Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра высшей математики

А. П. КОВАЛЕВСКИЙ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

Учебное пособие

Новосибирск
2022

Ковалевский А. П. Статистические критерии: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2022. 92 с.

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов 3 курса физического факультета, изучающих теорию вероятностей и математическую статистику в пятом семестре. Пособие содержит теоретический материал, задачи для решения в аудитории и для самостоятельного решения, таблицы распределений.

Все замечания по содержанию пособия прошу передавать автору. Они будут с благодарностью приняты и учтены в следующих изданиях.

Оглавление

Введение. Основные понятия и теоремы теории вероятностей и математической статистики

Теория вероятностей изучает математические модели случайных экспериментов — последовательностей испытаний с непредсказуемым исходом, подчиняющихся закону сходимости частот. Математическая статистика рассматривает вероятностные модели в предположении о том, что распределение случайных величин, наблюдаемых в ходе эксперимента, частично или полностью неизвестно. Статистический критерий — это правило выбора одной из имеющихся (высказанных исследователем) статистических гипотез — утверждений о неизвестном распределении случайных величин, наблюдаемых в результате случайного эксперимента. Теория статистических критериев является частью математической статистики и основывается на теории вероятностей.

Во введении напомним кратко основные определения и теоремы этих наук.

Случайному эксперименту сопоставляется *пространство элементарных исходов* — произвольное непустое множество Ω. Подмножества Ω называются событиями.

Определение. *Вероятностное пространство* — это пространство элементарных исходов с заданной на его подмножествах вероятностной мерой (вероятностью) $\mathbf{P}$ такой, что:

1) для любого события A выполнено $\mathbf{P}(A) \geq 0$ (неотрицательность);

2) для любого конечного или счетного множества непересекающихся событий $A_1,\ A_2,\ \ldots$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots$$

(счетная аддитивность);

3) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ (условие нормировки).

Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, определяется как $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(B)$. Условная вероятность не определена, если $\mathbf{P}(B) = 0$.

Определение. *Случайным вектором* $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ называется такое отображение из пространства элементарных исходов Ω в n-мерное арифметическое простанство $\mathbf{R}^n$, что для каждого $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n$ множество $\{\omega \in \Omega : \ \vec{X}(\omega) < \vec{t}\}$ является событием, то есть определена его вероятность. *Многомерной функцией распределения* случайного вектора $\vec{X}$ называется эта вероятность как функция векторной переменной $\vec{t}$:

$$F_{\vec{X}}(\vec{t}) = \mathbf{P}\{\,\omega \in \Omega : \ \vec{X}(\omega) < \vec{t}\} = \mathbf{P}\{\,\vec{X} < \vec{t}\}.$$

Неравенство $\vec{X} < \vec{t}$ понимается покоординатно, то есть означает систему неравенств $X_1 < t_1, \ldots, X_n < t_n$.

При $n = 1$ получаем определения случайной величины и функции распределения.

Дискретным называется случайный вектор $\vec{X}$, принимающий конечное или счетное число значений $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \ldots$. Его распределение задается таблицей распределения случайного вектора, т.е. набором вероятностей $\mathbf{P}\{\vec{X} = \vec{t}_j\}$. В двумерном случае (при $n = 2$) таблицу распределения дискретного случайного вектора $\vec{X} = (X, Y)$ удобно записывать в виде

$X\backslash Y$	b_1	b_2	$\ldots$
a_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Здесь $p_{ij} = \mathbf{P}\{X = a_i, \ Y = b_j\}$.

Свойства таблицы распределения двумерного дискретного вектора:

1) все a_i различны;

2) все b_j различны;

3) все p_{ij} неотрицательны;

4) сумма всех p_{ij} равна 1.

В одномерном случае распределение дискретной случайной величины записывают в виде таблицы, содержащей ее значения $a_1,\ a_2,\ \ldots$ и вероятности $p_i = \mathbf{P}\{X = a_i\}$.

Таблица одномерного распределения случайной величины X получаются из таблицы двумерного распределения по формуле $\mathbf{P}\{X = a_i\} = \sum_j p_{ij}$.

Говорят, что случайный вектор $\vec{X}$ имеет *многомерное абсолютно непрерывное распределение*, если существует *многомерная плотность распределения вероятностей* $f_{\vec{X}}(\ \vec{t}\ )$ такая, что для $B \subseteq \mathbf{R}^n$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\{\vec{X} \in B\} = \int\limits_B f_{\vec{X}}(\vec{t})d\vec{t}$$

(здесь и далее используется обозначение $d\vec{t} = dt_1 \ldots dt_n$).

В частности, если $\vec{X}$ имеет абсолютно непрерывное распределение, то для любого $\vec{t} \in \mathbf{R}^n$ выполнено

$$F_{\vec{X}}(\vec{t}) = \int\limits_{\vec{u} \le \vec{t}} f_{\vec{X}}(\vec{u})d\vec{u}.$$

Свойства многомерной плотности распределения: $f_{\vec{X}}(\vec{t}) \geq 0$; $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f_{\vec{X}}(\vec{t})d\vec{t} = 1$.

Одномерные плотности распределения компонент случайного вектора вычисляются интегрированием многомерной плотности распределения по всем значениям всех остальных компонент.

Компоненты случайного вектора называются *независимыми*, если для любых подмножеств числовой прямой $B_1,\ \ldots,\ B_n$ выполнено равенство

$$\mathbf{P}\{X_1 \in B_1,\ \ldots,\ X_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{X_1 \in B_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\{X_n \in B_n\}.$$

Распределение вектора с независимыми компонентами определяется распределениями компонент.

Если дискретный случайный вектор принимает значения $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2, \ldots$, то его математическое ожидание — это вектор

$$\mathbf{E}\vec{X} = \sum_j \vec{t}_j \mathbf{P}\{\vec{X} = \vec{t}_j\}.$$

Если ряд

$$\sum_j |\vec{t}_j| \mathbf{P}\{\vec{X} = \vec{t}_j\}$$

расходится, то говорят, что математическое ожидание не существует. Здесь через $|\cdot|$ обозначена евклидова норма вектора.

Если $\vec{g}: \ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — вектор-функция, $m \geq 1$, то

$$\mathbf{E}\vec{g}(\vec{X}) = \sum_j \vec{g}(\vec{t}_j) \mathbf{P}\{\vec{X} = \vec{t}_j\}.$$

В абсолютно непрерывном случае математическое ожидание определяется формулой

$$\mathbf{E}\vec{X} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \vec{t} f_{\vec{X}}(\vec{t}) d\vec{t}.$$

Математическое ожидание не существует, если

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |\vec{t}| f_{\vec{X}}(\vec{t}) d\vec{t}$$

расходится.

Справедлива формула

$$\mathbf{E}\vec{g}(\vec{X}) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \vec{g}(\vec{t}) f_{\vec{X}}(\vec{t}) d\vec{t}.$$

Если компоненты вектора $\vec{g}$ записать в виде матрицы, соответствующие формулы дают математическое ожидание случайной матрицы.

Матрицей ковариаций случайного вектор-столбца $\vec{X}$ называется матрица

$$C(\vec{X}) = \mathbf{E}(\vec{X} - \mathbf{E}\vec{X})(\vec{X} - \mathbf{E}\vec{X})^T.$$

Матрица $C(\vec{X})$ симметрична и неотрицательно определена. Ее диагональные элементы — дисперсии компонент случайного вектора, а внедиагональные — ковариации соответствующих пар компонент. Среднеквадратическим (стандартным) отклонением компоненты называется корень из ее дисперсии. Коэффициент корреляции двух компонент — это их ковариация, деленная на произведение стандартных отклонений.

Пусть случайный вектор $\vec{X}$ имеет многомерное стандартное нормальное распределение, то есть его многомерная плотность распределения вероятностей равна

$$f_{\vec{X}}(\vec{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{t}^{\,T}\vec{t}\right),$$

где $\vec{t} = (t_1, \ \ldots, \ t_n)^T$, и $\vec{t}^{\,T}\vec{t} = t_1^2 + \ldots + t_n^2$.

Пусть вектор-столбец $\vec{Y}$ выражается через вектор-столбец $\vec{X}$ линейным образом:

$$\vec{Y} = \vec{a} + B\vec{X},$$

где $\vec{a}$ — неслучайный вектор-столбец, B — ненулевая квадратная матрица. Тогда говорят, что $\vec{Y}$ имеет многомерное нормальное распределение.

Нормальный вектор $\vec{Y}$ имеет вектор математического ожидания $\mathbf{E}\vec{Y} = \vec{a}$ и ковариационную матрицу $C = C(\vec{Y}) = BB^T$. Распределение нормального вектора $\vec{Y}$ полностью определяется математическим ожиданием и ковариационной матрицей. Матрица B определяется по данному многомерному нормальному распределению с точностью до ортогональной матрицы.

Многомерное нормальное распределение называется невырожденным, если матрица B невырождена, то есть $\det B \neq 0$, или, что эквивалентно, $\det C \neq 0$. В этом случае существует многомерная плотность распределения

$$f_{\vec{Y}}(\,\vec{t}\,) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{t}-\vec{a})^{\,T} C^{-1}(\vec{t}-\vec{a})\right).$$

Определение. Последовательность случайных величин $\{Y_n\}$ называется сходящейся с вероятностью единица к случайной величине Y, если

$$\mathbf{P}\{\omega:\ Y_n(\omega) \to Y(\omega)\} = \mathbf{P}\{Y_n \to Y\} = 1.$$

Обозначение: $Y_n \xrightarrow{1} Y$.

Теорема (усиленный закон больших чисел, УЗБЧ). *Пусть случайные величины* $X_1, X_2, \ldots$ *независимы и одинаково распределены, причем* $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. *Обозначим* $a = \mathbf{E}X_1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{1} a.$$

Центральная предельная теорема (ЦПТ). *Пусть* $X_1, X_2 \ldots$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что* $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$. *Обозначим* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $a = \mathbf{E}X_1$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1$, *и пусть* $\sigma^2 > 0$. *Тогда для любого* y

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < y\right\} = F_{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}}(y) \to \Phi_{0,1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\, dt$$

при $n \to \infty$.

Центральная предельная теорема для случайных векторов. *Пусть* $\vec{X}_1, \vec{X}_2 \ldots$ — *независимые одинаково распределенные случайные векторы с вектором математического ожидания* $\vec{a}$ *и невырожденной ковариационной матрицей* C.

Обозначим $\vec{S}_n = \vec{X}_1 + \ldots + \vec{X}_n$. *Тогда для любого* $\vec{y}$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\vec{S}_n - n\vec{a}}{\sqrt{n}} < \vec{y}\right\} \to \mathbf{P}\{\vec{Z} < \vec{y}\}$$

при $n \to \infty$, *где* $\vec{Z}$ *— нормальный случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей* C.

Основным объектом исследования в математической статистике является *выборка* $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, то есть набор значений случайной величины X, полученных в результате n независимых воспроизведений эксперимента. Иначе говоря, выборка представляет собой случайный вектор, координаты которого — *элементы выборки* $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые случайные величины, имеющие общее распределение с функцией распределения $F(t)$. Будем говорить в этом случае, что имеется *случайная выборка*, или *статистическая модель* $\vec{X}$ из распределения F, и обозначать сокращенно: $\vec{X} \Subset F$. Число n называется *объемом выборки.* Конкретный набор числовых значений случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, полученный в результате эксперимента, будем называть *реализацией* выборки и обозначать $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Статистикой называется любая функция от выборки $J = J(\vec{X})$.

Если элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ упорядочить по возрастанию, то получится новый набор случайных величин, называемый *вариационным рядом*:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n-1)} \leq X_{(n)}.$$

Случайная величина $X_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$ называется *k-м членом вариационного ряда*, или *k-й порядковой статистикой.* В частности, $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Эмпирической функцией распределения $F_n^*(t)$ называется частота элементов выброрки, меньших заданного t. Эмпирическая функция распределения, соответствующая выборке $\vec{X} =$

$(X_1, X_2, ..., X_n)$, может быть построена по этой выборке с помощью любой из следующих формул:

$$F_n^*(t) = \frac{\{\text{количество } X_i : X_i < t\}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}(X_i < t),$$

где функция

$$\mathbf{I}(X_i < t) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i < t; \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$$

— индикатор события $\{X_i < t\}$.

Заметим, что эмпирическая функция распределения, соответствующая случайной выборке $\vec{X}$, сама является случайной, поскольку определяется через элементы выборки $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$, являющиеся случайными величинами. В то же время любая реализация $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выборки $\vec{X}$ порождает соответствующую реализацию эмпирической функции распределения (по той же формуле), которая является обычной (а не случайной) функцией распределения.

Эмпирическая функция распределения $F_n^*(t)$ является выборочным аналогом неизвестной теоретической функции распределения $F(t)$, ее называют также *оценкой* для $F(t)$. Выборочным аналогом для теоретической плотности распределения $f(t)$ является *гистограмма*, или *эмпирическая плотность распределения*, которая строится по выборке $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ следующим образом. Пусть $h > 0$ — произвольное число. Разобьем область значений изучаемой случайной величины (например, всю числовую ось) на промежутки $\Delta_k = [z_{k-1}, z_k)$ длины h и построим ступенчатую функцию $f_n^*(t)$, которая на каждом промежутке Δ_k принимает постоянное значение, вычисляемое по любой из формул:

$$f_n^*(t) = \frac{\nu_k}{nh} = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}(X_i \in \Delta_k),\ t \in \Delta_k, \tag{1.1}$$

где ν_k — число элементов выборки, попавших в промежуток Δ_k.

Иногда шаг гистограммы h выбирают следующим образом. Сначала рассчитывают число интервалов K по *формуле Стеджеса*

$$K = [\log_2 n] + 1. \tag{1.2}$$

Здесь n — объем выборки, $[a]$ — целая часть числа a. Потом длина интервала рассчитывается по формуле

$$h = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{K}.$$

При построении гистограммы последний промежуток выбирается замкнутым: $\Delta_K = [z_{K-1};\ z_K]$. Величину $X_{(n)} - X_{(1)} = \max\{X_i\} - \min\{X_i\}$ называют размахом выборки.

По выборке $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ можно построить эмпирические (выборочные) аналоги числовых характеристик распределения. Наиболее употребительными являются выборочное математическое ожидание, или *выборочное среднее*, $\overline{X}$, и *выборочная дисперсия* S^2:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2. \tag{1.3}$$

Подобно выборочным среднему и дисперсии определяются выборочные моменты порядка k

$$\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k,$$

которые являются эмпирическими аналогами моментов $\mathbf{E}X_i^k$. Отметим, что

$$\mathbf{E}\overline{X^k} = \mathbf{E}X_i^k.$$

Приведенное соотношение означает, что математические ожидания эмпирических моментов совпадают с соответствующими теоретическими моментами. Это свойство называется *несмещенностью.* Эмпирические моменты являются *несмещенными оценками* для соответствующих теоретических. Обобщая понятие выборочного момента, построим выборочное усреднение произвольной функции g:

$$\overline{g(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i),$$

при этом также выполняется свойство

$$\mathbf{E}\overline{g(X)} = \mathbf{E}g(X_i).$$

Центральным выборочным моментом порядка k называется

$$\overline{(X-\overline{X})^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k.$$

Таким образом, второй центральный выборочный момент — это выборочная дисперсия S^2.

Центральные выборочные моменты являются смещенными оценками для своих теоретических аналогов $\mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)^k$.

Корень из выборочной дисперсии $S = \sqrt{S^2}$ называется выборочным среднеквадратическим (стандартным) отклонением.

Отметим, что выборочная дисперсия вычисляется аналогично дисперсии.

$$S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2.$$

Несмещенная выборочная дисперсия — это статистика

$${S_0}^2 = \frac{n}{n-1}S^2.$$

Для нее выполнено свойство

$$\mathbf{E}{S_0}^2 = \mathbf{D}X_1.$$

Отметим, что корень из несмещенной выборочной дисперсии S_0 не является несмещенной оценкой для стандартного отклонения σ_X, так как $\mathbf{E}\sqrt{Y} \neq \sqrt{\mathbf{E}Y}$.

Задача оценивания параметров возникает в ситуации, когда распределение F не является полностью неизвестным, а известен его математический вид $F = F(t, \theta)$, содержащий неизвестный параметр θ (или несколько, тогда θ — многомерный параметр). Задача состоит в том, чтобы по выборке $\vec{X}$ вычислить приближенное значение $\theta^*(\vec{X})$ для неизвестного параметра, причем сделать это в том или ином смысле оптимальным образом. Это задача *точечного оценивания.*

Оценка $\tilde{\theta}$ называется *несмещенной* оценкой параметра θ, если для любого $\theta \in \Theta$ выполнено

$$\mathbf{E}\tilde{\theta} = \theta. \tag{1.4}$$

Договоримся указывать в обозначении статистики объем выборки, если это необходимо подчеркнуть: $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_n$.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ называется *(сильно) состоятельной оценкой параметра* θ, если для любого $\theta \in \Theta$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость с вероятностью единица:

$$\tilde{\theta}_n \xrightarrow{1} \theta, \tag{1.5}$$

то есть $\mathbf{P}\{\tilde{\theta}_n \to \theta\} = 1$.

