НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

С.В. СМИРНОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическая разработка

Новосибирск

2014

Аннотация

Данное учебное пособие разработано в рамках чтения курса «Дополнительные главы высшей математики» в 2014 году для китайских студентов физического факультета НГУ. Пособие включает избранный круг базовых вопросов геометрической вероятности и комбинаторики, знакомит студентов с распределениями дискретного и абсолютно непрерывного типа, моментами случайных величин. Пособие содержит краткое изложение материала лекций, а также задачи для решения на семинарах и для самостоятельной подготовки студентов. Для большинства задач приведены подробные решения и ответы. Выбор задач, объём и стиль изложения адаптированы для китайских студентов, изучающих высшую математику на русском языке. Для упрощения материала рассмотрение ограничивается, как правило, наиболее простыми задачами.

Оглавление

Введение

В окружающем нас мире большое количество процессов имеют *вероятностную* природу и могут быть успешно описаны с помощью раздела математики, называемого *теорией вероятностей*. Мы не знаем заранее исхода того или иного события, но при этом можем делать какие-либо нетривиальные выводы об исходе большого количества испытаний. Примеры областей, в которых используется теория вероятностей:

1. Азартные игры – исторически теория вероятностей возникла именно для решения «игровых» задач
2. Теория информации
3. Расчёт показателей надёжности техники
4. Теория массового обслуживания (теория очередей)
5. Статистическая физика
6. Квантовая механика

Курс теории вероятностей (рассчитанный на первую половину семестрового 100-часового курса дополнительных глав высшей математики) призван познакомить студентов с базовыми понятиями и наиболее простыми и хрестоматийными задачами теории вероятностей.

1 Случайные испытания и события

NB: доп.материалы для лекции 1: монеты, игральные кости, колода карт.

С*лучайным экспериментом* (или *испытанием*) мы будем называть любой эксперимент (испытание, измерение, действие), результат которого нельзя заранее достоверно предсказать. В качестве примера испытаний можно привести бросок монеты (заранее мы не знаем, какая из двух сторон монеты – аверс или реверс – окажется сверху после падения монеты), бросок игральной кости, количество очков, выбитое при стрельбе в цель спортсменом-стрелком на тренировке, показания уличного термометра в заданный момент в будущем, срок службы лампочки и т.п.

Среди всевозможных случайных испытаний объектом нашего исследования будут являться только те, которые могут быть повторены многократно при одних и тех же условиях. Например, мы всегда можем поставить ещё один эксперимент по броску игральной кости, можем измерить срок службы ещё одной лампочки и т.д., но, например, повторить Олимпиаду 2014 ровно с теми же условиями мы не можем, поэтому вопрос о вероятности того или иного исхода Олимпиады (как и любого другого невоспроизводимого испытания) выходит за рамки нашего рассмотрения[1].

[1] Такой подход к интерпретации и использованию теории вероятностей называют *объективистским* в противоположность *персоналистическому* – последний трактует вероятность как некоторую меру личного доверия к какому-либо утверждению (например, о количестве золотых медалей, выигранных сборной страны на Олимпиаде-2014) и потому не требует обязательной воспроизводимости случайного испытания.

Элементарными событиями мы будем называть один из всевозможных взаимно исключающих друг друга исходов случайных испытаний. Мы будем обозначать их греческой буквой ω. Совокупность всех элементарных исходов ω обозначим Ω и будем называть *пространством элементарных событий*.

Например, при подбрасывании монеты возможны всего два элементарных исхода: $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2 \}$:

ω_1 : монета упала «орлом» (аверсом) вверх

ω_2 : монета упала «решкой» (реверсом) вверх

При броске игральной кости[2] элементарных исходов шесть: $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4 , \omega_5 , \omega_6 \}$, где ω_k означает, что на игральной кости выпала цифра k от одного до шести включительно.

Если мы бросаем сразу две игральных кости, пространство элементарных исходов будет содержать 36 элементарных исходов. Его удобно представить в виде $\Omega = \{ \omega_{ab} \}$, где a = 1,…,6 – уже рассмотренные выше элементарные исходы при броске первой кости, b = 1,…,6 – аналогичные элементарные исходы при броске второй кости. Например, элементарный исход ω_{15} при таких обозначениях означает, что на костях выпали цифры 1 и 5. (Заметим, что если обе кости абсолютно одинаковы, то элементарный исход ω_{15} для участников игры будет практически неотличим от элементарного исхода ω_{51}.)

В рассмотренных выше случаях пространства элементарных событий были *конечными*, т.к. они содержали ограниченное число элементарных исходов. Часто приходится иметь дело и с непрерывными пространствами. Примером может служить уже упоминавшийся выше эксперимент о сгорающей лампочке. Элементарным событием в данном случае является следующее: «лампочка сгорит через время t после первого включения». Поскольку время течёт непрерывно, пространство элементарных исходов представляет собой положительную вещественную полуось.

Любое событие, произошедшее в результате случайного испытания, может рассматриваться как некоторое множество элементарных исходов случайных испытаний – подмножество пространства элементарных событий Ω. Событиями может быть выпадение «орла» на монете, выпадение трёх и более очков на игральной кости, выпадение чётного числа на двух костях, попадание пули в «десятку» на мишени, перегорание лампочки на вторую неделю её работы и т.п.

Поскольку событие в теории вероятностей определяется через множество элементарных исходов, мы будем использовать целый ряд определений и свойств, взятых из теории множеств: объединение событий, пересечение событий, непересекающиеся события, дополнительное событие ($\overline{A}$ означает, что событие A не происходит) и т.п.

Каждому элементарному исходу мы поставим в соответствие число – *вероятность* этого исхода случайного эксперимента. Вероятность характеризует среднюю частоту возникновения исхода в пределе бесконечного большого количества проведённых испытаний с идентичными условиями[3]. Сумма вероятностей всех элементарных исходов, очевидно, должна быть равна единице, т.к. один из элементарных исходов по определению происходит в результате каждого

[2] Кубики из однородного материала, имеющие шесть граней с нанесёнными на них цифрами от 1 до 6.

[3] Данное утверждение известно как *закон больших чисел*.

случайного эксперимента. Отсюда сразу же следует вывод, что вероятность наступление события, дополнительного к A, равно единице минус вероятность наступления A: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2 Равновероятные события

Рассуждения о вероятности проще начать с рассмотрения так называемых равновероятных событий. Проведем испытание (фактически или мысленно): подбросим монету и посмотрим, какой стороной вверх она упадёт – аверсом или реверсом («орлом» или «решкой»). Испытание имеет два возможных исхода:

1. Монета упала «орлом» вверх
2. Монета упала вверх реверсом.

Оба возможных результата испытания представляются нам равновероятными. При большом количестве однотипных независимых испытаний разумно ожидать, что оба исхода должны встречаться приблизительно с одинаковой частотой.

Аналогичный пример – игральные кости. Если мы бросим кость (проведём испытание), то существует шесть возможных исходов: выпала грань с цифрой «1», «2», …, «6». У нас нет причин предполагать, что какая-то из шести граней будет выпадать чаще, чем остальные, поэтому все возможные исходы разумно считать равновероятными.

Заметим, что в большом числе случаев мы не знаем точно, являются ли два события равновероятными – мы можем лишь предполагать это на основании имеющегося опыта и логических рассуждений. Наши соображения и рассуждения могут расходиться с действительностью из-за того, что мы не учли каких-либо факторов: например, центр тяжести игральной кости может быть смещён из-за дефекта к одной из граней, в этом случае цифра на противоположной грани будет выпадать чаще других.

3 Сложение вероятностей непересекающихся событий

События A_1 и A_2 называются *непересекающимися* (или *несовместными*), если они не могут произойти одновременно, т.е. если наступление одного из них исключает наступление другого. Например, непересекающимися событиями являются выпадение на игральной кости чётной цифры и выпадение цифры «5»; падение монеты «орлом» вверх и «решкой» вверх; попадание стрелком в «десятку» и промах по мишени; перегорание лампочки в первый же день и перегорание лампочки на второй год службы.

Очевидным частным случаем непересекающихся (несовместных) событий являются два различных элементарных исхода какого-либо случайного испытания – по определению, элементарные исходы являются взаимно исключающими, т.е. не могут наступить одновременно. В общем случае несовместные события представляют собой непересекающиеся множества элементарных исходов.

Вероятность объединения непересекающихся событий равна сумме вероятностей наступления этих событий. Например, вероятность того, что на игральной кости выпадет цифра «1» равна 1/6, равно как и вероятность выпадения цифры «2». Следовательно, вероятность события «выпадет 1 или 2» равна сумме этих двух вероятностей, т.е. 1/3.

4 Умножение вероятностей независимых событий

Другим важным базовым понятием теории вероятностей является независимость событий. Если результат одного испытания (напр., бросок монеты) никак не связан с результатом другого испытания (напр., с броском игральной кости или ещё одним броском монеты), то такие события называются *независимыми*. Рассмотрим на примере правило умножения вероятностей независимых событий[4]. Пусть в первом испытании – броске монеты (1 рубль) – имеются два равновероятных исхода (аверс / реверс). Во втором испытании – броске монеты (2 рубля) – также имеются два равновероятных исхода. Разумно предположить, что результат броска первой монеты никак не зависит от броска второй монеты.

В таком случае получаем 4 составных события – 4 исхода «двойного» броска:

1. Обе монеты легли «орлом» вверх
2. Первая монета легла «орлом» вверх, вторая – «решкой»
3. Первая монета легла «решкой» вверх, вторая – «орлом»
4. Обе монеты легли «решкой» вверх

Вероятность первого из четырёх исходов равна произведению вероятностей двух составляющих его событий: p_1 = 1/2 (вероятность того, что первая монета легла «орлом» вверх) и p_2 = 1/2 (вероятность того, что вторая монета легла «орлом» вверх). В результате получаем 1/4. Аналогично получаем тот же самый ответ для каждого из четырёх возможных исходов «двойного» броска монеты.

Вычислим вероятность выпадения трёх «решек» в трёх последовательных бросках монеты. Вероятность получить «решку» в каждом из трёх бросков равна 1/2, поскольку эти события независимы, получаем (1/2) × (1/2) ×(1/2) = 1/8.

Другой пример. Найдём вероятность выпадения хотя бы одного орла в серии из трёх бросков монеты. Множество элементарных исходов состоит из восьми событий: ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО и РРР, где буквой «О» обозначаем выпадение «орла», «Р» - «решки». Событие «выпал по крайней мере один "орёл" в трёх бросках» является объединением первых семи из перечисленных выше элементарных исходов (т.е. всех, где есть буква «О»). Все элементарные исходы в данном случае равновероятны – их вероятность даётся произведением вероятностей соответствующего результата броска одной монеты, т.е. 1/2. В итоге для каждого из восьми элементарных исходов имеем вероятность 1/8, искомая вероятность объединения семи первых исходов равна 7/8.

Заметим, что данную задачу можно было решить несколько проще, если заметить, что дополнительным по отношению к интересующему нас событию «выпал хотя бы один "орёл"» является событие «не выпало ни одного орла» или, что в данном случае то же самое, «выпало три "решки"». Вероятность последнего события уже была найдена нами выше и равна третьей степени от 1/2, т.е. 1/8. Следовательно, искомая вероятность выпадения «хотя бы одного "орла"» равна 1 – 1/8 = 7/8.

[4] При «строгом» изложении независимыми событиями по определению называются те, вероятности которых перемножаются, т.е. для которых справедливо $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Дальнейшее изложение в данном разделе является, по сути, иллюстрацией данного определения.

Таблица 1.1. Вероятности элементарных событий равны произведениям вероятностей независимых событий – результатов двух бросков монеты.

	Результат броска монеты 2р	
	Монета 2 р упала «орлом» (аверсом) вверх  Вероятность: 1/2	Монета 2 р упала «решкой» (реверсом) вверх  Вероятность: 1/2
Результат броска монеты 1р		
Монета 1 р упала «орлом» (аверсом) вверх  Вероятность: 1/2	обе монеты упали «орлом» вверх  Вероятность: (1/2) × (1/2) = 1/4	монета 1р упала «орлом» вверх, 2р – «решкой»  Вероятность: (1/2) × (1/2) = 1/4
Монета 1 р упала «решкой» (реверсом) вверх  Вероятность: 1/2	монета 1р упала «решкой» вверх, 2р – «орлом»:  Вероятность: (1/2) × (1/2) = 1/4	обе монеты упали «решкой» вверх  Вероятность: (1/2) × (1/2) = 1/4

5 Вопросы для самопроверки

1. Что такое случайный эксперимент (случайное испытание)? Приведите примеры случайных экспериментов.
2. Что такое элементарный исход?
3. Что называют событием?
4. Какие события называют несовместными? Какое событие называется дополнительным (противоположным) к событию А?
5. Возможные исходы каких из следующих испытаний представляются Вам равновероятными / не равновероятными? Являются ли результаты последовательных испытаний зависимыми / независимыми? Ответ обоснуйте.
    a. День недели, в который столбик термометра впервые за весну поднимется выше нуля
    b. День недели, в который перегорит лампа в Вашей учебной аудитории.
    c. Последняя цифра показаний электронного уличного термометра с дискретностью показаний 1 градус Цельсия при снятии показаний в начале каждого часа.

d. Последняя цифра показаний электронного уличного термометра с дискретностью показаний 10^{-3} °С при снятии показаний в начале каждого часа.
e. Этаж, на котором находится лифт в Вашем общежитии в 10 часов утра.
f. Последний разряд секундомера (0.1 сек), останавливаемого вручную в произвольный момент времени
g. Буква ровно посередине первой строки на случайно открытой странице книги является гласной / согласной.
h. Буква ровно посередине первой строки на случайно открытой странице находится в первой половине алфавита (среди первых 16 букв) / во второй половине алфавита (среди последних 16 букв).
i. Пол первого встреченного Вами студента на выходе из аудитории после пары.
j. Чётность числа, выпавшего на игральной кости (1…6 mod 2)
k. Чётность числа, выпавшего на двух игральных костях (2…12 mod 2)

6. Приведите свой пример равновероятных событий.
7. Приведите свой пример событий с близкими, но предположительно неравными вероятностями.
8. Приведите свой примеры испытания, дающего серию независимых событий.
9. Приведите примеры, когда вероятности событий суммируются.
10. Приведите примеры, когда вероятности событий перемножаются.

6 Упражнения

1. Найти вероятность того, что на игральной кости выпала чётная цифра
2. Найти вероятность того, что на двух игральных костях выпало в сумме число «2».
3. Найти вероятность того, что на двух игральных костях выпало в сумме число «3».
4. Найти вероятность того, что на двух игральных костях выпало в сумме число «7».
5. При игре в «подкидного дурака» пользуются колодой из 36 карт, распределённых по четырём мастям. Какова вероятность того, что первой сданной картой будет карта пиковой масти? Дама? Дама пик? Козырь (козырной служит масть первой карты, оставшейся после сдачи)? [1][5]
6. Какова вероятность того, что при троекратном броске монета каждый раз будет падать «орлом» вверх? Выпадет ровно один «орёл»? Чему равна удвоенная сумма этих вероятностей и почему?

7 Радиоактивный распад

В качестве ещё одного примера рассмотрим важную физическую задачу о радиоактивном распаде. Процесс самопроизвольного распада нестабильных атомов описывается уравнением

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha \cdot N$$

[5] Взято из Б.Зельдович, А.Д. Мышкис «Элементы прикладной математики» (М.: Наука, 1972)

где N – количество нестабильных атомов, t – время, α – постоянная распада. Данное уравнение означает, что за малое время Δt распадается α·N·Δt атомов при условии, что начальное количество атомов очень велико.

Разделив данное уравнение на число атомов, можно получить дифференциальное уравнение на вероятность события «заданный атом не распался к моменту времени $t > 0$»:

$$\frac{dP}{dt} = -\alpha \cdot P$$

где $P(t)$ – вероятность того, что атом к моменту времени t не распался. Интегрируя данное уравнение с условием $P(0) = 1$, получаем $P(t) = \exp(-\alpha \cdot t)$.

