МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет

Р. К. Бельхеева

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Новосибирск
2014

УДК 517.443
ББК В161.911
Б44

Рецензент
канд. физ.-мат. наук., доцент И. В. Подвигин

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

Бельхеева, Р. К.

Б 44 Преобразование Фурье в примерах и задачах : учебное пособие / Р. К. Бельхеева ; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск : РИЦ НГУ, — 2014. 81 с.

ISBN 978-5-4437-0290-2

В учебном пособии излагаются основные сведения о преобразовании Фурье, приведены примеры на каждую изучаемую тему. Детально разобран пример применения метода Фурье к решению задачи о поперечных колебаниях струны. Приведен иллюстративный материал, имеются задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов и преподавателей физического факультета НГУ.

Печатается по решению методической комиссии физического факультета НГУ.

УДК 517.443
ББК В161.911

ISBN 978-5-4437-0290-2

1. Интеграл Фурье

Изучая тему «Ряды Фурье», кусочно-гладкую функцию, заданную на промежутке $[-l, l]$, мы разлагали в ряд «гармонических колебаний», частоты которых образуют дискретную последовательность. При переходе к функции, заданной на всей оси x или на полуоси x, происходит качественный скачок: ряд Фурье превращается в интеграл Фурье, который представляет собой сумму «гармонических колебаний», частоты которых непрерывно заполняют действительную полуось. Рассмотрим предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье.

1.1. Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье

Пусть $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. На основании теоремы о представимости функции в точке своим рядом Фурье мы можем для любого $l > 0$ разложить f в ряд Фурье в промежутке $[-l, l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \tag{1}$$

где коэффициенты a_n, b_n вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{\pi n t}{l} \, dt, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{\pi n t}{l} \, dt, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Подставив в (1) вместо коэффициентов a_n и b_n их выражения (2) и (3), после преобразований получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\cdot\frac{l}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sum_{n=1}^{\infty}\cos[y_n(t-x)]\triangle y_n\,dt,$$

где $y_n = \dfrac{\pi n}{l}$ и $\triangle y_n = y_{n+1} - y_n = \dfrac{\pi}{l}$.

Перейдем в этом равенстве к пределу при $l \to +\infty$. Предположив, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ сходится, и заменив бесконечный ряд интегралом, получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\int\limits_{0}^{+\infty}\cos y(t-x)\,dy\right]\,dt.$$

Меняя порядок интегрирования и разлагая косинус разности по известной тригонометрической формуле, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt\cdot\cos yx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt\cdot\sin yx\right]dy$$

или

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty}\left[a(y)\cos yx + b(y)\sin yx\right]\,dy, \qquad (4)$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ty\,dt, \qquad (5)$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ty\,dt. \qquad (6)$$

Отметим, что при наших предположениях о функции f интегралы в (5) и (6) сходятся, а интеграл в (4), во всяком случае, не является интегралом, расходимость которого бросалась бы в глаза. Формула (4) справедлива на всей числовой прямой и играет такую же роль, как разложение функции в ряд Фурье.

Определения. Правая часть формулы (4) называется *интегралом Фурье*, а сама формула (4) — *интегральной формулой Фурье*. Функция $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенная формулой (5), называется *косинус-преобразованием Фурье* функции f. Функция $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенная формулой (6), называется *синус-преобразованием Фурье* функции f.

1.2. Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье

Напомним **определение.** Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно интегрируемой на* $[a, b]$, $a,\ b \in \mathbb{R}$, если интеграл $\int\limits_a^b |f(t)|\, dt$ сходится. Если $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, то f называется просто *абсолютно интегрируемой.*

Лемма (Римана—Лебега для бесконечного промежутка). Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема на $(a, +\infty)$. Тогда

$$\lim_{p \to +\infty} \int\limits_a^{+\infty} f(x) \cos px\, dx = \lim_{p \to +\infty} \int\limits_a^{+\infty} f(x) \sin px\, dx = 0.$$

Определение. Функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будем называть *кусочно-гладкой*, если она является кусочно-гладкой на любом конечном промежутке $[a, b]$, т. е. если в $[a, b]$ найдется конечное число точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ таких, что в каждом открытом промежутке (x_j, x_{j+1}) функция $f(x)$

непрерывно дифференцируема, а в каждой точке x_j у f существуют конечные пределы слева и справа:

$$f(x_j - 0) = \lim_{h\to+0} f(x_j - h), \quad f(x_j + 0) = \lim_{h\to+0} f(x_j + h),$$

а также существуют и конечны следующие пределы, похожие на левую и правую производные:

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(x_j - h) - f(x_j - 0)}{-h}, \quad \lim_{h\to+0} \frac{f(x_j + h) - f(x_j + 0)}{h}.$$

Теорема (о представимости кусочно-гладкой функции в точке своим интегралом Фурье). *Пусть $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кусочно-гладкая абсолютно интегрируемая функция. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos yx + b(y)\sin yx]\, dy = \frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right],$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ty\, dt, \quad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ty\, dt.$$

1.3. Различные виды формулы Фурье

Запишем формулу (4) в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos yx \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ty\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin yx \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ty\, dt\, dy.$$

Если $f(x)$ есть четная функция, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ty\,dt = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos ty\,dt\,dy = 2a(y),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ty\,dt = 0$$

и мы получим упрощенную формулу интеграла Фурье, содержащую лишь косинусы:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} a(y)\cos yx\,dy. \tag{7}$$

Аналогично в случае нечетной функции $f(x)$ мы приходим к формуле, содержащей лишь синусы:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} b(y)\sin yx\,dy. \tag{8}$$

Функция $a(y)$, построенная по формуле

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos ty\,dt,$$

называется *обратным косинус-преобразованием Фурье.*
А функция $b(y)$, построенная по формуле

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin ty\,dt,$$

называется *обратным синус-преобразованием Фурье.*

В примере 1 и 2 установите формулу, считая параметр a положительным.

ПРИМЕР 1.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ay}{y} \cos yx \, dy = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } |\, x \,| < a, \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{если } |\, x \,| = a, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > a. \end{cases}$$

Решение. Интеграл, стоящий в левой части уравнения, представляет интеграл Фурье, который содержит только косинусы. Здесь роль функции, являющейся прямым косинус-преобразованием, играет функция $a(y) = \dfrac{\sin ay}{y}$. Как следует из пункта 1.3., в этом виде представимы четные функции. Убедимся, что к четной функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } |\, x \,| < a, \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{если } |\, x \,| = a, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > a \end{cases} \tag{9}$$

можно применить теорему о представимости кусочно-гладкой функции в точке своим интегралом Фурье. На рис. 1 представлен график этой функции.

Очевидно, что функция является абсолютно интегрируемой $\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt = \pi a < +\infty \right)$ и кусочно-гладкой: функция претерпевает конечное число разрывов; на каждом из промежутков $(-\infty, -a)$, $(-a, a)$, $(a, +\infty)$ она непрерывно дифференцируема; в точках разрыва $x = \pm a$ существуют конечные пределы:

$$f(-a-0)=\lim_{h\to+0}f(-a-h)=0,$$

$$f(-a+0)=\lim_{h\to+0}f(-a+h)=\frac{\pi}{2},$$

$$f(a-0)=\lim_{h\to+0}f(a-h)=\frac{\pi}{2},$$

$$f(a+0)=\lim_{h\to+0}f(a+h)=0;$$

также существуют и конечны пределы, похожие на левую и правую производные:

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(-a-h)-f(-a-0)}{-h}=0,$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(-a+h)-f(-a+0)}{-h}=0,$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(a-h)-f(a-0)}{h}=0,$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a+0)}{h}=0.$$

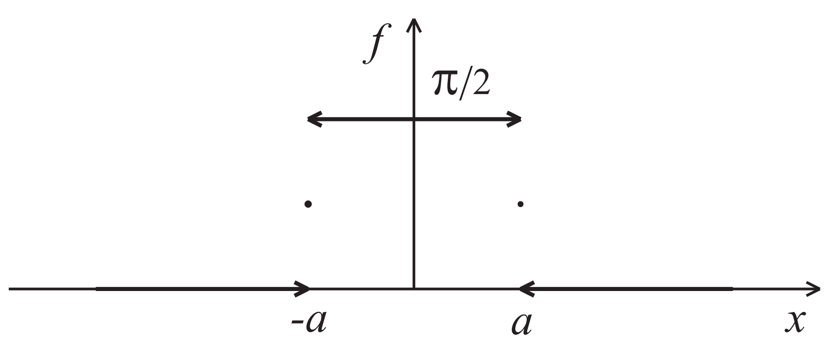

Рис. 1. График функции $f(x)$

В силу теории интеграла Фурье мы не будем вычислять интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ay}{y} \cos yx\, dy$, а вычислим интеграл

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ty\, dt.$$

Так как функция, заданная соотношением (9), является четной, то, подставив в формулу (7) выражение $f(x)$, получим

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos ty\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{a} \cos ty\, dt =$$

$$= \left.\frac{\sin ty}{y}\right|_{t=0}^{t=a} = \frac{\sin ay}{y}.$$

Это доказывает, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ay}{y} \cos yx\, dy$ совпадает с функцией $f(x)$, заданной уравнением (9). На рис. 2 представлен график косинус-преобразования Фурье $a(y)$ функции $f(x)$.

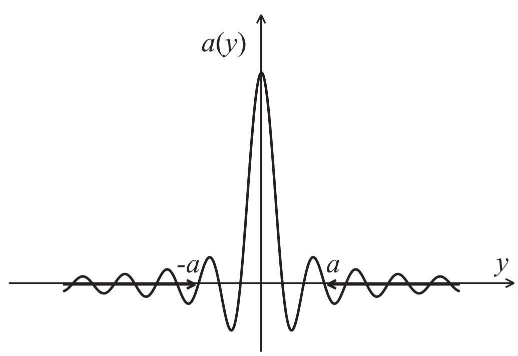

Рис. 2. График функции $a(y)$

ПРИМЕР 2.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \pi y}{1-y^2} \sin yx \, dy = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \sin x, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi. \end{cases}$$

Решение. Интеграл, стоящий в левой части уравнения представляет интеграл Фурье, содержащий только синусы. Здесь роль функции, являющейся прямым синус-преобразованием, играет функция $b(y) = \dfrac{\sin \pi y}{1-y^2}$. Как следует из пункта 1.3., в этом виде представимы нечетные функции. Убедимся, что к нечетной функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \sin x, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi \end{cases} \tag{10}$$

можно применить теорему о представимости кусочно-гладкой функции в точке своим интегралом Фурье. На рис. 3 представлен график этой функции.

