}(x)\Big|\,\omega(\frac{y}{\delta})\,dy\right)^p dx \\
&\le \delta^{-p}\int_a^b\left(\int_{-\delta}^{\delta}\Big|\widehat{f}(x-y) - \widehat{f}(x)\Big|^p dy\right)^{\frac{p}{p}}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\omega^{p'}(\frac{y}{\delta})\,dy\right)^{\frac{p}{p'}} dx \\
&= \delta^{-p+\frac{p}{p'}}\left(\int_{-1}^{1}\omega^{p'}(y)\,dy\right)^{\frac{p}{p'}}\int_{-\delta}^{\delta}\int_a^b\Big|\widehat{f}(x-y) - \widehat{f}(x)\Big|^p dxdy \\
&= \delta^{-1}\|\omega\|_{p'}^p\int_{-\delta}^{\delta}\|\widehat{f}(x-y) - \widehat{f}(x)\|_p\,dy \\
&\le \|\omega\|_{p'}^p\sup_{y\in[-\delta,\delta]}\|\widehat{f}(x-y) - \widehat{f}(x)\|_p,
\end{aligned}$$

где последнее стремится к нулю, как только δ стремится к нулю. Это следует из теоремы Соболева о непрерывности в целом функций из $\mathrm{L_p}$. Таким образом, плотность в $\mathrm{L_p}$ множества многочленов (и непрерывных функций) показана.

В случае ступенчатых функций можно показать сначала, что всякая $f \in \mathrm{L_p}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ приближается ограниченными функциями $f_n(x) = fI_{\{f(x)\le n\}}$. А всякая ограниченная функция $f(x)$ приближается ступенчатыми функциями:

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n2^n}\frac{j-1}{2^n}I_{\{\frac{j-1}{2^n}\le f(x)<\frac{j}{2^n}\}} + nI_{\{f(x)\ge n\}}.$$

Всякая ступенчатая функция (достаточно даже индикатора борелевского множества) приближается ступеньками на отрезках с рациональными концами.

Пример 1.4.3. Пространство $C[a,b]$ – сепарабельное БП.

По запомнившейся нам теореме Вейерштрасса всякая непрерывная функция может быть приближена многочленами в метрике непрерывных функций. Поэтому счетным всюду плотным множеством в $C[a,b]$ будут опять многочлены с рациональными коэффициентами. Проверим полноту. Пусть $f_n(x)$ – фундаментальная последовательность непрерывных функций, т. е. $\max\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ для достаточно больших m и n. Тогда для любого $x\in[a,b]$ $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$, т. е. числовая последовательность $f_n(x)$ – фундаментальна, а следовательно (по критерию Коши), сходится. Обозначим ее предел – $f(x)$. Остается показать, что $f\in C[a,b]$. По теореме Кантора всякая непрерывная на отрезке функция f_n равномерна непрерывна на нем, т. е. для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, что как только $|x-x_0|<\delta$, то $|f_n(x_0)-f_n(x)|<\varepsilon$. Тогда

$$|f(x_0)-f(x)|\le|f(x_0)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|<3\varepsilon,$$

как только $|x-x_0|<\delta$. Таким образом, f непрерывна.

Пример 1.4.4. Множество многочленов $P[0,1]$ не является замкнутым подпространством в $C[0,1]$.

Нужно показать, что это множество не замкнуто, т. е. найдется сходящаяся последовательность многочленов, пределом которой не будет многочлен. Возьмем $p_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получим:

$$\max_{x\in[0,1]}|e^x-p_n(x)|\le\max_{c\in[0,1]}\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{x^{n+1}e^c}{(n+1)!}\right|\le\frac{e}{(n+1)!}\to 0.$$

Таким образом, e^x есть предельная точка множества $P[0,1]$. На самом деле (как следует из теоремы Вейерштрасса), замыкание множества $P[0,1]$ в $C[0,1]$ есть все пространство $C[0,1]$.

Пример 1.4.5. Ясно, что

$$l_\infty \supset c \supset c_0 \supset l_p \supset l_q \supset l_1,\ p > q > 1.$$

Последние два включения следуют из *неравенства Гёльдера* для сумм

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ p, p' > 0.$$

Действительно, считая $|x_k| < 1$ для $x \in l_q$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{(p-1)q'} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{\frac{(p-1)q}{q-1}} \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q < \infty,$$

тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p-1}|x_k| &\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{(p-1)q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{\frac{(p-1)q}{q-1}}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q < \infty.
\end{aligned}$$

Если $|x_k| > 1$ для некоторых k, тогда нужно рассмотреть вектор $x/\|x\|_q$.

Кроме того, легко проверить, что

$$c_0 \prec c \prec l_\infty.$$

Покажем, что замыкание множества l_1 в нормированном пространстве l_∞ совпадает с c_0. Для этого достаточно показать, что всякая последовательность из c_0 приближается в метрике l_∞ последовательностями из l_1. Пусть $x = (x_1, x_2, ...) \in c_0$. Возьмем последовательность $y_n = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \in l_1$. Тогда

$$\|x - y_n\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k| \to 0$$

при $n \to \infty$. Что и требовалось доказать.

Задачи

1.4.1. Показать, что замкнутое подпространство БП само является БП.

1.4.2. Показать, что замкнутое подпространство сепарабельного НП само является сепарабельным НП.

1.4.3. Являются ли пространства c, c_0, bv, bv_0, bs и cs БП? Установить включения:

$$c_0 \prec c, \ bv_0 \prec bv, \ cs \prec bs.$$

1.4.4. Пусть $y_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, ...), n \in \mathbb{N}$. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{y_n\}$ в пространствах l_1, l_2 и l_∞?

1.4.5. Сходится ли последовательность непрерывных функций $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2}, n \in \mathbb{N}$ в пространствах $C[0,1]$ и $C^1[0,1]$?

1.4.6. Показать, что пространство l_∞ не является сепарабельным БП.

1.4.7. Показать, что пространство $L_\infty[0,1]$ не является сепарабельным НП (оно также является БП).

1.4.8. Образуют ли подпространства в $C[-1,1]$ следующие множества функций?

1. Многочлены степени $\le k$.

2. Многочлены степени k.

3. Непрерывные функции $f(x)$ с условием $f(0) = 0$.

4. Непрерывно дифференцируемые функции.

5. Дифференцируемые функции.

6. Функции, удовлетворяющие *условию Липшица*, т. е. такие f, что для всех x, y верно $|f(x) - f(y)| \le L_f|x - y|$, где L_f – постоянная (Липшица), зависящая только от f.

7. Функции, удовлетворяющие *условию Гёльдера* с *показателем Гёльдера* $\mu \in (0, 1]$, т. е. такие f, что что для всех x, y верно $|f(x) - f(y)| \le H_f|x - y|^\mu$.

1.4.9. Являются ли данные множества замкнутыми в l_2?

1. Множество точек $x = (x_1, x_2, ...)$ таких, что $x_n = 0,\ n > 10$.

2. Множество *финитных* последовательностей, т. е. таких точек $x = (x_1, x_2, ...)$, что $x_n = 0,\ n > n_0$ и n_0 зависит от x.

3. Множество таких $x = (x_1, x_2, ...)$, что $x_{2n} = 0$.

4. Множество таких $x = (x_1, x_2, ...)$, что $\sum_{n=1}^{\infty} n|x_n|^2 < \infty$.

5. Множество таких $x = (x_1, x_2, ...)$, что $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$.

1.4.10. Используя неравенство Гёльдера для интегралов, показать включения:

$$L_1(a, b) \supset L_p(a, b) \supset L_q(a, b) \supset L_\infty(a, b), 1 < p < q < \infty.$$

Привести пример функций $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $f \notin L_2(\mathbb{R})$, и наоборот, $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $f \notin L_1(\mathbb{R})$.

2. Гильбертовы пространства

2.1. Скалярное произведение

Пусть $\mathbf{L}$ – линейное пространство над числовым полем $\mathbb{F}(=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$ и функция двух аргументов $(\cdot\ ,\cdot) : \mathbf{L}\times\mathbf{L}\mapsto\mathbb{F}$ удовлетворяет свойствам:

1) $(\alpha_1\cdot x_1+\alpha_2\cdot x_2,y)=\alpha_1(x_1,y)+\alpha_2(x_2,y)$ (линейность по 1-му аргументу);

2) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (эрмитова симметричность);

3) $(x,x)\geq 0$ и $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Тогда функция $(\cdot\ ,\cdot)$ называется *скалярным произведением (или внутренним произведением)*, а пространство $\mathbf{L}$ *евклидовым* (над $\mathbb{R}$) или *унитарным* (над $\mathbb{C}$) пространством.