К тому же ответу можно прийти другим способом. Заметим, что α·Δt задает вероятность распада атома в течение бесконечно малого времени Δt, тогда 1–α·Δt равно вероятности дополнительного события – «атом не испытал распада в течение времени Δt». Событие «атом не испытал распада в течение n интервалов времени Δt» наступает при условии, что атом не распался ни в течение первого промежутка Δt, ни второго промежутка Δt, и т.д. до n-го промежутка. (Процесс распада можно условно представлять себе как бросание игральных костей на каждом отрезке времени Δt; в случае появления некоторой комбинации, выпадающей с вероятностью α·Δt, атом распадается). В итоге для вероятности события «атом не испытал распада в течение n интервалов времени Δt» имеем произведение $(1 - \alpha \cdot \Delta t)^n$. Искомая вероятность события «атом не распался к моменту времени t» даётся выражением

$$P(n \cdot \Delta t) = (1 - \alpha \cdot \Delta t)^n = \left[(1 - \alpha \cdot \Delta t)^{(\alpha \cdot \Delta t)^{-1}}\right]^{n\alpha \cdot \Delta t} = \exp(-\alpha \cdot n \cdot \Delta t)$$

Здесь использован т.н. второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Вводя обозначение $t \equiv n \cdot \Delta t$, получаем тот же ответ, что и при интегрировании дифференциального уравнения:

$$P(t) = \exp(-\alpha \cdot t)$$

для вероятности события «атом не распался к моменту времени $t > 0$»

8 Элементы комбинаторики

В данном разделе будут рассмотрены основные понятия комбинаторики, используемые теорией вероятностей.

Рассмотрим некоторое множество X, состоящее из элементов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Будем выбирать из этого множества различные упорядоченные подмножества Y из k элементов.

Размещением из n элементов множества X по k элементам назовём любой *упорядоченный* набор $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\right)$ элементов множества X.

Если каждый элемент x_i из множества из X может быть выбран несколько раз, то число размещений из n по k находится по формуле n^k (размещения с повторениями).

Если же каждый элемент можно выбирать только один раз, то количество размещений из n по k обозначается A_n^k (размещения без повторений) и определяется равенством

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример 1. Сколько различных «слов» длины *L* можно составить из букв «алфавита», содержащего *N* букв? – Поскольку буквы в слове могут повторяться, то искомое число равно N^L.

Пример 2. Сколько различных трёхзначных чисел можно сложить, имея пять детских кубиков с цифрами «1», «3», «5», «7», «9»? – Поскольку каждый кубик можно использовать только один раз при составлении числа, искомое число размещений из пяти кубиков по три равно $A_5^3 = 60$.

Размещения при n=k обычно называют *перестановками* и обозначают P_n: $A_n^n = P_n = n!$

Пример 3. Сколько возможных вариантов очерёдности приёма экзамена одним экзаменатором есть в вашей группе?

Выше мы обсуждали извлечение из множества X упорядоченных наборов элементов Y. Рассмотрим теперь случай составления неупорядоченных наборов. ***Сочетаниями*** из n элементов по k называются подмножества из k элементов, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом. Общее число сочетаний из n по k обозначается C_n^k и равно

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Пример. Сколько существует способов выбора двух помощников из вашей группы?

Пример. Из игральной колоды, содержащей 36 карт, игроку сдаётся 6 карт. Сколько различных комбинаций карт может быть у игрока? $C_{36}^6 = \frac{36!}{30!\,6!} \approx 1.9 \cdot 10^6$.

9 Задачи

Задача 1. (биномиальные коэффициенты). Вычислить $(a+b)^n$.

Решение. После раскрытия скобок получим 2^n слагаемых, каждое из которых является произведением вида $a^k b^{n-k}$, т.е. суммарная степень *a* и *b* в каждом слагаемом равна *n*. Количество слагаемых вида $a^k b^{n-k}$ равно числу сочетаний из *n* по *k*, т.е. числу выбора *k* скобок, из которых мы возьмём число *a*. Следовательно, искомая формула для бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Задача 2. В гардеробе девушки есть четыре блузки, пять юбок и трое пар туфель. Сколько различных комбинаций нарядов можно составить из такого гардероба? [1]

Решение. Вначале можно выбрать любую из четырёх блузок, затем пятью независимыми способами можно выбрать любую из юбок и, наконец, скомбинировать каждый вариант с любыми из трёх пар туфель. Итого получаем 4*5*3 = 60 различных комбинаций.

Задача 3. Сколько существует различных вариантов расстановке 30 книг на книжной полке?

Решение. Речь идёт о числе всевозможных перестановок книг, т.е. 30!

Задача 4. На полке стоят 30 книг, 3 из которых написаны одним автором, а 27 других – различными другими авторами. Сколько существует различных вариантов расстановки этих книг на полке, если книги одного автора должны стоять рядом друг с другом? [1]

Решение. Будем считать книги одного автора одним объектом, тогда получим задачу о числе перестановок 28 объектов, 28!. Данное число перестановок нужно умножить ещё на число перестановок трёх книг одного автора, в результате получим 28! × 3!

Задача 5. В хороводе вокруг ёлки ходят *N* детей. Найти количество всевозможных вариантов расстановки детей в хороводе.

Решение. Нужно разделить количество перестановок детей N! на количество циклических перестановок детей по кругу, т.е. на N, итого имеем (N–1)!

Задача 6. Найти число возможных способов окраски четырёх сторон квадрата, склеенного из спичек, с помощью четырёх разных красок. (Под различными способами окраски понимаются те, которые не могут быть получены друг из друга никакими поворотами квадрата).

Решение. Всего способов окраски квадрата 4! (число перестановок имеющихся у нас красок). Это число нужно поделить на число всевозможных способов ориентации квадрата за счёт поворотов, т.е. на *порядок группы вращения квадрата*, равный 8. К этому ответу можно прийти либо непосредственно выписывая всевозможные способы поворотов квадрата (нумеруя для удобства его вершины), либо заметив, что данное число должно получаться в результате умножения количества эквивалентных вершин квадрата (4) на количество ориентаций квадрата, при котором одна из вершин остаётся на месте (2). (Аналогично можно оставлять на месте верх/низ квадрата, одну из четырёх сторон, одну из двух диагоналей). Итого получаем 4!/8 = 3 различных способа окраски.

Задача 7. То же для окраски сторон треугольника тремя разными красками.

Решение. 3!/6 = 1.

Задача 8. То же для окраски граней куба шестью разными красками.

Решение. 6!/24 = 30.

Задача 9. Найти количество линейно-независимых однородных полиномов от x, y, z степени *p* (т.е. полиномов вида $x^j y^k z^{p-j-k}$).

Решение. Данная задача эквивалентна задаче о распределении *p* шаров (степени полиномов) по трём коробкам. Эта задача, в свою очередь, эквивалентна задаче о перестановках *p* шаров и двух перегородок между ними, т.е. нужно выбрать два места для перегородок из имеющихся *p*+2 мест без повторений (всего мест *p*+2, т.к. нужно разместить в любой последовательности *p* шаров и 2 перегородки). Следовательно, получаем

$$C_{p+2}^2 = \frac{(p+2)!}{p!\,2!} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

Данный ответ элементарно обобщается на случай пространств произвольной размерности *n*:

$$C_{p+n-1}^{n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

Задача 10. С какой вероятностью сумма чисел, выброшенных на двух игральных костях, окажется чётным числом?

Решение 1. Интересующее нас событие – «сумма чисел, выброшенных на двух игральных костях, окажется чётным числом» – является объединением следующих шести непересекающихся событий: «сумма чисел равна двум», «сумма чисел равна четырем», «сумма чисел равна шести», …, «сумма чисел равна двенадцати». В свою очередь, каждое из этих событий является множеством из одного или нескольких элементарных исходов:

сумма очков	2	4	6	8	10	12
элементарные исходы	1+1	1+3, 2+2, 3+1	1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1	2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2	4+6, 5+5, 6+4	6+6
вероятность	1/36	3/36	5/36	5/36	3/36	1/36

Следовательно, суммарная вероятность непересекающихся событий, дающих в объединении интересующее нас событие – «выпадение чётного числа в сумме двух бросков» – равна (1+3+5+5+3+1)/36 = 18/36 = 1/2. Таким образом, выпадение чётного и нечётного числа в сумме двух бросков игральной кости равновероятно, несмотря на то, что чётных чисел в сумме шесть, а нечётных только пять.

Решение 2. Запишем множество из 36 элементарных исходов в виде таблицы 6 x 6. Элементарный исход на пересечении i-й строки и j-го столбца означает выпадение на первой кости цифры i, на второй – цифры j. Заштрихуем клеточки, соответствующие чётной сумме i+j. Очевидно, что таких клеточек будет ровно половина от общего числа (18 из 36), т.к. их будет поровну в каждой отдельно взятой строке (и в каждом отдельно взятом столбце). Следовательно, вероятность наступления события «сумма чисел, выброшенных на двух игральных костях, окажется чётным числом», равна 1/2.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Задача 11. Найти вероятность того, что сумма чисел при броске двух игральных костей будет больше семи.

Решение. Суммируя вероятности непересекающихся событий «сумма чисел равна восьми», «сумма чисел равна девяти», … «сумма чисел равна двенадцати», имеем (5/36)+(4/36)+(3/36)+(2/36)+(1/36) = 15/36. К такому же ответу можно прийти, подсчитывая клеточки под главной диагональю в таблице выше либо заметив, что вероятность выбросить число больше семи равна вероятности выбросить число меньше семи, а вместе с вероятностью выбросить число семь должна получиться единица, т.е. 2P+(1/6)=1, откуда P=5/12.

Задача 12. Найти вероятность того, что сумма чисел при броске двух игральных костей будет чётным числом, больше 7.

Решение. Суммируя вероятности выбросить в сумме 8, 10 и 12, получаем 9/36 = 1/4.

Задача 13. Являются ли события «Сумма чисел при броске двух игральных костей является чётным числом» и «сумма чисел при броске двух игральных костей больше семи» независимыми?

Решение. Вероятность наступления пересечения двух независимых событий равна произведению вероятностей наступления каждого из этих событий в отдельности. Если бы указанные события являлись бы независимыми, вероятность наступления события в их пересечении – «сумма чисел при броске двух игральных костей будет чётным числом больше семи» – была бы равна произведению найденных выше вероятностей (1/2)×(5/12) = 5/24. В действительности же мы нашли для этого события вероятность, равную 1/4 = 6/24. Отсюда следует, что указанные события не являются независимыми – говорят, что они коррелируют друг с другом.

Для иллюстрации понятия корреляции рассмотрим другой пример. Пусть в университете учится равное количество студентов мужского и женского пола. Тогда вероятности встретить на входе в здание университета студента (событие *M*) и студентку (событие *F*) равны. Вероятность встретить на входе обучающегося с длинными волосами (событие *L*) также приблизительно будет равна 1/2 (здесь мы предполагаем, что почти у всех девушек-студенток длинные волосы, а почти у всех парней-студентов более короткие причёски). Однако вероятность события «встреча на входе с девушкой-студенткой с длинными волосами» (событие $F \cap L$), лежащего в пересечении событий *F* «встретить девушку» и *L* «встретить человека с длинными волосами» будет близка к 1/2, а не к 1/4, как можно было бы ожидать из произведения вероятностей P(*F*)×P(*L*).

Задача 14. Для некоего стрелка вероятность попадания в мишень равна 1/2. Сколько раз ему нужно выстрелить по мишени, чтобы вероятность по крайней мере одного попадания была не меньше 0.99?

Решение. Рассмотрим дополнительное событие – «стрелок ни разу не попал по мишени в результате *n* выстрелов», которое происходит с вероятностью $(1/2)^n$. Следовательно, вероятность «хотя бы одного попадания» равна $1-(1/2)^n \geq 0.99$, откуда $n \geq \frac{2\ln 10}{\ln 2} > 6$, т.е. стрелку нужно семь или более выстрелов.

Задача 15. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?
Решение. Каждая партия играется двумя участниками из 16 и отличается от других только составом пар участников, т.е. представляет собой сочетания из 16 элементов по 2. Их число равно C_{16}^2=15×16/2 = 120.

Задача 16. Студенту нужно в течение *N* дней *последовательно* решить M (при $M \geq N$) задач (т.е. решение задачи с номером *j*+1 можно начинать только после окончания решения задачи с номером *j*). Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет решать не менее одной задачи в день?
Решение. Студент решает, после какой по счету задачи остановиться в первый день, после какой – во второй и т.д. до *M*–1. Таким образом, можно представить себе, что задачи в списке разделены *M*–1 чертой, каждая из которых может быть проведена на одном из *N*–1 мест (в одном из промежутков между *M* задачами). Черты должны быть отделены друг от друга по меньшей мере одной задачей (другими словами, никакие две черты не могут занять одно и тоже место из *M*–1

имеющихся), поскольку иначе в какой-то день не будет решено ни одной задачи. Таким образом, надо выбрать *N*–1 элементов из *M*–1 без повторений. Следовательно, число способов C_{M-1}^{N-1}.

Задача 17. Каким будет ответ в условиях предыдущей задаче, если у студента нет необходимости каждый день решать по крайней мере одну задачу?
Решение. Ответ будет таким же, как и в задаче о количестве линейно независимых однородных полиномов степени *M* над пространством размерности *N*: C_{M-1+N}^{N-1}: в этом случае нужно выбрать место для *M–1* черты из *M+N–1* возможных мест (число мест равно сумме числа переставляемых объектов – задач *N* и числа черт *M–1*).

Задача 18. Найти вероятность выбрасывания «дубля» (двух одинаковых цифр) на двух игральных костях.
Решение: вероятность того, что при броске второй кости выпадет любая наперёд заданная цифра от 1 до 6 (в частности, равная результату броска первой кости), равна 1/6.

Задача 19. В группе из 8 студентов трое юношей и пять девушек. Наудачу выбираются три фамилии из списка. Какова вероятность, что все трое окажутся женского пола?
Решение 1. Вероятность того, что первое из трёх наугад выбранных имён окажется женским, равна 5/8, второе – 4/7 (после выбора первого женского имени их останется 4 из 7), третьего – 3/6, итого получаем (5/8)×(4/7)×(3/6) = 60/336 = 15/84 ≈0.179.
Решение 2. Общее число элементарных исходов n=|Ω| равно числу способов выбрать три фамилии из восьми, т.е. числу сочетаний C_8^3. Число благоприятствующих исходов равно числу способов выбрать трёх девушек из имеющихся пяти, т.е. C_5^3. Тогда искомая вероятность равна

$$\frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5!}{3!\ 2!} \cdot \frac{3!\ 5!}{8!} = \frac{5}{28} \approx 0.179$$

Задача 20. Найти вероятность того, что цифры, выброшенные на двух игральных костях, будут отличаться не более чем на единицу.

Решение: есть 16 благоприятных элементарных исходов из 36 (см. рисунок), откуда искомая вероятность равна 4/9.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Задача 21. Точку наудачу бросили на отрезок [0; 3]. Какова вероятность её попадания в [1; 1.3]?
Решение. Пространство элементарных исходов в данном случае – отрезок Ω = [0; 3], а множество благоприятствующих исходов – отрезок A = [1; 1.3]. Вероятность наступления события «точка попала на отрезок A = [1; 1.3]» равна отношению длины отрезка A к длине Ω, т.е. P(A) = 0.3/3 = 0.1.

Задача 22. (*Задача о встрече*). Две друзей договорились пойти на обед на четвёртой паре, в промежутке от 14.20 до 15.50. С какой вероятностью они встретятся на обеде, если каждый из них придёт в столовую независимо друг от друга и с равной вероятностью в любой момент между 14.20 и 15.30, и пробудет там ровно 20 минут?

Решение. Пространство элементарных исходов в данном случае представляет собой квадрат со стороной 70 минут. X-координата каждой точки квадрата (каждого элементарного исхода) – время прихода первого друга в столовую (отсчитанное от 14.20), Y-координата каждой точки – время прихода второго друга в столовую. По условию, обе координаты являются случайными величинами, все возможные значения которых от 0 до 70 минут равновероятны, следовательно, всевозможные элементарные исходы (точки внутри квадрата) также равновероятны. Множество элементарных исходов, благоприятствующих встрече (событие *A*), представляет собой пересечение квадрата с полосой $|X - Y| \leq 20$ мин., или, что то же самое, весь квадрат за исключением двух равнобедренных прямоугольных треугольников со сторонами 50 минут. Вероятность дополнительного события $\overline{A}$ («друзья не встретились») равна отношению площади области элементарных событий, благоприятствующих $\overline{A}$ к площади всех элементарных исходов Ω. Следовательно, для искомой вероятности встречи имеем

$$P(A) = 1 - \frac{50^2}{70^2} = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$$

Задача 23. В коридор выходят двери восьми аудиторий. Каждый из восьми студентов случайным образом заходит в одну из дверей. Найти вероятность того, что хотя бы одна аудитория останется пустой.