Оценкой метода моментов (ОММ) называется такое значение $\theta^*_g = \theta^*_g(\vec{X})$, при котором теоретическое среднее выборки $\vec{g}(X)$ совпадает с выборочным средним:

$$m_g(\theta^*_g) = \overline{g(X)},$$

то есть ОММ является решением уравнения относительно неизвестного θ^*_g.

Если при этом оказывается, что функция $m_g(\theta)$ непрерывна и строго монотонна, то для нее существует обратная m_g^{-1}, и ОММ имеет вид:

$$\theta^*_g(\vec{X}) = m_g^{-1}(\overline{g(X)}).$$

Пусть $\vec{X} \Subset F(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Предположим, что теоретическое распределение либо абсолютно непрерывно с плотностью $f(t, \theta) = f_{X_i}(t)$, либо дискретно, при этом для ряда распределения будем использовать то же обозначение: $f(t, \theta) = \mathbf{P}\{X_i = t\}$. *Функцией правдоподобия, соответствующей выборке* $\vec{X}$, называется функция

$$\Pi(\theta) = \Pi(\vec{X},\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i,\ \theta).$$

Оценкой максимального правдоподобия (ОМП) называется такое значение параметра $\theta = \hat{\theta}(\vec{X})$, при котором функция правдоподобия принимает наибольшее значение, то есть

$$\Pi(\vec{X},\ \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} \Pi(\vec{X},\ \theta).$$

Пусть имеется выборка объема n из распределения, известного с точностью до параметра: $\vec{X} \Subset F(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$. *Доверительным интервалом с уровнем доверия* $1 - \varepsilon$ для неизвестного параметра θ называют случайный интервал $(\theta_-;\ \theta_+) \subset \Theta$, построенный по выборке, который накрывает неизвестное значение параметра с вероятностью, равной $1 - \varepsilon$, или по крайней мере стремящейся к $1 - \varepsilon$ с ростом объема выборки, то есть

$$\mathbf{P}\{\theta \in (\theta_-;\ \theta_+)\} \to 1 - \varepsilon$$

при $n \to \infty$.

В случае, когда вместо сходимости выполняется точное равенство, доверительный интервал называется *точным.*

θ_-, θ_+ — это оценки параметра θ, называемые *нижней и верхней доверительными границами.* Число $1 - \varepsilon \in (0;\ 1)$ — уровень доверия, или доверительная вероятность, — выбирается заранее и отражает «степень готовности мириться с возможностью ошибки». Чем менее мы готовы мириться с возможной ошибкой, тем меньшее (более близкое к нулю) значение ε должны устанавливать.

Если распределение не является нормальным, точный доверительный интервал, как правило, не удается построить. Поэтому строят асимптотический доверительный интервал, применяя центральную предельную теорему, которая утверждает, что для всех $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ $(t_1 < t_2)$ выполнено:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{t_1 \le \frac{n\overline{g(X)} - n\mathbf{E}g(X_1)}{\sqrt{n\mathbf{D}g(X_1)}} < t_2\right\} = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

то есть центрированные и нормированные суммы случайных величин $n\overline{g(X)} = g(X_1) + \ldots + g(X_n)$ сходятся по распределению к случайной величине, имеющей стандартное нормальное распределение.

Здесь предполагается, что $0 < \mathbf{D}g(X_1) < \infty$.

Если выбрать $t_2 = -t_1 = A$, $g(x) = x$ и принять доверительный уровень равным $1 - \varepsilon$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{-A \le \frac{n\overline{X} - n\mathbf{E}X_1}{\sqrt{n\mathbf{D}X_1}} < A\right\}$$
$$= \Phi(A) - \Phi(-A) = 2\Phi(A) - 1 = 1 - \varepsilon,$$

откуда получаем:

$$\Phi(A) = 1 - \varepsilon/2.$$

По заданному ε можно найти A с помощью таблиц нормального распределения или программных приложений. Отметим следующее свойство сходимости по распределению: если Y_n сходится по распределению к Y, а Z_n сходится к 1 с вероятностью единица, то их произведение $Y_n Z_n$ сходится по распределению к Y. Обозначим $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mathbf{D}X_1}$ и выберем

$$Y_n = \frac{n\overline{X} - n\mathbf{E}X_1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mathbf{E}X_1)}{\boldsymbol{\sigma}}, \qquad Z_n = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{S}.$$

Вспомним, что $S = \sqrt{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} \to \boldsymbol{\sigma}$ с вероятностью 1, и, следовательно, $Z_n \to 1$ с вероятностью 1. Итак,

$$Y_n Z_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mathbf{E}X_1)}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{S} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mathbf{E}X_1)}{S}$$

сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{-A \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mathbf{E}X_1)}{S} < A\right\}$$
$$= \Phi(A) - \Phi(-A) = 2\Phi(A) - 1 = 1 - \varepsilon.$$

Чтобы для неизвестного параметра $\boldsymbol{\theta}$ найти двусторонний доверительный интервал асимптотического уровня $1 - \varepsilon$, нужно для исследуемого однопараметрического семейства распределений найти зависимость $\mathbf{E}X_1 = a(\boldsymbol{\theta})$ и решить относительно параметра $\boldsymbol{\theta}$ двойное неравенство:

$$-A \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - a(\boldsymbol{\theta}))}{S} < A.$$

Для этого нужно, чтобы функция $a(\boldsymbol{\theta})$ была непрерывной и строго монотонной. Получившиеся границы дверительного интервала будем обозначать через $\boldsymbol{\theta}_-$ и $\boldsymbol{\theta}_+$.

При построении доверительных интервалов для параметров нормального распределения мы будем использовать два специальных распределения, связанных с нормальным: распределение хи-квадрат и распределение Стьюдента. Название «распределение Стьюдента» связано с именем английского статистика К.Госсета, который подписывал свои работы псевдонимом «Стьюдент».

Случайная величина Z_n имеет *распределение хи-квадрат с n степенями свободы*, если

$$Z_n = {X_1}^2 + \ldots + {X_n}^2;$$

где $X_1, \ \ldots, \ X_n$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением.

Отметим, что «число степеней свободы» — это просто традиционное название для параметра n распределения хи-квадрат. Параметр n — положительное целое число. В частности, при

$n = 1$ получаем квадрат одной случайной величины со стандартным нормальным распределением: $Z_1 = X^2$, где $X \Subset N_{0,\,1}$.

Будем использовать следующее обозначение: $Z_n \Subset \chi^2_n$.

Отметим следующие свойства распределения хи-квадрат.

Пусть $Z_n \Subset \chi^2_n$. Тогда:

1) $\mathbf{E}Z_n = n$;

2) $Z_n/n \to 1$ с вероятностью единица при $n \to \infty$.

Случайная величина Y_n имеет *распределение Стьюдента с n степенями свободы*, если

$$Y_n = \frac{X}{\sqrt{Z_n/n}},$$

где случайные величины X и Z_n независимы, причем X имеет стандартное нормальное распределение, а Z_n имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы. Здесь, как и у распределения хи-квадрат, n — это просто положительный целый параметр.

Будем использовать следующее обозначение: $Y_n \Subset T_n$.

Отметим следующие свойства распределения Стьюдента.

Пусть $Y_n \Subset T_n$. Тогда:

1) для любого t выполнено $\mathbf{P}\{Y_n < -t\} = \mathbf{P}\{Y_n > t\}$, то есть распределение Стьюдента симметрично;

2) $Y_n \to X$ с вероятностью единица при $n \to \infty$, где X имеет стандартное нормальное распределение.

Наиболее распространенной ситуацией, когда возможно построение точных доверительных интервалов, является случай нормального распределения: $\vec{X} \Subset \Phi_{a,\sigma^2}$, когда хотя бы один из его параметров неизвестен. В этом случае известно совместное распределение наиболее употребительных оценок $\overline{X}$ и S^2 параметров a и σ^2, с помощью которого и строятся соответствующие доверительные интервалы. Основные результаты содержатся в следующей теореме.

Теорема Фишера. Пусть $\vec{X} \Subset \Phi_{a,\sigma^2}$. Тогда верны следующие 5 фактов.

1) $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-a)}{\sigma} \Subset \Phi_{0,1}$.

2) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}{\sigma^2} \Subset \chi^2_n$.

3) $\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \Subset \chi^2_{n-1}$.

4) $\dfrac{\sqrt{n-1}(\overline{X}-a)}{S} \Subset T_{n-1}$.

5) $\overline{X}$ и S независимы.

Глава 1. Статистические гипотезы и критерии

§1. Статистические гипотезы

Напомним, что математическая статистика строит такие вероятностные модели явлений, в которых распределения случайных величин неизвестны или известны не полностью. *Статистической гипотезой* называется высказывание о распределении случайных величин, участвующих в описании модели.

Статистическая гипотеза может либо фиксировать единственное распределение (такая гипотеза называется *простой*), либо выделять класс распределений, состоящий более чем из одного распределения (такая гипотеза называется *сложной*).

Чаще всего в качестве сложной гипотезы предлагается высказывание о принадлежности распределения некоторому параметрическому семейству.

Гипотезы, как правило, обозначаются латинской буквой H (от слова *hypothesis*) с нижними индексами.

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ — выборка, $\mathbf{X} \Subset \mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ — полностью или частично неизвестное распределение отдельного наблюдения X_i.

Пример 1.1. *Пусть $\mathbf{P}$ — полностью неизвестное распределение. Примерами гипотез являются*

$\mathrm{H} : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0$, *где* $\mathbf{P}_0$ *— полностью определенное распределение;*

$\mathrm{H} : \mathbf{P} \in \widehat{\mathbf{P}}_0$, *где* $\widehat{\mathbf{P}}_0$ *— множество распределений (например,* $\widehat{\mathbf{P}}_0 = N(a, \sigma^2)$ *или* $\widehat{\mathbf{P}}_0 = B(p)$*).*

В этих примерах наблюдения имеют распределения из некоторого одно- или двухпараметрического семейства. Но могут быть непараметрические множества, например, $\mathbf{P}_0 \in \{\mathbf{P} : \mathbf{E}X_i > 0\}$ *— класс распределений с положительными математическими ожиданиями.*

Пример 1.2. *Пусть* $\mathbf{P}$ *— частично известное распределение. Например,* $\mathbf{P} \in U(a, b)$ *(наблюдения имеют равномерное распределение). В этом случае примеры гипотез:*

$\mathrm{H} : a = 0,\ b = 1$ *(распределение равномерное на* $(0,\ 1)$*);*

$\mathrm{H} : a = 0$ *(распределение равномерное на* $(0,\ b)$*);*

$\mathrm{H} : a > b - 1$ *(распределение равномерное на отрезке длины более 1).*

В приведенных выше примерах простыми являются гипотезы:

$\mathrm{H} : \mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ и $\mathrm{H} : a = 0,\ b = 1$ (последняя в случае, когда известно, что распределение равномерное на (a, b)).

Остальные гипотезы являются сложными.

§2. Понятие статистического критерия

Статистическим критерием называется правило, на основании которого выборке сопоставляется одна из гипотез. Более строго, статистический критерий для выборки объема n — это функция из выборочного пространства (всего пространства $\mathbf{R}^n$ или множества G^n, где $G \subset \mathbf{R}$ — множество, на котором сосредоточены значения выборки согласно априорным предположениям) в множество гипотез. Количество гипотез всегда больше единицы и является либо целым, либо бесконечным (счетным или несчетным).

Мы будем рассматривать ситуацию, когда гипотез всего две. Одну из них называют *основной*, а другую - *альтернативной*, обозначая соответственно H_0 и H_1. В этой ситуации статистическим критерием является всякое правило, позволяющее на основании наблюдаемого выборочного вектора $\mathbf{X}$ принять одну из гипотез: основную или альтернативную.

Удобно представлять статистический критерий как функцию $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{X})$ от выборочного вектора, принимающую два значения: H_0 и H_1. Наиболее общий подход для построения статистических критериев состоит в следующем.

Пусть $J = J(\mathbf{X})$ — некоторая статистика, характеризующая отклонение эмпирических данных, представленных выборкой, от теоретических, соответствующих проверяемой гипотезе H_0. Если распределение статистики $J(\mathbf{X})$ известно (точно или хотя бы приближенно), то для любого $\alpha > 0$ можно найти такое множество J_α значений J, для которого будет выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(J \in \mathrm{J}_\alpha / \mathrm{H}_0) \leq \alpha. \tag{1.6}$$

Пусть $\alpha > 0$ настолько мало, что событие, имеющее вероятность, не превосходящую α, может считаться практически невозможным. Тогда статистический критерий можно задать следующим образом:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & \text{если } J(\mathbf{X}) \in \mathrm{J}_\alpha, \\ \mathrm{H}_0, & \text{если } J(\mathbf{X}) Ntin \mathrm{J}_\alpha. \end{cases} \tag{1.7}$$

Это правило основано на здравом смысле: оно предписывает отвергнуть гипотезу H_0 (то есть принять H_1), если происходит событие $\{J(\mathbf{X}) \in \mathrm{J}_\alpha\}$, которое не должно произойти, будь гипотеза H_0 справедлива. Число $\alpha > 0$, которое фигурирует в (1.6) - (1.7), называется *уровнем критерия*, или *уровнем значимости*, статистика $J(\mathbf{X})$ называется *статистикой критерия*, а множество J_α — *критическим множеством.*

Мы будем рассматривать ситуацию, когда гипотез всего две. Одну из них называют *основной*, а другую — *альтернативной*, обозначая соответственно H_0 и H_1.

Статистическим критерием называют всякое правило, позволяющее на основании наблюдаемого выборочного вектора $\vec{X}$ принять одну из гипотез: основную или альтернативную.

При применении статистического критерия могут возникнуть ошибки двух родов. Ошибка первого рода состоит в том, что отвергается верная нулевая гипотеза. Ошибка второго рода — отвергается верная первая гипотеза. Вообще ошибка i-го рода состоит в том, что статистический критерий отвергает верную $(i-1)$-ю гипотезу.

принимаемая гипотеза	верна гипотеза H_0	верна гипотеза H_1
H_0	нет ошибки	ошибка 2-го рода
H_1	ошибка 1-го рода	нет ошибки

Критерий характеризуется вероятностями ошибок:

$$\alpha_1 = \mathbf{P}_{H_0}(H_0 \text{ отвергается}); \quad \alpha_2 = \mathbf{P}_{H_1}(H_1 \text{ отвергается}).$$

Здесь нижний индекс у символа вероятности указывает, при выполнении какой гипотезы подсчитывается вероятность.

Удобно представлять статистический критерий как функцию $\delta(\vec{X})$ от выборочного вектора, принимающую два значения: H_0 и H_1. Наиболее общий подход для построения статистических критериев состоит в следующем.

От статистики $J = J(\vec{X})$ требуют следующих свойств:

1) при выполнении гипотезы H_0 статистика J имеет известное распределение или, по крайней мере, сходится по распределению к некоторой случайной величине J с известным распределением;

2) при выполнении гипотезы H_1 статистика J сходится почти наверное к бесконечности с ростом объема выборки.

Сходимость статистики J почти наверное к бесконечности при выполненной первой гипотезе гарантирует *состоятельность* критерия, то есть сходимость вероятности ошибки второго рода α_2 к нулю с ростом объема выборки.

Для каждой реализации выборки $\vec{x}$ можно найти предельное значение уровня $\alpha^* = \alpha^*(\vec{x})$, при котором гипотеза H_0 еще может быть принята. Такое значение называется *реально достигаемым уровнем значимости*, или просто *достигаемым уровнем значимости*. Достигаемый уровень значимости α^* имеет смысл вероятности получить худшее согласие с проверяемой гипотезой, чем реально полученное, если гипотеза H_0 верна. Поэтому чем меньше α^*, тем более это говорит против гипотезы H_0.

Достигаемый уровень значимости вычисляется с помощью распределения статистики J:

$$\alpha^* = \mathbf{P}\{J \geq J(\vec{x})\} = 1 - F_J(J(\vec{x})).$$

В терминах достигаемого уровня значимости критическая область имеет вид

$$\mathrm{J}_\alpha = \{\alpha^* \leq \alpha\},$$

то есть нулевая гипотеза отвергается на уровне α в случае, когда $\alpha^* \leq \alpha$.

Каждый критерий согласия использует свою статистику, предназначенную для различения нулевой гипотезы и альтернативы и обладающую нужными свойствами: сходимостью к фиксированному распределению при выполнении нулевой гипотезы и сходимостью почти наверное к бесконечности при ее невыполнении.