Для скалярного произведения справедливо неравенство *Коши – Буняковского* $|(x,y)|^2\leq(x,x)(y,y)$. Скалярное произведение порождает норму $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. Произвольная норма порождается скалярным произведением (скалярное произведение согласовано с нормой) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет *тождеству параллелограмма* $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.

Полное относительно нормы $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ линейное нормированное пространство – *гильбертово пространство (ГП).*

Примеры

Пример 2.1.1. Следующие пространства являются пространствами со скалярным произведением:

$$\begin{aligned} l_2^n(\mathbb{R}): &\quad (x,y)=\textstyle\sum_{k=1}^n x_k y_k,\\ l_2^n(\mathbb{C}): &\quad (x,y)=\textstyle\sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k},\\ l_2(\mathbb{R}): &\quad (x,y)=\textstyle\sum_{k=1}^\infty x_k y_k,\\ l_2(\mathbb{C}): &\quad (x,y)=\textstyle\sum_{k=1}^\infty x_k \overline{y_k}. \end{aligned}$$

Нормы, порожденные этими скалярными произведениями, совпадают с введенными ранее. Все свойства скалярного произведения легко проверяются. Так как эти пространства полны, то они являются ГП.

Пример 2.1.2. Норма лебеговского функционального пространства $\mathrm{L}_2(\mathrm{X})$ порождена скалярным произведением:

$$(f,g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Таким образом, $\mathrm{L}_2(\mathrm{X})$ – еще один пример ГП.

Пример 2.1.3. Норма в соболевских пространствах $H^l(X) := W_2^l(X)$ также порождается скалярным произведением

$$(f,g) = \sum_{|\alpha|\le l} \int_X D^\alpha f(x)\,\overline{D^\alpha g(x)}\,dx,$$

$H^l(X)$ также является ГП.

Пример 2.1.4. В пространстве квадратных матриц $M_n(\mathbb{C})$ можно задать скалярное произведение следующим образом:

$$(A,B) = tr(AB^*),$$

где $tr(C)$ – след матрицы C (пример 1.2.5) и $B^* = \overline{B^T}$.

Не вдаваясь в подробные выкладки, посмотрим, что такое скалярное произведение для матриц порядка 2×2.

Пусть $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Тогда произведение матриц $AB^* = \begin{bmatrix} a\overline{\alpha} + b\overline{\beta} & a\overline{\gamma} + b\overline{\delta} \\ c\overline{\alpha} + d\overline{\beta} & c\overline{\gamma} + d\overline{\delta} \end{bmatrix}$ и $tr(AB^*) = a\overline{\alpha} + b\overline{\beta} + c\overline{\gamma} + d\overline{\delta}$.

Таким образом, если отождествить матрицу с 4-мерным вектором, то скалярное произведение для матриц есть в точности скалярное произведение в $l_2^4(\mathbb{C})$.

Пример 2.1.5. Норма в пространстве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке функций не порождается скалярным произведением.

Чтобы это показать, достаточно привести пример двух непрерывных функций, для которых нарушается тождество параллелограмма. Выберем точку внутри отрезка $[a, b] : a < c < b$ и рассмотрим функции $f(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x < c \\ \frac{x-c}{b-c}, & c \leq x \leq b \end{cases}$ и $g(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

Тогда $\|f\| = \|g\| = 1,\ \|f + g\| = 2$, а $\|f - g\| = \frac{c-a}{b-a}$. Отсюда получаем, что $4 + (\frac{c-a}{b-a})^2 \neq 4$.

Задачи

2.1.1. Доказать, что в унитарном пространстве справедливы равенства

$$(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \|x + e^{2\pi ik/N} y\|^2 e^{2\pi ik/N},\ N \geq 3;$$

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|x + e^{i\theta} y\|^2 e^{i\theta}\, d\theta;$$

$$(x, y) = \frac{1}{4} \big((\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) - i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) \big)$$

(поляризационное тождество).

2.1.2. Проверить, какие аксиомы скалярного произведения в *пространстве Минковского* $\mathbb{R}^{1,3}$ выполняются, а какие нет, если скалярное произведение задать формулой:

$$(u, v) = c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2,$$

$$u = (t_1, x_1, y_1, z_1),\ v = (t_2, x_2, y_2, z_2),\ c = const.$$

2.1.3. Показать, что нормы пространств $l_p^n, l_p, L_p(0, 1), p \neq 2$ не порождены скалярным произведением.

2.1.4. Проверить аксиомы скалярного произведения в следующих пространствах.

1. Линейное пространство, состоящее из непрерывных на полупрямой $[0, \infty)$ функций с конечным интегралом $\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-x}\,dx < \infty$ и скалярным произведением, заданным формулой
$$(f, g) = \int\limits_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\,dx.$$

2. Линейное пространство, состоящее из непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с конечным интегралом $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 e^{-x^2}\,dx < \infty$ и скалярным произведением, заданным формулой
$$(f, g) = \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx.$$

3. Линейное пространство $P_k(\mathbb{R})$ многочленов степени не больше k со скалярным произведением
$$(f, g) = a_k b_k + a_{k-1}b_{k-1} + \cdots + a_0 b_0,$$
где
$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$$
и
$$g(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_0.$$

4. Линейное пространство $A^2(D)$ квадратично интегрируемых аналитических в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$ функций со скалярным произведением
$$(f, g) = \int_D f(z)\overline{g(z)}\,dxdy,\ z = x + iy.$$

2.1.5. При каких условиях на векторы x и y неравенство Коши – Буняковского становится равенством?

2.1.6. Показать, что в пространстве со скалярным произведением из равенства $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ следует, что векторы x и y линейно зависимы.

2.1.7. Пусть в гильбертовом пространстве $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Показать, что:

$$(x_n, y) \to (x, y) \ \text{ – непрерывность по первому аргументу;}$$

$$(x, y_n) \to (x, y) \ \text{ – непрерывность по второму аргументу;}$$

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \ \text{ – непрерывность по двум аргументам.}$$

2.1.8. Пусть H_1 и H_2 – гильбертовы пространства. *Тензорным произведением* $H_1 \otimes H_2$ этих пространств называется линейное пространство конечных формальных сумм $\sum x_i \otimes y_i$, где операция взятия тензорного произведения $\otimes$ обладает свойствами:

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2,$$

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y,$$

$$\alpha\beta x \otimes y = \alpha x \otimes \beta y.$$

Показать, что формула

$$(x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2) = (x_1, x_2)_{H_1} (y_1, y_2)_{H_2},$$

где $(x_1, x_2)_{H_1}$ и $(y_1, y_2)_{H_2}$ – скалярное произведение на H_1 и H_2, задает скалярное произведение на $H_1 \otimes H_2$. (Пополнение $H_1 \otimes H_2$ относительно нормы, порожденной этим скалярным произведением, – *гильбертово тензорное произведение.*)

Если на тензорном произведении $H \otimes H$ выполняется свойство

$$x \otimes y = y \otimes x,$$

то оно называется *симметрическим квадратом* гильбертова пространства и обозначается $\mathrm{S}^2(H)$.

Если же выполнено свойство

$$x \otimes x = 0,$$

то это *внешний квадрат* гильбертова пространства, который обозначается как $\Lambda^2(H)$.

В физике элементарных частиц внешние степени $\Lambda^n(H)$ являются моделями для описания *фермионов*, а симметрические степени $S^n(H)$ – *бозонов*.

2.1.9. Пусть $H = M_2(\mathbb{C})$. Проверить, что для матриц $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ формула

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

задает тензорное произведение $H \otimes H$ (*кронекерово произведение*).

Показать, что формулы

$$A \otimes_n B = A \otimes B + (-1)^n B \otimes A, \; n = 0, 1,$$

где $\otimes$ – кронекерово произведение, задает симметрический квадрат $S^2(H)$ для $n = 0$ и внешний квадрат $\Lambda^2(H)$ для $n = 1$.

2.2. Ортогонализация Грама – Шмидта

Векторы x и y – *ортогональны* ($x \perp y$), если $(x, y) = 0$. Всякую счетную линейно независимую систему векторов $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ можно *ортонормировать* процессом Грама – Шмидта:

$$\begin{array}{ll} y_1 = x_1, & z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}, \\ y_2 = x_2 - (x_2, z_1)z_1, & z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}, \\ \dots & \dots \\ y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_n, z_k)z_k, & z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}. \\ \dots & \dots \end{array}$$

Получившиеся векторы z_k ортонормальны, т. е. $(z_i, z_j) = \delta_{ij}$.