Решение. Рассмотрим дополнительное событие $\overline{A}$, состоящее в том, что в каждую из восьми аудиторий зашёл один из восьми студентов. Таких возможностей 8!. Общее количество возможностей распределить 8 студентов по 8 аудиториям равно 8^8. Отсюда $P(\overline{A}) = \frac{8!}{8^8} \approx 2.4 \times 10^{-3}$. (Заметим, что вероятность дополнительного события $\overline{A}$ можно найти, перемножая вероятности того, что каждый из восьми студентов выбрал незанятую аудиторию: $P(\overline{A}) = \frac{8}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{8}$). Следовательно, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.9976$.

Задача 24. (Формула Бернулли). Известно, что вероятность наступления события *A* в каждом испытании постоянна и равна *p*. Найти вероятность того, что событие *A* наступит *k* раз в *n* независимых испытаниях.

Решение. Элементарные исходы серии из *n* независимых испытаний выглядят следующим образом: $AAA \ldots AA$, $AAA \ldots A\overline{A}$, $AAA \ldots \overline{A}A, AAA \ldots \overline{A}\,\overline{A}, \ldots$ Вероятность элементарного исхода, содержащего *k* событий *A* в последовательности длины *n* равна $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, т.е. произведению вероятностей наступления события *A* *k* раз и дополнительного события оставшиеся (*n*–*k*) раз. Интересующее нас событие «*A* наступило ровно *k* раз в *n* испытаниях» является объединением C_n^k элементарных исходов, откуда искомая вероятность равна

$$C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

Задача 25. Каждый из восьми студентов в группе бросил игральную кость. Найти вероятность того, что цифра «6» выпала ровно три раза.

Решение. По формуле Бернулли имеем $C_6^3 \cdot (1/6)^3 \cdot (5/6)^3 = 20 \cdot 5^3/6^6 \approx 0.0536$.

Задача 26. (Задача о днях рождения [2, с.113]). В комнате имеется *k* человек (для простоты будем предполагать, что никто из них не родился в високосный год 29 февраля). Какова вероятность того, что по крайней мере у двух из них дни рождения совпадают, т.е. приходятся на одно и то же число одного и того же месяца? Каково наименьшее значение *k*, при котором вероятность этого будет не меньше 1/2?

Решение. Будем считать, что в году 365 дней, опуская 29 февраля. Для дня рождения каждого человека есть 365 равновероятных возможностей, следовательно, для k человек пространство элементарных исходов содержит $|\Omega|=365^k$ элементарных событий. Предположим, что все они равновероятны, т.е. вероятность каждого из них равна 365^{-k}. Рассмотрим событие $\overline{A}_k$, состоящее в том, что «никакие два человека из k не имеют общего дня рождения», являющееся дополнительным к интересующему нас событию A_k «по крайней мере у двух человек из k дни рождения совпадают». Событию $\overline{A}_k$ благоприятствуют $365\times364\times\ldots\times(365-(k-1))$ элементарных исходов, т.к. для дня рождения первого человека существуют 365 возможностей, для второго – 364 и т.д. Следовательно, для вероятности $\overline{A}_k$ имеем:

$$P(\overline{A}_k) = \frac{365!}{(365-k)!\,365^k}$$

а для искомой вероятности события «по крайней мере у двух людей из k дни рождения совпадают»

$$P(A_k) = 1 - \frac{365!}{(365-k)!\,365^k}$$

Ниже в таблице приведены значения вероятности для некоторых значений k. Видно, что вероятность обнаружить двух людей с совпадающими днями рождения становится равна 1/2 уже для k = 23 человек в комнате.

k	2	5	10	15	20	23	30	50	70
$P(A_k)$	1/365	0.0271	0.117	0.253	0.411	0.507	0.706	0.970	0.99916

Задача 27. В некоторой игре принимают участие три человека. Для определения очерёдности первого хода игроки бросают игральную кость, договорившись, что первым начинает игру тот, кто выбросит максимальное (среди участников) количество очков, а следующие ходы в игре будут выполняться игроками по ходу часовой стрелки. В случае, если в ходе жеребьёвки максимальное количество очков выбрасывают сразу двое или более участников, среди них проводится второй тур розыгрыша с аналогичными правилами. Найти вероятность того, что потребуется проводить второй тур розыгрыша, т.е. что по крайней мере двое игроков выбросят на костях максимальное количество очков.

Решение. Найдём вероятность дополнительного события, состоящего в том, что максимальное количество очков выбросит только один из игроков. Всего при броске кости тремя игроками существует $6^3 = 216$ равновероятных элементарных исходов. Подсчитаем количество исходов, благоприятствующих окончанию розыгрыша в первом туре. Множество благоприятствующих исходов распадается на три равные части: максимальное число очков выбросил 1й игрок, 2й игрок, 3й игрок. Подсчитаем, сколько элементарных исходов в каждой из этих частей:

Макс. число выброшенных очков	1	2	3	4	5	6
Количество элементарных исходов	0	1	4	9	16	25

(Например, если первый игрок выбросил максимальное число очков, равное трём, то есть всего 4 элементарных исхода, благоприятствующие окончанию розыгрыша в первом туре: два других игрока могут в любых комбинациях выбросить цифры «1» и «2»).

Суммируя, получаем 55 элементарных исходов. Умножая на три (поскольку любой из трёх игроков мог выбросить максимальное количество очков, причём эти три множества не пересекаются, т.к. мы рассматриваем случай окончания жеребьёвки в первом туре), получаем 165 элементарных исходов. Следовательно, вероятность того, что жеребьёвка закончится в первом туре, равна

165/216, а искомая вероятность дополнительного события «понадобится второй тур» равна 1–(165/216) = 51/216 ≈ 23.6%.

Задача 28. Обобщить результат предыдущей задачи на случай N игроков.

Решение. В данном случае количество равновероятных элементарных исходов в первом туре $|\Omega| = 6^N$, количество элементарных исходов, благоприятствующих окончанию жеребьёвки в первом туре равно

$$N \cdot \sum_{i=2}^{6} (i-1)^{N-1}$$

Следовательно, для искомой вероятности события «потребуется второй тур жеребьёвки» имеем

$$P = 1 - \frac{N}{6^N} \cdot \sum_{k=1}^{5} k^{N-1}$$

Ниже в таблице приведены вероятности для некоторых значений числа игроков *N*:

Кол-во игроков	2	3	4	5	10	15	20
Вероятность второго тура	0.167	0.236	0.306	0.371	0.630	0.797	0.894

Задача 29. Точку бросают наудачу в квадрат со стороной 1, все элементарные исходы при этом равновероятны. Найти вероятность того, что точка окажется внутри единичного круга.

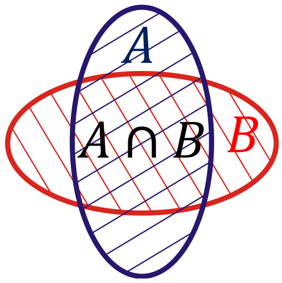
10 Условная вероятность

В целом ряде задач возникает необходимость рассмотрения вероятностей событий, исходя не из всего пространства событий, а только из некоторой его части. Вероятность того, что некоторый человек, случайно выбранный из определённой группы лиц, имеет голубые глаза, изменится, если мы выберем это лицо из числа одних лишь блондинов. Вероятность того, что наугад выбранный с курса студент сдаст экзамен с первой попытки будет меньше той же вероятности, определяемой из того, что рассматриваемые студенты не имели более одного пропуска занятий. Вероятность того, что вторая сверху карта в колоде окажется тузом будет больше аналогичной вероятности, вычисленной исходя из того, что первая (верхняя) карта является тузом.

Рассмотрим пример. Известно, что в результате броска игральной кости выпало менее четырёх очков. Какова при этом вероятность того, что выпало нечётное число очков? Зная, что выпало менее четырёх очков, мы можем сузить множество всех элементарных исходов до трёх равновероятных исходов: Ω = { 1, 2, 3 }. Из этих трёх элементарных исходов два («1» и «3») благоприятствуют наступлению рассматриваемого события «выпало нечётное число очков». Следовательно, искомая вероятность равна 2/3.

Рассмотрим тот же пример, используя пространство элементарных исходов первоначального эксперимента Ω = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Слова «известно, что выпало менее четырёх очков» означают наступление события *B* = { 1, 2, 3 }. Вопрос «какова при этом вероятность того, что выпало нечётное число очков?» означает, что нас интересует, в какой доле случаев при наступлении события *B* будет происходить событие *A*. Вероятность события *A*, вычисленную в предположении, что о результате эксперимента уже что-то известно (событие *B* произошло), мы будем обозначать $P(A|B)$. Для указанной *условной* вероятности имеем

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} = \frac{2/3}{3/6}$$



B в данном случае называют *приведённым пространством событий*, $P(A|B)$ – *условной вероятностью*. Вертикальная черта, разделяющая события A и B в записи $P(A|B)$, читается «при условии».

Рассмотрим другой пример. Известно, что на двух брошенных игральных костях в сумме выпало чётное число. С какой вероятностью на костях выпал «дубль» (т.е. две одинаковые цифры)?

В данном случае событие A – выпадение «дубля», событие (условие) B – выпадение чётного числа. Пересечение этих двух событий тождественно событию A, т.к. сумма очков для любого «дубля», очевидно, является чётной. Следовательно, имеем $P(A|B) = P(A)/P(B) = (1/6)/(1/2) = 1/3$.

Задача 30. Известно, что при броске двух игральных костей на первой кости выпала цифра «1». С какой вероятностью при этом сумма очков на двух костях равна двум?

Решение. Применяя определение условной вероятности, имеем для искомой условной вероятности $P(A|B) = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$. К тому же ответу можно прийти, учитывая, что при указанном условии (на первой кости выпала «единица») существует шесть равновероятных исходов, из которых лишь один (на второй кости выпала «единица») благоприятный.

Задача 31. Рассмотреть обратную задачу: известно, что сумма очков при броске двух костей равна двум. С какой вероятностью при этом на первой кости выпала «единица»?

Решение очевидно – при указанном условии (сумма двух очков равна двум) на обеих костях выпала «единица», т.е. искомая вероятность равна 1. К этому же ответу можно прийти, применяя общую формулу $P(A|B) = \frac{1/36}{1/36} = 1$, т.к. $A \cap B = B$ («сумма очков при броске двух костей равна двум» или, что то же самое, «выпало две «единицы»).

Задача 32. Мастер в среднем успевает выточить 100 деталей за смену, стажёр – 80 деталей, а ученик – всего 70. При этом мастер делает бракованную деталь с вероятностью 1%, стажёр – с вероятностью 5%, а ученик – с вероятностью 1/7. Все выточенные детали складываются в одну коробку. Найти вероятность извлечения из коробки бракованной детали.

Решение. Общее количество изготавливаемых за смену деталей 100+80+70=250, вероятность обнаружить бракованную деталь

$$P = \frac{100 \cdot 0.01 + 80 \cdot 0.05 + 70 \cdot 1/7}{250} = \frac{1 + 4 + 10}{250} = \frac{3}{50} = 0.06$$

Задача 33. В условиях предыдущей задачи известно, что из коробки достали бракованную деталь. Найти, с какой вероятностью она изготовлена мастером, с какой – стажёром, а с какой – учеником.

Решение. Рассмотрим вначале вопрос о вероятности изготовления детали, оказавшейся браком, мастером. Событие A_1 в общей формуле – «деталь изготовлена мастером», событие B – деталь бракована. $P(A_1|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{(100/250)\cdot 0.01}{0.06}=\frac{2}{30}$. Аналогично получаем для стажёра $P(A_2|B)=\frac{(80/250)\cdot 0.05}{0.06}=\frac{8}{30}$ и для ученика $P(A_3|B)=\frac{(70/250)\cdot(1/7)}{0.06}=\frac{20}{30}$. Сумма найденных вероятностей равна единице, поскольку объединение трёх событий «деталь изготовлена мастером», «деталь изготовлена стажёром» и «деталь изготовлена учеником» является в данной постановке *достоверным событием*.

Заметим, что к тому же ответу вновь можно было прийти, не прибегая к понятию условной вероятности. Действительно, если про некоторую деталь известно, что она бракованная, возможны три варианта (три элементарных исхода): «бракованная деталь изготовлена мастером», «бракованная деталь изготовлена стажёром» и «бракованная деталь изготовлена учеником». Вероятность каждого из этих элементарных исходов равна отношению среднего количества бракованных деталей, изготавливаемых каждым из рабочих к общему числу изготавливаемого ими брака. Т.е. для мастера имеем $P_1=\frac{100\cdot 0.01}{100\cdot 0.01+80\cdot 0.05+70\cdot 1/7}=\frac{2}{30}$, для стажёра $P_2=\frac{80\cdot 0.05}{100\cdot 0.01+80\cdot 0.05+70\cdot 1/7}=\frac{8}{30}$, для ученика $P_3=\frac{70\cdot(1/7)}{100\cdot 0.01+80\cdot 0.05+70\cdot 1/7}=\frac{10}{30}$.

Задача 34. Проводят серии из четырёх бросков монеты в каждой серии. Найти вероятность того, что четвёртый бросок монеты завершится выпадением «орла» (аверса). Найти ту же вероятность, если известно, что первые три раза монета легла вверх «решкой» (реверсом), если известно, что вероятность четырёх подряд выпадений реверса равна 1/16.

Решение. Вероятность выпадения «орла» равна 1/2 и не зависит от предыдущих результатов – монета не имеет памяти, результаты всех бросков независимы. К тому же ответу можно прийти и рассматривая условную вероятность. Пусть событие A состоит в том, что в результате четвёртого броска выпал «орёл», а событие В – «все три первые броска в серии дали «решку». Тогда

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/16}{1/8}=\frac{1}{2}$$

В числителе стоит 1/16 – вероятность серии из четырёх «решек», однако она делится на вероятность условия B «уже выпало три решки».

Задача 35 (парадокс Монти Холла). Участник телешоу «Let’s Make a Deal» должен выбрать одну из трёх дверей, за которой с равной вероятностью находится приз, в то время как за двумя другими дверями – козы. После того, как игрок выбирает одну из дверей, ведущий игры обязан открыть одну из двух других дверей, за которой находится коза, и предложить игроку изменить свой выбор. Если у ведущего есть выбор, какую из двух дверей открыть, он выбирает любую из них с одинаковой вероятностью. В указанных условиях найти вероятность выиграть автомобиль, в случае, если игрок не изменит своего выбора и в случае, если он примет предложение ведущего и изменит свой выбор.

Замечание. Данная задача относится к числу *парадоксов*, т.к. для многих людей её ответ оказывается интуитивно неожиданным. Действительно, зачастую интуитивное восприятие данной задачи таково: открывая дверь с козой, ведущий ставит перед игроком новую задачу, как будто никак не связанную с предыдущим выбором — ведь коза за открытой дверью окажется независимо от того, выбрал игрок перед этим козу или автомобиль. После того, как ведущий открыл дверь, игроку предстоит сделать выбор заново: выбрать либо ту же дверь, которую он выбрал раньше, либо другую. То есть, при этом он не меняет свой предыдущий выбор, а делает новый. Правильное решение предполагает рассмотрение двух последовательных задач как связанных друг с другом, что и приводит к другому ответу. Давайте в этом убедимся.

Решение. Вероятность события «Автомобиль находится за изначально выбранной игроком дверью», очевидно, равна 1/3, т.к. размещение автомобиля и первоначальный выбор игрока предполагаются случайными и независимыми (количество элементарных исходов равно девяти, количество благоприятных исходов – трём). Следовательно, если игрок остаётся при своём первоначальном решении, он выигрывает автомобиль с вероятностью 1/3 и не выигрывает с вероятностью 2/3. Если игрок будет каждый раз менять своё решение после того, как ведущий откроет одну из дверей с козой, то вероятность выигрыша, наоборот, станет равно 2/3, а проигрыша – 1/3.

(*) Рассмотрим в качестве дополнительного **упражнения**[6] вопрос о. количестве элементарных исходов в задаче Монти Холла и соответствующих им вероятностях.

Решение. Автомобиль может быть за любой из дверей – есть 3 равновероятных возможности на первом шаге (размещение автомобиля перед началом игры). Для каждого из расположений автомобиля игрок может независимо выбрать любую из дверей – это даёт 3×3 = 9 возможностей на втором шаге (первый выбор игрока). В трёх из этих девяти случаев игрок угадывает положение автомобиля, и у ведущего есть два равновероятных (по условию) альтернативы, какую из дверей с козой открыть. В шести оставшихся из девяти случаев игрок указывает на дверь с козой, и у ведущего по условию есть единственная возможность открыть вторую дверь с козой. Следовательно, имеем 3×2+6 = 12 возможностей на третьем шаге (открывание двери с козой ведущим). Наконец, для каждой из этих 12 возможностей есть два возможных решения игрока: оставить свой выбор без изменения либо выбрать другую закрытую дверь. Итого 24 элементарных исхода в случае, если последний выбор игрока случаен (не предопределён заранее одной из возможных стратегий поведения) либо 12 элементарных исходов, если последний выбор игрока известен заранее (обусловлен выбранной игроком стратегией).