§3. Критерий Колмогорова

Рассмотрим статистическую модель $\mathbf{X} \Subset \mathrm{F},\ \mathrm{F} \in \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} = \{\mathrm{F}\}$ — множество всех функций распределения, и простую гипотезу $\mathrm{H}_0 : \mathrm{F} = \mathrm{F}_0$. Альтернативной для H_0 является сложная гипотеза $\mathrm{H}_1 : \mathrm{F} \neq \mathrm{F}_0$. Статистический критерий для проверки H_0, построенный согласно вышеописанному принципу, называется *критерием согласия.* Наиболее распространенными критериями согласия являются критерий Колмогорова и так называемый χ^2-критерий, или критерий Пирсона.

Критерий Колмогорова применяется в случае, когда ф.р. $\mathrm{F}(x)$ непрерывна, то есть для статистической модели $\mathbf{X} \Subset \mathrm{F},\ \mathrm{F} \in \mathbf{F}_C$, где $\mathbf{F}_C$ — множество всех непрерывных функций распределения. В качестве статистики критерия Колмогорова выбирается следующее расстояние между эмпирической и теоретической ф.р. :

$$D_n = D(F_n^*, F) = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n^*(x) - F(x)| = \max_{-\infty<x<\infty} |F_n^*(x) - F(x)|.$$

Распределение статистики $D_n = D_n(\mathbf{X})$ обладает тем замечательным свойством, что при выполнении гипотезы $\mathrm{H}_0 : \mathrm{F} = \mathrm{F}_0$ это распределение не зависит от конкретного вида F_0 и совпадает с распределением, соответствующим, например, модели $\mathbf{X} \Subset U(0,1)$. Указанное свойство называется *непараметричностью* критерия. Благодаря этому обстоятельству распределение статистики $D_n = D_n(\mathbf{X})$ при различных значениях n можно посчитать, оно представлено таблицей 5 приложения.

Критическое множество критерия Колмогорова определяется неравенством $D_n > t_\alpha$, где $\mathbf{P}(D_n > t_\alpha) = \alpha$, т. е. критическое множество имеет вид: $\mathrm{T}_\alpha = (t_\alpha, \infty)$. Тогда критерий Колмогорова можно представить в виде:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & \text{если } D_n(\mathbf{X}) > t_\alpha, \\ \mathrm{H}_0, & \text{если } D_n(\mathbf{X}) \le t_\alpha. \end{cases} \tag{1.8}$$

Для практического вычисления статистики $D_n = D_n(\mathbf{X})$ можно использовать следующую формулу:

$$D_n(\mathbf{X}) = \max_{1\le k\le n} \max\left(\left| F(X_{k:n}) - \frac{k}{n} \right|, \left| F(X_{k:n}) - \frac{k-1}{n} \right| \right). \tag{1.9}$$

Пример 1.3. *Студент вычислил, какую долю составляет количество девушек по отношению к общему количеству студентов пяти факультетов, и получил значения*

$$0,5916; \quad 0,6562; \quad 0,3127; 0,0690; \quad 0,3617.$$

Он проверяет гипотезу о том, что полученные числа имеют равномерное рапределение на [0, 1]. В качестве уровня значимости он выбирает 0,05.

Решение. Из условия следует, что нужно проверить простую гипотезу $\mathrm{H}_0 : \mathrm{F} = \mathrm{F}_0$, где $\mathrm{F}_0(x)$ — ф.р. закона $U(0,1)$:

$$\mathrm{F}_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Так как ф.р. $\mathrm{F}_0(x)$ непрерывна, то можно применить критерий Колмогорова. Для этого найдем по таблице 7 критическое значение $t_\alpha = 0,563$ из (1.8) при $\alpha = 0,05$; $n = 5$. Затем по выборке:

$$x_1 = 0,5916; \quad x_2 = 0,6562; \quad x_3 = 0,3127;$$

$$x_4 = 0,0690; \quad x_5 = 0,3617;$$

вычислим наблюдаемое значение статистики $D_n = D_n(\vec{x})$. Чтобы воспользоваться формулой (1.9), вычислим последовательно:

$$x_{1:n} = 0,0690; \quad x_{2:n} = 0,3127; \quad x_{3:n} = 0,3617;$$

$$x_{4:n} = 0,5916; \quad x_{5:n} = 0,6562;$$

$$F(x_{1:n}) = F(0,0690) = 0,0690; \quad F(x_{2:n}) = 0,3127;$$

$$F(x_{3:n}) = 0,3617; \quad F(x_{4:n}) = 0,5916; \quad F(x_{5:n}) = 0,6562;$$

$$m_1 = \max\left(\left|F(x_{1:n}) - \frac{0}{n}\right|, \left|F(x_{1:n}) - \frac{1}{n}\right|\right) =$$

$$= \max(|0,0690 - 0|, |0,0690 - \frac{1}{5}|) = 0,1310;$$

$$m_2 = \max\left(\left|F(x_{2:n}) - \frac{1}{n}\right|, \left|F(x_{2:n}) - \frac{2}{n}\right|\right) =$$

$$= \max(|0,3127 - 0,2|, |0,3127 - 0,4|) = 0,1127;$$

$$m_3 = \max\left(\left|F(x_{3:n}) - \frac{2}{n}\right|, \left|F(x_{3:n}) - \frac{3}{n}\right|\right) =$$

$$= \max(|0,3617 - 0,4|, |0,3617 - 0,6|) = 0,2383;$$

$$m_4 = \max\left(\left|F(x_{4:n}) - \frac{3}{n}\right|, \left|F(x_{4:n}) - \frac{4}{n}\right|\right) =$$

$$= \max(|0,5916 - 0,6|, |0,5916 - 0,8|) = 0,2084;$$

$$m_5 = \max\left(\left|F(x_{5:n}) - \frac{4}{n}\right|, \left|F(x_{5:n}) - \frac{5}{n}\right|\right) =$$

$$= \max(|0,6562 - 0,8|, |0,6562 - 0,1|) = 0,3438.$$

По формуле (1.9) находим наблюдаемое значение статистики D_n:

$$D_n(\vec{x}) = \max_{1 \le k \le n} m_k = 0,3438.$$

Так как наблюдаемое значение $D_n(\vec{x})$ не превосходит критического значения $t_\alpha = 0,563$, то согласно (1.8) гипотезу H_0 можно принять с уровнем значимости $\alpha = 0,05$.

Замечание 1.1. *При данном наблюдаемом значении* $D_n(\vec{x}) = 0,3438$ *гипотезу* H_0 *можно было принять и с большим уровнем значимости, например,* $\alpha = 0,1$ *(см. таблицу 7). Можно даже найти предельное значение уровня* $\alpha = \alpha^*$*, при котором гипотеза* H_0 *еще может быть принята. Достигнутый уровень значимости* α^* *имеет смысл вероятности получить худшее согласие с проверяемой гипотезой, чем реально полученное, если гипотеза* H_0 *верна. Поэтому чем больше* α^**, тем менее вероятно получить лучший результат, чем достигнутый, в пользу проверяемой гипотезы.*

Если выборка имеет большой объем, то для вычисления достигнутого уровня значимости можно использовать сходимость функции распределения случайной величины $d_n = \sqrt{n}D_n$ к функции распределения Колмогорова $K(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i e^{-2i^2t^2}$, $t > 0$.

Это распределение является предельным для максимума модуля эмпирического моста, используемого при обнаружении разладки в параграфе 5.

§4. Критерий хи-квадрат Пирсона

Если гипотетическая функция распределения $\mathrm{F}_0(x)$ не является непрерывной, то критерий Колмогорова неприменим. В этом случае можно воспользоваться χ^2-*критерием Пирсона.* Статистика критерия Пирсона строится после предварительного «группирования» выборочных данных. Для этого все множество S возможных значений с.в. X_i разбивается на конечное число непересекающихся частей:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_r, \quad S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j.$$

Обозначим ν_j — число элементов выборки $\mathbf{X}$, попавших в множество S_j, а p_j — вероятность попадания с.в. X_i в множество S_j, вычисленная с помощью гипотетической ф.р. $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0$. Тогда в качестве статистики критерия χ^2 рассматривают следующую предложенную Пирсоном меру отклонения эмпирического распределения от предполагаемого теоретического:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\nu_j^2}{np_j} - n. \tag{1.11}$$

Справедлива следующая теорема, позволяющая находить распределение статистики χ^2 при больших значениях n, а стало быть и строить статистический критерий.

Теорема 1.1. *Если гипотеза* $\mathrm{H}_0 : \mathrm{F} = \mathrm{F}_0$ — *простая, однозначно фиксирующая вероятности* $p_1, p_2, \dots, p_r$, *то статистика* χ^2 *слабо сходится к распределению* χ^2_{r-1} :

$$\chi^2 \Longrightarrow \chi^2_{r-1}, \quad n \to \infty.$$

Для построения критерия, основанного на статистике χ^2, предполагаем, что ее распределение совпадает с распределением χ^2_{r-1}, и по заданному уровню α находим по табл. 5 критическое значение $t_\alpha = \chi^2_{1-\alpha, r-1}$ такое, что

$$\mathbf{P}(\chi^2_{r-1} > t_\alpha) = \alpha.$$

Тогда критерий Пирсона имеет следующий вид:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & \text{если } \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,r-1}, \\ \mathrm{H}_0, & \text{если } \chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha,r-1}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Заметим, что для практического применения рекомендуется разбиение производить таким образом, чтобы выполнялось условие $np_i \ge 10$.
При нарушении этого условия нужно объединить соседние множества S_j.

Пример 1.4. *При* 4040 *бросаниях монеты Бюффон получил* $\nu_1 = 2048$ *выпадений герба и* $\nu_2 = n - \nu_1 = 1992$ *выпадений решетки. Согласуется ли это с гипотезой о том, что монета правильная, при уровне значимости* $\alpha = 0,01$*? С каким предельным уровнем значимости может быть принята эта гипотеза?*

Решение. Можно считать, что мы имеем дело со статистической моделью $\mathbf{X} \Subset \mathrm{B}(p)$, где неизвестен параметр p — вероятность выпадения «герба». Проверяемая гипотеза — $\mathrm{H}_0 : p = 0,5$. Поскольку выборочные данные уже сгруппированы ($\nu_1 = 2048$ — число значений $X_i = 1$, ν_2 — число значений $X_i = 0$), то можем вычислить наблюдаемое значение статистики χ^2:

$$p_1 = \mathbf{P}(X_i = 1/\mathrm{H}_0) = \mathbf{P}(/\mathrm{H}_0) = 0,5; \quad p_2 = \mathbf{P}(X_i = 0/\mathrm{H}_0) = 0,5;$$

$$\frac{(\nu_1 - np_1)^2}{np_1} = \frac{(2048 - 2020)^2}{2020} = 0,285;$$

$$\frac{(\nu_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{(1992 - 2020)^2}{2020} = 0,388; \ \chi^2 = 0,285 + 0,388 = 0,673.$$

Число множеств разбиения $r = 2$, поэтому критическое значение $t_\alpha = \chi^2_{1-\alpha,r-1}$ находим по табл. 5 распределения χ^2_1 при $1 - \alpha = 0,99$: $\chi^2_{0.99,1} \approx 6,63$. Видим, что наблюдаемое значение

χ^2 намного меньше критического. Значит гипотеза $\mathrm{H}_0 : p = 0,5$ принимается.

Из той же табл. 5 можно видеть, что для полученного значения $\chi^2 = 0,673$ неравенство $\chi^2 \leq t_\alpha$, при котором гипотеза H_0 еще может быть принята, выполняется при $1 - \alpha = 0,7$, то есть предельный уровень значимости, с которым можно принять эту гипотезу на основании полученных экспериментальных данных, равен $\alpha^* = 0,3$.

§5. Критерии наличия разладки

В ряде приложений возникает задача апостериорного обнаружения разладки, то есть выяснения, изменила ли данная последовательность независимых случайных величин свои свойства за время наблюдения. Эта задача существенно отличается от задачи наискорейшего обнаружения разладки, состоящей в минимизации числа наблюдений после разладки, необходимых для ее обнаружения с заданными уровнем α и мощностью β. Для решения последней задачи был разработан метод кумулятивных сумм.

В случае, когда момент возможной разладки известен, задача о наличии разладки превращается в классическую задачу об однородности двух выборок. Мы будем рассматривать постановку задачи, в которой неизвестен момент возможной разладки. Будем предполагать лишь, что распределения до и после разладки имеют разные математические ожидания и конечные ненулевые дисперсии.

Введем следующие обозначения. Пусть заданы $\{\xi_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\xi_i^{(2)}\}_{i=1}^{\infty}$ — две взаимно независимых последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин.

Случайные величины $\xi_i^{(1)}$ имеют распределение $\mathcal{F}_1$ с математическим ожиданием m_1 и дисперсией $0 < {\sigma_1}^2 < \infty$.

Случайные величины $\xi_i^{(2)}$ имеют распределение $\mathcal{F}_2$ с математическим ожиданием m_2 и дисперсией $0 < \sigma_2{}^2 < \infty$.

Случайные величины $\{X_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ задаются следующим образом:

$X_i^{(n)} = \xi_i^{(1)}$ при $1 \le i \le [nT]$;

$X_i^{(n)} = \xi_i^{(2)}$ при $[nT] + 1 \le i \le n$.

Предполагается, что T — неизвестная константа, $0 < T < 1$.

Простыми гипотезами θ здесь являются тройки $\theta = (\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2,\ T)$. Будем предполагать, что все множество гипотез $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, где $\Theta_0 = \{\theta :\ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2,\ m_1 \ne 0\}$, $\Theta_1 = \{\theta : m_1 \ne m_2\}$. Мы будем строить критерии, различающие сложные гипотезы Θ_0 и Θ_1.

Будем использовать обозначения X_i вместо $X_i^{(n)}$ там, где это не приводит к противоречиям.

Замечание 1.2. *Сформулированные выше условия на случайные величины $X_1^{(n)},\ \ldots,\ X_n^{(n)}$ близки к необходимым условиям состоятельности критерия проверки гипотез. Если согласно первой гипотезе дисперсия равна 0, это приводит к вырожденной статистической задаче. Случаев бесконечной дисперсии или выполнения равенств $m_1 = m_2$, $m_1 = 0$ можно избежать путем подходящих преобразований фазового пространства.*

Критерий принимает вторую гипотезу в случае, когда $J_n \ge C$, где J_n — статистика, определяющая критерий.

Для решения задачи обнаружения разладки строятся статистики, являющиеся функционалами от *эмпирического моста* $Z_n = \{Z_n(t), 0 \le t \le 1\}$ — случайной ломаной, построенной по точкам

$$\left(\frac{k}{n};\ \frac{nS_k - kS_n}{sn\sqrt{n}}\right), k = 0, \ldots, n, \tag{1.13}$$

где $S_n = \sum_{i=1}^n X_i^{(n)} = n\overline{X}$, $s^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$.

По определению, значение эмпирического моста в точке $t \in [0,\ 1]$ равно

$$Z_n(t) = \frac{nS_k - kS_n}{sn\sqrt{n}} + \frac{nX_{k+1} - S_n}{s\sqrt{n}}\left(t - \frac{k}{n}\right),$$

$$\frac{k}{n} \le t < \frac{k+1}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Обозначим $J_n^\infty = \max_{0 \le t \le 1} |Z_n(t)|$.

Напомним, что множество Θ_0 — множество простых гипотез, соответствующих отсутствию разладки, то есть совпадению распределений до и после разладки. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Если* $\theta \in \Theta_0$, *то распределение статистики* J_n^∞ *сходится к распределению Колмогорова при* $n \to \infty$.

Наряду со статистикой J_n^∞ рассмотрим статистики

$$J_n = \left| \frac{\sum_{k=1}^n h_{k,n} X_k}{s\sqrt{n}} \right|.$$

Здесь $h_{1,n}, \ldots, h_{k,n}$ — весовые коэффициенты. Они могут выбираться весьма произвольно, в частности, их знаки могут чередоваться, что ухудшает качество статистического критерия. Мы будем предполагать, что весовые коэффициенты заданы следующим регулярным образом:

$$h_{k,n} = g(k/n),$$

где $g(t)$ — функция ограниченной вариации на $[0,\ 1]$. Для введенных с помощью функции g весовых коэффициентов будем использовать обозначение статистики $J_n = J_n(g)$.

Теорема 1.3. *Для любой* $\theta_0 \in \Theta_0$ *статистика* $J_n(g)$ *сходится по распределению к модулю стандартного нормального закона в том и только том случае, когда выполнены условия*

$$\int_0^1 g(t)dt = 0, \qquad \int_0^1 g^2(t)dt = 1. \tag{1.14}$$

Доказательство.