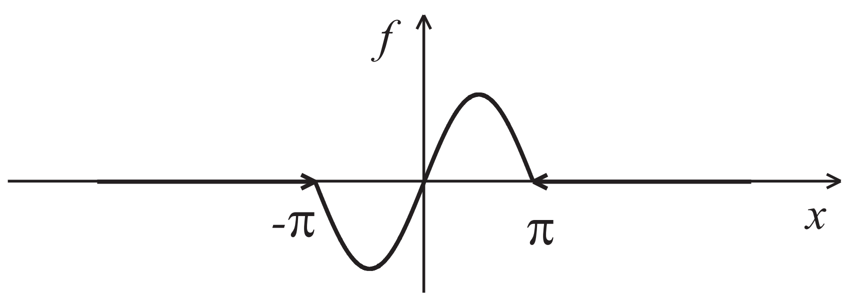

Рис. 3. График функции $f(x)$

Очевидно, что функция является абсолютно интегрируемой и кусочно-гладкой:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = 2\pi < +\infty;$$

функция непрерывна; на каждом из промежутков $(-\infty, -\pi)$, $(-\pi, \pi)$, $(\pi, +\infty)$ она непрерывно дифференцируема; также в точках $x = \pm\pi$ существуют и конечны пределы, похожие на левую и правую производные:

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(-\pi-h) - f(-\pi-0)}{-h} = 0,$$

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(-\pi+h) - f(-\pi+0)}{-h} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(\pi-h) - f(\pi-0)}{h} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi+0)}{h} = 0.$$

В силу теории интеграла Фурье мы не будем вычислять интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \pi y}{1-y^2} \sin yx\,dy,$$

а вычислим интеграл

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ty\,dt.$$

Так как функция, заданная соотношением (10), является нечетной, то, подставив в формулу (8) выражение $f(x)$, получим

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \sin ty\,dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \int\limits_{0}^{\pi} \sin t \sin ty\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} (\cos(t(1-y)) - \cos(t(1+y)))\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin t(1-y)}{1-y} - \frac{\sin t(1+y)}{1+y}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\sin \pi y}{1-y^2}.$$

Это доказывает, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \pi y}{1-y^2} \sin yx\, dy$ совпадает с функцией $f(x)$, заданной уравнением (10). На рис. 4 представлен график синус-преобразования Фурье $b(y)$ функции $f(x)$.

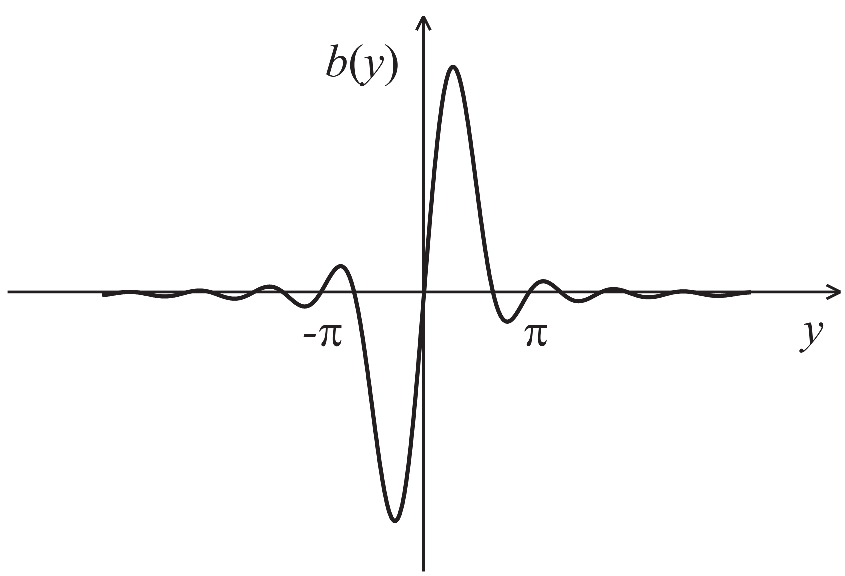

Рис. 4. График функции $b(y)$

1.4. Разложение на полупрямой

В пункте 1.3 мы показали, что для четной функции интегральная формула Фурье содержит только косинусы, а для нечетной — только синусы. Пусть теперь функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[0, +\infty)$ и удовлетворяет в этом промежутке условиям, аналогичным тем, которые были поставлены ко всему промежутку $(-\infty, +\infty)$. Тогда, продолжив функцию $f(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ четным образом на промежуток $(-\infty, 0)$, получим формулу (7), а нечетное продолжение даст формулу (8). Для положительных значений x мы можем пользоваться как формулой (7), так и формулой (8).

ПРИМЕР 3. Представьте интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x < a, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } x = a, \\ 0, & \text{если } x > a, \end{cases}$$

продолжив ее а) четным и б) нечетным образом на промежуток $(-\infty, 0)$.

Решение. Очевидно, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы о представимости кусочно-гладкой функции в точке своим интегралом Фурье. В этом читатель может легко убедиться самостоятельно.

а) Продолжив функцию $f(x)$ на промежуток $(-\infty, 0)$ четным образом, вычислим прямое косинус-преобразование Фурье

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos ty \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^a \cos ty \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi y} (\sin ty) \Bigg|_{t=0}^{t=a} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin ay}{y}.$$

В силу четности продолженной функции $b(y) = 0$. Таким образом, интегральная формула Фурье для функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ay}{y} \cos xy \, dy.$$

Проверим на этом примере формулу Фурье. Из курса математического анализа известно, что интеграл Дирихле

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ay}{y} \, dy = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

В силу того, что функция

$$\widehat{f}(y) = \frac{\sin ay}{y}$$

абсолютно интегрируема в промежутке $[0, +\infty)$, запишем для нее обратное косинус-преобразование Фурье

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \widehat{f}(y) \cos \, xy \, dy = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ay}{y} \cos xy \, dy =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \left[\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y(a+x)}{y} \, dy + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y(a-x)}{y} \, dy \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } 0 \le x < a, \\[2ex] \dfrac{\pi}{4}, & \text{если } x = a, \\[2ex] 0, & \text{если } x > a, \end{cases} \quad = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x < a, \\[2ex] \dfrac{1}{2}, & \text{если } x = a, \\[2ex] 0, & \text{если } x > a. \end{cases}$$

Таким образом, мы показали, что обратное преобразование Фурье функции $\widehat{f}(y)$ совпадает с функцией $f(x)$.

б) Продолжив функцию $f(x)$ на промежуток $(-\infty, 0)$ нечетным образом, вычислим прямое синус-преобразование Фурье

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin ty \, dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{a} \sin ty \, dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi y} \cos ty \Big|_{t=0}^{t=a} = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos ay}{y}.$$

В силу нечетности продолженной функции $a(y) = 0$. В этом случае интегральная формула Фурье для функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ay}{y} \sin xy \, dy.$$

Сопоставляя пункты а) и б), видим что для положительных значений x

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ay}{y} \cos xy \, dy = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ay}{y} \sin xy \, dy.$$

Решите следующие интегральные уравнения (примеры 4–7), считая, что параметр $a > 0$, а x изменяется в указанных пределах.

ПРИМЕР 4.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y) \cos xy \, dy = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad x > 0.$$

Решение. Интеграл, стоящий в левой части уравнения, является обратным косинус-преобразованием Фурье четной функции. Продолжим функцию

$$g(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad x > 0,$$

на промежуток $(-\infty, 0)$ четным образом и вычислим для нее прямое косинус-преобразование Фурье (предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что функция $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы о представимости кусочно-гладкой функции в точке своим интегралом Фурье).

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} g(t) \cos ty \, dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ty}{a^2 + y^2} \, dt = \frac{e^{-ay}}{a}.$$

Здесь мы считаем, что $y > 0$. Известный интеграл Лапласа

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ty}{a^2 + y^2} \, dt = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-ay}}{a}$$

здесь вычислять не будем.

В силу четности продолженной функции $b(y) = 0$.

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |a(y)|\,dy$ сходится при $a > 0$. Поэтому искомой функцией будет

$$f(y) = a(y) = \frac{e^{-ay}}{a}.$$

Это решение уравнения является единственным, так как функции $a(y)$ и $b(y)$ находятся единственным образом по совершенно определенному правилу.

ПРИМЕР 5.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y)\cos xy\,dy = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. В примере 4 мы решили это уравнение в случае, когда переменные x и y были положительными и функция $g(x)$ была задана на полупрямой. В данном случае функция задана на всей вещественной прямой, и продолжать ее какимлибо образом нет необходимости. Но так как она является четной, то все рассуждения, приведенные в примере 4, имеют силу. Следовательно, решением уравнения является функция

$$f(y) = \frac{e^{-ay}}{a}, \quad y > 0.$$

Но так как функция в правой части уравнения определена для всех $x \in \mathbb{R}$, то и функцию $f(y)$ определим на всей вещественной прямой равенством

$$f(y) = \frac{e^{-a|y|}}{a}.$$

ПРИМЕР 6.

$$\int_0^{+\infty} f(y)\sin xy\,dy = \frac{1}{a^2+x^2}, \quad x>0.$$

Решение. Интеграл, стоящий в левой части уравнения, является обратным синус-преобразованием Фурье нечетной функции. Продолжим функцию

$$g(x) = \frac{1}{a^2+x^2}, \quad x>0,$$

на промежуток $(-\infty, 0)$ нечетным образом и вычислим для нее прямое синус-преобразование Фурье

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g(t)\sin ty\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin ty}{a^2+y^2}\,dt.$$

Этот интеграл в элементарных функциях не берется, поэтому оставим его в таком виде.

В силу нечетности продолженной функции $a(y)=0$.

Искомой функцией будет

$$f(y) = b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin ty}{a^2+y^2}\,dt.$$

ПРИМЕР 7.

$$\int_0^{+\infty} f(y)\sin xy\,dy = \frac{1}{a^2+x^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Решение. В примере 6 мы решили это уравнение в случае, когда функция $g(x)$ была задана на полупрямой. В данном случае функция задана на всей вещественной прямой, и продолжать ее произвольным образом мы не можем. Но так как она является четной, а интеграл Фурье в левой части уравнения имеет смысл только для нечетной функции, то данное уравнение не имеет решений.

ЗАДАЧИ

Представьте интегралом Фурье следующие функции:

1. $f(x) = \begin{cases} a, & \text{если } \mid x \mid < 1 \quad (a > 0), \\ 0, & \text{если } \mid x \mid \geq 1. \end{cases}$

2. $a)$ $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } \quad -1 < x < 0, \\ 1, & \text{если } \quad 0 < x < 1, \\ 0, & \text{если } \quad \mid x \mid > 1. \end{cases}$

Используя интегральную формулу Фурье для функции $f(x)$ из пункта $a)$, вычислите интегралы

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t \cos t}{t}\, dt \quad \text{и} \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t}\, dt.$$

3. $f(x) = \operatorname{sgn}(x - a) - \operatorname{sgn}(x - b) \quad (b > a)$.

4. $f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right), & \text{если } \mid x \mid \leq a, \quad (a > 0), \\ 0, & \text{если } \mid x \mid > a. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} A \sin \omega x, & \text{если } \mid x \mid < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } \mid x \mid > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

6. $f(x)=e^{-a|x|}\ (a>0)$. 7. $f(x)=e^{-a|x|}\sin bx\ (a>0)$.

8. $f(x)=e^{-x^2}$. 9. $f(x)=xe^{-x^2}$.

Ответы

1. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ay}{y}\cos xy\,dy.$

2. $a)\ f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos y}{y}\sin xy\,dy;\quad b)\ \frac{\pi}{16};\quad c)\ \frac{\pi}{4}.$

3. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin y(x-a)-\sin y(x-b)}{y}\,dy.$

4. $f(x)=\dfrac{2h}{\pi a}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos ay}{y^2}\cos xy\,dy.$

5. $f(x)=\dfrac{2A\omega}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi ny}{\omega}}{y^2-\omega^2}\sin xy\,dy.$

6. $f(x)=\dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{y^2+a^2}\,dy.$

7. $f(x)=\dfrac{4ab}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{y\sin xy}{[(y-b)^2+a^2]\,[(y+b)^2+a^2]}\,dy.$

8. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{4}}\cos xy\,dy.$

9. $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{4}}\sin xy\,dy.$

2. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье используется во многих областях науки — в физике, акустике, океанологии, оптике, обработке сигналов и многих других.

2.1. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций

Преобразование, сопоставляющее кусочно-гладкой абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ новую функцию

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dy, \tag{11}$$

называется *прямым преобразованием Фурье* и обозначается через F_+. При этом функция $\widehat{f} = F_+[f]$ называется *прямым преобразованием Фурье функции* f.