Углом для ненулевых векторов x, y евклидова пространства называется величина $\varphi = \arccos \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$.

Примеры

Пример 2.2.1. В пространстве Соболева $H^1(-1,1)$ рассмотрим систему функций $1, x$ и $|x|$. Ортонормируем ее относительно скалярного произведения в H^1.

Во-первых, ясно, что эта система линейно независима. Действительно, $\alpha 1 + \beta x + \gamma |x| \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha 1 + (\beta - \gamma)x \equiv 0, x < 0$ и $\alpha 1 + (\beta + \gamma)x \equiv 0, x \geq 0$, т. е. $\alpha = 0, \beta - \gamma = 0$ и $\beta + \gamma = 0 \quad \Leftrightarrow$ $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Заметим также, что производные $1' = 0, x' = 1$ и $|x|' = \operatorname{sgn}(x)$ интегрируемы на интервале $(-1,1)$, поэтому $1, x, |x| \in H^1(-1,1)$.

$$
\begin{array}{ll}
y_1(x) = 1, & y_1'(x) = 0, \\
\|y_1\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} y_1^2(x)dx + (y_1'(x))^2\,dx = 2, & z_1(x) = \frac{y_1(x)}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\
y_2(x) = x - (x, \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x\,dx = x, & y_2'(x) = 1, \\
\|y_2\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} y_2^2(x)dx + (y_2'(x))^2\,dx = \frac{8}{3} & z_2 = \frac{y_2(x)}{\|y_2\|} = \frac{x\sqrt{6}}{4}. \\
y_3(x) = |x| - (|x|, \frac{1}{2}) - (|x|, \frac{x\sqrt{6}}{4})\frac{x\sqrt{6}}{4} = |x| - \frac{1}{2}, & y_3'(x) = \operatorname{sgn}(x), \\
\|y_3\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} y_3^2(x)dx + (y_3'(x))^2\,dx = \frac{5}{6}, & z_3 = (|x| - \frac{1}{2})\frac{\sqrt{30}}{5}.
\end{array}
$$

Таким образом, получаем ортонормированную систему функций: $z_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z_2(x) = \frac{x\sqrt{6}}{4}$ и $z_3(x) = (|x| - \frac{1}{2})\frac{\sqrt{30}}{5}$.

Пример 2.2.2. В гильбертовом пространстве квадратных матриц (пример 2.1.4) найдем углы в треугольнике, образованном матрицами $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Иначе говоря, нужно найти углы между матрицами $A-B, B-C$ и $A-C$: $A-B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B-C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $A-C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Продолжая вычисления, получим:

$$\begin{array}{lll} \|A-B\|^2=2, & \|B-C\|^2=2, & \|A-C\|^2=6, \\ (A-B,A-C)=3 & (A-B,B-C)=1 & (A-C,B-C)=3. \end{array}$$

$$\varphi_1=\arccos\frac{(A-C,A-B)}{\|A-B\|\|A-C\|}=\arccos\frac{3}{\sqrt{12}}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6},$$

$$\varphi_2=\arccos\frac{(A-C,B-C)}{\|A-C\|\|B-C\|}=\arccos\frac{3}{\sqrt{12}}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6},$$

$$\varphi_3=\arccos\frac{(B-C,A-B)}{\|A-B\|\|B-C\|}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{2\pi}{3}.$$

Пример 2.2.3. В гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ найдем углы между *функциями Радемахера* :

$R_n(x)=\operatorname{sgn}(\sin(2^n\pi x))=(-1)^{[2^n x]}, n\geq 1, R_0(x)=1.$

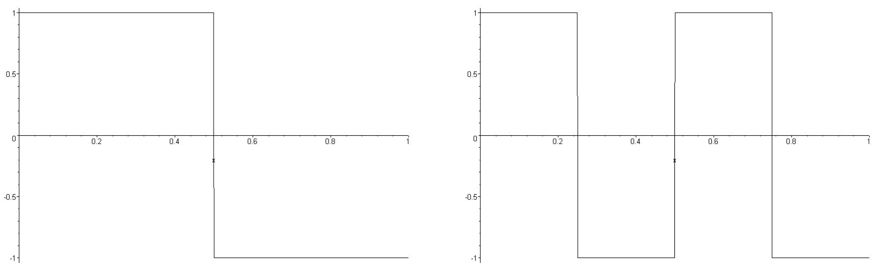


Рис. 2. Функции $R_1(x)$ и $R_2(x)$

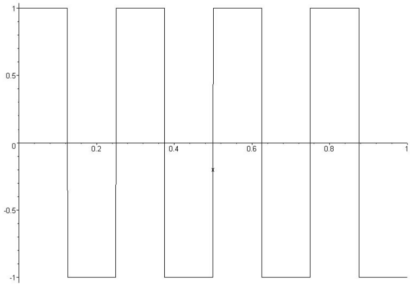
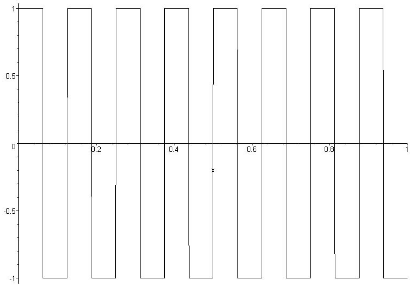
 

Рис. 3. Функции $R_3(x)$ и $R_4(x)$

Вычислим скалярные произведения:

$$(R_0, R_n) = \int_0^1 R_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x))\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} (-1)^k\,dx = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^k = \frac{1}{2^n} \cdot 0 = 0,$$

$$(R_n, R_m) = \int_0^1 R_n(x) R_m(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} (-1)^i I_{\{x \in (\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]\}} (-1)^j I_{\{x \in (\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}]\}}\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^i \int_{\frac{i}{2^n}}^{\frac{i+1}{2^n}} \sum_{j=0}^{2^m-1} (-1)^j I_{\{x \in (\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}]\}}\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^i \int_{\frac{i}{2^n}}^{\frac{i+1}{2^n}} \sum_{j=i2^{m-n}}^{(i+1)2^{m-n}-1} (-1)^j I_{\{x \in (\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}]\}}\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=i2^{m-n}}^{(i+1)2^{m-n}-1} \int_{\frac{i}{2^n}}^{\frac{i+1}{2^n}} (-1)^{i+j} I_{\{x \in (\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}]\}}\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=i2^{m-n}}^{(i+1)2^{m-n}-1} \frac{1}{2^m}(-1)^{i+j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^m}(-1)^i(2^{m-n} - 2^{m-n}) = 0$$

при $m > n$. Таким образом, функции Радемахера взаимно ортогональны.

Задачи

2.2.1. Почему формула угла между векторами в евклидовом пространстве неприменима для унитарных пространств?

2.2.2. Наличие ортогональности в системе векторов влияет на линейную независимость. Этот тезис можно проверить в следующих упражнениях.

1. Показать, что ортогональные векторы линейно независимы.
2. Системы $\{x_1, x_2, ...\}$ и $\{y_1, y_2, ...\}$ называются *биортогональными*, если $(x_k, y_n) = \delta_{kn}$. Показать, что каждая из систем будет линейно независимой.

2.2.3. Применяя процесс ортогонализации Грама – Шмидта, ортогонализовать (ортонормировать) многочлены $1, x, x^2$ и x^3 в следующих пространствах.

1. В пространстве $L_2(0,1)$.
2. В пространстве $H^1(0,1)$.
3. В пространстве $C[0,\infty)$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\,dx$.

4. В пространстве $C(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$.

5. В пространстве многочленов $P_3(\mathbb{R})$ (пример 2.1.4).

2.2.4. Применяя процесс ортогонализации Грама – Шмидта, ортонормировать многочлены $1, z, z^2$ и z^3 в пространстве $A^2(D)$ квадратично интегрируемых аналитических в единичном круге функций (пример 2.1.4).

2.2.5. Пусть $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$. Ортонормировать функции $f_k(x) = I_{\{0 \le x < x_k\}}, 1 \le k \le n$ в $L_2(0,1)$.

2.2.6. Найти углы в треугольнике, образованном векторами:

1. $f_1(x) = 0, f_2(x) = \sin(\pi x)$ и $f_3(x) = \cos(\pi x)$ в $L_2(-1,1)$.