Последовательность случайных величин $\{h_{k,n}X_k\}$ удовлетворяет условиям центральной предельной теоремы, поэтому

$$\frac{\sum_{k=1}^n h_{k,n}X_k - \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n h_{k,n}X_k\right)}{\sqrt{\mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^n h_{k,n}X_k\right)}}$$

сходится по распределению к стандартному нормальному закону.

Заметим, что

$$\frac{1}{n}\mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^n h_{k,n}X_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{{h_{k,n}}^2}{n}{\sigma_1}^2 \to {\sigma_1}^2\int_0^1 g^2(t)dt.$$

Так как

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n h_{k,n}X_k\right) = m_1\sum_{k=1}^n g(k/n),$$

и $s \to \sigma_1$ ($\mathbf{P}_{\theta_0}$-п.н.), то $J_n(g)$ сходится по распределению к модулю стандартного нормального закона тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sum_{k=1}^n g(k/n)X_k - m_1\sum_{k=1}^n g(k/n)}{\sigma_1\sqrt{n}}$$

сходится по распределению к стандартному нормальному закону, то есть

$$\frac{1}{n{\sigma_1}^2}\mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^n h_{k,n}X_k\right) \to 1$$

что равносильно второму из условий теоремы, и

$$\frac{m_1}{\sigma_1\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n g(k/n) \to 0,$$

что равносильно первому из условий теоремы, так как по теореме о среднем существуют такие $r_k = r_k(n)$, что $r_k \in [k-1;\ k]$ и

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g(r_k/n),$$

и поэтому

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^n g(k/n) - n\int_0^1 g(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \sup_n \sum_{k=1}^n |g(k/n) - g(r_k/n)| \leq \int_0^1 |dg(t)| < \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.4. *Пусть g — функция ограниченной вариации, удовлетворяющая условиям (1.14) теоремы 1.3. Тогда статистику $J_n(g)$ можно представить в виде интеграла*

$$J_n(g) = \left| \int_0^1 Z_n(t)dg(t) + \nu_n \right|,$$

где $\nu_n \to 0$ с вероятностью единица для любой $\theta \in \Theta$.

Доказательство.

По определению

$$J_n(g) = \left| \frac{\sum_{k=1}^n g(k/n)X_k}{s\sqrt{n}} \right|,$$

$$\int_0^1 Z_n(t)dg(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{nS_k - kS_n}{sn\sqrt{n}} dg(t) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{nX_{k+1} - S_n}{s\sqrt{n}} \left(t - \frac{k}{n} \right) dg(t) =$$

$$= \frac{1}{s\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(S_k - \frac{k}{n} S_n \right) \left(g\left(\frac{k+1}{n} \right) - g\left(\frac{k}{n} \right) \right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{nX_{k+1}-S_n}{s\sqrt{n}}\left(t-\frac{k}{n}\right)dg(t)=$$

$$=\frac{1}{s\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\left(-X_k+\frac{S_n}{n}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{nX_{k+1}-S_n}{s\sqrt{n}}\left(t-\frac{k}{n}\right)dg(t)=$$

$$=\frac{1}{s\sqrt{n}}\left(\frac{S_n}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)X_k\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{nX_{k+1}-S_n}{s\sqrt{n}}\left(t-\frac{k}{n}\right)dg(t).$$

Итак,

$$\nu_n=-\frac{S_n}{sn}\frac{\sum_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n})}{\sqrt{n}}-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{nX_{k+1}-S_n}{s\sqrt{n}}\left(t-\frac{k}{n}\right)dg(t).$$

В силу УЗБЧ и условия теоремы получаем, что

$$\frac{S_n}{sn}\frac{\sum_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n})}{\sqrt{n}}\to 0$$

с вероятностью единица с ростом n.

Справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{nX_{k+1}-S_n}{s\sqrt{n}}\left(t-\frac{k}{n}\right)dg(t)\right|\le$$

$$\le\frac{\max_{k=0}^{n-1}|X_{k+1}|+|S_n|\int_0^1 d|g(t)|}{sn\sqrt{n}}\le$$

$$\le\frac{\sum_{k=1}^{n}|X_k|\left(1+\int_0^1 d|g(t)|\right)}{sn\sqrt{n}}.$$

Правая часть неравенства сходится с вероятностью единица к нулю в силу усиленного закона больших чисел.

Теорема доказана.

Рис. 1.1: Температура в Москве в ноябре 2011 года в градусах Фаренгейта

Итак, для обнаружения разладки будем использовать критерии, основанные на статистиках $J_n^\infty = \max_{t\in[0,1]} |Z_n(t)|$, $J_n^{(1)} = 2\sqrt{3}\left|\int_0^1 Z_n(t)dt\right|$. Если основная гипотеза верна, то есть разладки нет, то распределение статистики J_n^∞ сходится к распределению Колмогорова, а распределение статистики $J_n^{(1)}$ — к распределению модуля стандартной нормальной случайной величины.

Пример 1.5. *Проверить гипотезу об отсутствии разладки:*

1) значений $y_1, \ldots, y_{30}$ *температуры воздуха в Москве в ноябре 2011 года (данные взяты с сайта http://academic.udayton.edu/kissock/http/Weather/default.htm, и потому температура приведена в градусах Фаренгейта), см. рис. 1.1.*

2) приращений температуры $x_i = y_{i+1} - y_i$, $i = 1, \ldots, 29$.

Решение.

1) По реализации выборки $y_1, \ldots, y_{30}$ вычислим значения статистик

$$J_n^{\infty} = \max_{1 \le k \le n-1} \left| \frac{n \sum_{i=1}^{k} y_i - k \sum_{i=1}^{n} y_i}{sn\sqrt{n}} \right|$$

и

$$J_n^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{sn\sqrt{n}} \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k-1} y_i + \sum_{i=1}^{k} y_i - \frac{2k-1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \right) \right|.$$

Здесь $n = 30$, s — значение выборочного стандартного отклонения, вычисленного по $y_1, \ldots, y_{30}$.

Получаем $J_n^{\infty} \approx 1,24$, соответствующий достигнутый уровень значимости равен $1 - K(1,24) \approx 0,0929$, где $K(\cdot)$ — функция распределения Колмогорова.

Для интегральной статистики $J_n^{(1)} \approx 1,77$ достигнутый уровень значимости $2(1-\Phi_{0,1}(1,77)) \approx 0,0763$. Оба критерия отвергают гипотезу об отсутствии разладки на уровне 0,1, но принимают ее на уровне 0,05. Довольно плохое соответствие модели случайной выборки объясняется тем, что значения температуры в соседние дни существенно зависимы.

2) Вычислим те же статистики для приращений температуры x_i. При этом $n = 29$, а выборочное стандартное отклонение вычисляется по значениям $x_1, \ldots, x_{29}$.

Получаем $J_n^{\infty} \approx 0,865$, достигнутый уровень значимости $1 - K(0,865) \approx 0,442$;

$J_n^{(1)} \approx 0,738$ достигнутый уровень значимости $2(1 - \Phi_{0,1}(0,738)) \approx 0,461$. Нет оснований отвергать гипотезу об однородности приращений.

Итак, гипотеза об однородности приращений лучше соответствует наблюдаемым данным. В соответствии с этой гипотезой, среднее изменение температуры в ноябре 2011 года в г. Москве составляет $\overline{x} \approx -0,397$ фаренгейта в сутки с выборочным стандартным отклонением $s \approx 2,79$ фаренгейта в сутки.

§6. Сравнение критериев

В этом параграфе будем рассматривать статистическую модель в параметричесой форме: $\mathbf{X} \Subset \mathrm{F}(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Задание гипотезы $\mathrm{H}_0 : \theta \in \Theta_0$ определяется некоторым подмножеством $\Theta_0 \subset \Theta$ параметрического множества. Тогда альтернативная гипотеза имеет вид $\mathrm{H}_1 : \theta \in \Theta_1$, где $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. При этом отдельные точки $\theta \in \Theta_1$ будем называть *альтернативами.* Если Θ_0 - одноточечное множество, то гипотеза H_0 — простая.

Построение критерия уровня α равносильно выделению критического множества S значений выборочного вектора $\mathbf{X}$, для которого

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \in S/H_0) \leq \alpha \iff \mathbf{P}_\theta(\mathbf{X} \in S) \leq \alpha \ \ \forall \theta \in \Theta_0. \tag{1.15}$$

Тогда соответствующий критерий (критерий S) формулируется следующим образом:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & \mathbf{X} \in S, \\ \mathrm{H}_0, & \mathbf{X} NtinS. \end{cases} \tag{1.16}$$

Выбор критического множества S, удовлетворяющего (1.15), зачастую неоднозначен. Поэтому возникает проблема сравнения статистических критериев, соответствующих раличным S. Для ее решения вводится следующее понятие. *Функцией мощности* критерия S называется функция:

$$W(\theta) = W(S, \theta) = \mathbf{P}_\theta(\mathbf{X} \in S), \ \theta \in \Theta. \tag{1.17}$$

Если $\theta \in \Theta_0$, то функция мощности $W(\theta) = \mathbf{P}_\theta(\mathbf{X} \in S)$ равна вероятности *отвергнуть гипотезу* H_0 *, когда она справедлива.* Эта вероятность $\alpha(\theta) = \mathbf{P}_\theta(\mathbf{X} \in S)$, $\theta \in \Theta_0$ называется *вероятностью ошибки первого рода* или просто *ошибкой первого рода.* Если же $\theta \in \Theta_1$, то функция $1 - W(\theta) = \mathbf{P}_\theta(\mathbf{X} NtinS)$ равна вероятности *принять гипотезу* H_0 *, когда на самом деле верна альтернативная гипотеза* H_1. Эта вероятность $\beta(\theta) = \mathbf{P}_\theta(\mathbf{X} NtinS)$, $\theta \in \Theta_1$ называется *вероятностью ошибки второго рода* или просто *ошибкой второго рода.* Заманчиво было бы построить критерий, минимизирующий обе ошибки. Однако можно доказать, что при фиксированном объеме выборки нельзя сделать обе вероятности ошибок как угодно малыми. Поэтому при построении наилучшего критерия применяется следующий принцип: среди всех критериев, для которых ошибка первого рода не превышает фиксированного уровня α, наилучшим считается тот, для которого ошибка второго рода минимальна. Более точное определение состоит в следующем.

Пусть $S(\alpha)$ и $S^*(\alpha)$ — два критерия одного уровня значимости α. Если выполнены условия:

$$W(S^*, \theta) \leq W(S, \theta) \ \forall \theta \in \Theta_0, \tag{1.18}$$

$$W(S^*, \theta) \geq W(S, \theta) \ \forall \theta \in \Theta_1, \tag{1.19}$$

причем в (1.19) хотя бы для одного $\theta \in \Theta_1$ выполняется строгое неравенство, то говорят, что критерий $S^*(\alpha)$ *равномерно мощнее*, чем $S(\alpha)$. Если условия (1.18) - (1.19) выполняются *для любого критерия* $S(\alpha)$, то $S^*(\alpha)$ называется *равномерно наиболее мощным* (РНМ) критерием для проверки гипотезы $\mathrm{H}_0 : \theta \in \Theta_0$. Если при этом множество Θ_1 состоит из единственной точки, то $S^*(\alpha)$ называется *наиболее мощным* (НМ) критерием.

Рассмотрим подробнее случай, когда нужно сделать выбор из двух простых гипотез, то есть $\mathbf{X} \Subset \mathrm{F}(x, \theta)$, $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ и гипотезы имеют вид:

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0, \quad \mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1.$$

Предположим, что теоретическое распределение либо абсолютно непрерывно (при обоих значениях параметра) с плотностью $p(x, \theta) = f_{X_i}(x)$, либо при обоих значениях θ дискретно, при этом для ряда распределения будем использовать то же обозначение: $p(x, \theta) = \mathbf{P}(X_i = x)$. *Статистикой отношения правдоподобия* называется статистика вида

$$l(\mathbf{X}) = \frac{\Pi(\theta_1, \mathbf{X})}{\Pi(\theta_0, \mathbf{X})} = \frac{\prod_{i=1}^{n} p(X_i, \theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} p(X_i, \theta_0)},$$

где $\Pi(\theta, \mathbf{X})$ - функция правдоподобия:

$$\Pi(\theta, \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i, \theta).$$

При этом определении подразумевается: $\frac{c}{0} = +\infty$, $\frac{c}{\infty} = +0$, $\frac{0}{0}$ - не определено. НМ критерий в описанной ситуации может быть найден с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.5. *(Неймана—Пирсона) Наиболее мощный критерий уровня* α *для проверки гипотезы* $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ *против альтернативной гипотезы* $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1$ *задается критическим множеством вида:*

$$S^*(\alpha) = \{\mathbf{x} : \ l(\mathbf{x}) \geq c\}, \tag{1.20}$$

где постоянная c (критическое значение) находится из условия:

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{\mathbf{X} \in S^*(\alpha)\} = \mathbf{P}_{\theta_0}\{\mathbf{X} : \ l(\mathbf{X}) \geq c\} = \alpha. \tag{1.21}$$

Критерий (1.20) - (1.21) называют *критерием Неймана- Пирсона* или *критерием отношения правдоподобия.* При этом *мощностью критерия* называется значение $W(S^*, \theta_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}\{\mathbf{X} \in S^*(\alpha)\} = 1 - \beta(\theta_1)$ - вероятность отвергнуть основную гипотезу H_0, когда справедлива альтернативная H_1.

Пример 1.6. *Пусть* $\mathbf{X} \Subset E\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$, *где* $\theta > 0$. *Построить НМ критерий для сравнения гипотез* $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ *и* $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1$ *и вычислить его мощность.*

Решение. Предположим для определенности, что $\theta_0 < \theta_1$. Чтобы построить НМ критерий Неймана-Пирсона, найдем статистику отношения правдоподобия:

$$p(X_i, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{X_i}{\theta}}, & X_i > 0, \\ 0, & X_i \leq 0; \end{cases}$$

$$\Pi(\theta, \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i, \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{n\overline{X}}{\theta}}, X_i > 0 \ \forall i = \overline{1,n};$$

$$l(\mathbf{X}) = \frac{\Pi(\theta_1, \mathbf{X})}{\Pi(\theta_0, \mathbf{X})} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{n\overline{X}\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)}, \ X_i > 0 \ \forall i = \overline{1,n}.$$

Тогда критическое множество критерия Неймана—Пирсона имеет вид:

$$S^*(\alpha) = \{\mathbf{X} : \ l(\mathbf{X}) \geq c\} = \left\{\mathbf{X} : \ \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{n\overline{X}\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)} \geq c\right\},$$

Разрешая последнее неравенство относительно $\overline{X}$ и обозначая получившуюся константу в правой части снова через c, получим:

$$S^*(\alpha) = \{\mathbf{X} : \ n\overline{X} \geq c\},$$

где постоянная c находится из условия:

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{\mathbf{X} : \ n\overline{X} \geq c\} = \alpha. \tag{1.22}$$

Чтобы найти критическое значение c, нужно знать распределение статистики $n\overline{X} = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Так как каждое из независимых слагаемых этой суммы имеет распределение

$E\left(\frac{1}{\theta}\right)$, то можно доказать (см. задачу 14.6), что $\frac{2X_i}{\theta} \Subset \chi^2_2$, а значит
$$\frac{2n\overline{X}}{\theta_0} = \frac{2X_1}{\theta_0} + \frac{2X_2}{\theta_0} + ...\frac{2X_n}{\theta_0} \Subset \chi^2_{2n}.$$
Пусть $\chi^2_{1-\alpha,2n}$ - квантиль распределения χ^2_{2n}, то есть $\mathbf{P}(\chi^2_{2n} \geq \chi^2_{1-\alpha,2n}) = \alpha$. Тогда
$$\alpha = \mathbf{P}_{\theta_0}\{\mathbf{X} : \ \frac{2n\overline{X}}{\theta_0} \geq \chi^2_{1-\alpha,2n}\} = \mathbf{P}_{\theta_0}\left\{\mathbf{X} : \ n\overline{X} \geq \frac{\theta_0\chi^2_{1-\alpha,2n}}{2}\right\}.$$
То есть критическое значение c из (1.22) равно $\frac{\theta_0\chi^2_{1-\alpha,2n}}{2}$, и значит НМ критерий уровня α имеет вид:
$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & n\overline{X} \geq \frac{\theta_0\chi^2_{1-\alpha,2n}}{2}, \\ \mathrm{H}_0, & n\overline{X} < \frac{\theta_0\chi^2_{1-\alpha,2n}}{2}. \end{cases} \tag{1.23}$$

Мощность построенного критерия равна значению функции мощности:
$$W(S^*, \theta_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}\left\{\mathbf{X} : \ n\overline{X} \geq \frac{\theta_0\chi^2_{1-\alpha,2n}}{2}\right\}.$$
Так как в этой ситуации $\frac{2n\overline{X}}{\theta_1} \Subset \chi^2_{2n}$, то последняя вероятность равна:
$$W(S^*, \theta_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}\left\{\mathbf{X} : \ \frac{2n\overline{X}}{\theta_1} \geq \frac{\theta_0\chi^2_{1-\alpha,2n}}{\theta_1}\right\} = \mathbf{P}\left\{\chi^2_{2n} \geq \frac{\theta_0\chi^2_{1-\alpha,2n}}{\theta_1}\right\}.$$

Замечание 1.3. *Построенный НМ критерий* (1.23) *не зависит от конкретного значения* θ_1, *фигурирующего в альтернативной гипотезе* $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1$, *при его построении было* *использовано лишь неравенство* $\theta_1 > \theta_0$. *Поэтому построенный критерий является наиболее мощным одновременно для всех* $\theta_1 > \theta_0$. *Следовательно, критерий* (1.23) *является РНМ критерием уровня* α *для простой гипотезы* $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ *против* сложной *альтернативной гипотезы* $\mathrm{H}_1 : \theta > \theta_0$.

