МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет
Кафедра высшей математики ФФ

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.м.н.
_____________ В.Е. Блинов
«15» 03.2023 г.

Рабочая программа дисциплины

ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Направление подготовки: **03.03.01 Прикладные математика и физика**

Форма обучения
Очная

Семестр	**Общий объем**	**Виды учебных занятий (в часах)**				**Промежуточная аттестация (в часах)**				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	144	32	32	8	48	18	4			2
4	144	32	32	8	48	18	4			2
Итого	**288**	**64**	**64**	**16**	**96**	**36**	**8**			**4**
Всего 288 часов / 8 зачётных единиц, из них: - контактная работа 156 часов										
Компетенции ОПК-1										

Ответственный за образовательную программу,
д.ф.-м.н., проф. С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2023

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Учебная дисциплина «Основы функционального анализа» имеет своей целью дать студенту базовые знания по некоторым разделам математического анализа (включая ряды и преобразование Фурье, преобразование Лапласа и обобщённые функции) и теории интегральных уравнений (включая гильбертовы пространства, ортогональные многочлены и теорию операторов в гильбертовых пространствах), необходимые для освоения теоретических основ физических курсов, читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета.

Учебный курс «Основы функционального анализа» читается классическим способом: проводятся потоковые лекции, а также практические занятия по группам, в каждой из которых не более 15-и студентов. Все практические занятия проводятся в интерактивной форме. Самостоятельная работа студентов, усвоение ими материала курса, приобретение ими базовых знаний и умений контролируются еженедельно на приёме заданий, проводимом преподавателем практических занятий в устной форме с каждым студентом индивидуально.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	**ОПК-1.1.** Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК -1.2.** Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Знать**: базовые определения и теоремы разделов о рядах Фурье, преобразованиях Фурье и Лапласа, обобщённых функциях, ортогональных многочленах, гильбертовых пространствах и линейных операторах в них, интегральных уравнениях. **Уметь**: решать конкретные задачи из указанных выше разделов функционального анализа.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

В результате изучения дисциплины «Основы функционального анализа» студенты физического факультета НГУ должны усвоить основы теории рядов Фурье, преобразований Фурье и Лапласа, обобщённых функций, геометрии гильбертовых пространств, ортогональных многочленов, ограниченных линейных операторов в гильбертовых пространствах и интегральных уравнений, а также освоить основные методы решения стандартных задач из этих разделов высшей математики. Кроме того, у студентов должны сформироваться способность применять математические методы для решения физических задач; способность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики; способность приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.
Для успешного освоения дисциплины «Основы функционального анализа» студенты должны обладать предварительными знаниями основ математического анализа, линейной алгебры и обык-

новенных дифференциальных уравнений. В свою очередь учебная дисциплина «Основы функционального анализа» предоставляет студентам теоретические знания и практические навыки, необходимые для изучения дисциплин «Методы математической физики», «Квантовая механика» и «Статистическая физика», изучаемых на третьем курсе физического факультета.

3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	144	32	32	8	48	18	4			2
4	144	32	32	8	48	18	4			2
Итого	**288**	**64**	**64**	**16**	**96**	**36**	**8**			**4**
Всего 288 часов / 8 зачётных единиц, из них: - контактная работа 156 часов										
Компетенции ОПК-1										

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:
- текущий контроль успеваемости: задания для самостоятельного решения;
- промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет 8 зачетных единиц.

- занятия лекционного типа – 64 часа;
- практические занятия – 64 часа;
- прием заданий- 16 часов;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 96 часов;
- промежуточная аттестация (подготовка к сдаче экзамена, консультации и экзамен) – 48 часов.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, консультации, экзамен) составляет 156 часов.

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачётных единиц, 288 академических часов.

Третий семестр

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)						Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы		Сам. работа во время занятий (не включая период сессии	Прием заданий	Сам. работа во время промежуточной аттестации		
				Лекции	Практические занятия					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	**Ряды Фурье:** Разложение 2π-периодических функций в ряд Фурье. Разложение только по синусам или только по косинусам. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом. Комплексная форма ряда Фурье. Равенство Ляпунова. Суммирование числовых рядов с помощью равенства Ляпунова.	1-5	37	10	10	15	2			
2	**Преобразование Фурье:** Представление функции её интегралом Фурье. Разложение на полупрямой.	6-9	30	8	8	12	2			

	Преобразование Фурье и его общие свойства: сдвиг по фазе, сдвиг по аргументу, производная от преобразования Фурье и преобразование Фурье от производной. Нахождение преобразования Фурье конкретных функций. Свёртка. Формула Пуассона.									
3	**Преобразование Лапласа:** Оригиналы и изображения, определение преобразования Лапласа. Нахождение преобразования Лапласа конкретных функций. Теоремы подобия и смещения, дифференцирование и интегрирование изображений и оригиналов. Решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа. Запаздывание и свёртка	10-12	23	6	6	9	2			.

	оригиналов. Теорема Бореля и формула Дюамеля.									
4	**Обобщённые функции:** Основные и обобщенные функции. Сходимость обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций. Применение теоремы о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального оператора. Умножение обобщенных функций на бесконечно дифференцируемые. Линейная и нелинейная замены переменных в обобщённых функциях. Свёртка обобщённых функций. Обобщённые функции медленного роста и преобразование Фурье от них.	13-16	30	8	8	12	2			
5.	Самостоятельная работа в период подготовки к промежуточной аттестации		18					18		

6.	Экзамен		6						4	2
Всего			**144**	**32**	**32**	**46**	**8**	**18**	**4**	**2**

Четвёртый семестр

№ п/п	**Раздел дисциплины**	**Неделя семестра**	**Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)**						**Кон-суль-тации перед экза-меном (часов)**	**Проме-жуточная аттеста-ция (в часах)**
			Всего	Аудиторные часы		Сам. работа во время занятий (не включая период сессии	Прием заданий	Сам. работа во время промежуточной аттестации		
				Лек-ции	Прак-тиче-ские заня-тия					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	**Геометрия пространств со скалярным произведением:** Линейные пространства. Нормированные линейные пространства. Лебеговские функциональные пространства. Линейные пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши – Буняковского в пространстве со скалярным произведением. Норма, порождённая скалярным произведением. Гильбертово пространство. Угол между векторами. Ортогональность векторов.	1-5	37	10	10	17				

	Процесс ортогонализации Грама – Шмидта. Гильбертов базис. Ряд Фурье элемента гильбертова пространства. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тригонометрическая система функций как пример полной ортогональной системы.									
2	**Ортогональные многочлены:** Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов. Общие свойства ортогональных многочленов. Свойства нулей ортогональных многочленов. Классические ортогональные многочлены и их свойства (без доказательства). Многочлены Лежандра: производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности, формула	6-9	30	8	8	12	2			