Вероятность того, что игрок в первый раз укажет на дверь, за которой стоит автомобиль (событие *A* – серые клетки в таблице ниже), равна 1/3, на дверь с козой (событие *B* – белые клетки в таблице ниже) – 2/3.

Каждая из выделенных цветом клеток далее делится на два равновозможных варианта, т.к. у ведущего появляется выбор, какую из двух дверей с козой открыть (в каждой ячейке таблицы укажем через запятую номера дверей, оставшихся закрытыми после того, как ведущий откроет одну из коз, и соответствующую вероятность каждого элементарного исхода):

[6] Рекомендуется оставить этот пример студентам для самостоятельного изучения

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Первый выбор игрока</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Расположение автомобиля</td><td>1</td><td>1/9</td><td>1/9</td><td>1/9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1/9</td><td>1/9</td><td>1/9</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1/9</td><td>1/9</td><td>1/9</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Первый выбор игрока</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Расположение автомобиля</td><td rowspan="2">1</td><td>1, 3: 1/18</td><td rowspan="2">1, 2: 1/9</td><td rowspan="2">1, 3: 1/9</td></tr>
<tr><td>1, 2: 1/18</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">1, 2: 1/9</td><td>2, 3: 1/18</td><td rowspan="2">2, 3: 1/9</td></tr>
<tr><td>1, 2: 1/18</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">1, 3: 1/9</td><td rowspan="2">2, 3: 1/9</td><td>2, 3: 1/18</td></tr>
<tr><td>1, 3: 1/18</td></tr>
</table>

Наконец, рассмотрим две возможных стратегии игрока: «оставить свой первоначальный выбор двери без изменения» и «изменить первоначальный выбор, указав на другую закрытую дверь». Для каждой из стратегий выделим цветом те элементарные исходы, которые благоприятствуют событию «игрок выиграл автомобиль» (в ячейках по-прежнему приведены вероятности всех элементарных исходов):

Стратегия финального выбора «не менять своего первоначального решения»: тт

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Первый выбор игрока</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Расположение автомобиля</td><td rowspan="2">1</td><td>1: 1/18</td><td rowspan="2">2: 1/9</td><td rowspan="2">3: 1/9</td></tr>
<tr><td>1: 1/18</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">1: 1/9</td><td>2: 1/18</td><td rowspan="2">3: 1/9</td></tr>
<tr><td>2: 1/18</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">1: 1/9</td><td rowspan="2">2: 1/9</td><td>3: 1/18</td></tr>
<tr><td>3: 1/18</td></tr>
</table>

Вероятность выигрыша: 1/3

Стратегия финального выбора «изменить своё первоначальное решение на противоположное»:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Первый выбор игрока</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Расположение автомобиля</td><td rowspan="2">1</td><td>3: 1/18</td><td rowspan="2">1: 1/9</td><td rowspan="2">1: 1/9</td></tr>
<tr><td>2: 1/18</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2: 1/9</td><td>3: 1/18</td><td rowspan="2">2: 1/9</td></tr>
<tr><td>1: 1/18</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">3: 1/9</td><td rowspan="2">3: 1/9</td><td>2: 1/18</td></tr>
<tr><td>1: 1/18</td></tr>
</table>

Вероятность выигрыша: 2/3

(*) **Задача 36** (парадокс мальчика и девочки, парадокс второго ребёнка[7]) У мистера Смита двое детей. Хотя бы один ребенок — мальчик. Какова вероятность того, что и второй — тоже мальчик?

На первый взгляд кажется, что задача очень проста. Однако если начать разбираться, обнаруживается, что правильный ответ будет отличаться в зависимости от того, каким образом мы будем подсчитывать вероятность пола другого ребенка.

Способ подсчёта №1. Всего есть 4 варианта: ДД, ДМ, МД, ММ (например, запись «ДМ» означает, что у мистера Смита старший ребёнок – мальчик, а младшая – девочка). Событие A = { ММ }, событие (условие) B = { ДМ, МД, ММ }. Как следствие, для условной вероятности имеем

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\text{ММ})}{P(\{\text{ДМ}, \text{МД}, \text{ММ}\})} = \frac{3/4}{1/4} = \frac{1}{3}$$

Именно такой ответ и дал сам Гарднер первоначально.

Способ подсчёта №2. Представим, что мы встречаем мистера Смита на улице, когда он гуляет с сыном. Какова вероятность того, что второй ребенок — тоже мальчик? Поскольку пол второго ребенка никак не зависит от пола первого, очевидным (и правильным) ответом является 1/2.

Анализ парадокса. Попробуем разобраться, в чём причина отличия. Первый способ подсчёта соответствует следующей **постановке вопроса**: пусть мы составили список всех семей с двумя детьми, после чего исключили из рассмотрения те семьи, в которых нет ни одного мальчика (т.е. где оба ребёнка – девочки). С какой вероятностью в наугад выбранной из списка семье окажется двое мальчиков? Ответ будет 1/3, т.к. в рассмотрении осталось три равновероятных элементарных исхода: ДМ, МД и ММ.

Альтернативная постановка вопроса уже была указана выше для объяснения второго способа подсчёта искомой вероятности: мы спрашиваем на улице людей с одним сыном относительно пола их второго ребёнка (предположим для простоты, что у всех семей в районе по два ребёнка). С какой вероятностью оба ребёнка будут мальчиками? При этом есть восемь элементарных исходов: ДД1, ДД2, ДМ1, ДМ2, МД1, МД2, ММ1, ММ2 (смысл букв здесь такой же, как и раньше, а цифра указывает, какого именно из двух детей мы встретили вместе с родителем: старшего (1) или младшего (2)). По условию, мы встретили мистера Смита с сыном, т.е. событие (условие) B = { ДМ2, МД1, ММ1, ММ2 }, а событие A = { ММ1, ММ2 }, откуда искомая условная вероятность

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

Заметим, что по сравнению с первым способом подсчёта пространство элементарных исходов стало вдвое больше (за счёт цифр 1 и 2, обозначающих встреченных нами детей), число благоприятных элементарных исходов также удвоилось. А вот число элементарных событий, которые мы исключили из рассмотрения из-за наложенного условия, в данном случае равно четырём (ДД1, ДД2, ДМ1, МД2), тогда как в первом случае оно было равно одному (ДД).

На примере рассмотренной задачи видно, что ответ в задаче может сильно меняться при небольшом изменении формулировки вопроса. Рассмотренный парадокс эквивалентен

[7] Мартин Гарднер «Two children problem» // Scientific American (1959).

рассмотрению двух похожих вопросов, отличающихся всего одним словом (см. ниже), причём заменяемые слова в русском и других языках зачастую обладают близким смыслом (отсюда и возникает парадоксальное, на первый взгляд, несоответствие результатов):

1. Монету подбросили дважды. Известно, что в результате ***одного*** броска выпал «орёл», с какой вероятностью другой бросок также дал «орла»?
2. Монету подбросили дважды. Известно, что в результате ***первого*** броска выпал «орёл», с какой вероятностью другой бросок также дал «орла»?

Наконец, заметим ещё, что полученный в первом случае ответ 1/3 не означает зависимости событий: результаты «правильных» бросков «правильной» монеты в любом случае независимы. Для вероятности выбрасывания двух «орлов» в первом случае получаем (3/4)×(1/3)=1/4, где 3/4 – вероятность того, что «хотя бы одна монета легла орлом вверх», а 1/3 – вероятность, что выпал второй «орёл» при этом условии в серии, содержащей по меньшей мере одного «орла». Во втором случае для той же вероятности имеем (1/2)×(1/2)=1/4, где первый множитель 1/2 означает вероятность выпадения первого «орла», второй множитель 1/2 – второго «орла».

	элементарные исходы, благоприятствующие событию, их вероятности и количество равновероятных исходов, отличающихся только перестановкой цифр			
P(A1)= **0.334**	P(000)=0.3^3 × 1 = 0.027	P(111)=0.4^3 × 1 = 0.064	P(222)=0.3^3 × 1 = 0.027	P(012)= 0.3×0.4×0.3 × 3! = 0.216
P(A2)= **0.333**	P(001)= 0.3^2×0.4 $\times C_3^1$ = 0.108	P(022)= 0.3×0.3^2 $\times C_3^1$ = 0.081	P(112)= 0.4^2×0.3 $\times C_3^1$ = 0.144	
P(A3)= **0.333**	P(002)= 0.3^2×0.3 $\times C_3^1$ = 0.081	P(011)= 0.3×0.4^2 $\times C_3^1$ = 0.144	P(221)= 0.3^2×0.4 $\times C_3^1$ = 0.108	

11 Функции распределения

Одним из ключевых понятий, с которыми часто приходится иметь дело при рассмотрении случайных процессов, является *функция распределения*. Пусть имеется некоторая случайная величина *X* (суть результат некоторого случайного эксперимента), которая может принимать значения на некотором подмножестве вещественных чисел. *Функцией распределения* $F_X(x)$ случайной величины *X* будем называть вероятность того, что случайная величина X принимает значения не превосходящие x:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

Свойства функции распределения:

1. Функция распределения непрерывна справа:
$$\lim_{\varepsilon\to+0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$$
2. Функция распределения не убывает на всей числовой оси.
3. $$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$$
4. $$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$$

5.
$$P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

6.
$$P(X < x) = \lim_{\varepsilon \to -0} F_X(x + \varepsilon)$$

7.
$$P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Задача 37. Случайная величина X может принимать три значения, указанные в таблице вместе с соответствующими вероятностями. Построить функцию распределения данной случайной величины.

X	1	2	3
P(X)	0.25	0.5	0.25

Задача 38. Построить функцию распределения для числа очков, выпавших на одной игральной кости.

Задача 39. Построить функцию распределения для количества «орлов», выпавших в серии из двух бросков монеты.

Задача 40. Построить функцию распределения для количества «орлов», выпавших в серии из N = 3 бросков монеты.

Задача 41. Построить функцию распределения для числа очков, выпавших на двух игральных костях.

Задача 42. Точку бросают наудачу на отрезок [0; 5], при этом известно, что все возможные элементарные исходы равновероятны. Найти функцию распределения для координаты точки.

Задача 43. Найти функцию распределения срока службы лампочки над дверью пожарного выхода, т.е. функцию распределения для времени от момента установки лампочки до времени, через которое потребуется замена перегоревшей лампочки. Предполагается, что лампочка горит постоянно (не выключается), перегорание лампочки в любые два малых промежутка времени Δt равновероятно – соответствующая вероятность равна $\alpha\Delta t$, где α – постоянный коэффициент.

Решение. Выше мы уже разбирали аналогичную задачу о радиоактивном распаде, так что для вероятности обнаружить лампочку не сгоревшей к моменту времени t можно сразу записать

$$P(\xi > t) = e^{-\alpha t}, \qquad F_T(t) = P(\xi \le t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le 0 \\ 1 - e^{-\alpha t}, & \text{если } t \ge 0 \end{cases}$$

Задача 44. Доказать, что если величина ξ имеет экспоненциальное распределение (см. предыдущую задачу), то $P(\xi > x + y \mid \xi > x) = P(\xi > y)$

Решение. Обозначая за ξ срок службы лампочки, имеем из предыдущей задачи для вероятности $P(\xi > x) = e^{-\alpha x}$, $P(\xi > x + y) = e^{-\alpha(x+y)}$. В терминах условной вероятности имеем: событие *A* «лампочка прослужит дольше *x*+*y*», условие *B* «лампочка прослужила больше *x*». Пересечение событий A и B совпадает, очевидно, с событием A, откуда для искомой условной вероятности имеем

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha y} = P(\xi > y)$$

что и требовалось доказать.

Справедливо и обратное утверждение: если $P(\xi > x + y | \xi > x) = P(\xi > y)$, то случайная величина имеет экспоненциальное распределение.

Задача 45. В условиях рассмотренной выше задачи о сроке службы лампочки найти аналогичную функцию распределения, если известно, что в момент установки лампочка с вероятностью 2% уже не работала вследствие заводского брака или повреждения при транспортировке.

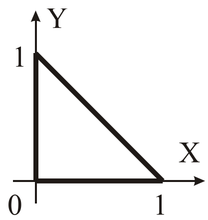
Решение. С вероятностью 0.02 мы обнаружим, что лампа не горит уже в момент $t = 0$ (т.е. как только включим её), далее начальная вероятность обнаружить работающую лампу будет, как и раньше, экспоненциально убывать (можно повторить все предыдущие рассуждения, добавляя перед вероятностью множитель 0.98), в итоге получим $F_T(t) = 0.02 + 0.98 \cdot (1 - e^{-\alpha t}) = 1 - 0.98 \cdot e^{-\alpha t}$ при $t \geq 0$ и $F_T(t) = 0$ при $t < 0$.

Задача 46. Найти функцию распределения случайной величины $Y = kX + C$, если случайная величина X имеет функцию распределения $F_X(x)$, а k и C – некоторые константы.

Решение. При $k > 0$: $F_{kX+C}(x) = P(kX + C \leq x) = P(kX \leq x - C) = P\left(X \leq \frac{x-C}{k}\right) = F_X\left(\frac{x-C}{k}\right)$

При $k < 0$: $F_{kX+C}(x) = P(kX + C \leq x) = P(kX \leq x - C) = P\left(X \geq \frac{x-C}{k}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-C}{k} - 0\right)$

Задача 47. Точку бросают наудачу в квадрат со стороной 1, при этом все элементарные исходы равновероятны. Стороны квадрата параллельны осям координат X и Y, левый нижний угол имеет координату (0,0). Построить функцию распределения для X-координаты.



Решение. $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{S(X \leq x)}{S(\text{квадрата})} = x$ и $f(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$. Другой способ: $f(x) \cdot \Delta x = P(x < X < x + \Delta x) = \frac{\Delta x}{1} = \Delta x$ при $0 \leq x \leq 1$.

Задача 48. Точку бросают наудачу в равнобедренный треугольник, длина катета которого равна 1 (см. Рисунок), при этом всевозможные элементарные исходы равновероятны. Найти функцию распределения X-координаты точки.

Решение. $F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - \frac{(1-x)^2}{2} = 2x - x^2$ при $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 2 - 2x$ при $0 \leq x \leq 1$, т.е. пропорционально ординате точки гипотенузы с абсциссой x. Другой способ: $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} P(x < X < x + \Delta x) = \frac{(1-x)}{S_\Delta} = (2 - 2x)$ при $0 \leq x \leq 1$.

Задача 49. Точку бросают наудачу в круг радиуса 1 с центром в начале координат, при этом известно, что все элементарные исходы равновероятны. Построить функцию распределения для величины $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. $F_r(a) = P(r \le a) = \frac{\pi \cdot a^2}{\pi \cdot 1^2} = a^2$ при $0 \le a \le 1$. Плотность вероятности $f(a) = 2a$.

Задача 50. Точку бросают наудачу внутрь шара радиуса 1 с центром в начале координат, при этом известно, что все элементарные исходы равновероятны. Построить функцию распределения для величины $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение. $F_r(a) = P(r \le a) = \frac{(4/3)\pi \cdot a^3}{(4/3)\pi \cdot 1^3} = a^3$ при $0 \le a \le 1$. Плотность вероятности $f(a) = 3a^2$.

Задача 51. Точку бросают наудачу в круг радиуса 1 с центром в начале координат, при этом известно, что все элементарные исходы равновероятны. Построить функцию распределения для угла φ точки в полярных координатах, считая, что угол может изменяться от 0 до 2π.

Решение. Распределение по углам будет равномерным, откуда $F_\varphi(0 \le \varphi \le 2\pi) = \frac{\varphi}{2\pi}$. Плотность вероятности $f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$. К этому же ответу, разумеется, можно было прийти и регулярным способом, вычисляя предел отношения площади сектора к площади окружности.

Задача 52. Точку бросают наудачу в единичный круг радиуса 1 с центром в начале координат, при этом известно, что все элементарные исходы равновероятны. Построить функцию распределения для X-координаты точки.