Замечание 1.4. *Критерий отношения правдоподобия* (1.20) *является наиболее мощным среди критериев уровня* α, *однако он не всегда существует, так как не для любого* α *можно найти постоянную с, удовлетворяющую* (1.21). *Например, это так, если распределение статистики* $l(\mathbf{X})$ *дискретно (см. следующий пример). Оказывается, оптимальный, то есть наиболее мощный, критерий существует и в этом случае. Но для этого придется расширить само понятие критерия.*

Статистические критерии вида (1.7) или (1.16) называются *нерандомизированными.* В этих критериях решение относительно рассматриваемой гипотезы принимается однозначно на основании наблюдаемого выборочного вектора $\mathbf{X}$. *Рандомизированными* называют такие критерии, в которых то или противоположное решение относительно проверяемой гипотезы *принимается с некоторой вероятностью*, то есть в зависимости от исхода дополнительного эксперимента. Более точные определения таковы.

Определение 1.1. Рандомизированным критерием *с критической функцией* $\phi(\mathbf{x})$ $(0 \le \phi(\mathbf{x}) \le 1)$ *называют правило такого рода, что при наблюдении выборочного вектора* $\mathbf{X}$ *гипотеза* H_0 *отвергается с вероятностью* $\phi(X)$, *и принимается с вероятностью* $1 - \phi(\mathbf{X})$.

Нерандомизированные критерии являются частным случаем рандомизированных. В самом деле, если функция $\phi(\mathbf{x})$ принимает только два значения 0 и 1, то рандомизированный критерий превращается в обычный - нерандомизорованный. При этом связь критической функции с критическим множеством можно выразить соотношением:

$$S = \{\mathbf{x} : \ \phi(\mathbf{x}) = 1\} \iff \phi(\mathbf{x}) = I(S),$$

где $I(S)$ - индикатор множества S. Рандомизированному критерию с критической функцией $\phi(\mathbf{x})$ можно придать вид, аналогичный (1.16):

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & \phi(\mathbf{X}) = 1, \\ \mathrm{H}_1 \quad \phi(\mathbf{X}), & 0 < \phi(\mathbf{X}) < 1, \\ \mathrm{H}_0, & \phi(\mathbf{X}) = 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Определение 1.2. Функцией мощности рандомизированного критерия *называется функция*

$$W(\theta) = W(\phi, \theta) = \mathbf{E}_\theta \phi(\mathbf{X}), \ \theta \in \Theta. \tag{1.25}$$

Коль скоро функция мощности определена, то применимы все определения, касающиеся сравнения критериев, в частности, понятия НМ и РНМ критериев. Тогда справедливо следующее обобщение (и усиление) Теоремы 1.5 Неймана-Пирсона на случай рандомизированных критериев.

Теорема 1.6. *Наиболее мощный критерий уровня* α *для проверки гипотезы* $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ *против альтернативной гипотезы* $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1$
существует и задается критической функцией вида:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & l(\mathbf{x}) > c, \\ p, & l(\mathbf{x}) = c, \\ 0, & l(\mathbf{x}) < c, \end{cases} \tag{1.26}$$

где постоянные $0 \le p \le 1$, c *(критические значения) находятся из условия:*

$$W(\theta_0) = \alpha \iff \mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) > c\} + p\mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) = c\} = \alpha. \tag{1.27}$$

Для практического нахождения критических значений p и c удобно использовать ф.р. статистики $l(\mathbf{X})$ при $\theta = \theta_0$:

$$F_l^+(c) = \mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) \leq c\}.$$

Заметим, что эта ф.р. непрерывна справа. Перепишем уравнение (1.27) в эквивалентном виде, переходя к противоположным событиям:

$$1 - \mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) > c\} - p\mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) = c\} = 1 - \alpha \iff$$

$$\iff \mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) \leq c\} - p\mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) = c\} = 1 - \alpha. \tag{1.28}$$

Если найдется такое c, при котором

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) \leq c\}\} = F_l^+(c) = 1 - \alpha, \tag{1.29}$$

то могут быть два случая: либо $\mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) = c\} = 0$, в этом случае уравнение (1.28) выполняется при любом p, в том числе и при $p = 0$; либо $\mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) = c\} \neq 0$, тогда (1.28) выполняется только при $p = 0$. В обоих случаях критерий является нерандомизированным и имеет вид:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & l(\mathbf{X}) > c, \\ \mathrm{H}_0, & l(\mathbf{X}) \leq c, \end{cases}$$

где c - любое число, удовлетворяющее (1.29).

Если же $F_l^+(c) \neq 1 - \alpha$ при всех c, то найдется такое c_0, что

$$F_l^+(c_0 - 0) < 1 - \alpha < F_l^+(c_0).$$

Тогда, обозначая $F_l^+(c_0) = \mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) \leq c_0\} = 1 - \alpha_0$, $\mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) = c_0\} =$
$= p_0$, находим p для рандомизированного критерия (1.26), (1.27) при $c = c_0$ из уравнения (1.28):

$$(1 - \alpha_0) - pp_0 = 1 - \alpha \implies p = \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0}. \tag{1.30}$$

Пример 1.7. *Пусть* $\mathbf{X} \Subset \mathrm{U}(\theta-3,\theta)$, $\theta \in \{3,5\}$. *Построить НМ критерий уровня* α *для проверки гипотезы* $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 = 3$ *против альтернативной гипотезы* $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1 = 5$ *по одному наблюдению (то есть при* $n = 1$*), если:*) $\alpha = 1/3$;) $\alpha = 1/5$. *В обоих случаях вычислить мощность построенного НМ критерия.*

Решение. Будем сразу искать рандомизированный критерий. Для этого рассмотрим статистику отношения правдоподобия:

$$l(\mathbf{x}) = \frac{\Pi(\theta_1,\mathbf{x})}{\Pi(\theta_0,\mathbf{x})} = \frac{p(X_1,\theta_1)}{p(X_1,\theta_0)}.$$

Плотности $p(X_1,\theta_0)$, $p(X_1,\theta_1)$ являются равномерными $\mathrm{U}(0,3)$ и $\mathrm{U}(2,5)$ соответственно. Изобазим их графики на одной координатной плоскости (см. рис. 1.2). Множества, где эти плотности отличны от нуля, заштрихованы в разных направлениях. С помощью этого рисунка легко понять, что статистика $l(\mathbf{X}) = l(X_1) = \dfrac{p(X_1,\theta_1)}{p(X_1,\theta_0)}$ имеет дискретное распределение, принимая лишь значения:

$$\frac{0}{0}\quad (\;),\qquad \frac{0}{1/3} = 0,\qquad \frac{1/3}{1/3} = 1,\qquad \frac{1/3}{0} = \infty.$$

N indent При этом, если $\theta = \theta_0$, то вероятности этих значений равны:

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{l(X_1) = 0\} = \mathbf{P}_{\theta_0}\{X_1 \in (0,2)\} = \frac{2}{3};$$

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{l(X_1) = 1\} = \mathbf{P}_{\theta_0}\{X_1 \in (2,3)\} = \frac{1}{3};$$

$$\mathbf{P}_{\theta_0}\{l(X_1) = \infty\} = \mathbf{P}_{\theta_0}\{X_1 \in (3,5)\} = 0.$$

Соответствующая функция распределения F_l^+ равна:

$$F_l^+(c) = \begin{cases} 0, & c < 0, \\ 2/3, & 0 \le c < 1, \\ 1, & c \ge 1. \end{cases}$$

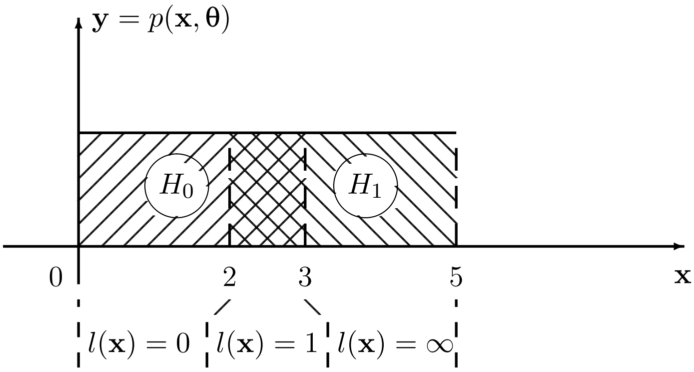

Рис. 1.2: Равномерные плотности $U(0,3)$ и $U(2,5)$.

График функции $F_l^+()$ представлен на рис. 1.3. N indent

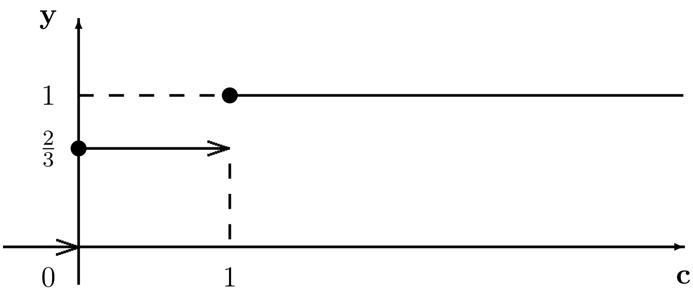

Рис. 1.3: Ф.р. $y = F_l^+()$ статистики $l(X_1)$

а) Если $\alpha = 1/3$, то $F_l^+() = 1 - \alpha = 2/3$ при любом $c \in [0,1)$. Тогда, полагая $p = 0$, получаем НМ нерандомизированный критерий:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & l(\mathbf{X}) > c, \\ \mathrm{H}_0, & l(\mathbf{X}) \le c \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & X_1 \ge 2, \\ \mathrm{H}_0, & X_1 < 2. \end{cases} \qquad (1.31)$$

Мощность критерия равна:

$$W(\theta_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}\{X_1 \ge 2\} = 1.$$

б) Если $\alpha = 1/5$, то $F_l^+() \neq 1 - \alpha = 4/5$ ни при каком c. Поэтому НМ критерий является рандомизированным:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & \qquad l(\mathbf{X}) > c_0, \\ \mathrm{H}_1 \quad p, & \qquad l(\mathbf{X}) = c_0, \\ \mathrm{H}_0, & \qquad l(\mathbf{X}) < c_0, \end{cases} \tag{1.32}$$

где c_0 находим из условия:

$$F_l^+({}_0 - 0) < 1 - \alpha = \frac{4}{5} < F_l^+({}_0).$$

Из рис. 1.3 видим, что $c_0 = 1$. Приравнивая $1 - \alpha_0 = F_l^+(c_0) = 1$, находим $\alpha_0 = 0$, а также вычисляем

$$p_0 = \mathbf{P}_{\theta_0}\{l(\mathbf{X}) = c_0\} = \mathbf{P}_{\theta_0}\{X_1 \in (2, 3)\} = \frac{1}{3},$$

$$p = \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} = \frac{1/5 - 0}{1/3} = \frac{3}{5}.$$

Подставляя найденные значения p и c_0 в (1.32), находим НМ критерий:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & \qquad l(\mathbf{X}) > 1, \\ \mathrm{H}_1 \quad 3/5, & \qquad l(\mathbf{X}) = 1, \\ \mathrm{H}_0, & \qquad l(\mathbf{X}) < 1. \end{cases}$$

Или

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & \qquad X_1 \in (3, 5], \\ \mathrm{H}_1 \quad 3/5, & \qquad X_1 \in [2, 3], \\ \mathrm{H}_0, & \qquad X_1 \in [0, 2). \end{cases} \tag{1.33}$$

Мощность критерия (1.33) равна:

$$W(\theta_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}\{X_1 \in (3, 5]\} + \frac{3}{5} \cdot \mathbf{P}_{\theta_1}\{X_1 \in [2, 3]\} = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{15}.$$

§7. Критерии нормальности для малых выборок

Отметим, что как правило проверку нормальности предлагают проводить при объеме выборки n не менее 8. Это связано с тем, что для отыскания критических уровней используется нормальное приближение для используемой статистики, а оно оказывается весьма неточным. В частности, ниже будет продемонстрирована величина погрешности, которая возникает при использовании нормальной аппроксимации для статистики критерия Шапиро—Уилка при объеме выборки от 3 до 5. Видимо, по этой причине согласно ГОСТу признано допустимым проверять нормальность только при $n \geq 8$. Сходимость статистик других критериев проверки нормальности к предельному распределению еще медленнее, чем для критерия Шапиро—Уилка.

Однако уже при $n = 2$ можно (с нулевой вероятностью ошибки) отвергнуть гипотезу о нормальности, если выборочные значения совпадают. Хотелось бы для $n > 2$ построить критерий, наследующий это полезное свойство, но позволяющий также (с достаточно малой вероятностью ошибки) отвергать гипотезу о нормальности в некоторых случаях, когда все выборочные значения различны.

Обозначим

$$R_n = \max_{1 \leq i,j \leq n} |X_i - X_j|$$

— наибольшее расстояние между элементами (размах) выборки;

$$L_n = \min_{1 \leq i < j \leq n} |X_i - X_j|$$

— наименьшее расстояние между элементами выборки;

$$d_n = R_n / L_n$$

— их отношение. Будем полагать $d_n = +\infty$ при $L_n = 0$.

Согласно основной гипотезе, элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют нормальное распределение. Критерий отвергает основную гипотезу, если $d_n \geq C$, где $0 < C < \infty$.

Величину L_n можно назвать минимальным спейсингом выборки. Наиболее близким аналогом предложенного здесь критерия может служить критерий Шапиро—Чена, статистика которого основана на сумме спейсингов, нормированных выборочным среднеквадратическим отклонением, с весовыми коэффициентами, выбираемыми специальным образом. Идеи использования минимального спейсинга для построения критерия проверки нормальности в литературе найти не удалось.

В данном параграфе доказано, что в широких предположениях при $n = 3$ статистика, инвариантная относительно перестановки аргументов, преобразований сдвига и масштаба, является функцией от d_3. Вычислена функция распределения статистики d_3. Для этого разности между компонентами выборки выражены через компоненты стандартного двумерного нормального распределения, и искомая формула получена сведением к равномерному распределению на окружности. Рассмотрен случай $n = 4$. Распределение статистики d_4 вычислено с использованием формулы Люилье (l'Huillier) площади сферического треугольника. Получены верхняя и нижняя оценки для хвоста распределения d_n при $n > 3$. Для этого доказана лемма о рапределении частного модулей компонент двумерного центрированного нормального вектора. Показано, что границы для хвоста распределения убывают по закону обратной пропорциональности.

Приведены результаты моделирования, подсчет квантили уровня 0,95 для $n = 5$ и эмпирической мощности критерия на альтернативах. Кроме того, проведено сравнение с критерием Шапиро—Уилка. Квантили уровня 0,05 для этого критерия исправлены по результатам моделирования. Анализ результатов показывает, что предложенный критерий мощнее критерия Шапиро—Уилка при $n = 4,\ 5$ и резко асимметричных альтернативах. При $n = 3$ мощности критериев совпадают, но для предложенного критерия существует простая явная формула для квантилей.

Если выполнена основная гипотеза, то $d_2 = 1$ п.н. Рассмотрим статистику d_3.

$$d_3 = \frac{\max\{|X_1 - X_2|, |X_1 - X_3|, |X_2 - X_3|\}}{\min\{|X_1 - X_2|, |X_1 - X_3|, |X_2 - X_3|\}}.$$

В случае выборки объема 3 любая статистика, не определенная при $R_3 = 0$, симметричная относительно элементов выборки и инвариантная относительно преобразований сдвига и масштаба, является функцией от d_3. Докажем это.

Теорема 1.7. *Если на каждом элементарном исходе* $Z(X_1, X_2, X_3)$ *— функция, не определенная при* $R_3 = 0$*, инвариантная относительно перестановки аргументов, и для любых* $b \in \mathbf{R}$, $c > 0$ *выполнено* $Z(b + cX_1, b + cX_2, b + cX_3) = Z(X_1, X_2, X_3)$*, то* Z *является функцией переменной* d_3*, где* $d_3 \in [3,\ \infty]$.