2. $f_1(x) = 0, f_2(x) = x$ и $f_3(x) = \mathrm{sgn}(x)$ в $H^1(-1,1)$.

3. $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ в $M_2(\mathbb{R})$.

4. $x = (0,0,0,...),\ y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ и $z = (1,0,0,0,...)$ в $l_2(\mathbb{R})$.

2.2.7. В пространстве $L_2(0,1)$ найти углы между функциями, являющимися всевозможными произведениями функций Радемахера *(функции Уолша)*:

$$W_{n_1,n_2,...,n_k}(x) = R_{n_1}(x)R_{n_2}(x)...R_{n_k}(x).$$

2.2.8. В $L_2(0,1)$ найти углы между *функциями Хаара.* Они определяются следующим образом: $\chi_0^{(0)}(x) \equiv 1$, а для всякого

$n = 1, 2, ...$ и $k = 1, ..., 2^n$:

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & x \in (\frac{k-1}{2^n}, \frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}) \\ -\sqrt{2^n} & x \in (\frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^n}) \\ 0 & x \notin [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}] \end{cases} .$$

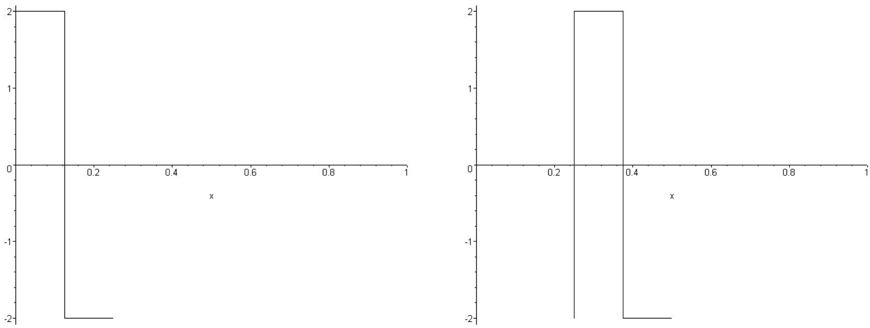


Рис. 4. Функции $\chi_2^{(1)}(x)$ и $\chi_2^{(2)}(x)$

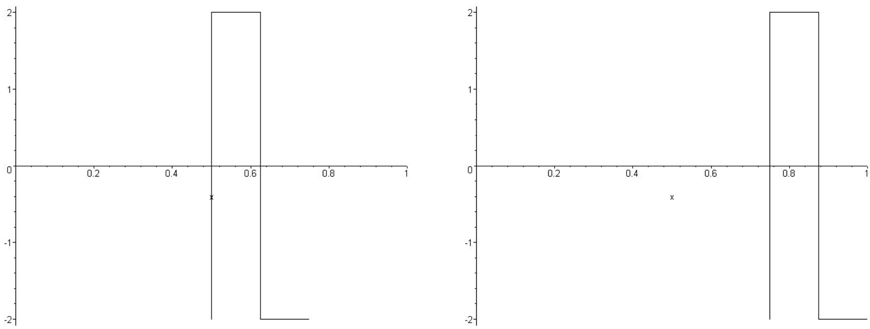


Рис. 5. Функции $\chi_2^{(3)}(x)$ и $\chi_2^{(4)}(x)$

2.2.9. В пространстве $L_2(0,\infty)$ рассмотрим кривую (возникающую при изучении *винеровского процесса (броуновского движения)*) $\gamma : \mathbb{R} \mapsto L_2(0,\infty)$, при этом $\gamma(\alpha) = f_\alpha(x) = I_{\{0\le x\le\alpha\}}$. Найти углы между хордами этой кривой с общим концом.

2.3. Ортогональное проектирование

Пусть $\mathbf{L}$ – линейное пространство со скалярным произведением и $\mathbf{L}' \preceq \mathbf{L}$. Вектор $x \in \mathbf{L}'$ – *ортогональная проекция* вектора $y \in \mathbf{L}$ ($x = Pr_{\mathbf{L}'}y$), если вектор $y - x \perp \mathbf{L}'$, т. е. $(y - x, z) = 0$ для всех $z \in \mathbf{L}'$. Ортогональная проекция является *ближайшим* к y вектором из подпространства $\mathbf{L}'$, т. е. $\|y - x\| = \inf_{z\in\mathbf{L}'} \|y - z\|$. Если $\mathbf{L}$ – гильбертово пространство, а $\mathbf{L}'$ – его замкнутое подпространство, то проекция существует и единственна.

Если $\mathbf{L}'$ – конечномерное подпространство и $x_1, ..., x_n$ его ортонормированный базис, то $x = Pr_{\mathbf{L}'}y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (y, x_k)$.

Пусть $x_1, x_2, ...$ – ортонормированная система, тогда числа $\lambda_k = (x, x_k)$ называются *коэффициентами Фурье* вектора x и справедливо *неравенство Бесселя* $\|x\|^2 \ge \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.

Совокупность векторов, ортогональных линейному подпространству $\mathbf{L}'$, называется *ортогональным дополнением* к $\mathbf{L}'$ и обозначается $\mathbf{L}'^{\perp}$.

Если $\mathbf{S}$ – замкнутое подпространство гильбертова пространства H, то $H = \mathbf{S} \oplus \mathbf{S}^{\perp}$ ($\mathbf{S} = H \ominus \mathbf{S}^{\perp}$), т. е. всякий вектор $x \in H$ может быть записан в виде $x = x_1 + x_2, x_1 \in S$ и $x_2 \in S^{\perp}$.

Примеры

Пример 2.3.1. Покажем, что если подпространство $\mathbf{L}'$ не является замкнутым, то проекции может и не быть.

Возьмем за гильбертово пространство $L_2(-\pi,\pi)$, а $\mathbf{L}' = C^1(-\pi,\pi)$. Легко проверить, что это подпространство не замкнуто. У $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ не существует проекции на непрерывно дифференцируемые функции. Предположим от противного, что проекция $g(x) \in C^1(-\pi,\pi)$ существует, тогда для всякой $f(x) \in C^1(-\pi,\pi)$ $\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{sgn}(x) - g(x))f(x)\,dx = 0$.

Взяв $f(x) = \cos(nx)$, убеждаемся, что $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx = 0$. А если взять функцию $f(x) = \sin(nx)$, то получается равенство $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x)\sin(nx)\,dx$. Отсюда следует, что функция g представима таким же рядом Фурье, как и $\operatorname{sgn}(x)$, но она не может быть $\operatorname{sgn}(x)$, так как непрерывно дифференцируема. Противоречие.

Пример 2.3.2. Покажем, что если пространство со скалярным произведением не является ГП, то проекции тоже может не существовать, даже если подпространство замкнуто.

Пусть $\mathbf{L}$ – множество конечных линейных комбинаций (*линейная оболочка*) вектора $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ и *ортов* из l_2 начиная со второго: $e_n, n > 1$. Обозначается через

$$\mathbf{L} = \operatorname{lin}\{x, e_n, n > 1\}.$$

Пусть $\mathbf{L}'$ – линейная оболочка только ортов $e_n, n > 1$, т. е. $\mathbf{L}' = \operatorname{lin}\{e_n, n > 1\}$. Тогда $\mathbf{L}'$ замкнуто в $\mathbf{L}$, но проекции вектора x на $\mathbf{L}'$ нет.

Покажем сначала, что $\mathbf{L}$ действительно не является полным пространством. Возьмем $x_n = (1, 0, 0, ..., 0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...)$, где $\frac{1}{n}$ стоит на n-м месте. Легко проверить, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, но не является сходящейся в $\mathbf{L}$, так как если бы она сходилась, то непременно к элементу e_1, но такого нет в $\mathbf{L}$.

Покажем теперь, что $\mathbf{L}'$ замкнуто в $\mathbf{L}$. Элементы пространства $\mathbf{L}$ имеют два вида: первый – это конечные линейные комбинации векторов $e_n, n > 1$ (т. е. $\mathbf{L}'$); второй – модификации вектора x в конечном числе координат без учета первой (на первом месте всегда 1). Тогда ясно, что сходящаяся последовательность из $\mathbf{L}'$ может сходиться только к элементам первого вида, т. е. к элементам из того же $\mathbf{L}'$.

И, наконец, если бы проекция вектора x существовала (обозначим ее через y), то $(x - y, e_n) = \frac{1}{n} - y_n = 0, n > 1$, т. е. $y = (y_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$. Но такой вектор не лежит в $\mathbf{L}'$.