Решение 1. Поскольку все элементарные исходы (все точки внутри единичного круга) по условию равновероятны, для искомой функции распределения на отрезке [–1; 1] имеем

$$F_X(\xi) = P(X \le \xi) = \frac{S\big((x \le \xi) \cap (x^2 + y^2 \le 1)\big)}{\pi} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{x} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Полученный интеграл является табличным; чтобы его взять, сделаем замену $x = \cos\varphi$:

$$I = \int_{-1}^{x} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_{\cos^{-1} x}^{\pi} \sin^2\varphi = \int_{\cos^{-1} x}^{\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\cos^{-1} x}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

(Здесь учтено, что $\sin(2\cos^{-1} x) = 2\sin(\cos^{-1} x)\cos(\cos^{-1} x) = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$). В итоге для искомой функции распределения имеем

$$F_X(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \xi \le -1 \\ 1 - \frac{1}{\pi}\cos^{-1}\xi + \frac{1}{\pi}\xi\sqrt{1 - \xi^2}, & \text{если} - 1 \le \xi \le 1 \\ 1, & \text{если} \quad \xi \ge 1 \end{cases}$$

Плотность распределения

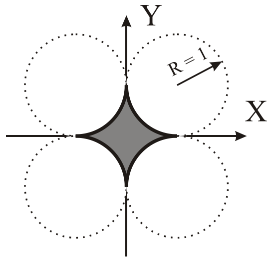
$$f_X(\xi) = \frac{d}{d\xi} F_X(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \ge 1 \\ \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \xi^2}, & |\xi| \le 1 \end{cases}$$

Решение 2. Для плотности вероятности $f_X(x)$ при $|x| \le 1$ имеем:

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\big(X \in (x, x + \Delta x)\big)}{\Delta x}$$

Указанная вероятность равна отношению площади криволинейной трапеции к площади всего круга; в пределе $\Delta x \to 0$ площадь криволинейной трапеции равна $2\,\Delta x \cdot \sqrt{1 - x^2}$, откуда искомая плотность вероятности $f_X(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$ $\text{при} - 1 \le x \le 1$ либо 0 в противном случае. Функция распределения равна интегралу от плотности вероятности; этот интеграл уже был вычислен нами выше.

Задача 53. Точку бросают внутрь области, ограниченной четырьмя дугами окружностей радиуса 1 (показана на рисунке серым цветом). Найти плотность вероятности и функцию распределения X-координаты точки, если известно, что все элементарные исходы равновероятны. (Множество элементарных исходов показано на рисунке серым цветом).



Решение. Плотность вероятности, очевидно, будет чётной функцией x, отличной от нуля в области $|x| < 1$. Поэтому рассмотрим вначале для простоты отрезок [0, 1] по x. Для y-координаты точек на верхней окружности имеем $(1-x)^2 + (1-y)^2 = 1$, откуда $y = 1 - \sqrt{2x - x^2}$, а для плотности вероятности получаем (учитывая, что площадь области, в которой может быть найдена точка, равна разности площади квадрата со стороной 2 и четырёх четверть-кругов радиуса 1, т.е. S = 4–π):

$$f(0 \le x \le 1) = \frac{2y}{S} = \frac{1 - \sqrt{2x - x^2}}{2 - \frac{\pi}{2}}$$

Интегрируя, получаем:

$$F_X(x > 0) = \frac{x - I(x)}{2 - \frac{\pi}{2}}, \qquad I(x) = \int_0^x \sqrt{2\xi - \xi^2}\, d\xi = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}\sin\left(4\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$$

$$I(x) = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2}} - (1-x)\cdot\sqrt{\frac{x}{2}}\cdot\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$$

Таким образом, имеем

$$F(0 < x < 1) = \frac{x - \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2}} - (1-x)\cdot\sqrt{\frac{x}{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{2 - \frac{\pi}{2}}$$

Вследствие чётности плотности вероятности имеем

$$F(-1 < x < 0) = 1 - F(-x)$$

Задача 54. Коршунов, Фосс, 9.11 (с. 37). Диаметр круга измерен приближённо. Считая, что его величина равномерно распределена на отрезке [a, b], найти распределение площади круга.

Решение. Для $\pi a^2 \le x \le \pi b^2$ имеем $F_S(x) = P(S \le x) = P\left(a \le r \le \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = \frac{\sqrt{x/\pi} - a}{b - a}$. На том же отрезке плотность вероятности $f(x) = \frac{d}{dx}F_S(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}\cdot(b-a)}$.

12 Примеры часто встречающихся распределений

Определение. Говорят, что случайная величина *X* имеет *дискретное* распределение, если существует конечный или счётный набор чисел { a1, a2, … } такой, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = a_i) = 1$$

Определение. Говорят, что случайная величина *X* имеет *абсолютно непрерывное* распределение, если существует неотрицательная функция $f_X(x)$ такая, что для любого множества A имеет место равенство:

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$$

При этом функцию $f_X(x)$ называют *плотностью распределения* случайной величины *X*.

Заметим, что выделяют ещё *сингулярное* распределение и *распределение смешанного типа*. С примером распределения смешанного типа мы уже сталкивались в задаче о лампочке, которая Ввиду краткости нашего курса и относительной редкостью этих распределений в физических задачах мы не будем их рассматривать.

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся распределения и задачи, в которых они возникают.

Примеры дискретных распределений:

1. Распределение Бернулли

(P(*X*=1)=*p*, P(*X*=0)=*q*) возникает в задачах, когда множество элементарных исходов разбивается на два подмножества: некоторое событие A и дополнительное к нему событие $\overline{A}$. Выше мы уже неоднократно встречались с примерами такого распределения: выпадение «орла» и «решки» на монете; выпадение и не-выпадение «дубля» на двух игральных костях; выигрыш и проигрыш в игре Монте Холла и т.п.

2. Биномиальное распределение

Распределение количества «успехов» в последовательности из *n* независимых случайных экспериментов, вероятность успеха в каждом из которых равна *p* (B(*n*,*p*), *n* – число испытаний, *p* – вероятность «успеха»). Количество «орлов», выпавших в *n* бросках монеты, количество «дублей», выпавших в *n* бросках двух игральных костей, количество выигрышей в *n* выпусках игры Монте Холла будут иметь биномиальное распределение.

3. Распределение Пуассона

Для иллюстрации распределения Пуассона P(λ) рассмотрим задачу о вероятности обнаружить не менее m = 5 бракованных деталей в партии из N = 1000 штук, если известно, что вероятность изготовления бракованной детали p = 0.002. Аналогичную задачу мы уже рассматривали ранее при выводе формулы Бернулли – ответ может быть легко выписан

$$P(X \geq m) = \sum_{j=m}^{N} C_N^j \cdot p^j \cdot (1-p)^{N-j} = 1 - \sum_{j=0}^{m-1} C_N^j \cdot p^j \cdot (1-p)^{N-j}$$

однако при больших *m* и *N* вычислить значения подобных выражений может быть непросто. В этой связи рассмотрим эту же задачу в пределе большого числа испытаний и малой вероятности успеха в каждом испытании, т.е. рассмотрим гипотетическую последовательность задач, в которых $N \to \infty$, $p \cdot N = \lambda = \text{const}$. (Для каждой из задач в этой последовательности *N* и *p* фиксированы, каждое из *N* испытаний с вероятностью *p* заканчивается «успехом» независимо от остальных испытаний в серии из *N*). Для вероятности обнаружить ровно *k* бракованных деталей по формуле Бернулли имеем

$$p_k = C_N^k \cdot p^k (1-p)^{N-k} = C_N^k \cdot \frac{\lambda^k}{N^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} =$$

$$= \underbrace{\frac{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)}{N^k}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left[\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-\frac{N}{\lambda}}}_{\substack{\downarrow \\ e}} \right]^{-\lambda \cdot \left(1 - \frac{k}{N}\right)}$$

Первая дробь при стремлении $N \to \infty$ стремится к 1 для любого фиксированного *k*; выражение в квадратных скобках согласно «второму замечательному пределу» стремится к $\exp(-\lambda)$. Следовательно, для искомой вероятности обнаружить ровно *k* бракованных деталей имеем

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Ответ на поставленный вопрос о вероятности обнаружить не менее m = 5 бракованных деталей в партии из N = 1000 штук при p = 0.002, следовательно, даётся выражением

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - e^{-pN} \cdot \sum_{k=0}^{4} \frac{(pN)^k}{k!} = 1 - e^{-2} \cdot \sum_{k=0}^{4} \frac{2^k}{k!} \approx 0.05265$$

Подчеркнём, что полученное значение вероятности является *приближённым*, поскольку вышеприведённое рассмотрение было основано на предположении $N \to \infty$. Если мы будем вычислять ту же вероятность по формуле Бернулли, то получим $P(X \geq 5) \approx 0.05247$, что отличается от предыдущего ответа на 1.8×10^{-4} (что составляет 0.3% от найденной вероятности).

Каким будет отличие вероятности, найденной по распределению Пуассона, от «точного» значения, вычисленного по формуле Бернулли? Можно доказать, что для произвольной гипотезы[8] относительно числа «успехов» в *n* испытаниях с вероятностью «успеха» *p* в каждом испытании отличие указанных вероятностей не будут превосходить $\min(p, np^2)$. В нашем случае имеем $\min(0.002, 0.004) = 2 \cdot 10^{-3}$, т.е. можно утверждать, что вероятность будет лежать в пределах от 0.05265-0.002 до 0.05265+0.002 или, что то же самое, в промежутке от 0.05065 до 0.05465. Заметим, что найденная по формуле Бернулли вероятность 0.05247 действительно лежит в указанном интервале.

4. Дискретное равномерное распределение

Пример: количество очков, выпавшее на одной игральной кости.

5. Геометрическое распределение

Геометрическое распределение G_p или Geom(p) – распределение дискретной случайной величины, равной количеству испытаний случайного эксперимента до наблюдения первого «успеха»: $P(Y = n) = (1-p)^n \cdot p$ (либо номер первого успеха, тогда имеем для вероятности $(1-p)^{n-1} \cdot p$).

[8] Под «произвольной» гипотезой имеется в виду любое множество элементарных исходов, т.е. например, нас может интересовать вероятность того, что «количество бракованных деталей будет равно 1, либо 7, либо 9 или будет любым чётным числом».

Выше мы рассмотрели некоторые примеры дискретных распределений. Перейдём теперь к абсолютно непрерывным распределениям.

6. Непрерывное равномерное распределение

Примером непрерывного равномерного распределения $U(a,b)$ может служить бросание точки наугад на отрезок [a,b]. Фаза комплексного числа (например, напряженности поля волны, измеренной в случайный момент времени) также будет иметь равномерное непрерывное распределение $U(0,2\pi)$.

7. Показательное распределение

$E_\alpha: f_\xi = \alpha e^{-\alpha\xi}, F_\xi = 1 - e^{-\alpha\xi}$. Пример: радиоактивный распад, срок службы оборудования.

8. Нормальное распределение

Нормальное распределение или распределение Гаусса: N_{μ,σ^2}: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$;

Важным частным случаем распределения Гаусса является *стандартное нормальное распределение* $N_{0,1}$.

13 Моменты случайных величин

На практике часто бывает важно знать среднее значение случайной величины – например, среднее значение бракованных деталей, средний срок службы приборов, среднее число обращений в службу тех.поддержки за час и т.д.

Определение. Математическим ожиданием $M[X]$ (или EX) называют среднее значение случайной величины X.

Для дискретных случайных величин имеем $M[X] = \sum x_i \cdot p_i$, для абсолютно непрерывных $M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$.

Свойства мат. ожидания:

1. Мат. ожидание константы равно константе: $M[c] = c$
   Доказательство. По определению имеем $M[c] = \sum p_i c_i = 1 \cdot c = c$ ■
2. Линейность: $M[c \cdot X + b] = c \cdot M[X] + b$
   Доказательство (на примере дискретного распределения). По определению имеем
   $$M[c \cdot X + b] = \sum P(cX + b = cX_i + b) \cdot (cX_i + b) = \sum P(X = X_i) \cdot (cX_i + b) =$$
   $$= c \cdot \sum P(X = X_i) X_i + b \sum P(X = X_i) = c \cdot M[X] + b \ ■$$
3. Мат. ожидание суммы ***любых*** (как независимых, так и зависимых) двух случайных величин равно сумме мат. ожиданий (при условии, что мат. ожидания существуют).
   Доказательство. $M[X+Y] = \sum\sum (X_i + Y_j) \cdot P(X = X_i,\ Y = Y_j) = \sum\sum X_i \cdot P(X = X_i,\ Y = Y_j) + \sum\sum Y_j \cdot P(X = X_i,\ Y = Y_j) = \sum X_i \cdot P(X = X_i) + \sum Y_j \cdot P(Y = Y_j) = M[X] + M[Y]$ ■
4. Мат. ожидание произведения двух **независимых** величин равно произведению мат.ожиданий: $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$, где $F_{X \cdot Y}(xy) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.
   Доказательство. $M[XY] = \sum\sum X_i Y_j \cdot P(X = X_i,\ Y = Y_j)$. Пользуясь независимостью случайных величин X и Y, по определению независимости имеем $P(X = X_i, Y = Y_j) =$

$P(X = X_i) \cdot P(Y = Y_j)$. Подставляя данное произведение вероятностей в выражение для мат. ожидания, имеем $M[XY] = \sum\sum X_i P(X = X_i) \cdot Y_j P\big(Y = Y_j\big) = \big(\sum X_i P(X = X_i)\big) \cdot \big(\sum Y_j P\big(Y = Y_j\big)\big) = M[X] \cdot M[Y]$ ■

Ещё одним очень часто употребляемым свойством случайных величин является дисперсия, или средний квадрат отклонения случайной величины от среднего.

Определение. Дисперсией случайной величины называется $D[X] = \mathrm{Var}(X) = M[|X - M[X]|^2]$.

Свойства:

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$$

$$D[X] \geq 0$$

$$D[aX] = a^2 D[X]$$

$$D[X + b] = D[X]$$

$$D[X+Y] = M[|(X - MX) + (Y - MY)|^2] = D[X] + D[Y] + 2M[(X - MX) \cdot (Y - MY)] = \\ = D[X] + D[Y] + 2\mathrm{cov}(X, Y)$$

где $\mathrm{cov}(X, Y) \equiv M[(X - MX) \cdot (Y - MY)]$ – *ковариация* случайных величин X и Y (характеризует линейную зависимость двух случайных величин). Для независимых случайных величин получаем, таким образом, что дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых.

14 Задачи

Задача 55. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины, имеющей распределение Бернулли ($P(X = 0) = 1 - p,\ P(X = 1) = p$).

Решение. По определению $M[X] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$, $D[X] = M[|X - p|^2] = (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p = p \cdot (1 - p) \cdot [p + (1 - p)] = p \cdot (1 - p) \equiv pq$.

Задача 56. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины, имеющей биноминальное распределение.

Решение. Пусть $X \sim B(n, p)$ – количество «успехов» в n независимых испытаниях, вероятность успеха в каждом из которых равна p. Тогда можно представить X в виде суммы *n* независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение Бернулли:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Поскольку мат.ожидание суммы случайных величин равно сумме мат.ожиданий, имеем

$$M[X] = M[X_1] + M[X_2] + \cdots + M[X_n] = n \cdot M[X_i] = np$$

Аналогично для дисперсии имеем

$$D[X] = nD[X_i] = npq \equiv np \cdot (1 - p)$$

Задача 57. Найти мат. ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей распределение Пуассона.

Решение.

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

Для вычисления дисперсии удобно найти вначале т.н. второй факториальный момент. В общем случае факториальным моментом порядка m называется величина $\mu_k = M[X(X-1) \cdot \ldots \cdot (X-k+1\,)]$. В частности, для второго факториального момента имеем

$$M[X \cdot (X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2$$

Откуда имеем

$$M[X^2] = M[X(X-1)] + M[X] = \lambda^2 + \lambda$$

$$D[X] = M[X^2] - M[X]^2 = \lambda$$

Задача 58. Найти мат.ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей геометрическое распределение $X \sim G_p$.

Решение.

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dq^k}{dq} = p \frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = p \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) =$$
$$= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Для нахождения дисперсии вновь вычислим второй факториальный момент

$$M[X(1-X)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1} = pq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2 q^k}{dq^2} = pq \frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = pq \frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) =$$
$$= pq \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2} \equiv \frac{2(1-p)}{p^2}$$

Задача 59. Найти мат.ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределённой на отрезке (a,b): $X \sim U(a,b)$.

Решение.

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$M[X^2] = \int\limits_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$D[X] = M[X^2] - M[X]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Задача 60. Доказать, что для целых $k \geq 0$ $\Gamma(k+1) = \int_0^\infty t^k e^{-t}\, dt$ $k!$ (Здесь $\Gamma(x)$ – Гамма-функция Эйлера, определенная для всех $x > 0$).