Доказательство

На данном элементарном исходе переставим аргументы таким образом, чтобы $X_1 \leq\ X_2 \leq\ X_3$, $X_2 - X_1 \leq X_3 - X_2$. Тогда $L_3 = X_2 - X_1$, $R_3 = X_3 - X_1$,

$$Z(X_1, X_2, X_3) = Z(X_1/R_3, X_2/R_3, X_3/R_3)$$

$$= Z(0, (X_2 - X_1)/R_3, (X_3 - X_1)/R_3)$$

$$= Z(0, L_3/R_3, 1) = Z(0, 1/d_3, 1).$$

Случай $L_3 = 0$ соответствует значению $d_3 = +\infty$ согласно принятому соглашению.

Теорема доказана.

Отметим, что статистика

$$\frac{{R_3}^2}{\sum_{i=1}^{3}(X_i - \overline{X})^2},$$

возникающая при $n = 3$ в критерии Шапиро—Уилка, удовлетворяет условиям теоремы, и в силу равенства

$$\sum_{i=1}^{3}(X_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{9}(((X_1 - X_2) + (X_1 - X_3))^2$$

$$+((X_2 - X_1) + (X_2 - X_3))^2 + ((X_3 - X_1) + (X_3 - X_2))^2)$$

$$= \frac{1}{9}\left((L_3 + R_3)^2 + (2L_3 - R_3)^2 + (2R_3 - L_3)^2\right)$$

$$= \frac{2(3{L_3}^2 + 3{R_3}^2 + R_3 L_3)}{9},$$

представима в виде

$$\frac{9{R_3}^2}{2(3{L_3}^2 + 3{R_3}^2 + R_3 L_3)} = \frac{9}{2(3d_3^{-2} + 3 + d_3^{-1})}.$$

Распределение этой статистики может быть вычислено в явном виде с помощью распределения статистики d_3.

Вычислим функцию распределения статистики d_3.

$$F_{d_3}(x) = \mathbf{P}\left\{\forall i \neq j \quad \frac{\max_{1\leq k,l\leq n}|X_k - X_l|}{|X_i - X_j|} < x\right\}$$

$$= 3!\mathbf{P}\left\{X_1 < X_2 < X_3,\ \frac{X_3 - X_1}{X_2 - X_1} < x,\ \frac{X_3 - X_1}{X_3 - X_2} < x\right\}$$

$$= 6\mathbf{P}\{X_2 - X_1 > 0,\ X_3 - X_2 > 0,$$

$$x(X_2 - X_1) > X_3 - X_1,\ x(X_3 - X_2) > X_3 - X_1\}.$$

Обозначим $Y_{ij} = X_i - X_j$. Тогда $\mathbf{E}Y_{ij} = 0$, $\mathbf{D}Y_{ij} = 2\sigma^2$ при $i \neq j$, где σ^2 — дисперсия элементов выборки.

$$F_{d_3}(x) = 6\mathbf{P}\{Y_{21} > 0,\ Y_{32} > 0,\ xY_{21} > Y_{31},\ xY_{32} > Y_{31}\} =$$

$$= 1 - 2 \cdot 6\mathbf{P}\{Y_{21} > 0,\ xY_{21} < Y_{31}\}.$$

Так как коэффициенты корреляции равны

$$\mathbf{corr}(Y_{21};\ Y_{32}) = -\mathbf{corr}(Y_{21};\ Y_{31}) = -\mathbf{corr}(Y_{32};\ Y_{31}) = -\frac{1}{2},$$

то компоненты нормального случайного вектора $(Y_{21},\ Y_{32},\ Y_{31})$ можно задать через компоненты стандартного нормального случайного вектора $(\eta_1,\ \eta_2)$ следующим образом:

$$Y_{21} = \sigma\sqrt{2}\eta_1;\ Y_{32} = \sigma\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_2\right);\ Y_{31} = \sigma\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_2\right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{d_3 < x\} = 1 - 12\mathbf{P}\{\eta_1 > 0;\ x\eta_1 < \frac{1}{2}\eta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_2\}$$

$$= 1 - 12\mathbf{P}\{\eta_1 > 0;\ \eta_2 > \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\eta_1\}$$

$$= 1 - \frac{12}{2\pi}\mathrm{arcctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Итак, доказана

Теорема 1.8. *Для всех $x \geq 2$ выполнено*

$$F_{d_3}(x) = 1 - \frac{6}{\pi}\mathrm{arcctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

В качестве следствия отметим, что $\mathbf{P}\{d_3 \geq x\} \sim \frac{3\sqrt{3}}{\pi x}$ при $x \to \infty$.

Рассмотрим случай $n = 4$. Выполнено $d_4 > 3$ п.н. Для $x > 3$

$$\mathbf{P}\{d_4 < x\} = 4! \cdot \mathbf{P}\{X_4 - X_1 > 0,\ x(X_2 - X_1) > X_4 - X_1,$$

$$x(X_3 - X_2) > X_4 - X_1,\ x(X_4 - X_3) > X_4 - X_1\}$$

$$= \mathbf{P}\{d_4 < x\} = 4! \cdot \mathbf{P}\{X_4 - X_1 > 0,\ x(X_2 - X_1) > X_4 - X_1,$$

$$x(X_3 - X_2) > X_4 - X_1,\ x(X_4 - X_3) > X_4 - X_1\}$$

$$= 24\mathbf{P}\{Y_{21} + Y_{32} + Y_{43} > 0,\ xY_{21} > Y_{21} + Y_{32} + Y_{43},$$

$$xY_{32} > Y_{21} + Y_{32} + Y_{43},\ xY_{43} > Y_{21} + Y_{32} + Y_{43}\}.$$

Просуммировав последние 3 неравенства, получаем, что

$$(x-3)(Y_{21} + Y_{32} + Y_{43}) > 0,$$

откуда следует первое неравенство, так как $x > 3$.

Обозначим $Z_{ij} = Y_{ij}/(\sigma\sqrt{2})$. Тогда

$$\mathbf{P}\{d_4 < x\} = 24\mathbf{P}\{xZ_{21} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43},$$

$$xZ_{32} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43},\ xZ_{43} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43}\}. \qquad (1.34)$$

Найдем вероятность выполнения системы неравенств

$$\begin{cases} xZ_{21} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43}; \\ xZ_{32} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43}; \\ xZ_{43} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43}. \end{cases} \qquad (1.35)$$

Корреляционная матрица вектора $(Z_{21};\ Z_{32};\ Z_{43})$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Удобно представить компоненты вектора следующим симметричным образом:

$$Z_{32} = \eta_2;$$

$$Z_{21} = -\frac{1}{2}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\eta_1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\eta_3;$$

$$Z_{43} = -\frac{1}{2}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\eta_3 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\eta_1.$$

Здесь вектор $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$ имеет стандартное нормальное распределение.

Так как $Z_{21}+Z_{32}+Z_{43} = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3$, то система неравенств (1.35) записывается в виде

$$\begin{cases} x\left(-\frac{1}{2}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\eta_1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\eta_3\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3; \\ x\eta_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3; \\ x\left(-\frac{1}{2}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\eta_3 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\eta_1\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3. \end{cases} \tag{1.36}$$

В силу симметрии многомерного нормального распределения, вероятность выполнения системы неравенств (1.36) равна отношению площади соответствующего сферического треугольника к площади единичной сферы. Грани сферического треугольника образованы плоскостями

$$\begin{cases} x\left(-\frac{1}{2}t_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}t_1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}t_3\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_3; \\ xt_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_3; \\ x\left(-\frac{1}{2}t_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}t_3 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}t_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_3. \end{cases}$$

Нормальные векторы этих плоскостей:

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{(\sqrt{2}+1)x-2}{2\sqrt{2}},\ -\frac{x}{2},\ -\frac{(\sqrt{2}-1)x+2}{2\sqrt{2}}\right);$$

$$\mathbf{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, x,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\mathbf{u}_3 = \left(-\frac{(\sqrt{2}-1)x+2}{2\sqrt{2}},\ -\frac{x}{2},\ \frac{(\sqrt{2}+1)x-2}{2\sqrt{2}}\right).$$

Найдем направляющие векторы прямых, по которым пересекаются плоскости, с помощью векторного произведения:

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \left(-(\sqrt{2}-1)x^2 - 3x,\ -2x,\ 3x - (\sqrt{2}+1)x^2\right);$$

$$\mathbf{v}_{13} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3 = \left((\sqrt{2}+1)x^2 - 3x,\ 2x,\ (\sqrt{2}-1)x^2 + 3x\right);$$

$$\mathbf{v}_{23} = \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \left(-4x^2,\ -4\sqrt{2}x(x-2),\ -4x^2\right).$$

Используем формулу Люилье для площади ε сферического треугольника со сторонами a, b, c:

$$\varepsilon = 4\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{tg}\frac{s}{2}\mathrm{tg}\frac{s-a}{2}\mathrm{tg}\frac{s-b}{2}\mathrm{tg}\frac{s-c}{2}},$$

где $s = (a+b+c)/2$.

Сторонами сферического треугольника называются углы между прямыми, образующими трехгранный угол. Поэтому

$$a = c = \arccos\frac{|\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{13}|}{|\mathbf{v}_{12}||\mathbf{v}_{13}|} = \arccos\frac{x^2+6x-7}{3x^2-6x+11};$$

$$b = \arccos\frac{|\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{23}|}{|\mathbf{v}_{12}||\mathbf{v}_{23}|} = \arccos\frac{x^2+x-2}{\sqrt{3x^2-6x+11}\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Согласно формуле (1.34), умножим результат вычисления по формуле Люилье на 24 и разделим на площадь единичной сферы 4π. Получаем следующую теорему.

Теорема 1.9. *При* $x \geq 3$

$$F_{d_4}(x) = \frac{24}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{a}{4}\sqrt{\mathrm{tg}\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{4}\right)}\right),$$

где

$$a = \arccos\frac{x^2+6x-7}{3x^2-6x+11},$$

$$b = \arccos\frac{x^2+x-2}{\sqrt{3x^2-6x+11}\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Выполним сравнение с критерием Шапиро—Уилка. Будем моделировать выборки заданного объема из нормального распределения, основываясь на известном алгоритме

$$X_i = \sum_{j=1}^{12} U_{12(i-1)+j} - 6,$$

где $U_1,\ U_2,\ \ldots$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0,\ 1]$. Для их моделирования использовался встроенный датчик случайных чисел Excel. Квантили уровня 0,95 для d_3 и d_4 отыскиваются из теорем 2 и 3. Квантиль уровня 0,95 для d_5 отыскивается как выборочная квантиль по результатам моделирования $2 \cdot 10^6$ выборок и приближенно равняется 214.

Рассмотрим мощность критерия на альтернативах. Обозначим $\mathcal{LN}_{\sigma^2}$ логнормальное распределение с параметрами 0, σ^2; $\mathcal{C}$ — распределение Коши.

Для логнормального распределения моделирование осуществляется по формуле

$$X_i = \exp\left(\sigma\left(\sum_{j=1}^{12} U_{12(i-1)+j} - 6\right)\right),$$

а для распределения Коши

$$X_i = \tan(\pi(U_i - 1/2)).$$

В таблице 1.1 приведены эмпирические значения мощности R/L-критерия на альтернативах, полученные по результатам моделирования 10^6 выборок. Здесь n — объем выборки, $t_{0{,}95}$ — квантиль уровня 0,95 (для $n = 5$ подсчитана эмпирически).

Таблица 1.1 Эмпирическая мощность R/L—критерия.

n	$t_{0{,}95}$	$\mathcal{LN}_1$	$\mathcal{LN}_4$	$\mathcal{LN}_{25}$	$\mathcal{LN}_{100}$	$\mathcal{LN}_{400}$	$\mathcal{C}$
3	33,57	0,08	0,20	0,53	0,73	0,86	0,10
4	103,60	0,09	0,25	0,72	0,91	0,98	0,12
5	214	0,09	0,29	0,83	0,97	0,995	0,13

Мощность критерия при логнормальной альтернативе существенно зависит от параметра σ^2. Наилучшие результаты получаются при $\sigma^2 \geq 100$.

Проведем сравнение с критерием Шапиро—Уилка. Отметим, что статья создателей критерия дает существенно неправильные значения квантилей уровня 0,05. Поэтому пришлось пересчитать квантили, основываясь на моделировании 10^6 выборок заданного объема. Квантиль исправлялась таким образом, чтобы эмпирический критический уровень был наиболее близок к 0,05. Результаты вычислений приведены в таблице 1.2. Через $X_{(i)}$ обозначены порядковые статистики, через $\tilde{q}_{0,05}$ — квантиль уровня 0,05 в табл. из работы Шапиро—Уилка, через $\tilde{\varepsilon}$ — эмпирический уровень, достигнутый для этой квантили по результатам моделирования, через $q_{0,05}$ — квантиль уровня 0,05, исправленная по результатам моделирования.

Таблица 1.2 Эмпирические квантили для критерия Шапиро—Уилка.

n	Статистика b	$\tilde{q}_{0,05}$	$\tilde{\varepsilon}$	$q_{0,05}$
3	$0,7071(X_{(3)} - X_{(1)})$	0,767	0,038	0,772
4	$0,6872(X_{(4)} - X_{(1)}) + 0,1677(X_{(3)} - X_{(2)})$	0,748	0,038	0,761
5	$0,6646(X_{(5)} - X_{(1)}) + 0,2413(X_{(4)} - X_{(2)})$	0,762	0,037	0,777

Используем исправленные значения для подсчета эмпирической мощности критерия Шапиро—Уилка на альтернативах. Напомним, что критерий отвергает гипотезу о нормальности на уровне 0,05, если значение $W = b^2/\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ окажется меньше, чем $q_{0,05}$. Результаты приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3 Эмпирическая мощность критерия Шапиро—Уилка.

n	$q_{0,05}$	$\mathcal{LN}_1$	$\mathcal{LN}_2$	$\mathcal{LN}_5$	$\mathcal{LN}_{10}$	$\mathcal{LN}_{20}$	$\mathcal{C}$
3	0,772	0,08	0,20	0,53	0,73	0,86	0,10
4	0,761	0,17	0,38	0,70	0,84	0,92	0,21
5	0,777	0,24	0,52	0,85	0,95	0,988	0,29

Сравнение табл. 1.1 и 1.3 приводит к выводу о том, что R/L—критерий оказывается полезным при $n = 4,\ 5$ в случае существенной асимметрии распределения при альтернативной гипотезе (в частности, для логнормального распределения при

$\sigma^2 \geq 100$). При $n = 3$ мощности критериев совпадают. Это совпадение подтверждает результаты теоремы 1.7 и следующего за ним замечания.

Пример 1.8. *До того, как физикам стало известно о существовании газообразного радиоактивного вещества — радона, в ряде экспериментов было неясно, с чем связаны резкие изменения радиоактивности. Выяснилось, что для стабилизации показаний радиометра необходимо устранить всякое движение воздуха в помещении. В наше время отсутствие нормальности показаний радиометра может указывать на радиоактивность, вызванную радоном.*

Предположим, что радиометр зафиксировал значения 10, 11, 19 и 40. Следует ли отвергнуть гипотезу о нормальности на уровне значимости 0,05 при использовании критерия R/L-отношения? При использовании критерия Шапиро—Уилка?

Решение. Вычислим значение статистики критерия R/L-отношения при $n = 4$ наблюдениях: $d_4 = (40-10)/(11-10) = 30$. На основании таблицы 1.1 сравниваем это значение с критическим значением 103,60 и делаем вывод о том, что гипотеза нормальности принимается этим критерием на уровне 0,05.

Вычислим значение статистики Шапиро—Уилка:

$$W = \frac{(0,6872(X_{(4)} - X_{(1)}) + 0,1677(X_{(3)} - X_{(2)}))^2}{\sum_{i=1}^{4}(X_i - \overline{X})^2}$$

$$= \frac{(0,6872(40-10) + 0,1677(19-11))^2}{(10-20)^2 + (11-20)^2 + (19-20)^2 + (40-20)^2} \approx 0,828.$$

На основании таблицы 1.2 сравниваем это значение с критическим значением 0,761 и делаем вывод о том, что гипотеза нормальности принимается критерием Шапиро—Уилка на уровне 0,05.

Глава 2. Статистические критерии для нескольких выборок

§1. F-тест и T-тест

Пусть имеются две независимые выборки $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_{n_1})$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2})$. Требуется установить, являются ли они выборками из одного распределения. Если обозначить соответствующие функции распределения через $F_1(x) = \mathbf{P}(X_i < x)$ и $F_2(x) = \mathbf{P}(Y_i < x)$, то можно сформулировать гипотезу: $\mathrm{H}_0 : F_1 = F_2$. Эта гипотеза и называется *гипотезой однородности*.