Пример 2.3.3. Ортогональное дополнение к подпространству функций с нулевым средним $L_2^0(-1,1)$ ($\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$) есть пространство постоянных функций, т. е. $L_2^0(-1,1)^\perp = \mathrm{lin}\{1\}$.

Ясно, что постоянные функции ортогональны функциям с нулевым средним. Нужно показать, что других функций с таким свойством нет. Но это следует из единственности представления $f(x) = f_1(x) + f_2(x), f_1 \in L_2^0(-1,1), f_2 \in L_2^0(-1,1)^\perp$, где $f_2(x) = \int_{-1}^1 f(x)\,dx,\ f_1(x) = f(x) - \int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

Пример 2.3.4. В пространстве $L_2(-1,1)$ найдем ортогональную проекцию *базисного многочлена Бернштейна* $b_{k,n}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ при $n = 3, k = 2$ на замкнутое подпространство $L_2^0(-1,1)$.

Из предыдущего примера ясно, что проекцией будет $f(x) = b_{k,n}(x) - \int_{-1}^1 b_{k,n}(x)\,dx$, где

$$\int_{-1}^1 b_{k,n}(x)\,dx = C_n^k \int_{-1}^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx = \langle n = 3, k = 2 \rangle = 2.$$

Пример 2.3.5. В пространстве $L_2(-1,1)$ найдем ортогональную проекцию функции $\mathrm{sgn}(x)$ на подпространство многочленов степени не выше 2.

Применяя процесс Грама – Шмидта в пространстве $L_2(-1,1)$ к векторам $1, x, x^2$, получим:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ z_2 = \frac{\sqrt{6}x}{2},\ z_3 = \frac{\sqrt{10}(3x^2-1)}{4}.$$

Тогда по формуле проекции на конечномерное подпространство получаем

$$Pr_{\{1,x,x^2\}}\mathrm{sgn}(x) = \lambda_0 z_1 + \lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_3,$$

где

$$\lambda_0 = (z_1, \mathrm{sgn}(x)) = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^1 \mathrm{sgn}(x)\,dx = 0,$$

$$\lambda_1 = (z_2, \mathrm{sgn}(x)) = \frac{\sqrt{6}}{2}\int_{-1}^{1} x\mathrm{sgn}(x)\,dx = \frac{\sqrt{6}}{2}\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\lambda_2 = (z_3, \mathrm{sgn}(x)) = \frac{\sqrt{10}}{4}\int_{-1}^{1} (3x^2-1)\mathrm{sgn}(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, проекция есть $\lambda_1 z_2 = \frac{3x}{2}$.

Пример 2.3.6. Покажем, что ортогональное дополнение в $L_2(0,1)$ к подпространству непрерывных функций $C[0,1]$ есть ноль.

Если показать, что замыкание $C[0,1]$ в $L_2(0,1)$ есть $L_2(0,1)$, то тогда из равенства (см. задачу 2.3.1.)

$$L_2(0,1) = C[0,1]^{\perp} \oplus (C[0,1]^{\perp})^{\perp} = C[0,1]^{\perp} \oplus L_2(0,1)$$

следует, что $C[0,1]^{\perp} = \{0\}$.

Утверждение о замыкании справедливо, так как множество алгебраических многочленов (подмножество $C[0,1]$) является всюду плотным в $L_2(0,1)$ (пример 1.4.2).

Задачи

2.3.1. Пусть $\mathbf{S}$ – линейное подпространство в пространстве со скалярным произведением $\mathbf{L}$. Показать, что $\mathbf{S}^{\perp}$ – замкнутое подпространство, а $(\mathbf{S}^{\perp})^{\perp}$ – замыкание $\mathbf{S}$.

2.3.2. Найти ортогональную проекцию в $H^1(-1,1)$ функции $\mathrm{sgn}(x)$ на линейную оболочку функций $1, x, |x|$.

2.3.3. Найти ортогональную проекцию в $L_2(0,1)$ функции Хаара $\chi_n^{(1)}$ на двумерное пространство с базисом из функций Радемахера: $R_n(x)$ и $R_{n+1}(x)$.

2.3.4. Найти ортогональную проекцию матрицы $J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ на линейную оболочку матриц $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ (см. пример 2.1.4).

2.3.5. Найти ортогональную проекцию в l_2 вектора $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ на подпространство с базисом, состоящим из ортов e_p, где p – простое число.

2.3.6. В пространстве $L_2(-1, 1)$ найти проекцию функции e^{-x} на подпространство нечетных (четных) функций.

2.3.7. В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ найти ортогональную проекцию функции $\frac{\sin x}{x}$ на подпространство $L_2^0(\mathbb{R})$.

2.3.8. В пространстве l_2 найти ортогональное дополнение к подпространству векторов $x = (x_1, x_2, ...)$ с $x_{2n} = 0, n > 1$.

2.3.9. В пространстве $L_2(0, 1)$ найти ортогональное дополнение к следующим подпространствам.

1. Подпространству многочленов от x.
2. Подпространству многочленов от x^2.
3. Подпространству многочленов с нулевым свободным членом.
4. Подпространству многочленов с нулевой суммой коэффициентов.

2.3.10. В пространстве $H^1(0, 1)$ найти ортогональное дополнение к подпространству многочленов.

2.4. Полнота и замкнутость. Гильбертов базис

Ортонормированная система векторов $x_1, x_2, \ldots$ называется *полной*, если ее ортогональное дополнение состоит только из нуля, т. е.

$$(x, x_n) = 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0.$$

Для полной ортонормированной системы векторов в гильбертовом пространстве справедливо *равенство Парсеваля*:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k},$$

где $\lambda_k = (x, x_k)$, $\mu_k = (y, x_k)$ – коэффициенты Фурье векторов x и y. В частности,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

Ортонормированная система векторов $x_1, x_2, \ldots$ называется *замкнутой*, если для каждого вектора верно равенство $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$. Таким образом, полные системы являются замкнутыми системами.

Ортонормированная система векторов $e_1, e_2, \ldots$ в сепарабельном ГП называется *гильбертовым базисом*, если для каждого вектора верно представление (единственное) (*разложение в ряд Фурье*):

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k,\ \lambda_k = (x, e_k).$$

В сепарабельном ГП гильбертов базис всегда существует. В сепарабельном ГП для ортонормированной системы векторов $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ справедлив критерий: E – гильбертов базис $\Leftrightarrow$ E – полная система $\Leftrightarrow$ E – замкнутая система.

Примеры

Пример 2.4.1. В гильбертовом пространстве l_2 базисом, а следовательно, полной и замкнутой системой будут орты $e_n, n \geq 1$.

Действительно, всякий вектор $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ можно записать в виде $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$. Равенство понимается в смысле сходимости в l_2, т. е.

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\|_2^2 = \|(0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0,$$

при $n \to \infty$, как "хвост" сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|_2^2$.

Пример 2.4.2. В пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ полной ортонормированной системой функций является система тригонометрических функций:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots$$

$$\ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Коэффициенты Фурье для всякой $f \in L_2(-\pi, \pi)$ тогда находятся по формулам:

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Равенство Парсеваля должно выглядеть следующим образом:

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2.$$

Оно лишь обозначениями отличается от известного в рядах Фурье *равенства Ляпунова*:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Следовательно, эта система замкнута, а значит, является гильбертовым базисом (а также полной системой), т. е. всякая функция $f \in L_2(-\pi, \pi)$ представима в виде

$$f(x) = \frac{\alpha_0^2}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Из теории рядов Фурье известно, что для непрерывно дифференцируемых функций f это равенство справедливо не только в норме $L_2(-\pi, \pi)$, но и в каждой точке $x \in (-\pi, \pi)$.

Аналогичные системы можно определить и на любом пространстве $L_2(a, b)$.

Тригонометрическая система замечательна еще и тем, что система, состоящая из ее производных, с точностью до постоянных множителей совпадает с ней. Оказывается, таких систем больше нет. Вот более точный результат:

Системы функций, ортогональные на $[0, 1]$ *и инвариантные с точностью до постоянных множителей относительно операции дифференцирования, могут быть записаны в виде*

$$\{A_k \cos(2\pi n_k x + \alpha_k),\ \ B_k \sin(2\pi n_k x + \alpha_k)\}, k \geq 1$$

и

$$\{A_k \cos(2\pi(n_k - \frac{1}{2})x + \alpha_k),\ \ B_k \sin(2\pi(n_k - \frac{1}{2})x + \alpha_k)\}, k \geq 1,$$

где n_k *– последовательность натуральных чисел, а* A_k, B_k, α_k *– произвольные постоянные.*

Пример 2.4.3. В пространстве $L_2(0, 1)$ система функций Хаара $\chi_n^{(k)}$ является полной ортонормированной системой.