Другое преобразование, сопоставляющее кусочно-гладкой абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ новую функцию

$$\overset{\vee}{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy}\, dy, \tag{12}$$

называется *обратным преобразованием Фурье* и обозначается через F_-. При этом функция $\overset{\vee}{f} = F_-[f]$ называется *обратным преобразованием Фурье функции* f.

Для функций, у которых $\widehat{f}$ и $\overset{\vee}{f}$ абсолютно интегрируемы, последовательное применение прямого, а затем обратного преобразований Фурье к кусочно-гладкой непрерывной функции не изменяет функцию. Аналогично можно убедиться, что и последовательное применение сначала обратного, а затем прямого преобразований Фурье к кусочно-гладкой непрерывной функции также не изменяет исходную функцию. Символами эти утверждения записывают короче

$$f = \overset{\vee}{\widehat{f}} = \widehat{\overset{\vee}{f}} \quad \text{или} \quad f = F_+[F_-[f]] = F_-[F_+[f]]$$

и называют *формулами обращения преобразования Фурье.*

В силу формул обращения функции $\hat{f}$ и $\overset{\vee}{f}$ в определенном смысле равноправны. Однако (даже для вещественнозначной функции f), вообще говоря, функции $\hat{f}$ и $\overset{\vee}{f}$ являются комплексно-значными. Чтобы избежать такой асимметрии, при изучении преобразования Фурье мы будем изначально предполагать, что рассматриваемые функции f принимают комплексные значения.

Отметим, что разные источники могут давать определения, отличающиеся от приведенного выбором коэффициента перед интегралом, а также знака «–» в показателе экспоненты. Все свойства в этом случае будут аналогичны, хотя вид каких-то формул может измениться.

Широкие возможности применения преобразования Фурье основываются на нескольких полезных свойствах этого преобразования, приведенных в следующих примерах.

ПРИМЕР 8.

Докажите, что $\hat{f}(x) = \overset{\vee}{f}(-x)$ (это простое наблюдение позволяет во всех последующих задачах реально вычислять только прямое преобразование Фурье).

Решение. По определению запишем обратное преобразование Фурье в точке $(-x)$

$$\overset{\vee}{f}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iy(-x)}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx}\, dy = \hat{f}(x).$$

ПРИМЕР 9.

Докажите линейность прямого и обратного преобразований Фурье, т. е. установите, что для любых комплексных чисел a и b справедливы равенства

$$F_+[af + bg] = aF_+[f] + bF_+[g],$$

$$F_-[af + bg] = aF_-[f] + bF_-[g].$$

Решение. Запишем прямое и обратное преобразование Фурье для суммы $af + bg$

$$F_\pm[af + bg](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [af(y) + bg(y)]e^{\mp ixy}\, dy.$$

Пользуясь свойством линейности интеграла, перепишем последний интеграл в виде суммы интегралов

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{\mp ixy}\, dy + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{\mp ixy}\, dy =$$

$$= aF_\pm[f(x)] + bF_\pm[g(x)].$$

ПРИМЕР 10.

Докажите, что формулы обращения справедливы для комплексно-значных функций.

Решение. Запишем формулы обращения для комплексно-значной функции $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ вещественно-значные функции,

$$f(x) = F_+[F_-[f(x)]] = F_+[F_-[u(x) + iv(x)]].$$

В силу линейности прямого и обратного преобразований Фурье перепишем уравнение в виде

$$F_+[F_-[u(x)]] + iF_+[F_-[v(x)]] = u(x) + iv(x) = f(x).$$

Считая a вещественным числом, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — непрерывной абсолютно интегрируемой функцией, докажите следующие равенства.

ПРИМЕР 11.

$$F_+[e^{iax} f(x)](y) = F_+[f(x)](y - a),$$

т. е. сдвиг по фазе у функции приводит к сдвигу по аргументу у ее преобразования Фурье.

Решение. Запишем прямое преобразование Фурье для функции $e^{iax} f(x)$

$$F_+[e^{iax} f(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix(y-a)}\, dx = F_+[f(x)](y - a).$$

Следствием этого свойства являются следующие равенства:

$$F_+[f(x)\cos ax](y) = \frac{1}{2}\big[F_+[f(x)](y-a) + F_+[f(x)](y+a)\big],$$

$$F_+[f(x)\sin ax](y) = \frac{1}{2i}\big[F_+[f(x)](y-a) - F_+[f(x)(y+a)]\big].$$

ПРИМЕР 12.

$$F_+[f(x-a)](y) = e^{-iay} F_+[f(x)](y),$$

т. е. сдвиг по аргументу у функции приводит к сдвигу по фазе у ее преобразования Фурье.

Решение. Найдем прямое преобразование Фурье для функции $f(x-a)$

$$F_+[f(x-a)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-iy(z+a)}\, dz = e^{-iay} F_+[f(z)](y)$$

(выполнена подстановка $x - a = z$).

ПРИМЕР 13.

Докажите, что если преобразованием Фурье функции $f(x)$ является $\hat{f}(y)$, то преобразованием Фурье функции $f(ax)$ служит $\dfrac{1}{|a|}\hat{f}\left(\dfrac{y}{a}\right)$, $\quad a \neq 0$.

Решение. Преобразованием Фурье функции $f(ax)$ будет

$$F_+[f(ax)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a\cdot\infty}^{+a\cdot\infty} f(z) e^{-i\frac{y}{a}z}\, dz = \frac{1}{a} F_+[f(z)]\left(\frac{y}{a}\right)$$

(выполнена подстановка $ax = z$) при $a > 0$; при $a < 0$ надо переставить пределы интегрирования, что даст

$$-\frac{1}{a}F_+[f(z)]\Big(\frac{y}{a}\Big) = \frac{1}{|\,a|}F_+[f(z)]\Big(\frac{y}{a}\Big).$$

Найдите аналоги приведенных выше свойств для обратного преобразования Фурье.

ПРИМЕР 14.

Пусть функция f и ее первая производная непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Докажите равенство

$$F_+\Big[\frac{df}{dx}\Big](y) = (iy)F_+[f(x)](y).$$

Решение. Запишем прямое преобразование Фурье для функции f'

$$F_+[f'(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx.$$

Так как f и f' непрерывны и абсолютно интегрируемы, то интеграл можно взять по частям

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[f(x)e^{-ixy}\big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}(-iy)\,dx\Big].$$

Покажем, что если функции f и f' абсолютно интегрируемы, то $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Так как

$$\big|\lim_{x\to+\infty} f(x) - f(0)\big| = \left|\int\limits_{0}^{+\infty} f'(x)\,dx\right| < +\infty,$$

то f ограничена на бесконечности. Но так как f абсолютно интегрируема, то площадь под графиком функции ограничена, а это возможно только если $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Аналогично можно показать, что $f(x) \to 0$ при $x \to -\infty$. Так как $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ и $\mid e^{-ixy} \mid= 1$, то внеинтегральное слагаемое зануляется и

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, iy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx \Big] =$$

$$= (iy) F_+[f(x)](y),$$

что доказывает требуемое утверждение.

Аналогично доказывается равенство

$$F_-\left[\frac{df}{dx}\right](y) = (-iy) F_-[f(x)](y).$$

Эти равенства означают, что преобразование Фурье переводит (с точностью до числового множителя) операцию дифференцирования в операцию умножения на независимую переменную. А в терминах операторов квантовой механики — унитарную эквивалентность оператора импульса и оператора координаты.

ПРИМЕР 15.

Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и, кроме того, функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Докажите, что функции $F_+[f]$ и $F_-[f]$ дифференцируемы, причем

$$\frac{dF_+[f]}{dy}(y) = -iF_+[xf(x)](y)$$

и

$$\frac{dF_-[f]}{dy}(y) = iF_-[xf(x)](y).$$

Эти равенства означают, что преобразование Фурье переводит (с точностью до числового множителя) операцию умножения на независимую переменную в операцию дифференцирования.

Решение. Докажем первое равенство. Продифференцируем по параметру интеграл

$$\frac{dF_+[f]}{dy}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dy}[f(x)e^{-ixy}]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-ix)f(x)e^{-ixy}\, dx =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ixy}\, dx = -iF_+[xf(x)](y).$$

Операция дифференцирования интеграла по параметру законна, так как $f(x)e^{-ixy}$ гладкая по y функция, а для функции

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x)e^{-ixy}\right)$$

существует интегрируемая на $\mathbb{R}$ мажорирующая функция

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x)e^{-ixy}\right)\right| = \left|-ixf(x)e^{-ixy}\right| = |xf(x)|\,.$$

Преобразование Фурье функции $xf(x)$ также существует, потому что $xf(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$.

Найдите прямое и обратное преобразования Фурье следующих функций.

ПРИМЕР 16.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mid x \mid \leq a, \\ 0, & \text{если } \mid x \mid > a. \end{cases}$$

Решение. Запишем прямое преобразование Фурье для функции f. В примере 3 мы убедились, что функция f кусочно-гладкая и абсолютно интегрируемая.

$$F_+[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} 1 \cdot e^{-ixy}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin ay}{y}.$$

Используя доказанное в примере 8 свойство преобразования Фурье

$$F_-[f](x) = F_+[f](-x),$$

получаем

$$F_-[f](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin ay}{y}.$$

ПРИМЕР 17.

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } \mid x \mid \leq \pi, \\ 0, & \text{если } \mid x \mid > \pi. \end{cases}$$

Решение. Представим функцию g в виде

$$g(x) = f(x)\cos x,$$

где f — функция, заданная в примере 16 при $a = \pi$. Используя формулу из примера 11:

$$F_+[f(x)\cos bx](y) = \frac{1}{2}\big[F_+[f(x)](y-b) + F_+[f(x)](y+b)\big],$$

имеем

$$F_+[f(x)\cdot\cos x](y) = \frac{1}{2}\big[F_+[f(x)](y-1) + F_+[f(x)](y+1)\big] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2}\Big[\frac{\sin\pi(y-1)}{y-1} + \frac{\sin\pi(y+1)}{y+1}\Big] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y\,\sin\pi y}{1-y^2}.$$

$$F_-[f](x) = F_+[f](-x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y\,\sin\pi y}{1-y^2}.$$

ПРИМЕР 18.

Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = Ce^{-ax^2},\quad C\in\mathbb{R},\ a>0.$$

Решение. Формула (11) дает

$$F_+[f](y) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-ixy}\,dx =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-ixy}\,dx.$$

Выделяя в показателе экспоненты полный квадрат

$$-ax^2 - ixy = -a\left(x + \frac{iy}{2a}\right)^2 - \frac{y^2}{4a}$$

и обозначая $z = \sqrt{a}\left(x + \dfrac{iy}{2a}\right)$, получаем

$$F_{+}[f](y) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{iy}{2a}\right)^2} e^{-\frac{y^2}{4a}}\, dx =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi a}}\, e^{-\frac{y^2}{4a}} \int\limits_{(L)} e^{-z^2}\, dz, \tag{13}$$

где (L) — прямая в комплексной плоскости z, параллельная вещественной оси и проходящая через точку $z = \dfrac{y}{2\sqrt{a}} i = vi$.