Если известно, что обе выборки из нормального распределения, то гипотеза однородности означает, что равны их математические ожидания и дисперсии.

Для проверки этой гипотезы сначала проверяется равенство дисперсий на основании критерия Фишера (F-теста): если дисперсии равны, то статистика

$$f_{n_1,n_2} = \frac{n_1 S_x^2 (n_2 - 1)}{n_2 S_y^2 (n_1 - 1)}$$

имеет распределение Фишера с (n_1, n_2) степенями свободы.

Если F-тест не отвергает гипотезу равенства дисперсий, то проверяется гипотеза о равенстве математических ожиданий *в предположении, что неизвестные дисперсии равны*: если равны также и математические ожидания, то статистика

$$t_{n_1,n_2} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \frac{n_1 S_x^2 + n_2 S_y^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

имеет распределение Стьюдента с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы.

§2. Критерий хи-квадрат

Одним из распространенных критериев для проверки гипотезы однородности является так называемый **χ^2-критерий для проверки однородности**. Приведем формулировку этого критерия для более общей ситуации, когда имеется $s > 1$ выборок. Обозначим объемы этих выборок через $n_1, n_2, ..., n_s$, а теоретические ф.р. соответственно : $F_1(x), F_2(x), ..., F_s(x)$. Разобьем числовую ось на r непересекающихся интервалов:

$$(-\infty, \infty) = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r, \quad S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j.$$

Пусть ν_{ij} - число элементов j-й выборки, попавших в i-й интервал, а $\nu_{i\cdot}$ - число элементов всех выборок, попавших в i-й интервал, то есть

$$\nu_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_j} \nu_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., r.$$

Составим меру Пирсона, характеризующую «суммарное отклонение» исследуемых выборок друг от друга:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(\nu_{ij} - n_j \frac{\nu_{i\cdot}}{n}\right)^2}{n_j \frac{\nu_{i\cdot}}{n}} = n \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\nu_{ij}^2}{n_j \nu_{i\cdot}} - 1 \right), \qquad (2.1)$$

где $n = n_1 + n_2 + ... + n_s$. Если выполняется гипотеза однородности $\mathrm{H}_0 : \ F_1 = F_2 = ... = F_s$, то справедлив результат, аналогичный Теореме 1.1:

$$\chi^2 \Longrightarrow \chi^2_{(r-1)(s-1)}, \quad n \to \infty.$$

Тогда при больших n критерий для проверки гипотезы однородности H_0 имеет вид:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,(\mathrm{r}-1)(\mathrm{s}-1)}, \\ \mathrm{H}_0, & \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha,(\mathrm{r}-1)(\mathrm{s}-1)}, \end{cases} \qquad (2.2)$$

где альтернативная гипотеза H_1 : "H_0 - неверна".

Пример 2.1. *В двух группах на контрольной работе по теории вероятности были получены результаты, сведенные в следующую таблицу.*

Баллы / *Группа*	*2*	*3*	*4*	*5*
I	*7*	*7*	*8*	*2*
II	*7*	*6*	*5*	*5*

Можно ли считать эти группы укомплектованными однородно, с точки зрения их подготовленности по этой дисциплине?

Решение. Очевидно, речь идет о проверке гипотезы однородности двух выборок. По данным из таблицы последовательно вычисляем:

$$n_1 = 24,\ n_2 = 23,\ n = n_1 + n_2 = 47;$$

$$\nu_{1\cdot} = 7 + 7 = 14,\ \nu_{2\cdot} = 13,\ \nu_{3\cdot} = 13,\ \nu_{4\cdot} = 7;$$

$$\chi^2 = n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\nu_{ij}^2}{n_j\nu_{i\cdot}} - 1\right) = 47\left(\frac{7^2}{24\cdot 14} + \frac{7^2}{24\cdot 13} + \frac{8^2}{24\cdot 13} + \frac{2^2}{24\cdot 7} + \right.$$

$$\left. + \frac{7^2}{23\cdot 14} + \frac{6^2}{23\cdot 13} + \frac{5^2}{23\cdot 13} + \frac{5^2}{23\cdot 7} - 1\right) \approx 2,03.$$

Так как $s = 2,\ r = 4,$ то число степеней свободы χ^2 - критерия равно $(s-1)(r-1) = 3.$ Задавшись уровнем значимости $\alpha = 0,05$, из Таблицы 5 находим критическое значение критерия (2.2) :

$$\chi^2_{1-\alpha,(r-1)(s-1)} = \chi^2_{0,95,3} = 7,82.$$

Поскольку наблюдаемое значение статистики $\chi^2 = 2,03$ не превосходит критического, то наша гипотеза однородности принимается.

Из той же таблицы 5 можно видеть, что для полученного значения $\chi^2 = 2,03$ неравенство $\chi^2 \le t_\alpha,$ при котором гипотеза $\mathrm{H}_0 : F_1 = F_2$ еще может быть принята, выполняется при $1-\alpha=0,3$, то есть предельный уровень значимости, с которым можно принять эту гипотезу на основании результатов контрольной работы, равен $\alpha^*=0,7$. $\triangledown$

§3. Критерий Колмогорова—Смирнова

Пусть $\vec{X}$, $\vec{Y}$ — независимые выборки объемов n и m соответственно. Гипотеза однородности утверждает, что эти выборки из одного и того же распределения.

Если распределение предполагается непрерывным, то применим критерий Колмогорова—Смирнова: вычислим статистику

$$d_{n,m}=\sqrt{\frac{mn}{n+m}}\sup_{t\in\mathbf{R}}|F^*_{1,n}(t)-F^*_{2,m}(t)|,$$

где $F^*_{1,n}(t)$, $F^*_{2,m}(t)$ — эмпирические функции распределения, построенные по выборкам $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ соответственно. Если выполнена гипотеза однородности, то распределение статистики $d_{n,m}$ не зависит от конкретного распределения элементов выборки. Для больших n, m оно близко к распределению Колмогорова.

§4. Критерий проверки независимости

Если $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ — выборка из двумерного нормального распределения, то гипотезу о независимости компонент выборки можно проверить с помощью выборочного коэффициента корреляции

$$\widehat{r}_n=\frac{\overline{XY}-\overline{X}\;\overline{Y}}{S_xS_y},$$

где $S_x^2=\overline{X^2}-\overline{X}^2$, $S_y^2=\overline{Y^2}-\overline{Y}^2$.

Если верна гипотеза о независимости, то выборочный коэффициент корреляции имеет плотность распределения

$$f_{\widehat{r}_n}(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}(1-t^2)^{\frac{n-4}{2}},$$

$t \in (-1,\ 1)$, $n > 2$, а случайная величина

$$\widehat{r}_n \sqrt{\frac{n-2}{1-\widehat{r}_n^2}}$$

имеет распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы.

Пример 2.2. *Измерены рост (в метрах) и масса тела (в кг после завтрака) четырех студентов физического факультета.*

1-й студент: 1,83 м, 67 кг;

2-й студент: 1,80 м, 81 кг;

3-й студент: 1,73 м, 55 кг;

4-й студент: 1,67 м, 53 кг.

Предполагается, что совместное распределение роста и массы тела подчиняется двумерному нормальному закону. Каков достигнутый уровень значимости гипотезы о независимости веса от роста при двусторонней альтернативе?

Решение. Вычислим выборочный коэффициент корреляции:

$$\widehat{r}_4 \approx 0,773.$$

Согласно формуле для плотности распределения при $n = 4$, при выполнении гипотезы о независимости статистика $\widehat{r}_4$ имеет равномерное распределение на отрезке [-1, 1]. Достигнутый уровень значимости — это вероятность попасть за пределы отрезка [-0,773, 0,773]. Он равен $\frac{2-2*0,773}{2} = 1 - 0,773 = 0,227$.

Как правило, малые объемы выборок не позволяют отвергать гипотезу о независимости с достаточной уверенностью. При анализе зависимости массы тела от роста значимые результаты возникают при анализе не менее нескольких десятков наблюдений.

§5. Задачи

1. Построить какой-либо критерий, различающий по одному наблюдению гипотезы о равномерном распределении на [0, 1] и о показательном распределении с параметром 1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода.

2. При n=4000 независимых испытаний события A1, A2, A3, составляющие полную группу, осуществились соответственно 1905, 1015 и 1080 раз. Проверить, согласуются ли эти данные при уровне значимости 0,05 с гипотезой H_0 $p_1 = 1/2, p_2 = p_3 = 1/4, \quad p_i = \mathbf{P}(A_i)$.

3. В экспериментах с селекцией гороха Мендель наблюдал частоты различных видов семян, полученных при скрещивании растений с круглыми желтыми семенами и растений с морщинистыми зелеными семенами. Эти данные и значения теоретических вероятностей по теории наследственности приведены в следующей таблице:

Семена	Частота	Вероятность
Круглые и желтые	315	9/16
Морщинистые и желтые	101	3/16
Круглые и зеленые	108	3/16
Морщинистые и зеленые	32	1/16
Σ	n=556	1

Следует проверить гипотезу H_0 о согласовании частотных данных с теоретическими вероятностями (на уровне значимости $\alpha \leq 0,9$).

4. В таблице приведены числа m_i участков равной площади 0,25 км^2 южной части Лондона, на каждый из которых приходилось по i попаданий самолетов-снарядов во время второй мировой войны. Проверить согласие опытных данных с законом распределения Пуассона, приняв за уровень значимости $\alpha = 0,05$:

i	0	1	2	3	4	5 и более	Итого
m_i	229	211	93	35	7	1	$\Sigma m_i = 576$

5. Ответить на вопрос примера 2.1 в отношении четырех групп, две из которых представлены в условиях примера 2.1, а результаты двух других по той же контрольной работе даны в следующей таблице:

Баллы / Группа	2	3	4	5
III	7	6	7	2
IV	8	6	1	2

6. Поступающие в институт абитуриенты разбиты на два потока по 300 человек в каждом. Итоги экзамена по одному и тому же предмету на каждом потоке оказались следующими: на 1-м потоке баллы 2, 3, 4 и 5 получили соответственно 33, 43, 80 и 144 человека; соответствующие же данные для 2-го потока таковы: 39, 35, 72 и 154. Можно ли при уровне значимости 0,05 считать оба потока однородными?

7. Крупная партия товаров может содержать долю дефектных изделий. Поставщик полагает, что эта доля составляет 3%, а покупатель - 10%. Условия поставки: если при проверке 20 случайным образом отобраных товаров обнаружено не более одного дефектного, то партия принимается на условиях поставщика, в противном случае - на условиях покупателя. Требуется определить: 1) каковы статистические гипотезы, статистика критерия, область ее значений, критическая область; 2) какое распределение имеет статистика критерия, в чем состоят ошибки первого и второго рода и каковы их вероятности.

8. Имеется выборка объема 1 из нормального распределения $\mathrm{N}(a,1)$. Проверяются простые гипотезы $\begin{cases} H_0 : a = 0, \\ H_1 : a = 1. \end{cases}$ Используется следующий критерий (при заданной постоянной c):

$$\delta(X_1) = \begin{cases} H_0, & X_1 \leq c, \\ H_1, & X_1 > c. \end{cases}$$

Вычислить мощность критерия, в зависимости от c, и вероятности ошибок первого и второго рода.

9. Построить критерий, обладающий нулевыми вероятностями ошибок, для проверки гипотез $H_0 : \mathbf{X} \in N(0,1)$ против $H_1 : \mathbf{X} \in \Pi(\lambda)$.

10. Пусть $\mathbf{X} \in N(a,1)$. Для проверки гипотез $H_0 : a = 0$ против $H_1 : a = 1$ используется следующий критерий: H_0 принимается, если $x_{(n)} < 3$, и отвергается в противном случае. Найти вероятности ошибок.

11. Используя конструкции доверительного интервала, построить критерий уровня ε для проверки гипотезы $H : \theta = 1$, если а) $\mathbf{X} \in N(\theta,1)$; б) $\mathbf{X} \in N(1,\theta)$; в) $\mathbf{X} \in E_\theta$; г) $\mathbf{X} \in B_{\theta/2}$; д) $\mathbf{X} \in \Pi(\theta)$.

12. Известно, что $\mathbf{X} \in N(0,\sigma^2)$. Построить РНМК уровня ε для сравнения гипотез $H_0 : \sigma^2 = \sigma_1^2$; $\quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_1^2$.

13. Чтобы проверить гипотезу $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta = \theta_1$ $(0 < \theta_0 < \theta_1 < 1)$ в схеме Бернулли с неизвестной вероятностью "успеха"θ, осуществлен экперимент, в котором наблюдается число "успехов предшествующих первому "неуспеху". Построить наиболее мощный критерий при уровне значимости $\alpha = \theta_0^s$, $s \geq 1$ - заданное целое число, и убедиться в том, что вероятность ошибки второго ряда этого критерия $\beta = 1 - \theta_1^s$.

14. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ - выборочные средние двух выборок, объемы которых n и m, из распределений $N(\theta_1,\sigma_1^2)$ и $N(\theta_2,\sigma_2^2)$ соответственно. Основываясь на статистике $T = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma}$, где $\sigma^2 = \sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m$, построить критерий для проверки гипотезы $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ против альтернативы $H_1 : \theta_1 > \theta_2$.

15. Три последовательных измерения силы тока в цепи дали значения 1, 1.001 и 2 ампера. Найти достигнутый уровень значимости гипотезы о том, что эти значения образуют выборку из нормального распределения.

16. Пядь — мера длины, равная расстоянию между концами растянутых большого и указательного пальцев. У десяти студентов были измерены рост и пядь (в см):

176	175	166	165	173	158	163	170	170	186
18,5	16	17	16	18	16	15	18	21	20

Предполагается, что совместное распределение роста и пяди подчиняется двумерному нормальному закону. Принимается ли гипотеза о независимости роста и пяди на уровне 0,05?

Приложение. Таблицы

Распределение Пуассона

Т а б л и ц а 1. Значения функции $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,09879	0,12161	0,14379	0,16466
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7		0,00001	0,00002	0,00004

Т а б л и ц а 1 (продолжение).

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,0813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

Т а б л и ц а 2. Значения функции $\sum\limits_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	06
0	0,90484	0,81873	0,74081	0,67032	0,60653	0,54881
1	0,99532	0,98248	0,96306	0,93845	0,90980	0,80781
2	0,99984	0,99885	0,99640	0,99207	0,98561	0,97688
3	1,00000	0,99994	0,99973	0,99922	0,99825	0,99664
4		1,00000	0,99998	0,99994	0,99982	0,99960
5			1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

k \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,49658	0,44933	0,40657	0,36790	0,23534	0,04979
1	0,84420	0,80880	0,77248	0,73576	0,40601	0,19915
2	0,96586	0,95258	0,93714	0,91970	0,67668	0,42319
3	0,99425	0,99092	0,98654	0,98101	0,85712	0,64723
4	0,99921	0,99859	0,99766	0,99634	0,94735	0,81526
5	0,99991	0,99982	0,99966	0,99941	0,98344	0,91600
6	0,99999	0,99998	0,99996	0,99992	0,99547	0,96649
7	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99890	0,98810
8					0,99976	0,99620
9					0,99995	0,99890
10					0,99999	0,99971
11						0,99993
12						0,99998
13						1,00000

Т а б л и ц а 2 (продолжение).

k \ λ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012
1	0,09158	0,04042	0,01735	0,00730	0,00302	0,00123
2	0,23810	0,12465	0,06197	0,02964	0,01375	0,00623
3	0,43347	0,26503	0,15120	0,08176	0,04238	0,02123
4	0,62883	0,44049	0,28506	0,17299	0,09963	0,05496
5	0,78513	0,61596	0,44568	0,30071	0,19124	0,11569
6	0,88933	0,76218	0,60630	0,44971	0,31337	0,20678
7	0,94887	0,86662	0,74398	0,59871	0,45296	0,32390
8	0,97864	0,93181	0,84724	0,72909	0,59255	0,45565
9	0,99187	0,96817	0,91608	0,83050	0,71662	0,58741
10	0,99716	0,98630	0,95738	0,90148	0,81589	0,70599
11	0,99908	0,99455	0,97991	0,94665	0,88808	0,80301
12	0,99973	0,99798	0,99117	0,97300	0,93620	0,87577
13	0,99992	0,99920	0,99637	0,98719	0,96582	0,92615
14	0,99998	0,99977	0,99860	0,99428	0,98274	0,95853
15	0,99999	0,99993	0,99949	0,99759	0,99177	0,97796
16	1,00000	0,99998	0,99982	0,99904	0,99628	0,98889
17		0,99999	0,99994	0,99964	0,99841	0,99468
18		1,00000	0,99998	0,99987	0,99935	0,99757
19			0,99999	0,99995	0,99974	0,99894
20			1,00000	0,99998	0,99991	0,99956
21				1,00000	0,99997	0,99982
22					0,99999	0,99993
23					1,00000	0,99997
24						0,99999
25						1,00000