Доказательство. Докажем это утверждение по индукции. Базис индукции: докажем, что $\Gamma(1) = 0! = 1$:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty t^0\, e^{-t}\, dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1$$

Шаг индукции: пусть известно, что $\Gamma(k+1) = k!$ $\forall k \leq m-1$; докажем, что в таком случае исходное утверждение справедливо также и для $k = m$:

$$\Gamma(m+1) = \int\limits_0^\infty t^m\, e^{-t}\, dt = -t^m e^{-t}|_0^\infty + m \cdot \int\limits_0^\infty t^{m-1} e^{-t}\, dt = m \cdot \Gamma(m) \quad \blacksquare$$

Задача 61. Вычислить $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, где Γ(*x*) – Гамма-функция Эйлера.

Решение. Записывая значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ по определению и делая под интегралом замену $t = q^2$, имеем:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \int\limits_0^\infty q^{-1} \cdot e^{-q^2} \cdot 2q\, dq = 2\int\limits_0^\infty e^{-q^2}\, dq = \sqrt{\pi}$$

Для вычисления последнего интеграла удобно рассмотреть его квадрат:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\,; \quad I^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right) \cdot \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dx\right) = \iint e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

Переходя в интегрировании по плоскости от декартовых координат к полярным, имеем

$$I^2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\infty e^{-r^2}\, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} I \implies I = \sqrt{\pi}$$

Задача 62. Найти мат.ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей показательное распределение $X \sim E_\alpha$.

Решение. Вычислим момент произвольного целого порядка *k*:

$$M[X^k] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_X(x)\, dx = \int\limits_0^\infty x^k \cdot \alpha e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha^k}\int\limits_0^\infty (\alpha x)^k e^{-\alpha x}\, d(\alpha x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\alpha^k} = \frac{k!}{\alpha^k}$$

здесь $\Gamma(k+1)=\int_0^\infty t^k e^{-t}\,dt$ – Г-функция Эйлера; для целых $k\ge 0$ $\Gamma(k+1)=k!$.

Используя полученное выражение для момента произвольного порядка k, получаем

$$M[X]=M[X^1]=\frac{1}{\alpha},\qquad D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=\frac{2}{\alpha^2}-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2=\frac{1}{\alpha^2}$$

Задача 63. Найти мат.ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей нормальное (гауссовское) распределение $X\sim N_{\alpha,\sigma^2}$.

Решение. Математическое ожидание

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)\cdot f_X(x)\,dx+\mu\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

Вводя в первом из полученных интегралов обозначение $t\equiv x-\mu$, получим интеграл от нечётной функции в симметричных пределах, равный нулю. Интеграл во втором слагаемом представляет собой интеграл от плотности вероятности по всей числовой оси, т.е. он равен единице. Следовательно, $M[X]=\mu$.

Вычислим дисперсию нормального распределения:

$$D[X]=M[(X-M[X])^2]=M[(X-\mu)^2]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

Делая в полученном интеграле замену $t\equiv x-\mu$ и вводя обозначение $\alpha\equiv\frac{1}{2\sigma^2}>0$, получаем

$$D[X]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2\cdot\exp(-\alpha t^2)\;dt=\frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\alpha t^2)\;dt\equiv\frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{d}{d\alpha}I(\alpha)$$

Делая ещё одну замену $\xi=t\sqrt{\alpha}$, сводим последний интеграл, зависящий от параметра α, к интегралу Пуассона:

$$I(\alpha)\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\alpha t^2)\;dt=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\xi^2)\,d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$$

Откуда для дисперсии нормального распределения имеем

$$D[X]=\frac{-1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{d}{d\alpha}I(\alpha)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}=\frac{1}{\sigma2\sqrt{2}}\cdot(2\sigma^2)^{3/2}=\sigma^2$$

Заметим, что тот же интеграл можно было легко вычислить путем сведения его к Гамма-функции Эйлера.

Задача 64. Показать, что если случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение $X\sim N_{0,1}$, то величина $Y\equiv\sigma X+\mu$ (где $\sigma\ne 0$ и μ – некоторые константы) имеет нормальное распределение $Y\sim N_{\mu,\sigma^2}$

Доказательство. Рассмотрим для простоты случай $\sigma > 0$. Случай $\sigma < 0$ рассматривается аналогично и дает тот же результат в силу симметричности распределения $N_{0,1}$ величины X (чётности функции распределения $F_X(x)$).

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P\left(X \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

Делая под интегралом замену $\xi = \frac{\eta-\mu}{\sigma}$, имеем $\eta = \sigma\xi + \mu$ и

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\eta-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\eta$$

Таким образом, для функции распределения случайной величины *Y* мы получили нормальное распределение $N_{\mu,\sigma}$ ■

Замечание. Полученный результат позволяет оперировать при доказательстве теорем со стандартным нормальным распределением, делая элементарным их обобщение на случай N_{μ,σ^2}.

Задача 65 (для самостоятельного решения). Пусть дана случайная величина $X \sim N_{0,1}$. Найти плотность вероятности для случайной величины $Y = X^2$.

Ответ: $f_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{если } y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right), \text{если } y > 0 \end{cases}$

Задача 66 (для самостоятельного решения). В предыдущей задаче найти также мат. ожидание и дисперсию случайной величины *Y*.

Ответ: $M[Y] = 1, D[Y] = 2$.

Задача 67. Точку бросают наудачу в квадрат со стороной 1, стороны которого параллельны осям X и Y, а центр имеет координату (0,0). Найти функцию распределения и плотность вероятности для случайных величин X, Y, X+Y.

Решение. $F_X(x) = P(X \le x) = \frac{S(X \le x)}{S(\text{квадрата})} = \frac{1}{2} + x$ и $f(x) = 1$ при $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$. Аналогично для $F_Y(y)$.

$$F_{X+Y}(s) = P(X+Y \le s) = \begin{cases} 0, & s \le -1 \\ \frac{1}{2} \cdot (1+s)^2, & -1 \le s \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot (1-s)^2, & 0 \le s \le 1 \\ 1, & s \ge 1 \end{cases}$$

$$f_{X+Y}(s) = \frac{dF_{X+Y}}{ds} = \begin{cases} 0, & s \le -1 \\ 1+s, & -1 \le s \le 0 \\ 1-s, & 0 \le s \le 1 \\ 0, & s \ge 1 \end{cases}$$

Задача 68 (формула свёртки). Пусть X и Y – независимые случайные величины с абсолютно непрерывными функциями распределения F_X и F_Y. Найти плотность вероятности для случайной величины $X+Y$.

Ответ: $f_{X+Y}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(s-t)\, dt$.

Задача 69. Пусть X и Y – независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с одной и той же константой α. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины, равной сумме $X+Y$.

Решение. Плотность вероятности для величин X и Y можно записать в виде $f_X(x)=\alpha e^{-\alpha x}\cdot H(x)$, где $H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$ – функция Хевисайда. Тогда по формуле свёртки имеем:

$$f_{X+Y}\,(z>0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx=\int\limits_0^z \alpha^2 e^{-\alpha x} e^{-\alpha(z-x)}dx=\alpha^2 e^{-\alpha z}\int\limits_0^z dx=\alpha^2 z e^{-\alpha z}$$

Ответ: $f_{X+Y}(z)=\alpha^2 z\, e^{-\alpha z}\, H(z)$, где H – функция Хевисайда.

Задача 70. Пусть X и Y – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$. Найти плотность вероятности случайной величины, равной сумме $X+Y$.

Решение. По формуле свёртки имеем

$$f_{X+Y}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(t-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}}\,dt=\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$$

Т.е. получили нормальное распределение с нулевым среднем значением и $\sigma^2=2$.

Замечание. Можно доказать более общее утверждение о том, что сумма двух величин с нормальным распределением $(\mu_1,\sigma_1^2),(\mu_2,\sigma_2^2)$ имеет нормальное распределение с параметрами $(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Задача 71. Пусть X и Y – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$. Найти плотность вероятности для случайной величины X^2+Y^2.

Решение. Выше мы уже вычисляли плотности вероятности для случайных величин X^2 и Y^2, они равны

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\cdot\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right), & x>0\end{cases}$$

Следовательно, по формуле свёртки имеем плотность вероятности для суммы X^2+Y^2:

$$f_2(x>0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\cdot f_1(x-t)\,dt=\int\limits_0^x\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi t}}\cdot\frac{e^{-\frac{x-t}{2}}}{\sqrt{2\pi(x-t)}}\,dt=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt{t\cdot(x-t)}}$$

Последовательно делая под интегралом замены $t = x\xi,\ \xi = \eta^2,\ \eta = \sin\varphi$, имеем:

$$f_2(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^1 \frac{2\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\varphi\ d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Ответ: $f_2(x) = \frac{H(x)}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$, $H(x)$ – функция Хевисайда $\left(H(x) = \begin{cases}0, & x < 0\\ 1, & x \ge 0\end{cases}\right)$.

Задача 72 (для самостоятельного решения). Пусть X, Y и Z – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$. Найти функцию распределения случайной величины $X^2 + Y^2 + Z^2$.

Ответ: $f_3(x) = H(x)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}$

Задача 73. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_k$ – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$. Доказать, что плотность вероятности случайной величины $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2$ имеет вид $f_\Sigma = \frac{x^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2}}}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)}$ (данное распределение называется «хи-квадрат с k степенями свободы» и играет важную роль в математической статистике).

Решение. Базис индукции для $k = 1, 2$ был доказан в предыдущих двух задачах. Сделаем шаг индукции. Пусть известно, что для всех *k* меньше некоторого значения данное утверждение справедливо. Пользуясь формулой свёртки, имеем

$$f_{k+2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t)\cdot f_2(x-t)\,dt = \int_0^x \frac{t^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\frac{e^{-\frac{x-t}{2}}}{2}\,dt = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k+2}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^x t^{\frac{k}{2}-1}\,dt$$

Используя свойство Гамма-функции Эйлера $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$, окончательно получаем

$$f_{k+2}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k+2}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\frac{2}{k}x^{\frac{k}{2}} = \frac{x^{\frac{k+2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k+2}{2}}\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \quad \blacksquare$$

Задача 74. Найти математическое ожидание M[X] случайной величины X, имеющей распределение хи-квадрат с k степенями свободы.

Решение. Для решения достаточно заметить, что распределение хи-квадрат с k степенями свободы имеет, в частности, сумма квадратов k случайных величин, независимых в совокупности, каждое из которых имеет стандартное нормальное распределение. Мат. ожидание каждого из таких слагаемых по определению равно $M\left[X_i^2\right] = D[X_i] = 1$, откуда имеем $M\left[\sum X_i^2\right] = M\left[k\cdot X_1^2\right] = k$. К тому же ответу, разумеется, можно прийти и прямым вычислением интеграла

$$M[X] = \int_0^\infty x\cdot\frac{x^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2}}}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)}\,dx = \frac{2}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty y^{\frac{k}{2}}e^{-y}\,dy = \frac{2}{\Gamma(k/2)}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) = 2\cdot\frac{k}{2} = k$$

Задача 75. Найти дисперсию D[X] случайной величины X, имеющей распределение хи-квадрат с k степенями свободы.

Решение. Аналогично предыдущей задаче имеем $D[X] = D\left[\sum X_i^2\right] = k \cdot D[X_1^2] = k \cdot (M[X_1^4] - (M[X_1^2])^2) = k \cdot (M[X_1^4] - D[X_1]^2) = k \cdot (M[X_1^4] - 1)$.

$$M[X_1^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\infty} x^4\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

Делая в полученном интеграле замену $y = \frac{1}{2}x^2,\ x = \sqrt{2y},\ dy = x \cdot dx$, имеем:

$$M[X_1^4] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\infty} 4y^2\, e^{-y} \frac{dy}{\sqrt{2y}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} y^{\frac{3}{2}}\, e^{-y}\, dy = \frac{4\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Отсюда для дисперсии имеем $D[X] = k \cdot (3-1) = 2k$. К такому же ответу несложно прийти, вычисляя $M[Y^2]$, где Y – случайная величина, имеющая распределение хи-квадрат с k степенями свободы.

Задача 76. Из точки (0,a) проведена прямая под углом φ к оси ординат. Найти функцию распределения точки пересечения этой прямой с осью абсцисс, если угол φ равномерно распределён в промежутке (а) от 0 до π/2; (б) от –π/2 до +π/2.

Решение. $X = a \cdot \operatorname{tg}\varphi\,; F_X(x) = P(X \le x) = P\left(\varphi \le \operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}\right)$. В случае (а) для $x \ge 0$ имеем $F_X(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, в случае (б) имеем $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, $f_X(x) = \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{1}{1 + x^2/a^2}$. Полученное распределение называют *распределением Коши*.

Задача 77. Вычислить математическое ожидание и дисперсию *распределения Коши* $C(x_0, \gamma)$, плотность вероятности которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - x_0)^2}$$

Решение: Интегралы, входящие в определение математического ожидания и дисперсии, расходятся, убывая на бесконечности как x^{-1} и 1 соответственно. Это означает, что распределение Коши не имеет математического ожидания, а его дисперсия бесконечна.

Задача 78. Доказать, что если некоторая случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение, и её плотность вероятности – чётная функция, то $F_X(x) + F_X(-x) = 1$.

Доказательство. Делая в одном из интегралов замену $\eta = -\xi$, получаем интеграл от плотности вероятности по всей числовой оси:

$$F_X(x) + F_X(-x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{-x} f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi + \int_{x}^{\infty} f(\eta) d\eta = 1 \quad \blacksquare$$

Задача 79. Обобщить предыдущую теорему на случайную величину с произвольным типом распределения: доказать, что если величины X и (–X) имеют одинаковое распределение (т.е. $F_X(x) = F_{-X}(x)\ \forall x$), то $F_X(x - 0) + F_X(-x) = 1$.

Доказательство.

$$F_X(x-0)+F_X(-x)=\lim_{\varepsilon\to 0}F(x-\varepsilon)+F_X(-x)=P(X<x)+P(X\le -x)=P(-X>x)+P(X\le x)$$

$$F_X(x-0)+F_X(-x)=1-F_{-X}(x)+F_X(x)=1-F_X(x)+F_X(x)=1 \quad \blacksquare$$

Задачи на нормировку

Плотность вероятности некоторой случайной величины с абсолютно непрерывным распределением задана с точностью до коэффициента. Нужно определить неизвестный коэффициент и найти функцию распределения:

Задача 80. Найти нормировочную константу для равномерного распределения: $f_X(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \alpha, & a<x<b\\ 0, & x>b\end{cases}$ (Ответ: $\alpha=\frac{1}{b-a}$)

Задача 81. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности является линейной функцией: $f_X(0\le x\le 1)=a\cdot(1-x)$ (Ответ: $a=2$)

Задача 82. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности имеет вид $f_X(-1\le x\le 1)=a\cdot(1-|x|)$ (Ответ: $a=1$)

Задача 83. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности имеет вид $f_X(-1\le x\le 1)=a\cdot(1-x^2)$ (Ответ: $a=\frac{3}{4}$)

Задача 84. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности имеет вид $f_X(0\le x\le \pi)=a\cdot\sin x$ (Ответ: $a=\frac{1}{2}$)

Задача 85. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности имеет вид $f_X(-1\le x\le 1)=a\cdot\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)$ (Ответ: $a=\frac{2}{4-\pi}$)

Задача 86. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности имеет вид $f_X(x)=\frac{a}{\cosh^2 x}$ при $-\infty<x<+\infty$. ($\frac{1}{\cosh^2 x}=(\tanh x)'$; ответ: $a=\frac{1}{2}$)

Задача 87. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности имеет вид $f_X(0\le x<\infty)=a\cdot e^{-x}\sin^2 x$

Решение.

$$\int e^{-x}\sin^2 x\ dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\cos 2x\ dx\equiv\frac{1}{2}-\frac{I}{2}$$

$$I=\int_0^\infty \cos 2x\ e^{-x}\,dx=1-2\int_0^\infty \sin 2x\ e^{-x}\,dx=1-4\int_0^\infty \cos 2x\ e^{-x}\,dx=1-4\cdot I$$

Откуда находим $I=\frac{1}{5}$, $\int_0^\infty e^{-x}\sin^2 x\ dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ и $a=\frac{5}{2}$.