	Родрига. Разложение функций в ряды по многочленам Лежандра. Мультипольное разложение кулонова потенциала.									
3	**Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах:** Линейные операторы, их общие свойства. Непрерывные и ограниченные операторы. Норма оператора. Сходимость операторов. Обратный оператор. Теорема Неймана. Спектр оператора. Резольвента. Простейшие свойства спектра. Линейные функционалы. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса. Бра-векторы и кет-векторы. Оператор, сопряжённый ограниченному. Ограниченные самосопряжённые операторы. Компактные операторы.	10-13	30	8	8	12	2			.
4	**Интегральные уравнения:** Интегральные уравнения Фредгольма и	14-16	23	6	6	7	4			

	Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих. Интегральный оператор Гильберта – Шмидта. Решение уравнений с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта – Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.									
5.	Самостоятельная работа в период подготовки к промежуточной аттестации		18					18		
6.	Экзамен		6						4	2
Всего			**144**	**32**	**32**	**46**	**8**	**18**	**4**	**2**

Программа и основное содержание лекций (64 часа)

Третий семестр (32 часа)

§1. Ряды Фурье (10 часов)
Понятие ряда Фурье -периодической функции и задача о разложении периодической функции в ряд Фурье. Ряд Фурье функции с произвольным периодом. Разложения только по синусам или только по косинусам. Лемма Римана — Лебега. Ядро Дирихле. Теорема о представимости функции в точке своим рядом Фурье. Разложение функции в ряд Фурье и применение получившегося ряда Фурье к суммированию числового ряда. Комплексная форма ряда Фурье. Теоремы о дифференцировании и интегрировании рядов Фурье. Задача о наилучшем приближении, теорема о наилучшем приближении и неравенство Бесселя для тригонометрических рядов. Равномерная сходимость рядов Фурье. Суммирование рядов Фурье по методу Чезаро — Фейера. Явление Гиббса. Теорема о гладкости функции и скорости сходимости её ряда Фурье. Равенство Ляпунова, обобщённое равенство Ляпунова и равенство Ляпунова в комплексной форме. Применение рядов Фурье к нахождению функции, гармонической в круге, по её значениям на границе. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

§2. Преобразование Фурье (8 часов)
Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье. Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье. Представление функции интегралом Фурье на полупрямой. Прямое и обратное синус- и косинус-преобразования Фурье. Вычисление синус- и косинус-преобразования Фурье функции. Представление функции ее интегралом Фурье и вычисление интегралов Лапласа. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье и формула обращения. Вычисление прямого и обратного преобразования Фурье от функции. Быстро убывающие функции: определение, примеры и основные свойства. Преобразование Фурье быстро убывающих функций: определение и основные свойства. Равенство Парсеваля. Свёртка быстро убывающих функций: определение и свойства. Формула Пуассона. Теорема Котельникова — Шеннона и ее применение в теории цифровой передачи информации. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности.

§3. Преобразование Лапласа (6 часов)
Оригиналы и изображения. Аналитичность изображения. Линейность преобразования Лапласа. Формула обращения. Теорема подобия. Смещение изображения. Преобразование Лапласа производных и интегралов. Дифференцирование и интегрирование изображений. Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Запаздывание оригинала. Свёртка оригиналов. Теорема Бореля об умножении изображений. Формула Дюамеля.

§4. Обобщенные функции (8 часов)
Пространства основных и обобщенных функций. Примеры обобщённых функций: регулярные обобщённые функции. Формулы Сохоцкого. Сходимость обобщённых функций: наводящие соображения и определение. Дельтаобразные последовательности. Теорема о пределе дельтаобразных последовательностей. Плотность тела, вся масса которого сосредоточена в одной точке. Линейная замена переменной в обобщённой функции: наводящие соображения, определение, вычисление выражений. Умножение обобщенных функций на бесконечно дифференцируемые: наводящие соображения, определение, вычисление выражений. Невозможность умножения произвольных обобщенных функций. Нелинейная замена переменной в одномерной дельта-функции. Дифференцирование обобщённых функций: наводящие соображения, определение, примеры. Плотность заряда электрического диполя. Теорема о связи классической и обобщённой производных для кусочно-гладкой функции. Вычисление фундаментального решения трёхмерного оператора Лапласа. Свертка обобщенных функций: наводящие соображения, определение,

свойства, примеры вычисления. Теорема о фундаментальном решении линейного обыкновенного дифференциального оператора. Решение дифференциальных уравнений в пространстве обобщённых функций: как решают неоднородные уравнения, как решают однородные и как удовлетворяют граничным условиям. Простейший вариант теоремы вложения Соболева. Пространство обобщённых функций медленного роста. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста: наводящие соображения, определение, свойства, примеры вычисления.

Четвёртый семестр (32 часа)

§5. Геометрия пространств со скалярным произведением (10 часов)
Линейные пространства: определение, линейная зависимость векторов, размерность пространства, подпространство. Примеры линейных пространств и подпространств. Нормированные линейные пространства: определение нормы, открытые и замкнутые множества, сходимость последовательности, замыкание множества, фундаментальная последовательность, полнота и сепарабельность пространства. Пример незамкнутого подпространства. Лебеговские функциональные пространства: определение и интегральные неравенства Гёльдера и Минковского. Полнота и сепарабель- ность лебеговских пространств, плотность множества гладких функций в них (без доказательства). Линейные пространства со скалярным произведением (евклидовы и унитарные): определение и примеры. Неравенство Коши — Буняковского в пространстве со скалярным произведением. Норма, порождённая скалярным произведением. Непрерывность скалярного произведения по первому аргументу. Равенство параллелограмма. Гильбертово пространство. Угол между векторами. Ортогональность векторов. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Ортогональное проектирование. Задача о наилучшем приближении — проектирование на конечномерные подпространства. Неравенство Бесселя. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму подпространств. Гильбертов базис. Теорема о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Ряд Фурье элемента гильбертова пространства. Равенство Парсеваля. Замкнутость ортонормированной системы. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тригонометрическая система функций как пример полной ортогональной системы. Теорема Рисса — Фишера и теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

§6. Ортогональные многочлены (8 часов)
Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов. Общие свойства ортогональных многочленов. Свойства нулей ортогональных многочленов. Классические ортогональные многочлены и их свойства (без доказательства). Многочлены Лежандра: производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности, формула Родрига. Разложение функций в ряды по многочленам Лежандра. Мультипольное разложение кулонова потенциала. Применение многочленов Лежандра при решении дифференциальных уравнений в частных производных. Поле точечного заряда, помещённого внутри полой проводящей сферы.
Многочлены Эрмита и Лагерра: производящая функция, рекуррентные соотношения, дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности, формула Родрига. Разложение функций в ряды по многочленам Эрмита и Лагерра. Функции Эрмита и Лагерра.