Нормальное распределение

Т а б л и ц а 3. Значения функции $\Phi_0(x)$.

x	сотые доли				
	0	1	2	3	4
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264
1,0	0,3413	0,3437	0,3461	0,3485	0,3508
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251
1,5	0,4332	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904
2,4	0,4918	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984
3,0	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4988

Приведены значения функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

сотые доли					x
5	6	7	8	9	
0,0200	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359	0,0
0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753	0,1
0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141	0,2
0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517	0,3
0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879	0,4
0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224	0,5
0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549	0,6
0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852	0,7
0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133	0,8
0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389	0,9
0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621	1,0
0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830	1,1
0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015	1,2
0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177	1,3
0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319	1,4
0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441	1,5
0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545	1,6
0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633	1,7
0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706	1,8
0,4744	0,4750	0,4756	0,4764	0,4767	1,9
0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817	2,0
0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857	2,1
0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890	2,2
0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916	2,3
0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936	2,4
0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952	2,5
0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964	2,6
0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974	2,7
0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981	2,8
0,4984	0,4985	0,4985	0,4985	0,4986	2,9
0,4988	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990	3,0

Функция распределения закона $N(0,1)$ вычисляется по формуле

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 + \Phi_0(x).$

Для $|t| > 3,09$ можно использовать аппроксимацию

$1 - \Phi(t) = \overline{\Phi}(t) \sim \frac{e^{-t^2/2}}{t\sqrt{2\pi}}.$

Т а б л и ц а 4. Квантили нормального распределения

Значения t, для которых функции $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ и $\overline{\Phi}(t) = \Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ принимают заданные значения.

t	$\Phi(-t)$	$\Phi(t)$
4,75	0,000001	0,999999
4,26	0,00001	0,99999
3,72	0,0001	0,9999
3,09	0,001	0,999
2,58	0,005	0,995
2,33	0,01	0,99
2,05	0,02	0,98
1,96	0,025	0,975
1,88	0,03	0,97
1,75	0,04	0,96
1,64	0,05	0,95
1,28	0,1	0,9
1,04	0,15	0,85
0,84	0,2	0,8
0,67	0,25	0,75
0,52	0,3	0,7
0,39	0,35	0,65
0,25	0,4	0,6
0,13	0,45	0,55
0,00	0,5	0,5

Т а б л и ц а 5. Распределение $\chi^2(n)$. Квантили распределения:

$$p = \int_0^{\chi^2_{p,n}} k_n(x)dx = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot \int_0^{\chi^2_{p,n}} x^{n/2-1}e^{-x/2}dx$$

n \ p	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	0.999	0,9999
1	0,016	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	6,63	10,8
2	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	9,21	13,8
3	0,584	1,42	2,37	3,67	6,25	7,82	11,3	16,3
4	1,06	2,20	3,36	4,88	7,78	9,49	13,3	18,5
5	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	15,1	20,5
6	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	16,8	22,5
7	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	18,5	24,3
8	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	20,1	26,1
9	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	21,7	27,9
10	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	23,2	29,6
11	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	24,7	31,3
12	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	26,2	32,9
13	7,04	9,93	12,3	15,52	13,4	15,5	20,1	26,1
14	7,79	10,08	13,3	16,2	21,1	23,7	29,1	36,1
15	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	30,6	37,7
16	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	32,0	39,3
17	10,09	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	33,4	40,8
18	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	34,8	42,3
19	11,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	36,2	43,8
20	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	37,6	45,3
21	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	38,9	46,8
22	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	40,3	48,3
23	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	41,6	49,7
24	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	43,0	51,2
25	16,5	20,9	24,3	28,2	34,3	37,7	44,3	52,6
30	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	50,9	59,7

Т а б л и ц а 6. Распределение Стьюдента S(n)
Значения функции $t_{\gamma,n}$

$$\frac{1+\gamma}{2} = \int\limits_{-\infty}^{t_{\gamma,n}} s_n(x)dx = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{t_{\gamma,n}} (1+\frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2}dx$$

n \ γ	0,9	0,95	0,98	0,99
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,625	2,977
16	1,746	2,120	2,584	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
24	1,711	2,064	2,492	2,797
26	1,706	2,056	2,479	2,779
28	1,701	2,048	2,467	2,763
30	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Т а б л и ц а 7. Критерий Колмогорова

Значения функции $\lambda_p : p = \mathbf{P}(D_n = \sup\limits_x |F_n(x) - F(x)| > \lambda_p)$

$n \diagdown p$	0,10	0,05	0,01		$n \diagdown p$	0,10	0,05	0,01
1	0,950	0,975	0,995		19	0,271	0,301	0,361
2	0,776	0,842	0,929		20	0,265	0,294	0,352
3	0,636	0,708	0,829		25	0,238	0,264	0,317
4	0,565	0,624	0,734		30	0,218	0,242	0,290
5	0,509	0,563	0,669		35	0,202	0,224	0,269
6	0,468	0,519	0,617		40	0,189	0,210	0,252
7	0,436	0,483	0,576		45	0,179	0,198	0,238
8	0,410	0,454	0,542		50	0,170	0,188	0,226
9	0,387	0,430	0,513		55	0,162	0,180	0,216
10	0,369	0,409	0,489		60	0,155	0,172	0,207
11	0,352	0,391	0,468		65	0,149	0,166	0,199
12	0,338	0,375	0,449		70	0,144	0,160	0,192
13	0,325	0,361	0,432		75	0,139	0,154	0,185
14	0,314	0,349	0,418		80	0,135	0,150	0,179
15	0,304	0,338	0,404		85	0,131	0,145	0,174
16	0,295	0,327	0,392		90	0,127	0,141	0,169
17	0,286	0,318	0,381		95	0,124	0,137	0,165
18	0,279	0,309	0,371		100	0,121	0,134	0,161

Список литературы

Основная литература

1. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 470 с.

2. *Боровков А.А.* Математическая статистика. — Новосибирск: Наука, 1997. — 772 с.

3. *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. — СПб., 1999. — 223 с.

4. *Бородихин В.М.* Теория вероятностей и математическая статистика: Практикум. — Новосибирск, 2000. — Ч. 1. — 159 с.

5. *Бородихин В.М.* Теория вероятностей и математическая статистика: Практикум. — Новосибирск, 2001. — Ч. 2. — 105 с.

6. *Бородихин В.М., Ковалевский А.П.* Высшая математика. — Т. 4.2: Теория вероятностей и математическая статистика. — Новосибирск: НГТУ, 2005. — 256 с.

7. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1984. — 248 с.

8. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А.В.* Сборник задач по математической статистике. — М.: Высшая школа, 1989. — 255 с.

9. *Коршунов Д.А., Фосс С.Г., Эйсымонт И.М.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей. — СПб., 2004. — 192 с.

10. *Коршунов Д.А., Чернова Н.И.* Сборник задач и упражнений по математической статистике. — Новосибирск, 2001. — 120 с.

11. *Лотов В.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Новосибирск: НГУ, 2006. — 128 с.

12. *Свешников А.А. и др.* Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. — М., 1970. — 656 с.

13. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1987. — 240 с.

14. *Чернова Н.И.* Теория вероятностей. — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

15. *Чернова Н.И.* Математическая статистика. — Новосибирск: НГУ, 2007. — 148 с.

Источники Интернет

1. *Лотов В.И.* Лекции по теории вероятностей и математической статистике.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/lotov/tv&ms_ff.pdf

2. *Коршунов Д.А., Фосс С.Г.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей.
http://www.math.nsc.ru/LBRT/v1/dima/ExerciseProbability2.pdf

3. *Коршунов Д.А., Чернова Н.И.* Сборник задач и упражнений по математической статистике.
http://www.math.nsc.ru/LBRT/v1/dima/ExerciseStatistics2.pdf

4. *Чернова Н.И.* Лекции по теории вероятностей.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/tv/index.html

5. *Чернова Н.И.* Лекции по математической статистике.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/ms/lec/ms.html

Дополнительная литература

1. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. — М., 1963.

2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. —- М.: Мир, 1976.

3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. — М., 1964.

4. Аркашов Н. С., Борисов И. С. Гауссовская аппроксимация процессов частных сумм скользящих средних // Сиб. мат. журнал, Т. 45, N 6, 2004. — С. 1221–1255.

5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: «Наука», 1977.

6. Вальд А. Последовательный анализ. — М.: «Физматлит», 1960.

7. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ч. 1-2. — М., 1949.

8. Давыдов Ю. А. Принцип инвариантности для стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения. Т. 24, N 3, 1970. — С. 487–498.

9. Дрейпер Н.Р., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. — М.: Диалектика, 2007.

10. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. — М.: Наука, 1986.

11. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

12. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. — М.: Мир, 1968.

13. Карлин С. Основы теории случайных процессов. — М.: Мир, 1971.

14. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. — М.: Мир, 1965.

15. Кашьяп Р. Л., Рао А. Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. — М.: Наука, 1983.

16. *Колмогоров А. Н.* Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные относительно однопараметрической группы движений // Доклады Академии Наук СССР, Т. 26, N 1, 1940. — С. 6–9.

17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М., 1984.

18. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. — М., 1969.

19. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000.

20. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972.

21. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. — М., 1989.

22. Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н. Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез // Автометрия, N 2, 2001. — С. 88–102.

23. Никитин Я. Ю. Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. — М.: «Физматлит», 1995.

24. Никифоров И. В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. — М.: «Наука», 1983.

25. Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. —– М.: Изд-во МГУ, 1988.

26. Питмен Э. Основы теории статистических выводов. — М.: «Мир», 1986.

27. Скороход А. В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. — Киев: Вища школа, 1980.

28. Feller Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. — Москва, "Мир 1967.

29. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. — М.: Мир, 1967.

30. Феддер. Фракталы. — М., 1983.

31. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. — М., 1998.

32. Шрейдер Ю. А., Шаров Н. А. Системы и модели. — М., 1982.

33. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

34. Adler R. J. An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes. Inst. Math. Statist. Lecture Notes — Monograph Series, Vol. 12, Inst. Math. Statist. — Hayward, CA, 1990.

35. D'Agostino R.,Pearson E. S. Tests for departure from normality. Empirical results for the distributions of b^2 and $\sqrt{b^1}$ // Biometrika, Vol. 60, No. 3, 1973. — P. 613–622.

36. Azais J. M. Conditions for convergence of number of crossings to the local time. Application to stable processes with independent increments and to Gaussian processes // Probability and mathematical statistics, Vol. 11, 1990. — P.19–36.

37. Bender C. An Ito formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst parameter // Stochastic Processes and Their Applications, V. 104, 2003. — P. 81–106.

38. Bhattacharyya G. K., Johnson R. A. Nonparametric tests for shift at an unknown time point // Ann. Math. Statist, V. 39, 1968. — P. 1731–1743.

39. Bischoff W. A functional central limit theorem for regression models // Ann. Stat., Vol. 26, N 4, 1998. — P. 1398–1410.

40. Carlstein E. Nonparametric change-point estimation // Ann. of Statist., V. 16, No. 1, 1988. — P. 188–197.

41. Carmona P., Coutin L. Fractional Brownian motion and the Markov property // Elect. Comm. in Probab., V. 3, 1998. — P. 95–107.

42. Chen L., Shapiro S. S. An Alternative Test for Normality Based on Normalized Spacings // J. Statistical Computation and Simulation, Vol.53, No.3–4, 1995. — P. 269–288.

43. Craigmile P. F. Simulating a class of stationary Gaussian processes using the Davies—Harte algorithm, with applications to long memory processes // J. Time Series Analys., Vol. 24, 2003. — P. 505–511.

44. Dahlhaus R. Efficient parameter estimation for self-similar processes // The Annals of Statistics, Vol. 17, No. 4, 1989. — P. 1749–1766.

45. Deitrich C. R., Newsam G. N. Fast and exact simulation of stationary Gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix // SIAM J. Sci. Comput., Vol. 18, 1997. — P. 1088–1107.

46. Dümbgen L. The asymptotic behavior of some nonparametric change-point estimators // The Annals of Statist., V. 19, No. 3, 1991. — P. 1471–1495.

47. Feuerverger A., Hall P., Wood T. A. Estimation of fractal index and fractal dimension of a Gaussian process by counting

the number of level crossings // Journal of time series analysis, Vol. 15, No. 6, 1994. — P. 587–606.

48. Herdan E. Calculus of legomena. — N.- Y., 1964.

49. Hurst H. E., Black R. P., Sinaika Y. M. Long term storage in reservoirs. An experimental study. — London: Constable, 1965.

50. Jennane R., Harba R., Jacquet G. Analysis methods for fractional brownian motion: theory and comparative results // Traitement du Signal. Vol. 13, No. 4, 1996. — P. 289-–302.

51. Kallianpur J., Oodaira H. Freidlin—Wentzell type estimates for abstract Wiener spaces // Sankhy$\overline{a}$, Ser. A, Vol. 40, 1978. — P. 116–137.

52. Konstantopoulos T., Sakhanenko A. Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums. Preprint. — Iztapalapa, 2000.

53. Leland W. E., Taqqu M. S., Willinger W., Wilson D. V. On the self-similar nature of Ethernet traffic (extended version) // IEEE/ACM Trans. Networking, Vol. 2, 1994. — P.1–15.

54. Lu Q.Q. Linear regression under multiple changepoints. — Athens, Georgia, 2004.

55. Lévi P. Processus stochasticques et movement Brownian. — Paris: Gauthier-Villars, 1948.

56. Mackay A. L. The tetrahedron in curved space — a problem // Hyperspace, Vol. 4, No. 1, 2000. — P. 19–22.

57. MacNeill I.B. Limit processes for sequences of partial sums of regression residuals // Annals of probability, Vol. 6, N 4, 1978. — P. 695-–698.

58. Mandelbrot B. B. Long-run linearity, locally Gaussian processes, H-spectra and infinite variances // International Economic Review, V. 10, 1969. — P. 82–113.

59. Mandelbrot B. B. Fractals: Form, Chance, and Dimencion. — San Francisco: Freeman, 1977.

60. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature — San Francisco: Freeman, 1982.

61. Mandelbrot B. B. Comment on Computer Rendering of Fractal Stochastic Models // Communications of the ACM, V. 25, N 8, 1982. — P. 581–583.

62. Mandelbrot B., Van Ness J. Fractional Brownian motions, fractional noise and applications // SIAM Review, Vol. 10, N 4, 1968. — P. 422–437.

63. Mandelbrot B. B., Wallis J. R. Some long-run properties of geophysical records // Water Resources Research, Vol. 5, 1969. — P. 321–340.

64. Mickoch T., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? // Ann. Appl. Prob., V. 12, N 1, 2002. — P. 23–68.

65. Nolan J. P. An algorithm for evaluating stable densities in Zolotarev's (M) parameterization // Math. Comput. Model., Vol. 29, 1999. — P. 229–233.

66. Norros I. On the use of fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks // IEEE J. Select. Areas Commun., V. 13, 1995. — P. 953–962.

67. Norros I., Valkeila E., Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions // Bernoulli, Vol. 5, No. 4, 1999. — P. 571–587.

68. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. Stable Non-Gaussian Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. — New York, London, 1994.

69. Saupe D. Algorithms for random fractals. In: The Science of Fractal Images (Peitgen H.-O., Saupe D., editors). Springer-Verlag, New York, 1988. — P. 71–113.

70. Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D. Fractals for the Classroom, Parts 1–2, Introduction to Fractals and Chaos. — New York: Springer-Verlag, 1992.

71. Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D. Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. — New York: Springer-Verlag, 1992.

72. Shaban S. A. Change-point problem and two-phase regression: An annotated bibliograthy // Internat. Statist. Rev., V. 48, 1980. — P. 83–93.

73. Shapiro S. S., Wilk M. B. An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples) // Biometrika, Vol. 52, No. 3/4, 1965. — P. 591–611.

74. Sperry P. Short course in spherical trigonometry. — Richmond, USA, Johnson Publishing Company, 1928.

75. Voss R. F. Random Fractals: Characterization and Measurement, Scaling Phenomena in Disodered Systems. — New York: Plenum Press, 1985.

76. Wieand H. S. A condition under which the Pitman and Bahadur approaches to efficiency coincide // The Annals of Statist., V.4, No. 5, 1976. — P. 1003–1011.

77. Wiener N. Differential space // Journal Math. and Phys. Vfssachusettt's Inst. of Technology, V. 2, 1923. — P. 131–174.

Алфавитный указатель

Учебное издание

Ковалевский Артем Павлович

СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

Учебное пособие
для студентов физического факультета НГУ