Покажем, что интеграл

$$\int\limits_{(L)} e^{-z^2}\, dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+iv)^2}\, du = I_v \tag{14}$$

не зависит от v. Для этого продифференцируем I_v по параметру v. Операцию дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, можем произвести, поскольку он мажорируется сходящимся интегралом, не зависящим от параметра. Оценим исходный интеграл

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ixy}\, dx \right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

так как $\left|e^{-ixy}\right| = 1$.

$$\frac{dI_v}{dv} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v} e^{-(u+iv)^2}\, du = -2i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+iv)^2} (u+iv)\, du.$$

Откуда для всех $v \in \mathbb{R}$ получаем

$$\frac{dI_v}{dv} = i e^{-(u+iv)^2}\Big|_{u=-\infty}^{u=\infty} = i e^{-u^2+v^2} e^{-2iuv}\Big|_{u=-\infty}^{u=\infty} = 0.$$

Полагая $v = 0$ в (14), получим

$$\int\limits_{(L)} e^{-z^2}\,dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

Подставляя найденное значение в (14), находим

$$F_+[Ce^{-ax^2}](y) = \frac{C}{\sqrt{2a}}\ e^{-\frac{y^2}{4a}}. \tag{15}$$

В случае, когда $a = \dfrac{1}{2}$, последняя формула приобретает вид

$$F_+[Ce^{-\frac{x^2}{2}}](y) = C\ e^{-\frac{y^2}{2}}. \tag{16}$$

ПРИМЕР 19.

Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\cos ax, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Решение. Используя формулу для преобразования Фурье, приведенную в примере 11:

$$F_+[f(x)\cos ax](y) = \frac{1}{2}\big[F_+[f(x)](y-a) + F_+[f(x)](y+a)\big],$$

и формулу (16), имеем

$$F_+[e^{-\frac{x^2}{2}}\cos ax](y) = \frac{1}{2}\big[e^{-\frac{(y-a)^2}{2}} + e^{-\frac{(y+a)^2}{2}}\big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^{\frac{(y^2-2ay+a^2)}{2}} + e^{\frac{(y^2+2ay+a^2)}{2}}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{\frac{-(y^2+a^2)}{2}}\big[e^{ay} + e^{-ay}\big] = \operatorname{ch} ay\, e^{\frac{-(y^2+a^2)}{2}}.$$

ПРИМЕР 20.

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — абсолютно интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Докажите, что $F_+[f(x)] = F_-[f(x)]$, если и только если f — четная функция.

Решение. Сначала покажем, что если функция f четная, то ее прямое преобразование Фурье равно обратному.

$$F_+[f(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx.$$

Выполняя в этом интеграле замену переменной $x = -z$ и используя равенство $f(-z) = f(z)$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(-z)e^{izy}\, d(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{izy}\, dz = F_-[f(z)](y).$$

Теперь покажем, что если прямое преобразование Фурье функции равно обратному, то она четная. Используя формулы Эйлера, запишем преобразования Фурье в виде

$$F_+[f(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos xy\, dx - i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin xy\, dx,$$

$$F_-[f(x)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos xy\, dx + i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin xy\, dx.$$

Из равенства преобразований Фурье получаем

$$F_{-}[f(x)](y) - F_{+}[f(x)](y) = 2i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin xy\,dx = 0.$$

Каждую функцию f можно представить как сумму $f = f_{\text{Ч}} + f_{\text{Н}}$ четной $f_{\text{Ч}}$ и нечетной $f_{\text{Н}}$ функций, где

$$f_{\text{Ч}} = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_{\text{Н}} = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Запишем последний интеграл в виде

$$0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f_{\text{Ч}} + f_{\text{Н}})\sin xy\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{Ч}}\sin xy\,dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{Н}}\sin xy\,dx.$$

В этом равенстве первый интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно нуля промежутку, значит,

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{Н}}\sin xy\,dx = 0,$$

а это есть преобразование Фурье нечетной функции.

Покажем, что если преобразование Фурье нечетной функции равно нулю, то равна нулю сама нечетная функция. Используем формулу обращения

$$f_{\text{Н}}(x) = F_{-}[F_{+}[f_{\text{Н}}(x)]](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{+}[f_{\text{Н}}(x)]e^{ixy}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot e^{ixy}\,dx = 0.$$

Следовательно, функция является четной $f = f_{\text{ч}}$.

В условии было сказано, что функция абсолютно интегрируемая, непрерывная и кусочно-гладкая. Абсолютная интегрируемость функции применяется для обоснования существования преобразований Фурье, а кусочная гладкость и непрерывность — при использовании формулы обращения.

2.2. Преобразование Фурье быстро убывающих функций

Преобразование Фурье быстро убывающих функций расширяет круг задач, в которых оно применяется, и упрощает технические детали.

2.2.1. Быстро убывающие функции

Определение. *Мультииндексом* α называется вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, все компоненты α_j которого — неотрицательные целые числа. При этом число n называют *длиной мультииндекса* α, а число $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ — его *весом*. Для любой (достаточно гладкой) функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ее производную

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \partial x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$$

кратко записывают как $D^\alpha f$.

Определение. Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называют *быстро убывающей*, если 1) f бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$ и 2) для каждого мультииндекса α и каждого положительного числа p найдется постоянная $K_{\alpha,p} < +\infty$ такая, что $\left|D^\alpha f(x)\right| \leq \dfrac{K_{\alpha,p}}{1 + |x|^p}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Здесь $|x|$ обозначает длину вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е.

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Приведем еще одно **определение.** Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называют *быстро убывающей*, если 1) f бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$ и 2) для любых мультииндексов $\alpha,\ \beta$ функция $x \to x^\alpha D^\beta f(x)$ ограничена в $\mathbb{R}^n$ (т. е. найдется постоянная $C_{\alpha,\beta} < +\infty$ такая, что $\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right| \le C_{\alpha,\beta}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$).

Эти два определения быстро убывающей функции эквивалентны.

2.2.2. Свойства быстро убывающих функций

1. Если f и g — быстро убывающие функции, то для любых комплексных чисел a и b функция $af + bg$ также является быстро убывающей.
2. Если f — быстро убывающая функция, то для любого мультииндекса α функция $D^\alpha f$ также является быстро убывающей.
3. Если f — быстро убывающая функция, то для любого мультииндекса α функция $x^\alpha f$ является быстро убывающей.
4. Произведение быстро убывающей функции на многочлен есть функция быстро убывающая.

Совокупность всех быстро убывающих функций, заданных в пространстве $\mathbb{R}^n$, образует векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число. Это пространство обозначают через $S(\mathbb{R}^n)$.

2.2.3. Преобразование Фурье быстро убывающих функций

Определение. Быстро убывающей функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ сопоставим две новые функции

$$\hat{f} = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)}\, dx$$

и

$$\overset{\vee}{f} = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i(x,\, y)}\, dx,$$

где $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Преобразование, переводящее функцию f в функцию $\hat{f}$, называется *прямым преобразованием Фурье* и обозначается через F_+. При этом саму функцию $\hat{f} = F_+[f]$ называют прямым преобразованием Фурье функции f.

Аналогично преобразование, переводящее f в $\overset{\vee}{f}$, называется обратным преобразованием Фурье и обозначается через F_-. При этом функцию $\overset{\vee}{f} = F_-[f]$ называют *обратным преобразованием Фурье* функции f.

Отметим, что интегралы, задающие прямое и обратное преобразования Фурье, являются сходящимися, поскольку модуль экспоненты с чисто мнимым показателем равен единице и для любого $p > 0$ быстро убывающая функция f допускает оценку

$$|f(x)| \le \frac{C}{1 + |x|^p},$$

справедливую с некоторой постоянной $C < +\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Поэтому

$$|f(x) e^{\pm i(x,\, y}| = |f(x)| \cdot |e^{\pm i(x,\, y}| = |f(x)| \le \frac{C}{1 + |x|^p},$$

как известно из курса математического анализа, последняя функция интегрируема по всему пространству $\mathbb{R}^n$, если только $p > n$. Отметим также, что при $n = 1$ определение преобразования Фурье, данное в настоящем параграфе, совпадает с определением, приведенным ранее в пункте 2.1.

2.2.4. Свойства преобразования Фурье быстро убывающих функций

1. Преобразование Фурье линейно, т. е. для любых $a,\ b \in \mathbb{C}$ и любых $f,\ g \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства

$$F_{\pm}[af(x) + bg(x)](y) = aF_{\pm}[f(x)](y) + bF_{\pm}[g(x)](y).$$

2. Для любого мультииндекса α и любой быстро убывающей функции f справедливы равенства

$$F_{\pm}[x^{\alpha} f(x)](y) = (\pm i)^{|\alpha|} D^{\alpha} F_{\pm}[f(x)](y).$$

3. Для любого мультииндекса α и любой быстро убывающей функции f справедливы равенства

$$F_{\pm}[D^{\alpha} f(x)](y) = (\pm iy)^{|\alpha|} F_{\pm}[f(x)](y).$$

4. Пусть A — невырожденная $n\times n$-матрица, b — n-мерный вектор и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция. Тогда

$$F_{\pm}[f(Ax + b)](y) = |det\, A|^{-1} e^{\pm(y, A^{-1}b)} F_{\pm}[f(x)]((A^{-1})^{*} y).$$

Здесь A^{-1} обозначает матрицу, обратную к A, а $(A^{-1})^{*}$ — матрицу, сопряженную к A^{-1}, т. е. такую (единственным образом определенную) матрицу, что для любых векторов $u, v \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$(A^{-1}u, v) = (u, (A^{-1})^{*} v).$$

5. Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция, а $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то

$$F_{\pm}[f(x - x_0)](y) = e^{\mp i(x_0,\, y)} F_{\pm}[f(x)](y).$$

6. Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция, а a — отличное от нуля вещественное число, то

$$F_{\pm}[f(ax)](y) = \frac{1}{|a|^n} F_{\pm}[f(x)]\Big(\frac{y}{a}\Big).$$

Свойство 6 обычно называют правилом изменения масштаба.

7. Как прямое, так и обратное преобразование Фурье переводит пространство быстро убывающих функций в себя. Другими словами, какова бы ни была функция $f \in S(\mathbb{R}^n)$, обе функции $F_\pm[f(x)]$ принадлежат $S(\mathbb{R}^n)$.

8. Для любой быстро убывающей функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ справедливы равенства

$$F_+[F_-[f]] = f$$

и

$$F_-[F_+[f]] = f.$$

Другими словами, последовательное применение прямого и обратного преобразований Фурье не изменяет функции. Свойство 8 называют формулой обращения для преобразования Фурье.

ПРИМЕР 21.

Проверьте, что функция $e^{-a|x|}$, $a > 0$, как и все ее производные, определенные при $x \neq 0$, убывает на бесконечности быстрее любой степени переменной x, и тем не менее эта функция не является быстро убывающей.

Решение. Покажем, что для функции $e^{-a|x|}$, $a > 0$, для всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ и любых α, $\beta \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left|x^\alpha D^\beta e^{-a|x|}\right| \leq C_{\alpha,\beta}$ из определения быстро убывающей функции, т. е. она и любая ее производная убывают на бесконечности быстрее многочлена любой степени. Для этого вычислим следующие пределы на бесконечности

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha D^\beta e^{-ax} = (-1)^\beta a^\beta \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-ax} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^\alpha D^\beta e^{ax} = a^\beta \lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^{ax} = 0.$$

Здесь мы воспользовались известными из математического анализа пределами $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-ax} = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^{ax} = 0$.

Покажем, что у функции $e^{-a|x|},\ a > 0$ в точке $x = 0$ не существует производная. Для этого вычислим следующие пределы:

$$\lim_{x\to+0} De^{-ax} = -a \lim_{x\to+0} e^{-ax} = -a,$$
$$\lim_{x\to-0} De^{ax} = a \lim_{x\to-\infty} e^{ax} = a.$$

Следовательно, для функции не выполняется первое условие из определения быстро убывающей функции, и она не является быстро убывающей.

ПРИМЕР 22.

Докажите, что функция $F_\pm[e^{-a|x|}],\ a > 0$, является бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функцией, но не является быстро убывающей.