§7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах (8 часов)
Линейные операторы, их общие свойства. Непрерывные и ограниченные операторы. Норма оператора. Сходимость операторов. Обратный оператор. Теорема Неймана. Спектр оператора. Резольвента. Простейшие свойства спектра. Линейные функционалы. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса. Бра-векторы и кет-векторы. Оператор, сопряжённый ограниченному, его простейшие свойства. Применение сопряжённого оператора при нахождении спектра. Ограниченные самосопряжённые операторы: теоремы о спектре, норме и инвариантном подпространстве. Компактные операторы: определения и простейшие свойства. Теорема о дискретности точечного

спектра компактного оператора. Компактные самосопряжённые операторы: теорема о точечном спектре и теорема Гильберта — Шмидта.

§8. Интегральные уравнения (6 часов)
Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта и другие классы интегральных операторов. Решение уравнений с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта — Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.

Программа практических занятий (64 часа)

Третий семестр (32 часа)
1 занятие. — Разложение -периодических функций в ряд Фурье. Разложение только по синусам или только по косинусам.
2 занятие. — Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом. Комплексная форма ряда Фурье.
3 занятие. — Разложение в ряд Фурье функций без вычисления интегралов.
4 занятие. — Равенство Ляпунова. Суммирование числовых рядов с помощью рядов Фурье.
5 занятие. — Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов Фурье.
6 занятие. — Представление функции её интегралом Фурье. Разложение на полупрямой.
7 занятие. — Общие свойства преобразования Фурье: сдвиг по фазе, сдвиг по аргументу, производная от преобразования Фурье и преобразование Фурье от производной.
8 занятие. — Нахождение преобразования Фурье конкретных функций.
9 занятие. — Свёртка. Формула Пуассона. Применение преобразования Фурье к решению уравнения Лапласа в полуплоскости.
10 занятие. — Преобразование Лапласа: оригиналы и изображения. Теоремы подобия и смещения, дифференцирование и интегрирование изображений и оригиналов.
11 занятие. — Решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
12 занятие. — Запаздывание и свёртка оригиналов. Теорема Бореля и формула Дюамеля. Решение интегральных уравнений.
13 занятие. — Основные и обобщённые функции. Сходимость обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций.
14 занятие. — Применение теоремы о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального оператора и нахождение фундаментального решения двумерного оператора Лапласа и/или оператора.
15 занятие. — Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые. Линейная и нелинейная замены переменных в обобщённых функциях. Свёртка обобщённых функций.
16 занятие. — Обобщённые функции медленного роста и преобразование Фурье от них.

Четвёртый семестр (32 часа)
1 занятие. — Простейшие свойства сходимости в гильбертовом пространстве: всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, ограничена и имеет не более одного предела; всякое конечномерное подпространство замкнуто. Парадоксальные свойства бесконечномерных гильбертовых пространств: существование незамкнутых подпространств и возможность поместить бесконечно много попарно непересекающихся шаров фиксированного радиуса в единичный шар.
2 занятие. — Поляризационные тождества. Вычисление углов в гильбертовом пространстве. Вычисление суммы внутренних углов произвольного треугольника. Кривая Винера. Равенство параллелограмма.

3 занятие. — Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Полные ортонормированные системы, состоящие из многочленов, ступенчатых функций и тригонометрических функций.
4 занятие. — Нахождение ортогонального дополнения к подпространству. Изоморфизм гильбертовых пространств.
5 занятие. — Общие свойства ортогональных многочленов.
6 занятие. — Многочлены Эрмита: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул и соотношений ортогональности.
7 занятие. — Многочлены Эрмита: вывод и использование дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Эрмита.
8 занятие. — Многочлены Лагерра: производящая функция; вывод и использование рекуррентных формул, соотношений ортогональности и дифференциального уравнения; разложение функций в ряды по многочленам Лагерра.
9 занятие. — Многочлены Лежандра: применение производящей функции, рекуррентных формул и соотношений ортогональности; разложение функций в ряды по многочленам Лежандра.
10 занятие. — Линейные функционалы.
11 занятие. — Вычисление нормы ограниченного оператора и оператора, обратного к данному.
12 занятие. — Спектр и резольвента ограниченного оператора.
13 занятие. — Бра-векторы и кет-векторы. Компактные операторы.
14 занятие. — Сведение дифференциальных уравнений к интегральным и наоборот. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.
15 занятие. — Альтернатива Фредгольма. Повторные ядра и резольвента интегрального уравнения.
16 занятие. — Собственные значения и собственные функции интегральных уравнений с симметричным ядром. Решение неоднородных уравнений Фредгольма с симметричным ядром.

Самостоятельная работа студентов (132 часов)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям.	37
Изучение теоретического материала, не освещаемого на лекциях	20
Подготовка к контрольным работам	20
Подготовка к сдаче заданий	19
Подготовка к экзамену	36

5. Перечень учебной литературы.

1. Абашеева Н. Л. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2007.
2. Александров В. А. Ряды Фурье: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
3. Александров В. А. Преобразование Фурье: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2002.
4. Александров В. А. Преобразование Лапласа: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 1992.
5. Александров В. А. Обобщённые функции: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2005.
6. Александров В. А. Геометрия пространств со скалярным произведением: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1995.
7. Александров В. А. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
8. Александров В. А. Ортогональные многочлены: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
9. Александров В. А., Колесников Е. В. Интегральные уравнения: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
10. Подвигин И. В. Гильбертово пространство в примерах и задачах. Новосибирск: НГУ, 2012.

11. Бельхеева Р. К. Ряды Фурье в примерах и задачах. Новосибирск: НГУ, 2011.
12. Бельхеева Р. К. Преобразование Фурье в примерах и задачах. Новосибирск: НГУ, 2014.
13. Бельхеева Р. К. Обобщённые функции в примерах и задачах. Новосибирск: НГУ, 2014.
14. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
15. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1982.

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

16. Н. Л. Абашеева, Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах, НГУ, 2007.
17. В. А. Александров, Преобразование Фурье, НГУ, 2002.
18. В. А. Александров, Обобщенные функции, НГУ, 2005.
19. В. А. Александров, Ортогональные многочлены, НГУ, 1993.
20. В. А. Александров, Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах, НГУ, 1996.
21. В. А. Александров, Е. В. Колесников, Интегральные уравнения, НГУ, 1993.
22. Р. К. Бельхеева, Ряды Фурье в примерах и задачах, НГУ, 2011.
23. Р. К. Бельхеева, Преобразование Фурье в примерах и задачах, НГУ, 2014.
24. Р. К. Бельхеева, Обобщенные функции в примерах и задачах, НГУ, 2014.
25. И. В. Подвигин, Гильбертово пространство в примерах и задачах, НГУ, 2012.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.1 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

7.2. Информационные справочные системы

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.
2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.1 Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль

(1) В течение семестра каждый студент должен сдать в устной форме все задачи из заданий. Каждой задаче соответствует максимальное количество баллов и срок, до которого эти баллы можно получить. За каждую задачу, полностью сданную в срок, студент получает определённое количество баллов. За задачу, сданную (полностью или частично) после установленного срока, студент получает ноль баллов.

(2) В конце семестра преподаватель оценивает работу каждого студента из своей группы и добавляет ему от 0 до 50 баллов в зависимости от того, насколько активно студент решал задачи у доски, делал домашние задания и т. п.