Задача 88. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности имеет вид $f_X\left(-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}\right) = a \cdot \mathrm{tg}^2\, x$ $(\mathrm{tg}^2\, x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = (\mathrm{tg}^2\, x - x)'$; ответ: $a = \frac{2}{4-\pi})$ (СР)

Задача 89. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности имеет вид $f_X(0 \le x \le \infty) = a \cdot e^{-\sqrt{x}}$ (Замена $x = t^2$; ответ: $a = \frac{1}{2\Gamma(2)} = \frac{1}{2}$) (СР)

Задача 90. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности имеет вид $f_X(0 \le x \le \pi) = a \cdot \sin^3 x$ (Замена $y = \cos t$; ответ: $a = \frac{3}{4}$) (СР)

Задача 91. Найти нормировочную константу в случае, когда плотность вероятности имеет вид $f_X(0 < x < 1) = a \cdot \ln\frac{1}{x\cdot(1-x)}$ $(\int \ln\frac{1}{x\cdot(1-x)} = \int(-\ln x - \ln(1-x)) = -2\int \ln x = -2(x\ln x - x)$; $a = \frac{1}{2}$). (СР)

Задачи на преобразование случайных величин (функции от случайных величин)

Задача 92. Пусть величина φ распределена равномерно на отрезке от 0 до π. Найти функцию распределения и плотность вероятности для величины X = cos φ.

Решение. При $-1 \le x \le 1$ имеем $F_X(x) = P(X \le x) = P(\cos\varphi \le x) = P(\varphi \ge \cos^{-1} x) = 1 - F_\varphi(\cos^{-1} x) = 1 - \frac{1}{\pi}\cdot\cos^{-1} x$. Плотность вероятности на том же отрезке равна $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{1}{\pi\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

К этому же ответу можно было прийти и по-другому, рассматривая величину

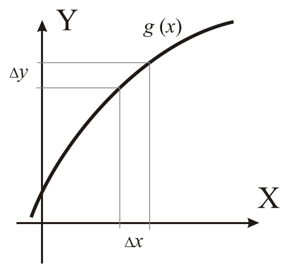
$$f_X(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot P\big(X \in (x, x+\Delta x)\big) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot P\big(\varphi \in (\cos^{-1} x, \cos^{-1} x + \Delta\varphi)\big)$$

Приращения $\Delta\varphi$ и Δx с точностью до членов второго порядка малости связаны через производную $\frac{\Delta x}{\Delta\varphi} = |\cos'\varphi| = \sin\varphi$, откуда

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\cdot f_\varphi(\cos^{-1} x) = \frac{f_\varphi(\cos^{-1} x)}{\sin\varphi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}$$

В последнем равенстве учтено, что плотность вероятности для φ есть константа (равная из условия нормировки 1/π) при $0 \le \varphi \le \pi$, тогда как для $\varphi = \cos^{-1} x$ данное условие всегда выполняется.

Задача 93. Пусть величина X может принимать значения от a до b с плотностью вероятности $f_X(x)$, а $g(x)$ – монотонная функция на промежутке от a до b. Найти плотность вероятности для величины $Y = g(X)$.



Решение. Произведение $f_X(x)\cdot\Delta x = P\big(X \in (x, x+\Delta x)\big)$ равно вероятности события «величина X лежит в интервале $(x, x+\Delta x)$». Указанное событие равно событию «величина Y лежит в интервале $(y, y+\Delta y)$», где $y = g(x), \Delta y = |g'(x)|\cdot\Delta x$, откуда имеем

$$f_Y(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{P\big(Y \in (y, y+\Delta y)\big)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x)}{|g'(x)|} = \frac{f\big(g^{-1}(y)\big)}{\big|g'\big(g^{-1}(y)\big)\big|}$$

Нетрудно убедиться, что вероятность обнаружить величину Y в промежутке от g(a) до g(b) равна единице. Для этого в интеграле

$$P(\Omega) = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f_Y(y)\,dy = \int\limits_{\min(g(a),g(b))}^{\max(g(a),g(b))} \frac{f\big(g^{-1}(y)\big)}{\big|g'\big(g^{-1}(y)\big)\big|}\,dy$$

нужно сделать замену $x = g^{-1}(y)$, $dx = dy/g(x)$, после чего получим интеграл f(x) dx по всем возможным значениям случайной величины X от a до b, который равен единице.

Задача 94. В условиях предыдущей задачи найти функцию распределения случайной величины Y.

Решение. Искомую функцию распределения можно получить, интегрируя найденную выше плотность вероятности, либо непосредственно по определению. Для этого рассмотрим два случая, когда функция g монотонно возрастает и монотонно убывает.

Случай 1: функция g(x) монотонно возрастает. Тогда

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\big(X \le g^{-1}(y)\big) = F_X\big(g^{-1}(y)\big)$$

Случай 2: функция g(x) монотонно убывает. Тогда

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\big(X \ge g^{-1}(y)\big) = 1 - F_X(g^{-1}(y) - 0)$$

Поскольку по условию величина X имеет абсолютно непрерывное распределение, предел в полученном ответе можно заменить значением функции распределения в точке: $F_Y(y) = 1 - F_X\big(g^{-1}(y)\big)$.

Задача 95. (*Линейные преобразования*). Пусть случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение с функцией распределения $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,d\xi$. Найти плотность вероятности и функцию распределения для случайной величины $Y = kX + \mathrm{C}$.

Решение. Рассмотрим вначале случай $k > 0$. По общим формулам (для случая монотонно растущей функции *g*) имеем:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{f_X\left(\frac{y-C}{k}\right)}{k}, \qquad F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-C}{k}\right)$$

Аналогично, для $k < 0$ имеем

$$f_Y(y) = \frac{f_X\left(\frac{y-C}{k}\right)}{|k|}, \qquad F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-C}{k}\right)$$

Задача 96. Получить формулы преобразования для мат.ожидания и дисперсии при линейном преобразовании случайных величин (на примере абсолютно непрерывных распределений).

Решение. По определению имеем

$$M[Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_X\left(\frac{y-C}{k}\right)}{|k|} \cdot y\,dy$$

Делая замену $y = kx + C,\ dy = |k| \cdot dx,$ получаем

$$M[Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot (kx + C)\,dx = k \cdot M[X] + C$$

Аналогично для дисперсии имеем:

$$D[Y] = M[(Y - M[Y])^2] = M[(kX + C - k \cdot M[X] - C)^2] = M[k^2 \cdot (X - M[X])^2]$$

Пользуясь полученным выше свойством линейности для мат.ожидания, выносим коэффициент k^2 из-под М, в результате чего имеем $D[Y] = k^2 \cdot D[X]$.

Задача 97. (*Квантильные преобразования*). Пусть случайная величина X распределена равномерно на промежутке (0,1), а F(x) – некоторая функция, обладающая свойствами функции распределения:

$$0 \le F(x) \le 1 \; \forall x, \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \qquad F(x+a) \ge F(x) \; \forall a > 0, \forall x$$

Найти функцию распределения случайной величины $Y \equiv F^{-1}(X)$

Решение. Поскольку F – монотонно растущая функция, F^{-1} также монотонно возрастает. Следовательно, ответ данной задачи даётся первой из полученных выше формул:

$$F_Y(y) = F_X\big(g^{-1}(y)\big) = F_X\big(F(y)\big)$$

Поскольку функция $F(y)$, стоящая в аргументе функции F_X, по условию всегда принимает значения от 0 до 1, можно записать $F_X(0 \le t \le 1) = t$, откуда окончательно имеем

$$F_Y(y) = F(y)$$

Таким образом, мы имеем регулярный способ построения случайной величины с любой наперёд заданной абсолютно непрерывной функцией распределения F при условии, что у нас есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке от 0 до 1. Данный результат может быть использован, например, в численном моделировании случайных процессов и явлений.

Задача 98. Пусть величина φ распределена равномерно на отрезке от 0 до π. Найти функцию распределения и плотность вероятности для величины X = sin φ.

Решение. В соответствии с общей формулой имеем $f_X(x) = \frac{1/\pi}{|\cos\varphi|} = \frac{1/\pi}{|\cos(\sin^{-1}x)|} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.
Функция распределения даётся интегралом от плотности вероятности:

$$F_X(-1 \le x \le 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sin^{-1}x$$

Задача 99. Пусть величина X может принимать значения от a до b с плотностью вероятности $f_X(x)$, а $g(x)$ – некоторая функция на промежутке от a до b, причём известно, что промежуток от a до b может быть представлен в виде прямой суммы промежутков монотонности для функции g. Найти плотность вероятности для величины $Y = g(X)$

Решение. Необходимо разбить промежуток от a до b на промежутки монотонности функции g, после чего аналогично предыдущему получим

$$f_Y(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P\big(Y \in (y, y+\Delta y)\big)}{\Delta y} = \sum_j \frac{f\big(x_j\big)}{\big|g'(x_j)\big|} = \sum_j \frac{f\left(g_j^{-1}(y)\right)}{\big|g'(g_j^{-1}(y))\big|}$$

где суммирование ведётся по всем x_j – корням уравнения $g\big(x_j\big) = y$, а под $g_j^{-1}(y)$ понимается функция, обратная к $g(x)$ на *j*-м промежутке монотонности функции *g*.

Задача 100. Пусть величина X распределена равномерно от -1 до +1. Построить плотность вероятности и функцию распределения случайной величины $Y = \sqrt{1-x^2}$.

Решение. $f_Y(0 < y < 1) = \frac{f(x)}{|g'(x)|} + \frac{f(-x)}{|g'(-x)|} = 2\frac{f(x)}{|g'(x)|} = 2 \cdot \frac{1/2}{-x/\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$.

$$F_Y(y) = \int_0^y f_Y(\xi)\, d\xi = \int_0^y \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = \frac{1}{2}\int_0^{y^2} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta}} = \frac{1}{2}\int_{1-y^2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 1 - \sqrt{1-y^2}$$

Математический маятник (маленький груз на длинной тонкой нити), совершающий гармонические незатухающие колебания, фотографируют в произвольные случайные моменты времени. Найти распределение угла отклонения маятника на фотографиях, считая угловую амплитуду колебаний известной и равной α_0.

Решение. Уравнение движения маятника $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$. Полагая, что фотографии делаются в случайные моменты времени, получим, что фаза колебаний имеет равномерное распределение от –π 0 до +π. Найдём распределение случайной величины $Y = \alpha_0 \cdot \cos\varphi$:

$$f_Y(-\alpha_0 < y < \alpha_0) = \frac{f(\varphi)}{|-\alpha_0 \cdot \sin\varphi|} + \frac{f(-\varphi)}{|-\alpha_0 \cdot \sin(-\varphi)|} = \frac{2f(\varphi)}{|\alpha_0 \cdot \sin\varphi|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2\pi}}{\alpha_0 \cdot \sqrt{1 - y^2/\alpha_0^2}}$$

$$f_Y(-\alpha_0 < y < \alpha_0) = \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_0^2 - y^2}}$$

$$F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(\xi)\,d\xi = \frac{1}{pi} \int\limits_{-\alpha_0}^{y} \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha_0^2 - y^2}} = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} y \Big|_{-1}^{y/\alpha_0} = \frac{1}{\pi} \sin^{-1}\frac{y}{\alpha_0} + \frac{1}{2}$$

Заметим, что полученное выражение для плотности неограниченно растёт вблизи точек остановки (крайних точек на траектории, в которых отклонение маятника максимально). Это означает, что вероятность обнаружить маятник в малой окрестности точки остановки больше, чем в малой окрестности других точек (при равной ширины окрестностей). (Заметим также, что в справедливости данного вывода несложно убедиться, если взять тёмный карандаш двумя пальцами и привести его в быстрые колебательные движения над белым листом бумаги с частотой, близкой к резонансу. Если движение карандаша будет достаточно быстрым для того, чтобы оно смазывалось и воспринималось нами как однородный серый фон, плотность которого будет сгущаться к точкам остановки – крайним положениям колебаний).

Задача 101. Из орудия, установленного под углом 45° к горизонту, совершают выстрелы, при этом скорость вылета снаряда из орудия распределена по нормальному закону со средним значением v_0 и дисперсией σ^2. Найти плотность вероятности для дальности полёта снаряда. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Снаряд, выпущенный со скоростью v под углом α к горизонту, имеет проекции начальной скорости $v_x = v\cos\alpha\,, v_y = v\sin\alpha$. Время полёта снаряда $t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v\sin\alpha}{g}$. Дальность полёта $l = v_x t = \frac{2}{g}v^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha$. При α = 45° достигается максимальная дальность стрельбы $l_{\max} = v^2/g$. Следовательно, искомая случайная величина (дальность полёта) пропорциональна квадрату начальной скорости с коэффициентом пропорциональности 1/g. Плотность вероятности для скорости вылета снаряда из орудия:

$$f_V(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(v - v_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

По полученным выше формулам имеем для преобразования $L \equiv g(v) = v^2/g\,,\ \ v = \sqrt{Lg}$:

$$f_L(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\frac{2\sigma}{g}\sqrt{lg}} \cdot \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{lg} - v_0\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Задача 102. В условиях предыдущей задачи получить приближённый ответ, используя условие малости разброса начальной скорости ($\sigma \ll v_0$).

Решение. Записывая $v = v_0 + u$, где v_0 – заданное по условию среднее значение скорости вылета снаряда из орудия, а u – случайная величина, равная отклонению скорости вылета от среднего значения, имеем $u \ll v_0$. Подставляя скорость вылета в полученное ранее выражение для дальности стрельбы $l(v) = v^2/g$ и удерживая члены до первого порядка малости включительно, получаем $l(v) = (v_0 + u)^2/g = \frac{v_0^2}{g} + \frac{2v_0 u}{g}$. Таким образом, в случае малого разброса случайной величины мы получили линейное преобразование $L \equiv g(u) = l_0 + \frac{2v_0}{g}u, \quad u = \frac{g}{2v_0} \cdot (L - l_0)$. Плотность вероятность для дальности стрельбы

$$f_L(l) = \frac{f(u)}{|g'(u)|} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{g}{2v_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{g}{2\sigma v_0} \cdot \exp\left(-\frac{(l - l_0)^2}{2 \cdot \frac{4v_0^2\sigma^2}{g^2}}\right)$$

Таким образом, для дальности полёта получили нормальное распределение со средним значением $l_0 = v_0^2/g$ и дисперсией $\sigma_l^2 = \left(\frac{2v_0}{g} \cdot \sigma_v\right)^2$.

Задача 103. (*Общий случай неособого преобразования*). Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону N_{μ,σ^2}, причем $\sigma \ll \mu$. Найти приближённый закон распределения случайной величины $Y = g(X)$, где g – неособое преобразование $(0 < |g'| < \infty)$.

Решение. Представляя случайную величину X в виде $X = \mu + \delta,\ \delta \sim N_{0,\sigma^2}$, имеем для Y:

$$Y = g(X) = g(\mu + \delta) = g(\mu) + g'(\mu) \cdot \delta + O(\delta^2)$$

Пренебрегая квадратичным и более высокими порядками малости, получаем линейную связь между Y и X, откуда

$$Y \sim N_{\mu_Y,\, \sigma_Y^2}, \qquad \mu_Y = g(\mu), \qquad \sigma_Y^2 = (\sigma \cdot |g'(\mu)|)^2$$

Пренебрегая квадратичным и более высокими порядками малости, получаем линейную связь между Y и X, откуда $Y \sim N_{g(\mu),\sigma_Y^2}$, где $\sigma_Y^2 = \sigma^2 \cdot \big(g'(\mu)\big)^2$.

Задача 104. Из орудия, установленного под углом φ к горизонту, совершают выстрелы, при этом скорость вылета снаряда из орудия равна v_0. Найти плотность вероятности для распределения дальности полёта снаряда, если величина φ имеет нормальное распределение со средним значением $\varphi_0 = 30°$ и дисперсией σ^2. Сопротивлением воздуха пренебречь. Проанализировать полученный ответ в приближении $\sigma^2 \ll 1$. Как изменится ответ, если $\varphi_0 = 45°$?

Решение. Дальность полёта снаряда равна $l(\alpha) = \frac{v^2}{g} \cdot \sin 2\varphi$. Записывая, аналогично предыдущему, $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$, имеем при $\delta\varphi \ll 1$

$$l(\varphi) = l(\varphi_0 + \delta\varphi) = \frac{v^2}{g} \cdot \sin 2\varphi_0 \cdot \big(1 + \delta\varphi \cdot 2\operatorname{ctg} 2\varphi_0 + O(\delta\varphi^2)\big) \approx l_0 \cdot (1 + \delta\varphi \cdot 2\operatorname{ctg} 2\varphi_0)$$

При $\varphi_0 = 30°$ имеем $l = l_0 \cdot \left(1 + \delta\varphi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ – следовательно, дальность полёта будет иметь нормальное распределение с мат. ожиданием $l_0 = \frac{v^2}{g} \cdot \sin 2\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{v^2}{g}$ и дисперсией $\sigma_l^2 = \sigma^2 \cdot (l_0 \cdot 2\operatorname{ctg} 2\varphi_0)^2 = \left(\sigma \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$.