Решение. Вычислим преобразование Фурье функции

$$F_+[e^{-a|x|}](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ixy}\, dx.$$

Раскроем модуль и представим интеграл в уравнении в виде суммы двух интегралов

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ixy}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x(a-iy)}\, dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{x(-a-iy)}\, dx \Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{x(a-iy)}}{a-iy}\Bigg|_{x=-\infty}^{x=0} + \frac{e^{-x(a+iy)}}{-(a+iy)}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a-iy} + \frac{1}{a-iy} \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \frac{a}{a^2+y^2}.$$

Функция $F_+[e^{-a|x|}](y) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{a}{a^2+y^2}$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Покажем, что она не убывает на бесконечности быстрее любого многочлена. Придадим числам α и β следующие значения $\alpha = 3$, $\beta = 0$ и подставим их в выражение $\left|x^\alpha D^\beta F_+[e^{-a|x|}](y)\right|$. Получим

$$\left|x^\alpha D^\beta F_+[e^{-a|x|}](y)\right| = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{ay^3}{a^2+y^2};$$

эта функция ведет себя на бесконечности как функция $g(y) = ky$, $k \in \mathbb{R}$. Следовательно, она не является быстро убывающей.

2.2.5. Свертка быстро убывающих функций

Каждым двум быстро убывающим функциям $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ сопоставим новую функцию $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, называемую *сверткой* функций f и g и задаваемую формулой

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Свертка обладает следующими свойствами.

1. Свертка коммутативна:

$$f * g = g * f.$$

2. Свертка ассоциативна:

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

3. Свертка линейна по первому аргументу, т. е. для любых комплексных чисел $a, b \in \mathbb{C}$ и любых быстро убывающих функций f, g и h справедливо равенство

$$(af + bg) * h = a(f * g) + b(g * h).$$

4. Для любого мультииндекса α и любых быстро убывающих функций f, g справедливы равенства

$$D^{\alpha}(f * g) = (D^{\alpha} f) * g = f * (D^{\alpha} g).$$

Другими словами, чтобы продифференцировать свертку, можно сначала продифференцировать любую из функций, а затем свернуть результат с другой функцией.

5. Преобразование Фурье с точностью до константы переводит свертку двух функций в произведение преобразований Фурье этих функций

$$F_{\pm}[f * g] = (2\pi)^{n/2} F_{\pm}[f] \cdot F_{\pm}[g].$$

6. Преобразование Фурье с точностью до константы переводит произведение двух функций в свертку преобразований Фурье этих функций

$$F_{\pm}[f \cdot g] = (2\pi)^{-n/2} F_{\pm}[f] * F_{\pm}[g].$$

Прежде чем перейти к последующим задачам, познакомимся с функцией Хевисайда.

Функцией Хевисайда называется функция вида

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

На рис. 5–7 приведены графики функций $H(x)$, $H(-x)$, $H(x-a)$, $a > 0$.

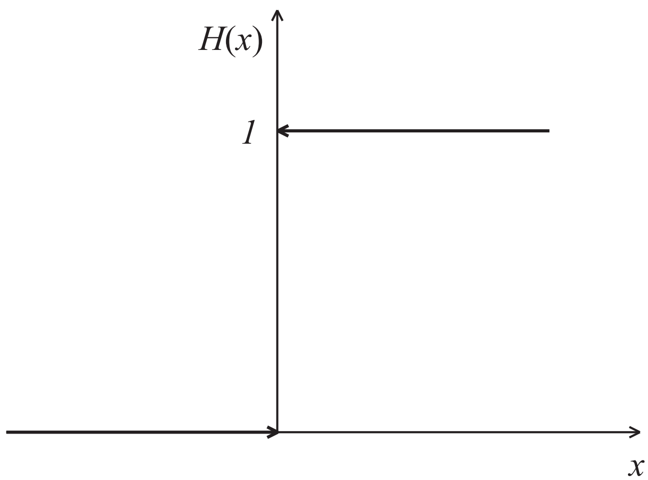

Рис. 5. График функции $H(x)$

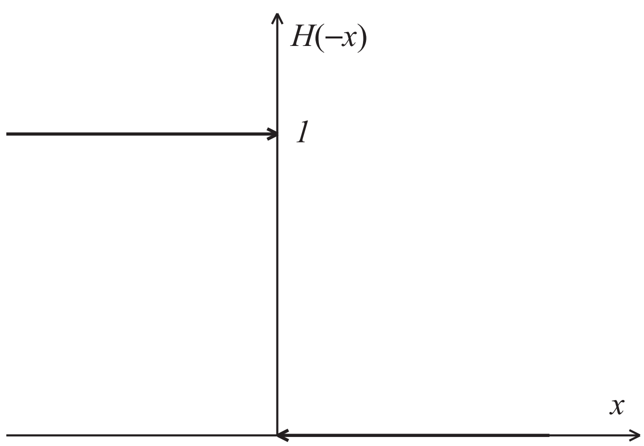

Рис. 6. График функции $H(-x)$

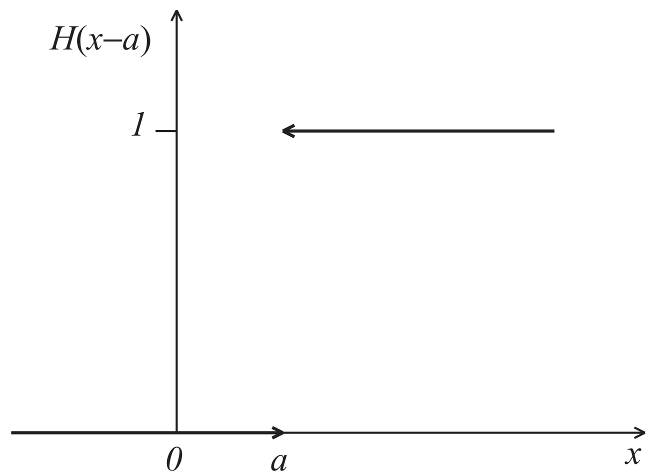

Рис. 7. График функции $H(x-a),\ a>0$

ПРИМЕР 23.

Найти свертку $\big(H*H\big)(x)$.

Решение. По определению свертки и функции Хевисайда имеем

$$\big(H*H\big)(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H(y)H(x-y)\,dy=\int\limits_{0}^{+\infty}H(y)H(x-y)\,dy.$$

Подинтегральная функция имеет вид

$$\big(H*H\big)(x)=\begin{cases}1, & \text{если } 0<y<x,\ x>0,\\ 0, & \text{если } x\le 0.\end{cases}$$

На рис. 8 и 9 приведены графики функций $H(y)$ и $H(x-y)$ при $x<0$ и $x>0$ соответственно. В первом случае ступеньки не пересекаются, и произведение $H(y)H(x-y)=0$ для всех y, а во втором — пересекаются, и $H(y)H(x-y)=1$ при $0<y<x$.

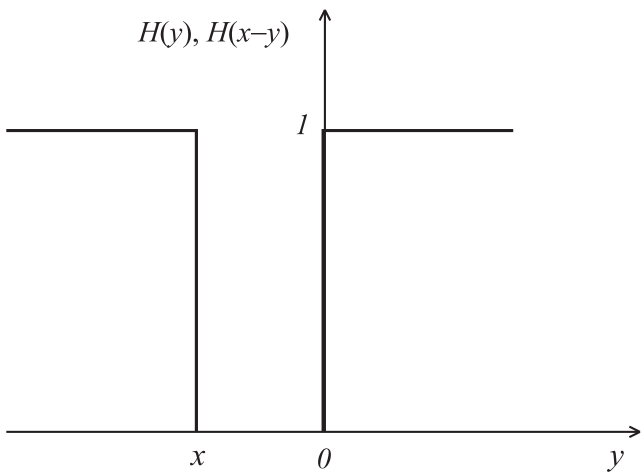

Рис. 8. Графики функций $H(y)$ и $H(x-y)$ при $x<0$

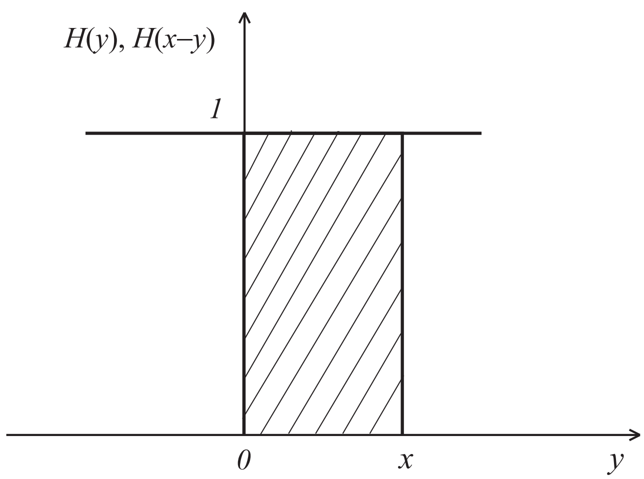

Рис. 9. Графики функций $H(y)$ и $H(x-y)$ при $x>0$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} H(y)H(x-y) = \begin{cases} \int\limits_0^x 1\cdot\, dy, & \text{если } 0<y<x,\ x>0, \\ \\ 0, & \text{если } x\le 0, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x & \text{если } 0<y<x,\ x>0, \\ 0, & \text{если } x\le 0. \end{cases}$$

Иначе последнее выражение можно записать так:

$$\big(H*H\big)(x) = xH(x).$$

ПРИМЕР 24.

Найти свертку $H(x)*\big(H(x)\sin(x)\big)$.

Решение. Используя предыдущий пример, получим

$$H(x)*\big(H(x)\sin(x)\big) = \int\limits_0^{+\infty} H(x-y)\sin(x-y)\,dy =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^x \sin(x-y)\,dy, & \text{если } 0<y<x,\ x>0, \\ \\ 0, & \text{если } x\le 0, \end{cases} =$$

$$= (1-\cos x)H(x).$$

В примерах 25 и 26 докажите равенства, считая параметры a и b положительными.

ПРИМЕР 25.

$f_a * f_b = f_{\sqrt{a^2+b^2}}$, если $f_a(x) = a^{-1}(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2a^2}$.

Решение. Докажем это равенство двумя способами: напрямую по определению и используя свойства преобразования Фурье свертки.

1. Доказательство по определению. Запишем свертку функций f_a и f_b

$$(f_a * f_b)(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{ab}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2a^2}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2b^2}}\,dy.$$

Совершим алгебраические преобразования в показателе экспоненты

$$-\frac{y^2}{2a^2} - \frac{(x-y)^2}{2b^2} = -\frac{x^2}{2b^2} - \frac{y^2 - \frac{2a^2xy}{a^2+b^2} + \left(\frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)^2 - \left(\frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)^2}{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} =$$

$$= -\frac{x^2}{2b^2} - \left(y - \frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)^2\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2} + \frac{a^2x^2}{2b^2(a^2+b^2)} =$$

$$= -\frac{x^2}{2(a^2+b^2)} - \left(y - \frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)^2\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}.$$

Вынося за знак интеграла множитель, не зависящий от переменной интегрирования, получим интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{ab}e^{-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y-\frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)^2\frac{a^2+b^2}{2a^2b^2}}\,dy.$$

Сделав в интеграле замену переменной

$$z = \left(y - \frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}ab},$$

получим

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{ab}\frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\,dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}}=f_{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Здесь мы воспользовались известным интегралом Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\,dz=\sqrt{\pi}.$$

2. Доказательство с использованием свойств преобразования Фурье свертки. Из формулы (15), доказанной в примере 18, следует

$$F_+\left[\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right](y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{a^2y^2}{2}},$$

$$F_+\left[\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2b^2}}\right](y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{b^2y^2}{2}},$$

$$F_+\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}}\right](y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{y^2}{2}(a^2+b^2)}.$$

Следовательно,

$$F_+\left[f_{\sqrt{a^2+b^2}}\right](y)=\sqrt{2\pi}F_+\left[f_a\right](y)\cdot F_+\left[f_b\right](y).$$

Используя свойство преобразования Фурье для быстро убывающих функций $F_\pm[f\cdot g]=(2\pi)^{-n/2}F_\pm[f]*F_\pm[g]$ при $n=1$ и формулу обращения, получаем

$$f_{\sqrt{a^2+b^2}}=F_-\left[F_+\left[f_{\sqrt{a^2+b^2}}\right]\right]=\sqrt{2\pi}F_-\left[F_+\left[f_a\right]\cdot F_+\left[f_b\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\left(F_-\left[F_+\left[f_a\right]\right]*F_-\left[F_+\left[f_b\right]\right]\right)=f_a*f_b,$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 26.