(3) Сумма баллов, начисленных студенту в соответствии с пунктами (1) и (2) называется «баллами за работу в семестре». Она сообщается всем студентам до проведения консультации, предшествующей промежуточной аттестации (проходящей в форме устного экзамена) и учитывается при выставлении оценки за экзамен.

Промежуточная аттестация

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем.

Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене. Он проводится в конце семестра.

Экзаменационный билет содержат три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий». Для ответа на этот вопрос даётся не более 30 минут. Если студент не справляется с этим за отведенное время, то он получает оценку «неудовлетворительно».

Если студент сдал все задачи из заданий, то, вытянув билет, он пропускает первый вопрос «Сдача задач из заданий» и получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам билета. Это теоретические вопросы (в частности, они не содержат задач) по программе лекций курса «Основы функционального анализа».

Ответ на второй и третий вопросы билета оценивается по пятибалльной системе: «отлично» ставится за полный и правильный ответ как на вопрос билета, так и на сопутствующие вопросы преподавателя; «хорошо» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из данного вопроса билета и объяснение основных идей доказательства (при этом допускается, что доказательство не доведено до конца); «удовлетворительно» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из билета (при этом допускается, что о доказательстве не сказано ничего); «неудовлетворительно» ставится за незнание хоть одной из теорем или хоть одного из важных (т.е. многократно используемых в курсе) определений.

Если хотя бы за один из вопросов билета получена оценка «неудовлетворительно», то экзамен прекращается, а студент идёт на пересдачу. Положительные оценки, полученные за ответ на второй и третий вопросы билета, конвертируются в баллы следующим образом: «отлично» — 200 баллов; «хорошо» — 100 баллов, «удовлетворительно» — ноль баллов.

Ответив на вопросы билета, студент должен побеседовать с преподавателем на одну из тем, не вошедших в билет. Имеется ввиду выяснить насколько свободно студент владеет изученным материалом. Речь идёт только о формулировках теорем и определениях. В этот момент доказательства теорем уже не спрашивают. По результатам этой беседы никаких оценок не ставится и баллы не начисляются. Но для тех студентов, кто не может поддерживать разговор в таком формате экзамен прекращается, а в ведомость ставится оценка «неудовлетворительно». В случае необходимости преподаватель может заменить дополнительный вопрос задачей.

После того, как студент ответил на все вопросы билета и побеседовал с преподавателем на тему, не входящую в билет, все заработанные им баллы суммируются (т.е. складываются баллы за ответы на второй и третий вопросы с баллами за работу в семестре). Итоговая оценка определяется следующим образом: «отлично» — если сумма баллов не меньше 500; «хорошо» — если сумма баллов от 300 до 499; «удовлетворительно» — если сумма баллов от 100 до 299; «неудовлетворительно» — если сумма баллов менее 100.

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	Результат обучения по дисциплине	Оценочные средства
ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Знать**: базовые определения и теоремы разделов о рядах Фурье, преобразованиях Фурье и Лапласа, обобщённых функциях, ортогональных многочленах, гильбертовых пространствах и линейных операторах в них, интегральных уравнениях.	Опрос Контрольная работа Экзамен.

ОПК -1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Уметь**: решать конкретные задачи из указанных выше разделов функционального анализа.	Опрос Контрольная работа Экзамен.

10.2 Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Основы функционального анализа».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК 1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/ несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК 1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.

Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения в третьем семестре:

Задание 1
Ряды Фурье

1. Нарисуйте график и найдите ряд Фурье следующей функции, предполагая, что она имеет период 2π: $f(x) = 1$, если $-\pi/2 < x < \pi/2$и $f(x) = 0$, если $\pi/2 < x < 3\pi/2$.

2. Разложите в ряд Фурье по косинусам функцию, заданную в интервале $0 < x < \pi$ формулой $f(x) = sin(x)$. Нарисуйте график суммы полученного ряда Фурье.

3. Как следует продолжить интегрируемую функцию $f: (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ до 2π-периодической функции, чтобы ряд Фурье последней имел вид $\sum_{k=0}^{\infty} b_k\, sin(2k)$?

4. Разложите функцию $f(x) = sin(\pi x/2)$ в ряд Фурье на промежутке $[-1,1]$.

5. Разложите в ряд Фурье в комплексной форме 2π-периодическую функцию, заданную в интервале $-\pi < x < \pi$ формулой $f(x) = e^{-x}$.

6. Пусть $S(x)$обозначает сумму ряда Фурье, полученного в предыдущей задаче, вычисленную в точке x. Найдите $S(\pi)$. Ответ обоснуйте.

7. Представьте функцию $ln(1 - 2acos(x) + a^2)$ в виде комплексного, а затем в виде вещественного ряда Фурье. Здесь a вещественный параметр такой, что$|a| < 1$.

8. Напишите равенство Ляпунова для функции $f(x) = cos(ax)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

9. Пусть кусочно-гладкая функция f непрерывна в промежутке $[0, \pi]$. Докажите, что при выполнении условия $\int_0^{\pi}[f(x)]^2\, dx = 0$ имеет место неравенство $\int_0^{\pi}[f(x)]^2\, dx \leqslant \int_0^{\pi}[f'(x)]^2\, dx$, называемое неравенством Стеклова. Объясните почему неравенство Стеклова превращается в равенство лишь для функций вида $f(x) = Acosx$, где A – произвольное вещественное число.

Задание 2
Преобразование Фурье

10. Докажите, что интеграл $\int_0^{\infty} \frac{cos(\pi y/2)}{1-y^2} cos(yx)dy$ равен $(\pi/2)cosx$, если $|x| \leqslant \pi/2$ и равен 0, если$|x| > \pi/2$.

11. Пусть $f\ (x) = x$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $f(x) = 0$, если $x > 1$. Представьте эту функцию интегралом Фурье, продолжив её чётным образом на интервал $(-\infty, 0)$.

12. Представьте интегралом Фурье функцию из предыдущей задачи, продолжив её нечётным образом на интервал $(-\infty, 0)$.

13. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ и её первая производная непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Докажите, равенство $\frac{df}{dx}(y) = (iy)\hat{f(x)}(y)$ т.е. докажите, что преобразование Фурье переводит (с точностью до числового множителя) операцию дифференциро- вания в операцию умножения на независимую переменную.

14. Пусть$f(x) = x^2$, если $|x| < 1$ и $f(x) = 0$, если $x > 1$. Найдите прямое и обратное преобразования Фурье этой функции.

15. Найдите прямое и обратное преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-x^2/2}e^{iax}$, где a — произвольное вещественное число.

16. Вычислите свёртку $e^{-|x|} * e^{-|x|}$.

17. С помощью формулы Пуассона докажите следующее соотношение, называемое θ- формулой и играющее важную роль в теории эллиптических функций и теории Теплопроводности $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/t}$. Здесь $t > 0$ — вещественный параметр.