Ортонормированность легко следует из определения (ср. с задачей 2.2.8), а полнота (эквивалентная всюду плотности линейной оболочки (задача 2.4.2)) – из того, что с помощью функций $\chi_n^{(k)}$

можно записать индикаторы промежутков с двоично рациональными концами. Например,

$$I_{[0,1/2]} = \frac{\chi_0^{(0)} + \chi_0^{(1)}}{2},\ I_{[1/2,1]} = \frac{\chi_0^{(0)} - \chi_0^{(1)}}{2},$$

$$I_{[0,1/4]} = (I_{[0,1/2]} + \frac{\chi_1^{(1)}}{\sqrt{2}})/2,\ I_{[1/4,1/2]} = (I_{[0,1/2]} - \frac{\chi_1^{(1)}}{\sqrt{2}})/2,$$

$$I_{[1/2,3/4]} = (I_{[1/2,1]} + \frac{\chi_1^{(2)}}{\sqrt{2}})/2,\ I_{[3/4,1]} = (I_{[1/2,1]} - \frac{\chi_1^{(2)}}{\sqrt{2}})/2, \ldots$$

и т. д. Так как линейная оболочка таких функций всюду плотна в $L_2(0,1)$ (пример 1.4.2), то всюду плотна и линейная оболочка функций Хаара.

Пример 2.4.4. Без доказательства скажем, что ортонормированная система функций Уолша является полной, а функций Радемахера – нет (пример 2.2.3, задача 2.2.7).

Функцией, ортогональной ко всем функциям $R_n(x)$, будет, например, функция Уолша $W_{1,2}(x) = R_1(x)R_2(x)$.

Пример 2.4.5. Следующая теорема (обобщающая теорему Вейерштрасса) позволяет строить разнообразные полные системы в $L_2(0,1)$. Она звучит так.

Теорема Мюнтца. *Для того, чтобы система функций $\{x^p\}$ была полной в $L_2(0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы множество степеней $\{p\}$ содержало подпоследовательность $\{p_k\}$, удовлетворяющую одному из условий:*

1. $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p_\infty > -\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = -\frac{1}{2}$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} |p_k + \frac{1}{2}| = \infty$.

3. $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \infty$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = \infty$.

Из этой теоремы следует, что, например, система мономов с четными степенями x^{2n} будет полной, так как $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty$. Или, например, система мономов x^{p_k}, где p_k – простые числа, полна, так как $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = \infty$ (это следует из расходимости гармонического ряда и известной *формулы Эйлера* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}$).

Пример 2.4.6. Пример несепарабельного гильбертова пространства.

Рассмотрим линейное пространство непрерывных почти периодических функций AP (см. пример 1.3.10). Как показал Бор, это пространство есть замыкание в норме $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ линейной оболочки функций $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим ее через L. На этой линейной оболочке можно ввести скалярное произведение. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\lambda_k x},\ \ g(x) = \sum_{r=1}^{m} B_r e^{i\mu_r x},$$

тогда

$$\begin{aligned}(f,g) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \\ &= \lim_{T\to\infty} \sum_{k,r=1}^{n,m} A_k \overline{B}_r \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_k-\mu_r)x}\,dx = \\ &= \lim_{T\to\infty} \sum_{k,r=1}^{n,m} A_k \overline{B}_r \Delta(\lambda_k,\mu_r,T) = \sum_{k,r=1}^{n,m} A_k \overline{B}_r \delta_{\lambda_k \mu_r},\end{aligned}$$

где $\Delta(\lambda_k,\mu_r,T) = \begin{cases} \frac{\sin((\lambda_k-\mu_r)T)}{(\lambda_k-\mu_r)T}, & \lambda_k \neq \mu_r, \\ 1, & \lambda_k = \mu_r. \end{cases}$ Пополняя L в норме, порожденной этим скалярным произведением, получим гильбертово пространство B^2. Оно не будет сепарабельным, так как содержит несчетное семейство взаимно ортогональных функций (задача 2.4.3):

$$(e^{i\lambda x}, e^{i\mu x}) = \delta_{\lambda\mu},\ \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Задачи

2.4.1. Показать, что ортогональное дополнение к системе векторов $\{x_1, x_2, ...\}$ совпадает с ортогональным дополнением к системе $\{z_1, z_2, ...\}$, получающейся процессом Грама – Шмидта из предыдущей. (Таким образом, полноту системы можно определять и не для ортонормированных систем.)

2.4.2. Показать, что линейная оболочка полной системы является всюду плотным подмножеством.

2.4.3. Показать, что если в гильбертовом пространстве найдется несчетная ортонормированная система, то это пространство несепарабельно.

2.4.4. Пусть $\{x_1, x_2, ...\}$ – замкнутая ортонормированная система векторов в пространстве со скалярным произведением $\mathbf{L}$. Показать, что для любых векторов $x, y \in \mathbf{L}$ справедливо равенство

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k},$$

где $\lambda_k = (x, x_k)$ и $\mu_k = (y, y_k)$ – коэффициенты Фурье векторов x и y.

2.4.5. Если ортонормировать систему многочленов x^n в пространстве $L_2(-1, 1)$, будет ли получившаяся система (*многочлены Лежандра*) полной?

2.4.6. Показать, что система функций $x^n f(x)$ является полной.

1. В пространстве $L_2(-\infty, \infty)$, если $f(x) = e^{-x^2}$ *(система Эрмита)*.

2. В пространстве $L_2(0,\infty)$, если $f(x) = e^{-x}$ *(система Лагерра).*

2.4.7. Используя теорему Мюнтца, исследовать на полноту следующие системы функций в $L_2(0,1) : \{x^{\frac{n}{n+1}}\}$, $\{\sqrt[n]{x}\}$, $\{x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}\}$, $\{x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}}\}$, $\{x^{n^2}\}$, $\{x^{n\ln n}\}$. Везде параметр $n \geq 1$.

2.4.8. Проверить, что в пространстве $L_2(0,1)$ система функций $\sin\mu_n x$, где μ_n – положительные корни уравнения $\mathrm{tg}x = x$ (рис. 6), будет ортогональной. Является ли она полной?

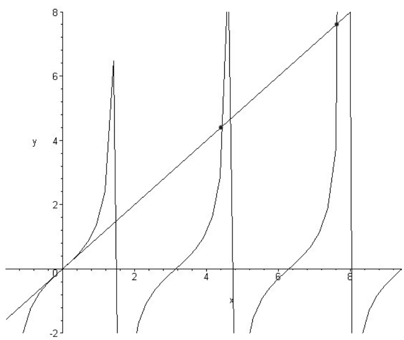


Рис. 6. Положительные корни уравнения $\mathrm{tg}x = x$

2.4.9. Если $\{e_1, e_2, ...\}$ – ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H, а $\{f_1, f_2, ...\}$ такое ортонормированное множество векторов в H, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|e_k - f_k\|^2 < \infty$, то система $\{f_k\}$ полна.

2.4.10. Пусть $\{x_1, x_2, ...\}$ – полная система в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. И пусть существует *сопряженная* ей система $\{y_1, y_2, ...\}$ (т. е. они биортогональны (задача 2.2.2)). Показать, что система $\{y_1, y_2, ...\}$ единственна.

2.5. Изоморфизм гильбертовых пространств

Два пространства $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ со скалярным произведением называются *изоморфными*, если существует взаимнооднозначное линейное отображение $\phi : \mathbf{L_1} \mapsto \mathbf{L_2}$ (обратное $\phi^{-1} : \mathbf{L_2} \mapsto \mathbf{L_1}$), сохраняющее скалярное произведение (*изоморфизм*), т. е. для любых $x, y \in \mathbf{L_1}$ и чисел α, β :

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\phi(x) + \beta\phi(y),$$

$$(x, y)_{\mathbf{L_1}} = (\phi(x), \phi(y))_{\mathbf{L_2}}.$$

Всякое бесконечномерное сепарабельное ГП изоморфно l_2. По теореме Рисса – Фишера всякий вектор $(\lambda_1, \lambda_2, ...) \in l_2$ состоит из коэффициентов Фурье для некоторого вектора x из ГП. Поэтому изоморфизм ϕ действует следующим образом: если $e_1, e_2, ...$ – гильбертов базис и $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$, то $\phi(x) = (\lambda_1, \lambda_2, ...) \in l_2$.