$f_a * f_b = f_{a+b}$, если $f_a(x) = \dfrac{H(x)}{x^{1-a}e^{\beta x}\Gamma(a)}$, где

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx \ \ -$$

гамма-функция (или *интеграл Эйлера второго рода*).

Решение. Так же, как в примере 25, решим задачу двумя способами.

1. Доказательство по определению. Запишем свертку функций f_a и f_b

$$(f_a * f_b)(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(y)}{y^{1-a}e^{\beta y}} \, \frac{H(x-y)}{(x-y)^{1-b}e^{\beta(x-y)}}\,dy.$$

Пользуясь определением функции Хевисайда, перепишем интеграл в виде

$$\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(y)}{y^{1-a}e^{\beta y}} \frac{H(x-y)}{(x-y)^{1-b}e^{\beta(x-y)}}\,dy =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \displaystyle\int\limits_0^x y^{a-1}(x-y)^{b-1}e^{-\beta x}\,dy, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Выполнив в интеграле подстановку $y = xz$, получим

$$(f_a * f_b)(x) =$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{e^{-\beta x}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a+b-1} \int\limits_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\, dz, & \text{если } x > 0, \\ \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}
$$

Последний интеграл является *бета-функцией* (или *интегралом Эйлера первого рода*), который связан с гамма-функцией зависимостью

$$
B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.
$$

Тогда вычисляемую свертку можно переписать в виде

$$
(f_a * f_b)(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\beta x}}{\Gamma(a+b)} x^{a+b-1}, & \text{если } x > 0, \\ \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} =
$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{1}{x^{1-(a+b)} e^{\beta x} \Gamma(a+b)} & \text{если } x > 0, \\ \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} =
$$

$$
= \frac{H(x)}{x^{1-(a+b)} e^{\beta x} \Gamma(a+b)} = f_{a+b}.
$$

2. Доказательство с использованием свойств преобразования Фурье свертки. Найдем преобразование Фурье для функции f_a

$$
\widehat{f_a}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(x)}{x^{1-a} e^{\beta x} \Gamma(a)} e^{-ixy}\, dx.
$$

Подставив в этот интеграл значение функции Хевисайда $H(x)$, приведем его к виду

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(x)}{x^{1-a} e^{\beta x} \Gamma(a)} e^{-ixy}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-ix(y-i\beta)}\, dx.
$$

Совершив замену переменной в интеграле $z = i(y - i\beta)x$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(a)} \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-ix(y-i\beta)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(a)(\beta + iy)^a} \int\limits_{\gamma_1^-} z^{a-1} e^{-z}\, dz, \tag{17}$$

где γ_1^- — прямая, задаваемая уравнением $z = i(y-i\beta)x$, $x \in (0, +\infty)$ в комплексной плоскости. Покажем, что последний интеграл равен интегралу

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(a).$$

Воспользуемся обобщенной *теоремой Коши* из курса теории функций комплексного переменного.

Если $f(z)$ есть функция, аналитическая в области D, внутренней к жордановой спрямляемой кривой L, и кроме того, $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то

$$\int\limits_C f(z)\, dz = 0.$$

Теорема Коши применима, если на границе нет особых точек, но подинтегральная функция $z^{a-1}e^{-z}$ в интеграле (17) имеет особенность в нуле при $0 < a < 1$, поэтому вырежем особую точку 0 малой окружностью радиуса ε. Получившаяся область интегрирования приведена на рис. 10.

Функция $z^{a-1}e^{-z}$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром $L = \gamma_0 \bigcup C_R \bigcup \gamma_1 \bigcup C_\varepsilon$. Беря этот контур интегрирования L, найдем по теореме Коши, примененной к функции $z^{a-1}e^{-z}$, интеграл:

$$\int\limits_L z^{a-1}e^{-z}\,dz = \int\limits_{\gamma_0} z^{a-1}e^{-z}\,dz +$$

$$= + \int\limits_{C_R} z^{a-1}e^{-z}\,dz + \int\limits_{\gamma_1} z^{a-1}e^{-z}\,dz + \int\limits_{C_\varepsilon} z^{a-1}e^{-z}\,dz = 0. \quad (18)$$

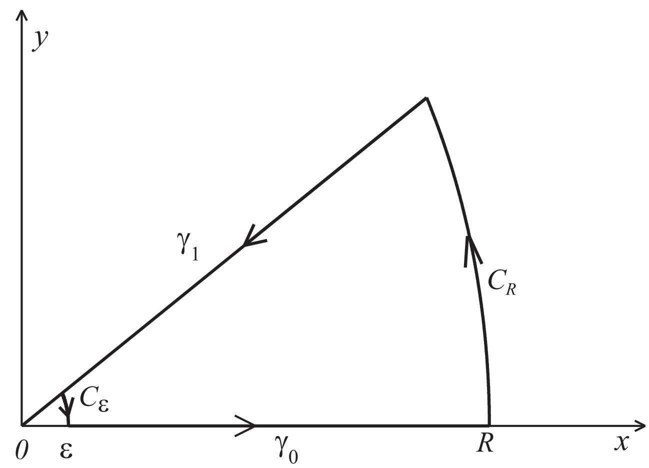

Рис. 10. Контур интегрирования L

На отрезке γ_0 имеем $z = x$, $dz = dx$ и интеграл

$$I_0 = \int\limits_{\gamma_0} z^{a-1}e^{-z}\,dz = \int\limits_{\varepsilon}^{R} x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$

На дуге C_R получаем $z = Re^{i\varphi}$, $dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$, $0 < \varphi < \varphi_0$ и интеграл

$$I_1 = \int\limits_{C_R} z^{a-1}e^{-z}\,dz = iR^a \int\limits_{|z|=R} e^{ia\varphi}e^{-Re^{i\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= iR^a \int_0^{\varphi_0} e^{ia\varphi} e^{-R\cos\varphi} e^{-iR\sin\varphi}\, d\varphi = iR^a \int_0^{\varphi_0} e^{-R\cos\varphi} e^{i(a\varphi - R\sin\varphi)}\, d\varphi.$$

На дуге C_ε переменная $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $dz = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$, $0 < \varphi < \varphi_0$ и интеграл

$$I_3 = \int_{C_\varepsilon} z^{a-1} e^{-z}\, dz = i\varepsilon^a \int_{|z|=\varepsilon} e^{ia\varphi} e^{-\varepsilon e^{i\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= i\varepsilon^a \int_{\varphi_0}^{0} e^{-\varepsilon\cos\varphi} e^{i(a\varphi - \varepsilon\sin\varphi)}\, d\varphi.$$

Оценим интеграл I_1 при $R \to +\infty$

$$|I_1| = \left| iR^a \int_0^{\varphi_0} e^{-R\cos\varphi} e^{i(a\varphi - R\sin\varphi)}\, d\varphi \right| \le \frac{R^a \varphi_0}{e^{R\cos\varphi_0}} \to 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$|i| = 1, \quad \left|e^{i(a\varphi - R\sin\varphi)}\right| = 1, \quad e^{-R\cos\varphi} \le e^{-R\cos\varphi_0}.$$

Последнее неравенство выполняется вследствие того, что косинус убывает при увеличении угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_0$. При этом $\cos\varphi_0 > 0$, так как $0 < \varphi_0 < \dfrac{\pi}{2}$.

Оценим интеграл I_3 при $\varepsilon \to +0$

$$|I_3| = \left| i\varepsilon^a \int_{\varphi_0}^{0} e^{-\varepsilon\cos\varphi} e^{i(a\varphi - \varepsilon\sin\varphi)}\, d\varphi \right| \le \frac{\varepsilon^a \varphi_0}{e^{\varepsilon\cos\varphi_0}} \to 0.$$

Следовательно, из равенства (18) вытекает, что

$$\int_{\gamma_0} z^{a-1} e^{-z}\, dz = -\int_{\gamma_1} z^{a-1} e^{-z}\, dz.$$

Учитывая, что интегрирование по отрезку γ_1 идет в направлении, противоположном направлению интегрирования по отрезку γ_1^-, получаем при $\varepsilon \to +0$ и $R \to +\infty$

$$\int\limits_{\gamma_1^-} z^{a-1} e^{-z}\, dz = \Gamma(a).$$

Таким образом, мы нашли, что преобразование Фурье функции f_a равно

$$\widehat{f_a}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\beta + iy)^a}.$$

Произведение преобразований Фурье функций f_a и f_b равно

$$\widehat{f_a} \cdot \widehat{f_b} = \frac{1}{2\pi}\, \frac{1}{(\beta + iy)^{a+b}},$$

а преобразование Фурье функции f_a и f_b равно

$$\widehat{f_{a+b}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\beta + iy)^{a+b}}.$$

Следовательно,

$$F_+\left[f_{a+b}\right](y) = \sqrt{2\pi} F_+\left[f_a\right](y) \cdot F_+\left[f_b\right](y).$$

Используя свойство преобразования Фурье для быстро убывающих функций $F_\pm[f \cdot g] = (2\pi)^{-n/2} F_\pm[f] * F_\pm[g]$ при $n = 1$ и формулу обращения, получаем

$$f_{a+b} = F_-\left[F_+\left[f_{a+b}\right]\right] = \sqrt{2\pi} F_-\left[F_+\left[f_a\right] \cdot F_+\left[f_b\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}\left(F_-\left[F_+\left[f_a\right]\right] * F_-\left[F_+\left[f_b\right]\right]\right) = f_a * f_b,$$

что и требовалось доказать.

2.2.6. Формула Пуассона

Теорема (формула Пуассона). Если $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — быстро убывающая функция, то

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n). \tag{19}$$

ПРИМЕР 27.

Докажите следующее соотношение, называемое θ-формулой и играющее важную роль в теории эллиптических функций и теории теплопроводности:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-tn^2}=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t}n^2}, \qquad t>0.$$

Решение. Определимся с тем, чтó взять за функцию f — e^{-tn^2} или $e^{-\frac{\pi^2}{t}n^2}$. В силу формулы обращения это не существенно, от этого выбора будет зависеть только то, насколько громоздкими будут выкладки.

Пусть

$$f(2\pi n)=e^{-tn^2}.$$

Совершив замену $x=2\pi n$ от дискретной переменной n, перейдем к непрерывной переменной x. Тогда

$$f(x)=e^{-t\frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

По формуле (15) из примера 18 имеем

$$\widehat{f}(y)=\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi^2}{t}y^2}.$$

Подставив в формулу Пуассона (19) значение преобразования Фурье функции в точке n, получим

$$\widehat{f}(n) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi^2}{t}n^2},$$

откуда

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n),$$

что требовалось доказать.

ПРИМЕР 28.

С помощью формулы Пуассона вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Обратите внимание, что участвующая в вычислениях функция не является быстро убывающей. Обоснуйте для нее законность применения формулы Пуассона.

Решение. В примере 22 мы вычислили преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-a|x|},\ a > 0,$$

и показали, что функция

$$\widehat{f(x)}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{a^2 + y^2}$$

не является быстро убывающей.