18. Рассмотрим быстро убывающую функцию $\varphi(x)$вещественной переменной x и её преобразование Фурье $\psi(p)$, которое, как вы знаете, тоже быстро убывает с ростом модуля p. Будем считать, что функции $\varphi(x)$и $\psi(p)$имеют одинаковую L_2-норму; более того, будем считать, что она равна единице, т.е. допустим, что $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(p)|^2\, dp = 1$. В таком случае мы вправе считать функции $|\varphi(x)^2|$ и $|\psi(p)^2|$ плотностями распределения вероятностей случайных величин x и p. В курсе квантовой механики будет показано, что эти случайные величины, в свою очередь, можно интерпретировать, как координату и импульс «одномерной» квантовой частицы.

Интегралы $x_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\varphi(x)|^2 dx$ и $p_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} p\,|\psi(p)|^2 dp$ имеют смысл средних значений случайных величин x и pпри заданных их распределениях, а степень «разброса» этих величин около их средних значений характеризуют их среднеквадратические отклонения – положительные числа $\sigma(\varphi)$ и $\sigma(\psi)$, определяемые равенствами $\sigma^2(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-x_0)^2\,|\varphi(x)|^2 dx$ и $\sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}(p-p_0)^2\,|\psi(p)|^2 dp$.

Ваша задача - доказать одно из самых красивых и удивительных неравенств, какие можно встретить в математике и которое было открыто физиком: $\sigma(\varphi)\sigma(\psi) \geqslant 1/2$. Это неравенство представляет собой строгое математическое выражение знаменитого принципа неопределённости Гейзенберга, согласно которому нельзя одновременно измерить и координату, и импульс квантовой частицы — уточняя одно, мы непременно теряем информацию о другом.

Доказательство проведите по следующей схеме. Наряду с функциями $\varphi(x)$и $\psi(p)$рассмотрим ещё одну пару функций $\Phi(x) = e^{-ip_0(x+x_0/2)}\varphi(x+x_0)$ и $\Psi(p) = e^{ix_0(p+p_0/2)}\psi(p+p_0)$. Иногда говорят, что $\Phi(x)$и $\Psi(p)$ получены из $\varphi(x)$и $\psi(p)$«сдвигом и нормировкой». Далее действуйте так:

(а) Покажите, что $\Psi(p)$ служит преобразованием Фурье функции $\Phi(x)$.

(б) Докажите, что новые функции имеют те же L_2-нормы, что и прежние, т. е. докажите, что $\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(p)|^2\,dp = 1$.

(в) Докажите, что относительно новых функций средние значения случайных величин x и p равны нулю, т. е. докажите, что $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\Phi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p\,|\Psi(p)|^2 dp = 0$.

(г) Убедитесь, что произведённые нами «сдвиг и нормировка» распределений случайных величин x и p не меняют их дисперсий, т. е. докажите, что $\sigma^2(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,|\Phi(x)|^2 dx$и $\sigma^2(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2\,|\Psi(p)|^2 dp$.

(д) Опираясь на равенство Парсеваля, а также на связь, которую преобразование Фурье устанавливает между дифференцированием и умножением на аргумент, докажите, что для каждого вещественного t справедливо равенство $\int_{-\infty}^{+\infty}|tx\Phi(x) + \Phi'(x)|^2\,dx = t^2\sigma^2(\varphi) - t + \sigma^2(\psi)$.

(е) Воспользуйтесь тем, что вещественный квадратный многочлен $t^2\sigma^2(\varphi) - t + \sigma^2(\psi)$ неотрицателен.

Задание 3
Преобразование Лапласа

19. Пусть $a > -1$ является вещественным числом. Выясните, является ли функция $f(t) = t^a$ оригиналом. Если является, то найдите её показатель роста.

20. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой подобия, найдите преобразование Лапласа от функции $f(t) = cos^2(2t)$. Укажите область определения найденного изображения.

21. Дано изображение $F(p) = \frac{1}{p^2}\frac{p-2}{p^2+4}$. Используя теорему об интегрировании оригинала, найдите соответствующий оригинал $f(t)$.

22. Используя преобразование Лапласа, решите начальную задачу для дифференциального уравнения $y''(t) - 2y'(t)5y(t) = 8sint - 4cost,\ y(0) = 1, y'(0) = 3$.

Обобщённые функции

23. Трактуя несобственный интеграл как предел соответствующих собственных интегралов, вычисленный в пространстве обобщённых функций $D'(\mathbb{R})$, докажите равенство $\int_0^{+\infty} cos\,(2xy)dy = \frac{\pi}{2}\delta(x)$.

24. Найдите все производные от функции $f(x) = x^2 H(x)$, где $H(x)$ – функция Хевисайда.

25. Используя теорему о фундаментальном решении дифференциального оператора, найдите фундаментальное решение оператора $\frac{d}{dx} - 2$.

26. Используя операцию свёртки и фундаментальное решение, полученное в предыдущей задаче, найдите частное решение дифференциального уравнения $y'(x) - 2y(x) = x$.

27. Найдите преобразование Фурье регулярной обобщённой функции медленного роста, заданной формулой $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Перечень заданий для проведения текущего контроля успеваемости обучающихся в четвёртом семестре:

Задание 4
Геометрия пространств со скалярным произведением

1. Докажите, что любом в унитарном пространстве справедливо так называемое поляризационное тождество $(x,y) = \frac{1}{4}\left[\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)\right]$.
2. Докажите, что в пространстве $L_p[a,b]$ можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства, если и только если $p = 2$. Напомним, что пространство $L_p[a,b]$ определено для всех $p \ge 1$ и состоит из функций $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, для которых интеграл $\int_a^b |f(t)|^p dt$ сходится. При этом, по определению полагают $\|f\|_{L_p[a,b]} = \left\{\int_a^b |f(t)|^p dt\right\}^{1/p}$.
3. Найдите углы треугольника, образованного векторами $f_1(t) = 0,\ f_2(t) = t,\ f_3(t) = t^2$ в евклидовом пространстве $L_2[-1,1]$.
4. Пусть L обозначает подпространство пространства $L_2[-1,1]$, натянутое на функции $f_1(t) = 0,\ f_2(t) = t,\ f_3(t) = t^2$. Найдите ортогональную проекцию функции $g(t) = e^{-t}$ на L.
5. В пространстве $L_2[-1,1]$ найдите ортогональное дополнение к подпространству S, состоящему из функций $f(t)$, равных нулю при $-1 \le t \le 1/2$.
6. Убедитесь, что система функций $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \ldots$ является ортонормированной в $L_2[-\pi,\pi]$, но не является базисом этого пространства.

Ортогональные многочлены

7. Как известно, многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ ортогональны на промежутке $(-1,1)$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Для каждого $n = 0,1,2,\ldots$докажите, что
   a) функция $\cos(n \arccos x)$ является многочленом степени n и
   b) многочлен $T_n(x)$ пропорционален $\cos(n \arccos x)$, т.е. докажите равенство $T_n(x) = C_n \cos(n \arccos x)$, где C_n – некоторая постоянная.