Примеры

Пример 2.5.1. Покажем непосредственно, что гильбертовы пространства $L_2(0,1)$ и $L_2(a,b)$ изоморфны.

Рассмотрим биекцию $\theta : (a,b) \mapsto (0,1)$, действующую по правилу $\theta(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Тогда для $f \in L_2(0,1)$ положим $\phi(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} f(\theta(x))$, $x \in (a,b)$. Покажем, что ϕ и есть изоморфизм. Взаимная однозначность следует из взаимной однозначности θ, а линейность легко проверяется. Проверим сохранение скалярного произведения:

$$\begin{aligned}
(\phi(f), \phi(g))_{L_2(a,b)} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f)(x)\phi(g)(x)\,dx \\
&= \int_a^b \frac{f(\theta(x))g(\theta(x))}{b-a}\,dx \\
&= \int_a^b f(\theta(x))g(\theta(x))\,d(\frac{x-a}{b-a}) \\
&= \int_0^1 f(y)g(y)\,dy = (f,g)_{L_2(0,1)}.
\end{aligned}$$

Пример 2.5.2. Пространства l_2^2 и l_2^3 не изоморфны.

Действительно, если бы существовал изоморфизм $\phi : l_2^3 \mapsto l_2^2$, то векторы $\phi(e_1), \phi(e_2)$ и $\phi(e_3)$, где $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$, были бы линейно независимыми (задача 2.5.3), но это противоречит тому, что размерность l_2^2 равна двум.

Пример 2.5.3. Гильбертово пространство B^2 (пример 2.4.6) не изоморфно никакому l_2.

Это действительно так, потому что оно не сепарабельно.

Задачи

2.5.1. Показать, что при изоморфизме ноль переходит в ноль.

2.5.2. Пусть H_1 – пространство со скалярным произведением, H_2 – ГП, и H_1 и H_2 изоморфны. Доказать, что H_1 – тоже ГП.

2.5.3. Пусть ϕ – изоморфизм гильбертовых пространств H_1 и H_2, векторы $x_1, x_2, ...$ образуют линейно независимую систему в H_1. Показать, что $\phi(x_1), \phi(x_2), ...$ – линейно независимые векторы в H_2.

2.5.4. Пусть H_1 изоморфно H_2 и H_2 изоморфно H_3. Показать, что H_1 изоморфно H_3.

2.5.5. Показать, что пространства $l_2^4(\mathbb{R})$, $M_4(\mathbb{R})$ и $P_3(\mathbb{R})$ изоморфны между собой и изоморфизмы осуществляются следующим образом:

$$\phi_1\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d)$$

и

$$\phi_2(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_3, a_2, a_1, a_0).$$

2.5.6. Показать, что гильбертовы пространства $H^1(0,1)$ и $H^1(a,b)$ с $b-a=1$ изоморфны.

2.5.7. Может ли замкнутое подпространство гильбертова пространства быть изоморфным самому пространству?

2.5.8. Верно ли, что при изоморфизме ортогональные системы переходят в ортогональные, биортогональные – в биортогональные, полные – в полные системы?

2.6. Функционалы и слабая сходимость

Пусть H – ГП. Множество линейных непрерывных $(x_n \to x \Rightarrow F(x_n) \to F(x))$ функционалов, определенных на H, называется *сопряженным* пространством и обозначается H'. По теореме Рисса всякий линейный непрерывный функционал на H может быть представлен в виде $F(x) = (x, y)$, где y – зависящий от F вектор из H (y *порождает* F). Таким образом, H и H' изоморфны как векторные пространства.

Последовательность линейных непрерывных функционалов F_n *слабо сходится* к F, если для всех $x \in H$ $F_n(x) \to F(x)$.

Примеры

Пример 2.6.1. Рассмотрим последовательность векторов $e_n \in l_2, (e_n)_k = \delta_{nk}$. Покажем, что линейные непрерывные функционалы, порожденные e_n, слабо сходятся к 0.

Действительно, для каждого $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ получим $e_n(x) = (e_n, x) = x_n \to 0$.

Пример 2.6.2. Рассмотрим последовательность функций $e^{-nx} \in L_2(0,1)$. Покажем, что линейные непрерывные функционалы, порожденные этими функциями, слабо сходятся к 1.

Действительно, нужно показать, что $(e^{-nx}-1, f(x)) \to 0$ для каждой $f \in L_2(0,1)$. Получаем:

$$|(e^{-nx}-1, f(x))| = |\int_0^1 (e^{-nx}-1) f(x)\, dx| \le$$
$$\le \max_{x\in[0,1]} |e^{-nx}-1| \int_0^1 |f(x)|\, dx =$$
$$= |e^{-n}-1| \|f(x)\|_1 \le |e^{-n}-1| \|f(x)\|_2.$$

Последнее неравенство есть следствие неравенства Гёльдера для интегралов (см. задачу 1.4.10). Так как $e^{-n}-1$ стремится к нулю, то утверждение доказано.

Задачи

2.6.1. Показать, что если последовательность $y_n \in H$ слабо сходится, то она ограничена.

2.6.2. Показать, что если числовая последовательность $\|y_n\|$ сходится к $\|y\|$ и y_n слабо сходится к y, то y_n сходится к y.

2.6.3. Какие из указанных функционалов, заданных в $L_2(0,1)$, будут линейными и непрерывными?

1. $F(f(x)) = \int_0^1 f(x^2)\, dx$.
2. $F(f(x)) = f'(0)$.
3. $F(f(x)) = f(1/2)$.
4. $F(f(x)) = \int_0^1 f(x)^2\, dx$.

2.6.4. Какие из указанных функционалов, заданных в l_2, будут линейными и непрерывными?

1. $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin k$.

2. $F(x) = x_n$, n фиксировано.

3. $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} x_{k^2}$.

4. $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

2.6.5. Исследовать на слабую сходимость в l_2 следующие функционалы, порожденные векторами.

1. $x_n = (1, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n^2}, 0, 0, ...)$.

2. $x_n = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, ...)$.

3. $x_n = (1, 2, ..., n, 0, 0, ...)$.

4. $x_n = (1, 1, ..., 1, 0, 0, ...)$.

2.6.6. Исследовать на слабую сходимость в $L_2(0, 1)$ следующие функционалы, порожденные векторами.

1. $f_n(x) = \sin 2\pi n x$.

2. $f_n(x) = x^n$.

3. $f_n(x) = \chi_n^{(1)}(x)$.

4. $f_n(x) = I_{\{0 \le x \le \frac{1}{n}\}}$.

2.6.7. Пусть e_n – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Доказать, что функционалы, порожденные этой системой, слабо сходятся к нулю.