По формуле обращения имеем

$$F_{-}\left[\frac{1}{a^2 + y^2}\right](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-a|x|}.$$

Применив формально формулу Пуассона для функции

$$g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-a|x|},$$

не являющейся быстро убывающей, получим

$$\frac{\pi}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi a|n|} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Представим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi a|n|}$$

в виде суммы рядов с положительными и отрицательными индексами суммирования

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi a|n|} = \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-2\pi a|n|} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi a|n|}.$$

В сумме

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-2\pi a|n|}$$

сделаем замену $n = -k$ и раскроем модуль, в результате получим

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-2\pi a|n|} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2\pi a k}.$$

Сумма в правой части равенства является бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем, равным

$$q = e^{-2\pi a} < 1.$$

Найдем сумму ряда по формуле суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2\pi a k} = \frac{e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}.$$

Аналогично найдем сумму для $n \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi a|n|} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi a}}.$$

Тогда

$$\frac{\pi}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi a|n|} = \frac{\pi}{a} \left[\frac{e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}} + \frac{1}{1 - e^{-2\pi a}} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{a} \frac{e^{-2\pi a} + 1}{1 - e^{-2\pi a}}.$$

Преобразуем последнюю дробь

$$\frac{\pi}{a} \frac{e^{-2\pi a} + 1}{1 - e^{-2\pi a}} = \frac{\pi}{a} \frac{e^{-2\pi a} + 1}{1 - e^{-2\pi a}} \frac{e^{\pi a}}{e^{\pi a}} = \frac{\pi}{a} \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \pi a.$$

Теперь докажем, что мы имели право использовать формулу Пуассона для функции

$$g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-a|x|},$$

которая не является быстро убывающей.

При доказательстве теоремы (формулы Пуассона) использовалось неравенство

$$\left| \frac{df}{dx}(x + 2\pi n) \right| \leq \frac{C_p}{1 + |x + 2\pi n|^p},$$

выполняющееся для быстро убывающей функции, для обоснования равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx}(x + 2\pi n),$$

где $x \in [-\pi; \pi]$. В свою очередь, равномерная сходимость этого ряда нужна для обоснования почленного интегрирования ряда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)e^{-inx}\,dx.$$

Следовательно, показав, что ряд, составленный из производных,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'(x+2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x+2n\pi)^2+a^2}\right)' \tag{20}$$

сходится равномерно, мы убедимся в законности применения формулы Пуассона.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x+2n\pi)^2+a^2}\right)' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-2(x+2n\pi)}{\left((x+2n\pi)^2+a^2\right)^2}.$$

Оценим ряд

$$\left|\sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{+\infty} \frac{-2(x+2n\pi)}{\left((x+2n\pi)^2+a^2\right)^2}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{+\infty} \left|\frac{-2(x+2n\pi)}{\left((x+2n\pi)^2+a^2\right)^2}\right| \leq \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{+\infty} \frac{2}{|(x+2n\pi)^3|} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{|(x+2n\pi)^3|} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{|(x+2n\pi)^3|} \leq$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{|(x+2n\pi)^3|} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{|(x+2n\pi)|^3}.$$

В первой сумме выполним замену $n = -k$, и приняв во внимание, что $x \in [-\pi; \pi]$, получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{|(x-2k\pi)^3|} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{|(x+2n\pi)|^3} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(\pi(2k+1))^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(\pi(2n-1))^3}.$$

Слагаемое с индексом $n = 0$ оценим следующим образом:

$$|f'(x)| = \left| \frac{-2x}{(x^2+a^2)^2} \right| \leq \frac{2|x|}{a^4} \leq \frac{2\pi}{a^4}.$$

Собрав вместе все слагаемые, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f'(x+2\pi n)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(\pi(2n+1))^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(\pi(2n-1))^3} + \frac{\pi}{a^4}.$$

Мы показали, что каждое слагаемое функционального ряда (20) не превосходит соответствующее слагаемое сходящегося числового ряда, следовательно, ряд (20) сходится равномерно и применение формулы Пуассона законно.

ЗАДАЧИ

Найти преобразование Фурье следующих функций

10. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\, x \,| \leq a, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > a. \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi. \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} x\sin x, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi. \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi. \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{x}{2}, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi. \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi. \end{cases}$

16. $f(x) = x^2 e^{-a|x|}, \quad a > 0.$ 17. $f(x) = \sin x\, e^{-a|x|}, \quad a > 0.$

18. $f(x) = \cos x\, e^{-a|x|},\ a > 0.$ 19. $f(x) = x\sin x\, e^{-a|x|},\ a > 0.$

20. $f(x) = x^2 \cos x\, e^{-a|x|},\ a > 0.$ 21. $f(x) = \dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right).$

22. $f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi. \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} xe^{ix}, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi. \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} \sin xe^{ix}, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi. \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} x\sin xe^{ix}, & \text{если } |\, x \,| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |\, x \,| > \pi. \end{cases}$

Ответы

10. $\widehat{f}(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin ay}{y}$. 11. $\widehat{f}(y) = i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin \pi y}{y^2-1}$.

12. $\widehat{f}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\pi(1-y^2)\cos \pi y + 2y\sin \pi y}{(1-y^2)^2}$.

13. $\widehat{f}(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{y\sin \pi y}{1-y^2}$. 14. $\widehat{f}(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{2y\sin 2\pi y}{1-4y^2}$.

15. $\widehat{f}(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{2y\sin \frac{\pi y}{2}}{4-y^2}$. 16. $\widehat{f}(y) = 2a\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{1-3y^2}{(1+y^2)^3}$.

17. $\widehat{f}(y) = -i\,\dfrac{4a}{\sqrt{2\pi}}\,\dfrac{y}{a^4+a^2(y^2+1)+(y^2-1)^2}$.

18. $\widehat{f}(y) = a\,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{a^2+y^2+1}{a^4+a^2(y^2+1)+(y^2-1)^2}$.

19. $\widehat{f}(y) = \dfrac{4a}{\sqrt{2\pi}}\,\dfrac{a^4+(1-y^2)(a^2+1+3y^2)}{(a^4+a^2(y^2+1)+(y^2-1)^2)^2}$.

20. $\widehat{f}(y) = -a\,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\left(\dfrac{a^2+y^2+1}{a^4+a^2(y^2+1)+(y^2-1)^2}\right)''$.

21. $\widehat{f}(y) = -i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}y^3e^{-|y|}$. 22. $\widehat{f}(y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin \pi y}{1-y}$.

23. $\widehat{f}(y) = i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\pi(1-y)\cos \pi y + \sin \pi y}{(1-y)^2}$.

24. $\widehat{f}(y) = i\,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{(y-1)\sin \pi y}{y(2-y)}$.

25. $\widehat{f}(y) =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(3y^2-2y+1)\sin \pi y + \pi y(y-1)(y-2)\cos \pi y}{y^2(2-y)^2}.$$

2.3. О некоторых применениях преобразования Фурье

Преобразование Фурье широко применяется для решения различных задач математической физики. Преобразование Фурье искомой функции часто удовлетворяет значительно более простому уравнению, чем сама искомая функция. Поэтому для решения краевых задач математической физики преобразование Фурье применяется по следующей схеме: сначала подвергают преобразованию Фурье уравнение, которому удовлетворяет искомая функция, и таким путем получают уравнение для ее образа Фурье; затем, найдя из этого уравнения преобразование Фурье используемой функции, находят с помощью обратного преобразования Фурье саму искомую функцию.

2.3.1. Краевые задачи

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных, т. е. обладает n степенями свободы. Чтобы выделить из общего решения какое-либо частное, мы пользуемся начальными и граничными условиями. При задании начальных условий искомая функция и ее производные задаются при одном значении аргумента. Это особенно естественно, если независимой переменной служит время, т. е. изучается развитие некоторого процесса: тогда начальные условия просто служат математической записью начального состояния процесса. Именно поэтому применяются наименования *начальные условия*, *начальная задача* и в случае, если независимая переменная имеет другой физический смысл (задача Коши). Однако бывают задачи с другой постановкой, например, задаются значения функции в двух точках. Так, в простейшей задаче о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах, фиксируются положения концов струны, т. е. задаются *граничные условия*. Таким образом, дополнительные условия состоят из граничных и начальных условий, которые вполне определяют частное решение дифференциального уравнения, а задача о решении дифференциального уравнения при заданных граничных и начальных условиях называется *краевой задачей*.

2.3.2. Задача о колебаниях струны

В качестве примера применения преобразования Фурье решим краевую задачу о колебаниях струны.

Изучая тему «Ряды Фурье», мы вывели уравнение свободных малых поперечных колебаниий струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и решали его методом Фурье при различных начальных и граничных условиях, используя представление функции рядом Фурье. Теперь решим эту задачу, применяя преобразование Фурье.

ПРИМЕР 29.

Найдите функцию $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{21}$$

и начальным условиям

$$u(0, x) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x). \tag{22}$$

Напоминание: u — дважды непрерывно дифференцируемая функция, характеризующая отклонение струны от положения равновесия, функция $f(x)$ задает начальное положение струны, а функция $g(x)$ — скорость струны в начальный момент. Если $g(x) = 0$, то эта модель описывает движение гитарной струны, а если $g(x) \neq 0$, то — движение скрипичной струны.

Решение. Будем считать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ быстро убывающие (так как колебаниия малые, то движение локализовано в конечной области и вне этой области функции быстро зануляются). Решим эту задачу, применяя преобразование Фурье, по переменной x. Обозначим через $v(t, y)$ преобразование Фурье $u(t, x)$:

$$v(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t,x) e^{-ixy} dx. \tag{23}$$

Найдем дифференциальное уравнение для $v(t, y)$, используя то, что $u(t, x)$ удовлетворяет волновому уравнению (21). Продифференцируем по параметру t интеграл (23) (обосновать дифференцируемость пока не можем, обоснуем после получения ответа)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) e^{-ixy} dx = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) e^{-ixy} dx.$$

Таким образом, от дифференцирования функции $u(t, x)$ по параметру t мы перешли к дифференцированию функции $u(t, x)$ по переменной x. Воспользовавшись свойством дифференцирования преобразования Фурье

$$F_+[D^\alpha f(x)](y) = (iy)^{|\alpha|} F_+[f(x)](y),$$

получим ($\alpha = 2$)

$$\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) e^{-ixy} dx = -a^2 y^2 v(t,y).$$

Следовательно, для преобразования Фурье $v(t,y)$ искомой функции $u(t,x)$ получается уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^2 y^2 v(t,y) = 0, \tag{24}$$

значительно более простое, чем уравнение (21). В этом уравнении мы считаем, что y — фиксированный параметр, тогда уравнение (24) — это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, в то время как уравнение (21) — это дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Из равенства (22) при $t=0$ находим начальное условие для $v(t,y)$:

$$v(0,y) = \widehat{u(0,x)}(y) = \widehat{f}(y), \tag{25}$$

$$v_t(0,y) = \widehat{u_t(0,x)}(y) = \widehat{g}(y). \tag{26}$$

Решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$v(t,y) = A(y)\cos ayt + B(y)\sin ayt. \tag{27}$$

Определим функции $A(y)$ и $B(y)$ из условий (25) и (26)

$$v(0,y) = A(y) = \widehat{f}(y),$$

$$v_t(0,y) = ayB(y) = \widehat{g}(y).$$

Подставляя найденные функции $A(y)$ и $B(y)$ в равенство (27), получаем для преобразования Фурье искомой функции выражение

$$v(t,y) = \widehat{f}(y)\cos ayt + \frac{\widehat{g}(y)\sin ayt}{ay}. \tag{28}$$

Чтобы найти $u(t,x)$, применим к равенству (28) обратное преобразование Фурье по переменной y

$$u(t,x) = \overset{\vee}{v}(t,x) = F_{-}\left[\widehat{f}(y)\cos ayt + \frac{\widehat{g}(y)\sin ayt}{ay}\right](x).$$

Сначала найдем функцию $F_-\left[\widehat{f}(y)\cos ayt\right](x)$. Используя следствия свойства преобразования Фурье, приведенные в примере 11

$$F_-[f(x)\cos axt](y) = \frac{1}{2}\big(F_-[f(x)](y-at) + F_-[f(x)](y+at)\big)$$

и формулу обращения

$$F_-\left[F_+[f(x)]\right] = f(x),$$

имеем

$$F_-\left[\widehat{f}(y)\cos ayt\right](x) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(F_-\left[\widehat{f}\right](x-at) + F_-\left[\widehat{f}\right](x+at)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(f(x-at) + f(x+at)\right).$$

Теперь найдем функцию

$$F_-\left[\frac{\widehat{g}(y)\sin ayt}{ay}\right](x).$$

Введем новую функцию $G(y) = \int\limits_0^y g(t)\,dt$, тогда $g(y) = G'(y)$.