8. Существуют ли промежуток (a,b) и вес $h:(a,b)\to\mathbb{R}$ такие, что последовательность мономов $1,x,\dots,x^n,\dots$ является последовательностью ортогональных многочленов на промежутке (a,b) с весом h?

9. Докажите, что $H_{2n}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n)!}{n!}$ для всех $n=0,1,2,\dots$. Здесь $H_n(x)$ – n-й многочлен Эрмита, стандартизованный с помощью производящей функции, т.е. $H_n(x)$ определяется как коэффициент в разложении $e^{2xt-t^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{H_n(x)}{n!}t^n$.

Задание 5

10. Докажите, что если n чётно, то $H_n(x)$ является чётной функцией от x, а если n нечётно, то – нечётной.

11. Вычислите интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}xH_n(x)H_{n+1}(x)dx$.

12. Разложите в ряд по многочленам Эрмита функцию $\sin 2x$. Обоснуйте сходимость полученного ряда.

13. Вычислите интеграл $\int_{0}^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha+1}\left[L_n^{\alpha}(x)\right]^2dx$. Здесь $L_n^{\alpha}(x)$ – n-й многочлен Лагерра, стандартизованный с помощью производящей функции, т.е. $L_n^{\alpha}(x)$ – это коэффициент тейлоровского разложения по переменной t с центром в нуле производящей функции многочленов Лагерра: $w(x,t,\alpha)=\dfrac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n$.

14. Вычислите интеграл $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\left[P_n'(x)\right]^2dx$, где $P_n(x)$ – n-й многочлен Лежандра, стандартизованный с помощью производящей функции.

Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

В задачах 15–21 $M_a:\ell_2\to\ell_2$ обозначает «диагональный» линейный оператор, действующий по правилу: $M_a:(x_1,x_2,x_3,\dots)\to(a_1x_1,a_2x_2,a_3x_3,\dots)$, где $a=(a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)$ – фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

15. Докажите, что оператор M_a непрерывен и найдите его норму.

16. Выясните является ли оператор M_a обратимым и если является, то найдите M_a^{-1}.

17. Опишите сопряжённый к M_a оператор и выясните, когда оператор M_a самосопряжён. Выясните, когда оператор M_a унитарен.

18. Найдите точечный спектр оператора M_a.

19. Найдите непрерывный спектр оператора M_a.

20. Найдите остаточный спектр оператора M_a.

21. В каком из двух случаев оператор M_a компактен: если $a_n=\sin(\pi n/2)$ или если $a_n=(-1)^n n^{-1}$?

22. Покажите, что, используя «бра» и «кет» обозначения, оператор проектирования P на подпространство, натянутое на единичный вектор x, можно задать формулой $P = |x\rangle\langle x|$.

Задание 6

23. Докажите, что для любых самосопряжённых ограниченных операторов $A: H \to H$ и $B: H \to H$ справедливо неравенство $\frac{1}{2}\left|\left(\left[A, B\right]x, x\right)\right| \le \|Ax\| \cdot \|Bx\|$, где $\left[A, B\right] = AB - BA$ – коммутатор операторов A и B.

Отметим на будущее, что в квантовой механике вводят обозначение $\langle A \rangle_x = \left(Ax, x\right)$, переписывают предыдущее неравенство в виде $\langle A^2 \rangle_x \langle B^2 \rangle_x \ge \langle [A, B] \rangle_x^2$ и интерпретируют его как принцип неопределённости Гейзенберга. Докажите последнее неравенство. (Для полноты отметим, что наиболее интересные с точки зрения квантовой механики операторы не являются ограниченными, так что пока вы доказали лишь частный случай принципа неопределённости Гейзенберга.)

Интегральные уравнения

24. Составьте интегральное уравнение, отвечающее задаче Коши $x'''(t) + tx(t) = e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

25. Решите интегральное уравнение $x(t) = 5\sin t + 3 - 4\int_0^t (t - s)x(s)dx$, сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению.

26. Найдите все решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром $x(t) - \int_{-1}^{1} (ts + \mu)x(s)ds = \cos 2\pi t$. Рассмотрите все возможные значения параметра μ.

27. Пусть $Ax(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$, где $K(t, s) = (t + 1)s$, если $0 \le t \le s$ и $K(t, s) = (s + 1)t$, если $0 \le s \le t$. Найдите характеристические значения и собственные функции интегрального уравнения $x(t) - \mu Ax(t) = 0$, сведя его к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

Перечень вопросов, включённых в экзаменационные билеты по «Основам функционального анализа» в осеннем семестре:

§1. Ряды Фурье

1.1. Понятие о ряде Фурье 2π-периодической функции и задача о разложении функции в ряд Фурье.
1.2. Ряд Фурье функции с произвольным периодом.
1.3. Разложение в ряд Фурье только по синусам или только по косинусам.
1.4. Лемма Римана-Лебега для конечного промежутка: формулировка, объяснение «на пальцах», строгое доказательство для непрерывно дифференцируемых функций и идея доказательства в общем случае.
1.5. Ядро Дирихле: вывод формулы для ядра Дирихле и доказательство его свойств.
1.6. Теорема о представимости функции в точке её рядом Фурье: формулировка и доказательство.

1.7. Примеры разложения функции в ряд Фурье и суммирования числового ряда с помощью ряда Фурье.
1.8. Ряд Фурье в комплексной форме.
1.9. Разложение функции в комплексный и вещественный ряд Фурье без вычисления интегралов.
1.10. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании рядов Фурье.
1.11. Задача о наилучшем приближении и неравенство Бесселя.
1.12. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье: формулировка и доказательство.
1.13. Явление Гиббса (без доказательства).
1.14. Равенство Ляпунова (в том числе обобщённое равенство Ляпунова и равенство Ляпунова в комплексной форме): формулировка и доказательство.
1.15. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами: формулировки и идеи доказательства.

§2. Преобразование Фурье

2.1. Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.
2.2. Теорема о представимости функции в точке её интегралом Фурье: формулировка и доказательство.
2.3. Разложение на полупрямой. Прямое и обратное синус- и косинус-преобразование Фурье.
2.4. Примеры вычисления синус- и косинус-преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-ax}$ и представления этой функции её интегралом Фурье на полупрямой. Вычисление интегралов Лапласа.
2.5. Комплексная форма интеграла Фурье. Прямое и обратное преобразования Фурье. Формула обращения.
2.6. Пример вычисления преобразования Фурье: найти преобразование Фурье от функции $f(x) = e^{-ax^2}$.
2.7. Быстро убывающие функции: определения, примеры и свойства.
2.8. Преобразование Фурье быстро убывающих функций: определение и свойства.
2.9. Равенство Парсеваля: формулировка и доказательство.
2.10. Дальнейшие свойства быстро убывающих функций: свёртка быстро убывающих функций (дать определение, сформулировать шесть свойств, доказать формулу для преобразования Фурье от свёртки), формула Пуассона (без доказательства), теорема Котельникова – Шеннона (без доказательства).