Ответы к задачам

1.1.2. $\sqrt{2}-1; 4-\pi$. **1.1.11.** В примере 1.1.3 метрика d_1 полна, так как сходящиеся и фундаментальные последовательности постоянны с некоторого номера, а метрика d_2 не является полной, так как последовательность $m_n = n$ фундаментальна, но не сходящаяся; метрики в примерах 1.1.4 и 1.1.5 также полные (см., например, [12, с. 65]). **1.2.3.** Каждый элемент совпадает со своим обратным. **1.2.4.** 1, 2 и 8 не являются векторными пространствами; 3, 4, 6 и 7 – векторные пространства, причем 3 и 6 – подпространства 7; 5 – векторное подпространство в случае соизмеримых периодов. Все пространства бесконечномерны. **1.2.5.** 1 – линейное пространство размерности n^2; 2 и 3 не являются линейными пространствами, так как нулевая матрица не принадлежит ни одному из них; 4 – линейное пространство размерности $n(n+1)/2$; 5 – линейное пространство размерности $n(n-1)/2$; 6 – линейное пространство размерности n^2-1. $Sim_n(\mathbb{R}) \prec M_n(\mathbb{R}), Kos_n(\mathbb{R}) \prec Tr_n^0(\mathbb{R}) \prec M_n(\mathbb{R})$. **1.2.6.** 2, 4, 5 и 7 являются бесконечномерными линейными подпространством линейного пространства 1; 3 – нет, так как нулевая функция не сингулярна; 6 – бесконечномерное линейное пространство. **1.2.7.** $\mathrm{R}[a,b] \prec \mathrm{L}(a,b)$. **1.2.8.** 1 – нет, но если считать и заряды, то да; 2 и 4 – нет; 3 – бесконечномерное линейное пространство (если считать и заряды). **1.2.9.** Линейно независимы. **1.2.10.** Линейно зависимы, так как связаны равенством Сохоцкого: $-i\pi\delta + \mathcal{P}\frac{1}{x} = \frac{1}{x+i\cdot 0}$. **1.2.11.** Линейно независимы. Счетность следует из того, что в каждом отрезке можно выбрать рациональное число. **1.2.12.** Все системы линейно независимы. **1.3.2 – 1.3.10.** Аксиомы НП выполняются. **1.3.11.** $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty, p \ge 1$; $\frac{1}{\sqrt[q]{n}}\|x\|_q \le \|x\|_p \le \sqrt[p]{n}\|x\|_q$. **1.3.12.** Эквивалентность p-нормы и нормы Фробениуса в частности следует из задачи 1.3.11 отождествлением матрицы с вектором длины mn; $\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^m |a_{ij}| \le \|A\|_1 \le n\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^m |a_{ij}|$. **1.3.13.** $\|[x,y]\|' \le \|[x,y]\|'' \le \sqrt[p]{2}\,\|[x,y]\|'$. **1.3.14.** Нет. Нужно рассмотреть ограниченную функцию с большой производной, например, в конце интервала. **1.4.3.** Все являются БП. Исходя из включений и задачи 1.4.1, достаточно доказать банаховость только для c, bv и bs. **1.4.4.** В l_1 не сходится, в l_2 и l_∞ сходится к $y = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$. **1.4.5.** В $C[0,1]$ сходится к нулю, а в $C^1[0,1]$ расходится. **1.4.6.** Рассмотрите континуальное множество последовательностей, состоящих из нулей и единиц. **1.4.7.** Рассмотрите континуальное множество функций – индикаторов отрезков $[0,c], c \in [0,1]$. **1.4.8.** 1, 3 – замкнутые подпространства; 2 не является даже линейным пространством; 4, 5, 6 и 7 незамкнутые (т. е. просто линейные) подпространства. **1.4.9.** 1 и 3 являются замкнутыми множествами; 2 и 4 незамкнутые, так как предел последовательности из задачи 1.4.4 не принадлежит этим множествам; 5 не замкнуто, достаточно рассмотреть последовательность $y_n = (-1, \frac{1}{n}, \ldots, \ldots \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$. **1.4.10.** Рассмотрите функции $f_1(x) = \frac{1}{x^\alpha} I_{[0,1]}$ и $f_2(x) = \frac{1}{x^\alpha} I_{[1,\infty)}$ с подходящими α. **2.1.2.** Линейность и симметричность выполнены, а положительная определенность нет. **2.1.3.** Достаточно рассмотреть векторы e_1 и e_2 и функции $f_1 = I_{[0,\frac{1}{2}]}, f_1 = I_{[\frac{1}{2},1]}$. **2.1.4.** Все аксиомы выполняются. **2.1.5.** Когда $x = \alpha y$, т. е. они линейно зависимы. **2.1.6.** Воспользуйтесь задачей 2.1.5. **2.1.7.** Примените неравенство Коши – Буняковского. **2.2.1.** Так как $(x,y) \in \mathbb{C}$. **2.2.3.** В 1 – ортогональная система $\{1, 2x-1, 6x^2-2x-1, 20x^3-42x^2+8x+5\}$; в 2 – ортогональная система $\{1, 2x-1, 6x^2-10x+3, 20x^3+150x^2-336x+113\}$; в 3 – система $\{1, 1-x, \frac{1}{2}(x^2-4x+2), \frac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6)\}$; в 4 – система $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{x}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{8\sqrt{\pi}}(4x^2-2), \frac{1}{48\sqrt{\pi}}(8x^3-12x)\}$; в 5 – функции $\{1, x, x^2, x^3\}$. **2.2.4.** $z_k = z^{k-1}\sqrt{\frac{k}{\pi}}, k = 1,2,3,4$. **2.2.5.** $g_1 = \frac{f_1}{\sqrt{x_1}}, g_k = \frac{f_k - f_{k-1}}{\sqrt{x_k - x_{k-1}}}, 1 < k \le n$. **2.2.6.** В 1 и 3 – $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$; в 2 – $\left(\frac{\pi}{2}, \arccos\sqrt{\frac{3}{8}}, \arccos\sqrt{\frac{5}{8}}\right)$; в 4 – $\left(\frac{\pi}{2}, \arccos\frac{\sqrt{6}}{\pi}, \arccos\frac{\sqrt{\pi^2-6}}{\pi}\right)$. **2.2.7.** $\frac{\pi}{2}$. **2.2.8.** $\frac{\pi}{2}$. **2.2.9.** $\frac{\pi}{2}$ или $\arccos\sqrt{\frac{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}-\alpha}{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}-\alpha}}$, где α – общий конец хорд со вторыми концами в α_1, α_2. **2.3.2.** $\frac{3x}{8}$

2.3.3. $\mathrm{Pr}_{\{R_n,R_{n+1}\}}\chi_n^1 = 2^{\frac{n}{2}+1}R_{n+1}$. **2.3.4.** $\mathrm{Pr}_{\{A,B\}}J = \frac{i-1}{10}A + \frac{i+1}{2}B$. **2.3.5.** $x = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots)$, т. е. для простых p компоненты $x_p = \frac{1}{p}$, а остальные координаты нулевые. **2.3.6.** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $\frac{e^{-x}-e^x}{2}$. **2.3.7.** $\mathrm{Pr}_{\mathrm{L}_2^0(\mathbb{R})}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x}{x} - \pi$. **2.3.8.** Все такие $x = (x_1, x_2, \ldots)$, что $x_{2n+1} = 0, n \geq 0$. **2.3.9.** Все ортогональные дополнения состоят только из нуля. **2.3.10.** $\{0\}$. **2.4.5.** Да. **2.4.6.** Предположить противное: существует функция $h(x) \neq 0$ такая, что $\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)h(x)\,dx = 0$. При рассмотрении аналитической функции $g(\lambda) = F_+[fh](\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)e^{-ix\lambda}\,dx$ показать, что она тождественно равна нулю. **2.4.7.** 1, 2, 3 и 6 – полные системы, а 4 и 5 – нет. **2.4.8.** Неполная. Функция x лежит в ее ортогональном дополнении. **2.4.9.** Предположить, что существует $f \neq 0$ и $f \perp f_k$. Показать, что из условия $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|e_k - f_k\|^2 < 1$ вытекает, что векторы $f, f_1, ..., f_n$ линейно зависимы. **2.5.7.** Да. Рассмотрите пространство $L_2(-1,1)$ и его замкнутое подпространство $L_2^0(-1,1)$ и $\phi(f) = f - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. **2.5.8.** Да. **2.6.3.** 1 – линейный и непрерывный, так как он есть скалярное произведение $(f(x), \frac{1}{2\sqrt{x}})$; 2 и 3 не определены в $\mathrm{L}_2(0,1)$; 4 – не линеен. **2.6.4.** 1 – не непрерывен, так как ряд $\sum_k \sin^2 k$ расходится; 2 – да, так как он есть (x, e_n); 3 – нет, так как вектор $y = (y_1, y_2, \ldots)$ с $y_{k^2} = \sqrt{k}$, а остальные координаты ноль, не лежит в l_2; 4 не линеен. **2.6.5.** 1 и 2 сходятся, 3 и 4 – нет. **2.6.6.** 1 – слабо сходится к нулю по лемме Римана – Лебега; 2 и 4 – сильно (следовательно, и слабо) сходятся к нулю; 3 – слабо сходится к нулю (см. задачу 2.6.7.).

Список литературы

1. Александров В. А. Геометрия пространств со скалярным произведением: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1995.

2. Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Вышэйшая школа, 1978.

3. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

4. Богачев В. И. Основы теории меры. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003. Т. 1.

5. Бугуева Т. В. Интегрирование дифференциальных форм: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2010.

6. Вершик А. М. Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 312. С. 69—85.

7. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

8. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.

9. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.

10. Деза Е. И., Деза М. М. Энциклопедический словарь расстояний. М.: Наука, 2008.

11. Золотарев В. М. Вероятностные метрики // ТВП. 1983. Т. 28, № 2. С. 267–287.

12. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

13. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматлит, 1958.

14. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.

15. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

17. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа: 209 теоретических задач. Новосибирск: НГУ, 1995.

18. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951.

19. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: ЛГУ, 1985.

20. Морен К. Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.

21. Прасолов В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003.

22. Рид М. Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

23. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.

24. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

25. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.

26. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.

Предметный указатель