При $\varphi_0 = 45°$ полученная выше формула даёт $l = l_0 \cdot (1 + \delta\varphi \cdot 2\operatorname{ctg} 90°) = l_0$. В полученный ответ не вошли флуктуации угла вылета снаряда $\delta\varphi$, однако необходимо помнить, что мы получили данное выражение, удерживая только линейные члены разложения по $\delta\varphi$. При углах наклона орудия, близких к 45° дальность полёта близка к максимальному значению (точке экстремума), поэтому первый члена разложения становится сравнимым или даже меньше по сравнению со вторым (квадратичным) членом по $\delta\varphi$. Разложение строго в точке максимума будет иметь вид

$$l(\varphi) = \frac{v^2}{g} \cdot \sin 2\varphi_0 \cdot \left(1 + \delta\varphi \cdot 2 \operatorname{ctg} 2\varphi_0 - 2\delta\varphi^2 + o(\delta\varphi^2)\right) = l_{\max} \cdot (1 - 2\delta\varphi^2)$$

В общем виде вырожденное преобразование будет рассмотрено ниже.

Задача 105. С какой вероятностью точечная цель окажется в 30-м радиусе поражения, если для точного попадания в цель необходимо стрелять под углом 30°, а угол наведения орудия в силу погрешности наведения, неточности установки орудия, дрожания в момент стрельбы и прочих факторов является случайной величиной с нормальным распределением с мат.ожиданием 30° и дисперсией $\sigma^2 = (2°)^2$? Скорость вылета снаряда из орудия $v = 70.711$ м/с ($v^2 = 5 \cdot 10^3$м^2/с^2). В решении пренебречь сопротивлением воздуха и считать наведение по второй (поперчной) координате абсолютно точным. Для расчёта вероятности см. таблицу нормального распределения.

Решение: Дальность полёта снаряда равна $l(\alpha) = \frac{v^2}{g} \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{v^2}{g}$. Записывая, аналогично предыдущему, $\alpha = \alpha_0 + \beta$, имеем при $\beta \ll 1$

$$l(\alpha) = l(\alpha_0 + \beta) = \frac{v^2}{g} \cdot \sin 2\alpha_0 \cdot (1 + \beta \cdot 2\cos 2\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{v^2}{g} \cdot (1 + \beta) = l_0 + l_0 \cdot \beta$$

Для указанных в условии задачи параметров имеем $l_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{v^2}{g} = 433$ м; дальность стрельбы имеет распределение, близкое к нормальному, с мат.ожиданием l_0 и дисперсией $\sigma_l^2 = \sigma_\alpha^2 \cdot l_0^2 = \left(\frac{2° \cdot \pi}{180°} \cdot l_0\right)^2 = (15.1\text{ м})^2$. Разность координат цели и места падения снаряда δx имеет распределение, близкое к нормальному, с нулевым мат. ожиданием и дисперсией σ_l^2. Следовательно, случайная величина $\delta x / \sigma_l$ будет иметь стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$. Вероятность того, что точечная цель окажется в 30-м радиусе поражения снарядом равна

$$P(|\delta x| \le 30\text{ м}) = P\left(\left|\frac{\delta x}{\sigma_l}\right| \le 1.99\right) = 2P\left(0 \le \frac{\delta x}{\sigma_l} \le 1.99\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{1.99}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{erf} 1.407 = 0.9534$$

Таким образом, искомая вероятность поражения цели в заданных условиях равна 0.9534, вероятность промаха составляет 4.7%.
Аналогично, для радиуса поражения 10 м, имеем вероятность попадания 0.49 (промаха – 0.51). Для радиуса поражения 1 м P=5.3% (промаха – 94.7%), для 10 см P=0.53% (промаха – 99.47%).

Задача 106. Из орудия, установленного под углом 45° к горизонту, совершают выстрелы, при этом скорость вылета снаряда из орудия распределена по нормальному закону со средним значением v_0 и дисперсией σ^2. Найти функцию распределения дальности полёта снаряда, если орудие установлено у края наклонной плоскости с углом наклона α . Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Зависимость координат снаряда от времени:

$$x(t) = vt\cos\varphi = \frac{v}{\sqrt{2}} \cdot t, \quad y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v}{\sqrt{2}} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Откуда уравнение траектории

$$y(x) = x - \frac{gx^2}{v^2}$$

Координата падения снаряда на землю дается пересечением параболы (уравнение траектории) с прямой (уравнение наклонной плоскости) $y = x \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$, откуда имеем для x-координаты точки падения

$$x = \frac{v^2}{g} \cdot (1 - \mathrm{tg}\,\alpha)$$

Следовательно, ответ будет аналогичен ответу в предыдущих задачах с заменой ускорения свободного падения g на $\frac{g}{1-\tan\alpha}$.

Задача 107. Стальные шарики роняют в сосуд с глицерином, имеющий большую высоту h, при этом измеряют время, за которое шарик прошёл расстояние от середины сосуда до дна. Считая, что радиус бросаемых в глицерин шариков распределён по нормальному закону (N_{R_0,σ^2}), найти среднее значение и дисперсию распределения времени падения шариков. Сила сопротивления вязкой жидкости определяется формулой Стокса $\vec{F}_{\text{тр}} = -6\pi R\eta \cdot \vec{v}$, (здесь R – радиус сферического тела, η – коэффициент вязкости, v – скорость движения сферического тела в вязкой жидкости). Сила Архимеда $\vec{F}_{\text{А}} = -\rho_{\text{ж}}\vec{g}V$, где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости, V – объем вытесняемой жидкости (объём тела).

Решение. Поскольку сосуд по условию высокий, можно считать, что скорость шариков к моменту прохождения середины сосуда установилась (не изменяется во времени). Установившуюся скорость падения легко найти, приравнивая нулю сумму сил, действующих на шарик:

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{А}} + \vec{F}_{\text{тр}} = \rho gV - \rho_{\text{ж}}gV - 6\pi R\eta v = (\rho - \rho_{\text{ж}})g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi R\eta v = 0$$

откуда равновесная скорость

$$v_0 = \frac{(\rho - \rho_{\text{ж}})g \cdot 2R^2}{9\eta}$$

Время, за которое шарик пройдёт расстояние h/2 в вязкой жидкости, имея равновесную скорость, равно

$$t(R) = \frac{h}{2v_0} = \frac{9\eta h}{4(\rho - \rho_{\text{ж}})g} \cdot \frac{1}{R^2} = t_0 \cdot \frac{R_0^2}{R^2}, \qquad \text{где } t_0 \equiv t(R_0)$$

Таким образом, мы получили, что искомое время t связано с радиусом шарика R посредством монотонно убывающей функции $g(R) = t_0 R_0^2/R^2$, откуда, используя общие формулы, можно получить выражение для плотности вероятности случайной величины t:

$$f_t(t) = \frac{f(R)}{|g'(R)|} = \frac{f(R)}{2t_0 R_0^2 R^{-3}}$$

Подставляя $f(R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(R-R_0)^2}{2\sigma^2}\right)$, $R = R_0 \cdot \sqrt{t/t_0}$, имеем

$$f_t(t > 0) = \frac{R_0\sqrt{t_0}}{\sqrt{2\pi} \cdot \ 2\sigma\sqrt{t^3}} \cdot \exp\left(-\frac{R_0^2}{2\sigma^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{t_0}{t}} - 1\right)^2\right)$$

Полагая флуктуации радиуса шариков малыми, можно упростить полученный ответ. Заменяя $t = t_0 + \delta t$ и пренебрегая малыми слагаемыми $\delta t/t_0$:

$$f_t(t) = \frac{\exp\left(-\frac{(\delta t)^2}{2 \cdot (2\sigma R_0^{-1} t_0)^2}\right)}{\sqrt{2\pi} \cdot 2\sigma R_0^{-1} t_0}$$

Таким образом, мы получили нормальное распределение с мат.ожиданием, равным t_0, и дисперсией $\sigma_t^2 = (2\sigma R_0^{-1} t_0)^2$.

Задача 108. С какой вероятностью случайная величина $X \sim N_{0,1}$ попадает в интервал от 1 до 2? От -1 до +1? Лежит левее 2.5? Правее -1?

Определение. Квантилью уровня α (или α-квантилью) называется число x такое, что

$$P(X \leq x_\alpha) \geq \alpha, \qquad P(X > x_\alpha) \leq 1 - \alpha$$

Если распределение непрерывно, то α-квантиль задаётся уравнением $F_X(x_\alpha) = \alpha$.

Задача 109. Найти квантили уровня 0.5, 0.75, 0.9 для случайной величины X, равной количеству очков, выпавшему на игральной кости.

Задача 110. Используя таблицу, найти квантили уровня 0.9, 0.99 и 0.999 для нормального распределения.

Задача 111. Пусть $X \sim N_{0,1}$. Пользуясь таблицей квантилей нормального распределения, указать симметричные относительно нуля интервалы, в которые X попадает с вероятностью 0.9, 0.99, 0.999.

Задача 112. В условиях предыдущей задачи про падение шариков в вязкой жидкости найти, при каком максимальном значении дисперсии размера шариков σ^2 время падения будет отличаться от среднего не больше, чем на 1% с вероятностью 99%.

Решение. Случайная величина $X = \frac{t-t_0}{t_0} \cdot \frac{R_0}{2\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение $N_{0,1}$. (Действительно, при этом $t = t_0 + X \cdot 2\sigma t_0 R_0^{-1}$, откуда $D[t] = (2\sigma t_0 R_0^{-1})^2$). Если время падения t будет отличаться от среднего не больше, чем на 1%, то

$$-10^{-2}\frac{R_0}{2\sigma} < X < 10^{-2}\frac{R_0}{2\sigma}$$

С другой стороны, интервал, в который случайная величина $X \sim N_{0,1}$ попадает с вероятностью 99% = 1 – ε, равен $[F^{-1}(\varepsilon/2), F^{-1}(1-\varepsilon/2)]$. (Действительно, вероятность того, что величина X попадёт в указанный интервал, равна разности значений функции распределения на верхней и нижней границе, т.е. $F(b) - F(a) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon$). Поскольку стандартное нормальное распределение симметрично относительно нуля (плотность вероятности – чётная функция), имеем $F^{-1}(1-x) = -F^{-1}(x)$. Для ε = 0.01 находим по таблице квантилей нормального распределения $x_{0.995} \approx 2.5758$. Следовательно, $10^{-2}\frac{R_0}{2\sigma} = 2.5758$, откуда $\frac{\sigma}{R_0} = \frac{1}{2 \cdot 257.58} \approx 1.94 \cdot 10^{-3}$.

Задача 113. Пусть X и Y – случайные величины, имеющие нормальное распределение с заданными параметрами $x_0, \sigma_X^2, y_0, \sigma_Y^2$, причём $\sigma_X \ll x_0$, $\sigma_Y \ll y_0$, а g – некоторое неособое преобразование. Линеаризуя g, найти приближенное распределение для случайной величины $Z = g(X, Y)$.

Решение. Линеаризуя g вблизи средних значений x_0 и y_0, имеем:

$$g(X,Y) = g(x_0,y_0) + (X - x_0) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} + (Y - y_0) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} + O((X-x_0)^2, (Y-y_0)^2)$$

Таким образом, случайная величина Z в линейном приближении может быть представлена в виде суммы постоянного слагаемого $g(x_0, y_0)$ и двух случайных величин, имеющих нормальное распределение с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma_1^2 = (\sigma_X \cdot g_x)^2, \sigma_2^2 = \left(\sigma_Y \cdot g_y\right)^2$, где символами g_x, g_y обозначены соответствующие частные производные функции g. Сумма указанных двух величин, как было показано раньше с использованием формулы свёртки, имеет нормальное распределение с мат. ожиданием, равным нулю, и дисперсией $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Окончательно получаем, что $Z \sim N_{\mu,\sigma^2},\ \mu = g(x_0, y_0),\ \sigma^2 = (\sigma_X \cdot g_x)^2 + \left(\sigma_Y \cdot g_y\right)^2$.

Задача 114. Оценить дисперсию распределения дальности стрельбы под углом 30° при средней начальной скорости v_0, если флуктуации скорости распределены по нормальному закону с дисперсией $\sigma_v^2 = (0.01 \cdot v_0)^2$, а угол вылета снаряда флуктуирует с $\sigma_\alpha^2 = (1°)^2$. Найти ширину диапазона, в котором дальность выстрела окажется с вероятностью 90% (99%, 99.9%).

Задача 115. Мастер вытачивает детали диаметром d = 50 мм с погрешностью, имеющей дисперсию $\sigma^2 = (0.2\ \text{мм})^2$. Считая, что диаметр деталей распределён по нормальному закону, найти процент брака при условии, что браком считается отклонение диаметра детали от среднего на величину более 0.5 мм.

Задача 116. В условиях предыдущей задачи найти процент забракованных деталей при условии, что контролёр независимо от диаметра измеряемой детали допускает случайную погрешность измерения, распределённую по нормальному закону с дисперсией $\sigma^2 = (0.1\ \text{мм})^2$.

Задача 117. Пусть X – случайная величина, имеющая нормальное распределение N_{x_0,σ^2} и $\sigma^2 \ll x_0$. Найти (в первом ненулевом приближении) распределение величины $Y = g(X)$ при условии, что $g'(x_0) = 0$.

Указание. Ответ может быть получен как непосредственным вычислением, так и приближённым сведением к распределению хи-квадрат с одной степенью свободы (M=k=1, D=2k=2):

$$f_{\chi_k^2} = \frac{x^{\frac{k}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)}, \qquad \text{при } k = 1\text{: } f = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

Задача 118. Даны две независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение $X, Y \sim N_{0,1}$. Найти плотность вероятности и функцию распределения случайной величины $Z = Y/X$.

Решение. Найдём плотность вероятности обнаружения точки (X,Y) на плоскости. Вероятность обнаружить случайную величину X в пределах от x до x+Δx равна (с точностью до членов второго порядка малости по Δx)

$$P\big(X \in (x, x + \Delta x)\big) = f_X(x)\Delta x$$

Аналогично, для Y-координаты точки:

$$P\big(Y \in (y, y + \Delta y)\big) = f_Y(y)\Delta y$$

Вероятность того, что X и Y координаты лежат в указанных пределах, равна

$$P\big(X \in (x, x+\Delta x), Y \in (y, y+\Delta y)\big) = P\big(X \in (x, x+\Delta x)\big) \cdot P\big(Y \in (y, y+\Delta y)\big) =$$
$$= f_X(x) f_Y(y) \cdot \Delta x\, \Delta y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

(здесь использована независимость случайных величин X и Y). В полученное выражение входит произведение $\Delta x \Delta y$, т.е. элемент площади. Таким образом, полученная вероятность зависит только от расстояния точки (X,Y) до начала координат, но не от её угловой координаты φ. Следовательно, случайная величина φ (угловая координата точки, имеющей декартовые координаты (X,Y)) распределена равномерно от –π до +π . Далее заметим, что искомое отношение $z = Y/X = \operatorname{tg}\varphi$, т.е. искомая функция распределения для отношения Y/X есть функция распределения тангенса равномерно распределенной случайной величины φ. Используя полученную выше общую формулу, имеем

$$f_Z(z) = \frac{2f_\varphi(\varphi)}{|g'(\varphi)|} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$$
$$F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}^{-1} z$$

Задача 119. (ЦПТ) Игральную кость бросают тысячу раз и суммируют количество выпавших очков. Найти мат.ожидание полученной случайной величины, её дисперсию. В какой диапазон попадёт сумма очков по 1000 броскам с вероятностью 99%?

Задача 120. (ЦПТ) Тысяча человек независимо друг от друга вытаскивают каждый из своей игральной колоды наугад по три карты и складывают в одну стопку. Найти мат.ожидание и дисперсию количества тузов в полученной стопке из трёх тысяч карт.

Литература

[1] Б.Зельдович, А.Д. Мышкис «Элементы прикладной математики» (М.: Наука, 1972).

[2] Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас «Вероятность» (М.: Мир, 1969).

[3] Д.А. Коршунов, С.Г. Фосс, «Сборник задач и упражнений по теории вероятностей»

Смирнов Сергей Валерьевич, к.ф.-м.н., ст.преп. кафедры высшей математики физического факультета НГУ, старший научный сотрудник НГУ. Автор заранее выражает свою признательность за все сообщения о найденных опечатках, а также а отзывы и предложения, высланные по адресу smirnov (at) lab.nsu.ru