§3. Преобразование Лапласа

3.1. Определение и простейшие свойства преобразования Лапласа: линейность, теорема смещения и теорема о дифференцировании оригинала, теорема подобия – формулировки и доказательства.
3.2. Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
3.3. Дальнейшие свойства преобразования Лапласа: аналитичность изображения (сформулировать и объяснить идею доказательства) и формула обращения (сформулировать и доказать).
3.4. Свёртка оригиналов: определение, теорема Бореля об умножении изображений и формула Дюамеля – формулировки и доказательства.

§4. Обобщённые функции

4.1. Пространства основных и обобщённых функций: определение и примеры основных функций, сходимость основных функций, определение обобщённой функции, примеры обобщённых функций. Формулы Сохоцкого – формулировка и доказательство.
4.2. Сходимость обобщённых функций. Дельтаобразная последовательность. Формулировка и доказательство теоремы о пределе дельтаобразной последовательности. Плотность распределения массы тела, имеющего единичную массу, сосредоточенную в одной точке.

4.3. Замена переменной в обобщённой функции: линейная замена переменной для произвольной обобщённой функции (наводящие соображения, определение и примеры) и нелинейная замена переменной в одномерной дельта-функции. Формулировка и доказательство теоремы о нелинейной замене переменной в одномерной дельта-функции.
4.4. Умножение обобщённых функций: наводящие соображения, определение умножения на бесконечно дифференцируемую функцию, примеры вычисления произведений, а также пример, показывающий невозможность распространения операции умножения на произвольные обобщённые функции.
4.5. Дифференцирование обобщённых функций. Формулировка и доказательство теоремы о связи классической и обобщённой производных. Плотность распределения заряда электрического диполя.
4.6. Вычисление фундаментального решения трёхмерного оператора Лапласа. Определение фундаментального решения линейного дифференциального оператора.
4.7. Свёртка обобщённых функций: определение и четыре свойства (доказать только свойство о свёртке с дельта-функцией). Формулировка и доказательство теоремы об использовании свёртки для нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Пример, показывающий, что свёртка не ассоциативна.
4.8. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста: дать определение, сформулировать шесть свойств, доказать только формулу для вычисления преобразования Фурье от произведения обобщённой функции на моном.

Перечень вопросов, включённых в экзаменационные билеты по «Основам функционального анализа» в весеннем семестре:

§5. Геометрия пространств со скалярным произведением

5.1. Линейные пространства: определение и примеры. Определения и примеры следующих понятий: линейно зависимые векторы, размерность пространства, подпространство.
5.2. Нормированные линейные пространства: дать определение фундаментальной последовательности. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Привести пример, что обратное не всегда верно. Дать определение полного нормированного пространства. Дать определение лебеговского функционального пространства $L_p(D)$. Привести свойства лебеговских функциональных пространств (без доказательства).
5.3. Линейные пространства со скалярным произведением: дать определение пространства со скалярных произведением и привести примеры таких пространств. Сформулировать и доказать неравенство Коши – Буняковского. Доказать, что формула $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ задаёт норму в линейном пространстве со скалярным произведением. Доказать, что скалярное произведение непрерывно по первому аргументу. Сформулировать и доказать равенство параллелограмма. Дать определение и привести примеры гильбертовых пространств.
5.4. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта: дать определение ортогональных векторов. Сформулировать и доказать теорему о процессе ортогонализации Грама – Шмидта. Дать определение угла между векторами.
5.5. Приближение векторами подпространства и ортогональное проектирование: Дать определение вектора наилучшего приближения. Сформулировать и доказать лемму о существовании и единственности вектора наилучшего приближения. Дать определение ортогональной проекции вектора на подпространство. Сформулировать и доказать лемму об эквивалентности понятий «ортогональная проекция» и «вектор наилучшего приближения». Дать определение ортогонального дополнения к подпространству и прямой суммы подпространств. Сформулировать и доказать лемму о разложении гильбертова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

5.6. Проектирование на конечномерное подпространство и неравенство Бесселя: Сформулировать и доказать теорему о проекции на конечномерное подпространство. Дать определение коэффициента Фурье и ряда Фурье вектора из гильбертова пространства. Сформулировать и доказать неравенство Бесселя.
5.7. Полнота ортонормированной системы. Равенство Парсеваля. Замкнутые ортонормированные системы. Гильбертов базис: дать определение полной системы. Сформулировать и доказать равенство Парсеваля. Дать определение замкнутой системы и гильбертова базиса. Сформулировать теорему о существовании гильбертова базиса (без доказательства).
5.8. Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств: сформулировать и доказать теорему Рисса-Фишера о существовании и единственности вектора с заданными коэффициентами Фурье. Дать определение изоморфности гильбертовых пространств. Сформулировать и доказать теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
5.9. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве: Сформулировать и доказать соответствующую теорему.
5.10. Тригонометрическая система функций как пример полной ортонормированной системы в $L_2[-\pi,\pi]$.

§6. Ортогональные многочлены.

6.1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов: Дать определение весовой функции и весового пространства Лебега. Сформулировать и доказать лемму о том, что весовое пространство Лебега является гильбертовым пространством. Дать определение последовательности ортогональных многочленов. Пояснить как они получаются из последовательности мономов.
6.2. Общие свойства ортогональных многочленов: Сформулировать и доказать пять свойств ортогональных многочленов, включая трёхчленную рекуррентную формулу.
6.3. Свойства нулей ортогональных многочленов: Сформулировать пять свойств нулей ортогональных многочленов. Доказать первые четыре свойства (т.е. не доказывать, что нули чередуются).
6.4. Классические ортогональные многочлены: Дать определение семи классических ортогональных многочленов. Дать определение стандартизации ортогональных многочленов. Привести примеры стандартизаций. Дать определение производящей функции. Сформулировать (без доказательства) утверждение о том, что классические ортогональные многочлены соответствуют весовым функциям, удовлетворяющим уравнению Пирсона. Сформулировать (без доказательства) теоремы о свойствах классических ортогональных многочленов.
6.5. Многочлены Лежандра: Производящая функция и рекуррентные соотношения: Дать определение многочленов Лежандра $P_n(x)$, стандартизованных с помощью производящей функции. Вывести трёхчленную рекуррентную формулу. Доказать, что так определённые $P_n(x)$ действительно являются многочленами степени n с положительными старшими коэффициентами. Доказать вторую рекуррентную формулу для $P_n(x)$.
6.6. Многочлены Лежандра: Дифференциальное уравнение и соотношения ортогональности: Вывести дифференциальное уравнение и соотношения ортогональности для $P_n(x)$. **6.7.** Формула Родрига. Теорема о представимости функции в точке её рядом по многочленам Лежандра: Сформулировать без доказательства обе эти теоремы. Для формулы Родрига привести идею доказательства. Для теоремы о представимости пояснить почему она «почти очевидна».
6.8. Мультипольное разложение кулонова потенциала.