Преобразования Фурье примет вид

$$F_-\left[\frac{\widehat{G'}(y)\sin ayt}{ay}\right](x).$$

Пользуясь свойством дифференцирования преобразование Фурье, имеем

$$F_-\left[\frac{\widehat{G'}(y)\sin ayt}{ay}\right](x) = F_-\left[\frac{\widehat{G}(y)iy\sin ayt}{ay}\right](x).$$

Используя следствия свойства преобразования Фурье, приведенные в примере 11

$$F_{-}[f(x)\sin ax](y) = \frac{1}{2i}\big(F_{-}[f(x)](y-at) - F_{-}[f(x)](y+at)\big),$$

перепишем преобразование Фурье в виде

$$F_{-}\left[\frac{\widehat{G}(y) iy \sin ayt}{ay}\right](t,x) = \frac{1}{2a}\left[G(x-at) - G(x+at)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(z)\,dz.$$

Собрав все вместе, получим

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at) - \frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(z)\,dz\right].$$

Обоснуем теперь дифференцируемость интеграла (23), зависящего от параметра: мы получили, что искомая функция $u(t,x)$ выражается через заданные функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых мы приняли, что они являются быстро убывающими. По свойствам быстро убывающих функций $u(t,x)$ также является быстро убывающей функцией. Следовательно, операция дифференцирования была законной.

ЗАДАЧА

26. Решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

если начальное распределение температуры имеет вид

$$u(0,x) = f(x) = \begin{cases} u_0, & \text{если } x_1 < x < x_2, \\ \\ 0, & \text{если } x < x_1, \text{ или } x > x_2. \end{cases}$$

Ответ

26. $u(t,x) = \dfrac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2 t}}\, dz.$

Свойства преобразования Фурье

Функция	Преобразование Фурье
Формула обращения	
$f(x)$	$F_+\left[F_-[f(x)]\right] = f(x)$
$f(x)$	$F_-\left[F_+[f(x)]\right] = f(x)$
Связь между прямым и обратным преобразованиями Фурье	
$f(x)$	$F_-[f(x)](y) = F_+[f(x)](-y)$
$f(x)$	$F_+[f(x)](y) = F_-[f(x)](-y)$
Линейность	
$af(x) + bg(x)$	$aF_\pm[f(x)](y) + bF_\pm[g(x)](y)$
Запаздывание (сдвиг)	
$f(x - x_0)$	$e^{\mp iay}F_\pm[f(x)](y)$

Свойства преобразования Фурье (продолжение)

Функция	Преобразование Фурье
Частотный сдвиг	
$e^{iax}f(x)$	$F_{\pm}[f(x)](y-a)$
$f(x)\cos ax$	$\frac{1}{2}\left(F_{\pm}[f(x)](y-a)+F_{\pm}[f(x)](y+a)\right)$
$f(x)\sin ax$	$\frac{1}{2i}\left(F_{\pm}[f(x)](y-a)-F_{\pm}[f(x)](y+a)\right)$
Подобие (изменение масштаба)	
$f(ax)$	$\lvert a\rvert^{-1}F_{\pm}[f(x)]\left(\frac{y}{a}\right)$
Замена переменной	
$f(Ax+b)$	$\lvert det\,A\rvert^{-1}e^{\pm(y,A^{-1}b)}F_{\pm}[f(x)]((A^{-1})^{*}y)$
Свойство преобразования Фурье от n-ой производной	
$\frac{d^nf}{dx^n}$	$(\pm iy)^nF_{\pm}[f(x)](y)$

Свойства преобразования Фурье (продолжение)

Функция	Преобразование Фурье
Дифференцирование преобразования Фурье	
$x^n f(x)$	$(\pm i)^n D^n (F_\pm[f(x)](y)$
Теорема о свертке $(f,\ g \in S(\mathbb{R}^n))$	
$f * g$ $f \cdot g$	$(2\pi)^{n/2} F_\pm[f] \cdot F_\pm[g]$ $(2\pi)^{-n/2} F_\pm[f] * F_\pm[g]$
Равенство Парсеваля $(f,\ g \in S(\mathbb{R}^n))$	
$f,\ g$	$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}\,dx = = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overset{\vee}{f}(x)\overline{\overset{\vee}{g}(x)}\,dx$
Формула Пуассона $(f \in S(\mathbb{R}))$	
f	$\sqrt{2\pi} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)$

Из истории вопроса

Изучая тему «Ряды Фурье», мы вывели уравнение малых поперечных колебаний струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{29}$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$u(0, x) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x) \tag{30}$$

и граничным условиям

$$u(t, 0) = 0, \qquad u(t, l) = 0, \tag{31}$$

методом Фурье (или *методом разделения переменных*). Уравнение (29) было впервые выписано и решено в 1747 г. *методом бегущих волн* (*методом Даламбера*) Ж. Л. Д'аламбером. Но большее значение имело несколько более позднее решение той же задачи, найденное Даниилом Бернулли (1753 г.). Он решил это уравнение методом разделения переменных и нашел решение в виде

$$u = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{an\pi}{l} t\right), \tag{32}$$

где b_n — произвольное число, а n — выбранное заранее натуральное число. Таким образом, Д. Бернулли нашел семейство решений, удовлетворяющее как граничным условиям (31), так и второму из начальных условий (30). При этом начальная форма струны должна удовлетворять уравнению

$$u(0, x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

т. е. начальная форма струны не могла быть произвольной. Гениальная идея Бернулли состояла в сведении произвольного колебания струны к системе отдельных гармонических колебаний. Он предложил использовать *принцип суперпозиции*, т. е. тот факт, что любая сумма решений уравнения (29) также удовлетворяет этому решению. Сумма частных решений (32)

$$u = b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{a\pi t}{l}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{a\pi t}{l}\right) + \cdots \tag{33}$$

удовлетворяет уравнению (29), обоим граничным условиям (31) и второму из начальных условий (30), поскольку этому уравнению и условиям удовлетворяет каждое слагаемое суммы. Подставляя в (33) значение $t = 0$ и учитывая первое начальное условие, получаем

$$u(0, x) = b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + \cdots \tag{34}$$

— и задача сводится к тому, чтобы определить из (34) коэффициенты $b_1,\ b_2, \ldots$ представления (33) решения уравнения (29). Научившись задавать эти коэффициенты так, чтобы небольшое число слагаемых в сумме (33) наиболее полным образом описывало искомую функцию $u(t, x)$, можно сконструировать «непрерывное» колебание струны из набора гармонических колебаний.

Бернулли много занимался теорией колебаний и был хорошо знаком с процессом разложения произвольного колебания на отдельные гармоники. Исходя из своего опыта, он полагал, что формула (33) дает *общее решение* уравнения колебания струны (29), а коэффициенты $b_1,\ b_2, \ldots$ определяются из условия (34).

Дальнейшее усовершенствование метода Бернулли связано в первую очередь с исследованиями Жана Батиста Фурье (1768–1830). Фурье впервые изложил в связном виде общую теорию разложения функций в тригонометрические ряды, основанную на простых формулах для определения коэффициентов; он дал также множество примеров разложения конкретных функций. Но еще важнее были глубокие применения подобных разложений к конкретным задачам математической физики, например, к задаче о распространении тепла. Эти приложения базировались на той же идее, что и у Бернулли: начальные условия соответствующей задачи Фурье первоначально считал «синусоидальными». В этом случае решить задачу оказывалось сравнительно несложно, а общее решение получалось отсюда с помощью принципа суперпозиции и возможности разложения произвольной начальной функции $f(x)$ в тригонометрический ряд. И не случайно, несмотря на то что отдельные примеры разложений функций в тригонометрические ряды до Фурье рассматривались многими учеными (скажем, Л. Эйлером, Д. Бернулли, К. Ф. Гауссом и др.), все такие ряды сегодня принято называть *рядами Фурье*.

Процедура разложения функции в ряд Фурье (или в тригонометрический ряд) носит название *спектрального анализа* функции. Спектральное разложение периодических (или заданных на конечном промежутке $[-l, l]$) функций представляет собой ряд из «гармонических колебаний», частоты которых образуют дискретную последовательность и играет большую роль в математике, в частности, в изучении колебательных процессов. Само выражение «спектральное разложение» (или «спектральный анализ») функций связано с тем, что такой характер имеет разложение света в совокупность волн (гармонических колебаний) разной длины волны (или разного периода), причем для световых волн каждой длине волны (или периоду) отвечает свой цвет. В общем случае спектральное разложение произвольной (непериодической) (т. е. при $l \to +\infty$) функции содержит «гармоники», отвечающие всевозможным частотам, так что суммы приходится заменять *интегралами Фурье*, распространенными по широкому «спектру» частот. При переходе к пределу происходит качественный скачок, так как функция, заданная на всей оси x или на полуоси x, разлагается в интеграл, который представляет собой сумму «гармонических колебаний», частоты которых непрерывно заполняют действительную полуось $0 \le y < +\infty$.

Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции $f(x)$, которое задается формулой

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dy,$$

называют *образом Фурье*, или *спектральной характеристикой функции* $f(x)$. Преобразование Фурье переводит функцию в совокупность частотных составляющих, т. е. раскладывает исходную функцию на базисные функции, в качестве которых выступают синусоидальные функции (преобразование Фурье представляет исходную функцию в виде интеграла синусоид различной частоты, амплитуды и фазы). В случае, когда функция является функцией времени и представляет физический сигнал, преобразование интерпретируют как спектр сигнала. Абсолютная величина получающейся в результате комплексной функции $\left|\widehat{f}(y)\right|$ представляет амплитуды соответствующих частот (мы их обозначали как y), в то время как фазовые сдвиги получаются как аргумент этой комплексной функции.

При изложение исторического материала использованы данные [4].

Предметный указатель

Список литературы

1. *Александров В. А.* Преобразование Фурье: Учеб. пособие. Новосибирск : НГУ, 2002.

2. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. М. : Наука, 1972.

3. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. : Наука, 1965.

4. *Зельдович Я. Б., Яглом И. М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников. М. : Наука, 1982.

5. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М. : Высшая школа, 1989.

6. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. М. : Наука, Физматлит, 1995.

7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Изд-во МГУ, 1999.

8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М. : Наука, 1969.

Оглавление

Учебное издание

Бельхеева Румия Катдусовна

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Редактор *Д. И. Ковалева*

Подписано в печать 6.08.2014 г.
Формат 60 x 84/16. Уч.-изд. л. 5. Усл. печ. л. 4,7.
Тираж 150 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.