§7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

7.1. Линейные операторы и их общие свойства: Дать определение линейного оператора. Привести примеры линейных операторов. Сформулировать и доказать, что линейная комбинация и суперпозиция линейных операторов снова являются линейными операторами. **7.2.** Непрерывные и ограниченные операторы: Дать определение непрерывного оператора, ограниченного множества и ограниченного оператора. Сформулировать и доказать теорему об эквивалентности четырёх условий, два из которых «оператор непрерывен» и «оператор ограничен».
7.3. Норма оператора: Сформулировать и доказать лемму о трёх выражениях, задающих норму оператора. Дать определение нормы оператора. Сформулировать и доказать теорему о шести свойствах нормы оператора. Привести пример оценивания нормы конечномерного оператора. Сделать отсюда вывод, что всякий конечномерный оператор ограничен.
7.4. Сходимость операторов и операторные ряды: Дать определение сходящейся последовательности операторов. Сформулировать и доказать два свойства сходящихся последовательностей операторов. Сформулировать (без доказательства) теорему о полноте пространства операторов. Дать определение операторного ряда и его суммы. Сформулировать и доказать два свойства сходящихся операторных рядов.
7.5. Обратимость операторов и обратный оператор: Дать определение обратимого оператора и образа оператора. Доказать, что образ оператора является подпространством. Дать определение обратного оператора. Сформулировать и доказать четыре свойства обратного оператора.
7.6. Теорема Неймана: Сформулировать и доказать теорему Неймана.
7.7. Спектр оператора и его простейшие свойства: Дать определение резольвентного множества $\rho(\mathrm{A})$, спектра $\sigma(\mathrm{A})$, точечного спектра $\sigma_p(A)$, непрерывного спектра $\sigma_c(A)$ и остаточного спектра $\sigma_r(A)$ ограниченного оператора *A*. Сформулировать и доказать три свойства спектра оператора.
7.8. Линейные функционалы: Дать определение и привести пример линейного функционала. Дать определение ядра линейного функционала. Сформулировать и доказать четыре свойства линейных функционалов, связанных с понятием ядра.
7.9. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса: Дать определение сопряжённого пространства. Сформулировать и доказать теорему Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала.
7.10. Бра- и кет-векторы: Дать определение бра- и кет-векторов. Привести примеры разложения тождественного оператора и резольвентного оператора с использованием бра- и кет- обозначений.
7.11. Оператор, сопряжённый к ограниченному: Дать определение оператора, сопряжённого к данному. Привести пример вычисления оператора, сопряжённого к конечномерному. Сформулировать и доказать пять свойств сопряжённого оператора.
7.12. Применение сопряжённого оператора к нахождению спектра: Сформулировать и доказать теорему о применении сопряжённого оператора к нахождению спектра.
7.13. Ограниченные самосопряжённые операторы: теоремы о точечном спектре, норме и инвариантном подпространстве: Дать определение самосопряжённого оператора. Сформулировать и доказать теорему о точечном спектре самосопряжённого оператора. Сформулировать (без доказательства) теорему о норме самосопряжённого оператора. Дать определение инвариантного подпространства оператора. Сформулировать и доказать терему об инвариантном подпространстве.
7.14. Компактные операторы: Дать определение компактного оператора. Сформулировать и доказать шесть свойств, связанных с понятием компактного оператора. Сформулировать (без доказательства) теорему о существовании базиса, состоящего из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора.

§8. Интегральные уравнения

8.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и задачи, к ним приводящие: Дать определение интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра I и II рода. Доказать, что уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма.
8.2. Интегральный оператор Гильберта-Шмидта: Дать определение оператора Гильберта – Шмидта. Сформулировать теорему о линейности, норме и компактности оператора Гильберта – Шмидта. Дать идею доказательства этой теоремы. Сформулировать и доказать теорему об операторе, сопряжённом к оператору Гильберта-Шмидта.
8.3. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.
8.4. Альтернатива Фредгольма.
8.5. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений.
8.6. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта – Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.

Пример экзаменационного билета в осеннем семестре:
Билет № 6

1. Сдача задач из заданий.
2. Ряд Фурье в комплексной форме: вывести соответствующую формулу исходя из вещественного (тригонометрического) ряда Фурье. Равенство Ляпунова: сформулировать равенство Ляпунова для интегрируемых функций и доказать его для непрерывно дифференцируемых функций; вывести обобщённое равенство Ляпунова и равенство Ляпунова в комплексной форме.
3. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста: привести наводящие соображения, дать строгое определение, вычислить преобразование Фурье от дельта-функции. Объяснить необходимость смены пространства основных функций. Дать определение обобщённой функции медленного роста. Сформулировать свойства преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста и доказать одно из них.

Пример экзаменационного билета в весеннем семестре:
Билет № 5

1. Сдача задач из заданий.
2. Полнота ортонормированной системы. Равенство Парсеваля. Замкнутые ортонормированные системы. Гильбертов базис. Критерий полноты ортонормированной системы: Дать определение полной системы, гильбертова базиса и замкнутой системы. Сформулировать и доказать критерий полноты ортонормированной системы. Сформулировать равенство Парсеваля.
Сформулировать теорему о существовании гильбертова базиса (без доказательства).
3. Обратимость операторов и обратный оператор: Дать определение обратимого оператора и образа оператора. Доказать, что образ оператора является подпространством. Дать определение обратного оператора. Сформулировать и доказать четыре свойства обратного оператора.

Форма экзаменационного билета представлена на рисунке

МИНОБРНАУКИ РОССИИ ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирский государственный университет, НГУ)*** ***Физический факультет***
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № _______

1 …..
2 ……
3 ……

Составитель ___________________ /Ф.И.О. преподавателя/
(подпись)
«____»__________________20 г.

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

Аннотация

к рабочей программе дисциплины
«Основы функционального анализа»
по направлению подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика

Программа курса **«Основы функционального анализа»** составлена в соответствии с требованиями ФГОС по направлению **03.03.01 Прикладные математика и физика,** а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ. Дисциплина реализуется на физическом факультете Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ) кафедрой высшей математики физического факультета. Дисциплина изучается студентами второго курса физического факультета.

Цели курса – дать студентам базовые знания, умения и навыки по гармоническому анализу, гильбертовым пространствам и теории операторов в гильбертовых пространствах, являющимся основным языком и инструментом квантовой механики.

Дисциплина нацелена на формирование общепрофессиональных компетенций:

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	**ОПК-1.1.** Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК -1.2.** Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Знать**: базовые определения и теоремы разделов о рядах Фурье, преобразованиях Фурье и Лапласа, обобщённых функциях, ортогональных многочленах, гильбертовых пространствах и линейных операторах в них, интегральных уравнениях. **Уметь**: решать конкретные задачи из указанных выше разделов функционального анализа.

Курс рассчитан на два семестра. Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

Текущий контроль: задания для самостоятельного решения.

Промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет **288** академических часов / **8** зачетных единиц.

Лист актуализации рабочей программы
по дисциплине «Основы функционального анализа»
по направлению подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного