МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет
Кафедра высшей математики ФФ

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.-м.н
В.Е.Блинов
«__» ________ 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

направление подготовки: **03.03.01 Прикладные математика и физика**

Форма обучения
Очная

Семестр	**Общий объем**	**Виды учебных занятий (в часах)**				**Промежуточная аттестация (в часах)**				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	198	32	32	10	100	18	4			2
4	126	32	32	6	32	18	4			2
Итого	**324**	**64**	**64**	16	**132**	**36**	**8**			**4**
Всего 324 часа / 9 зачётных единиц, из них: - контактная работа 156 часов										
Компетенции ОПК-1										

Ответственный за образовательную программу
д.ф.-м.н., проф. С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2022

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Цель дисциплины «Основы функционального анализа и теории функций» – дать студентам базовые знания по некоторым разделам классической теории функций комплексного переменного, как то: понятие аналитической функции и основные свойства таких функций, интегрирование функций комплексного переменного, разложение аналитических функций в ряды, элементы теории вычетов, понятия конформного отображения, операционному исчислению (основанному на преобразовании Лапласа), а также базовые знания по некоторым разделам функционального анализа (включая ряды и преобразование Фурье и обобщённые функции), вариационное исчисление и теории интегральных уравнений (включая гильбертовы пространства, ортогональные многочлены и теорию операторов в гильбертовых пространствах), вариационному исчислению необходимые для освоения теоретических основ физических курсов, читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета. Дисциплина нацелена на формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1 -Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности.	**ОПК-1.1**-Применяет теоретические и методологические основы физико-математических дисциплин, математический аппарат для решения профессиональных задач. **ОПК-1.2**-Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин в своей профессиональной деятельности.	**Знать** базовые определения и теоремы основных разделов функционального анализа и теории функций, общие принципы их применения в фундаментальных разделах физики. **Уметь** решать конкретные задачи о рядах Фурье, преобразованиях Фурье и Лапласа, обобщенных функциях, ортогональных многочленах, гильбертовых пространствах и линейных операторах в них, интегральных уравнениях, находить экстремали функционалов.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

В результате изучения курса студенты физического отделения физического факультета НГУ должны усвоить основы теории аналитических функций, конформных отображений и операционного исчисления (преобразования Лапласа), основы теории рядов Фурье, преобразований Фурье, обобщённых функций, геометрии гильбертовых пространств, ортогональных многочленов, ограниченных линейных операторов в гильбертовых пространствах и интегральных уравнений, вариационному исчислению, а также освоить основные методы решения стандартных задач из этих разделов высшей математики, а также освоить основные методы решения стандартных задач из этих разделов высшей математики. Кроме того, у студентов должно сформироваться умение применять математические методы для решения физических задач; умение использовать в познавательной и профессиональной

деятельности базовые знания в области математики; умение приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.
Для успешного освоения курса «Основы функционального анализа и теории функций» студенты должны обладать предварительными знаниями основ математического анализа, линейной алгебры и геометрии.

3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	198	32	32	10	100	18	4			2
4	126	32	32	6	32	18	4			2
Итого	**324**	**64**	**64**	**16**	**132**	**36**	**8**			**4**
Всего 324 часа / 9 зачётных единиц, из них: - контактная работа 156 часов										
Компетенции ОПК-1										

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:
- текущий контроль успеваемости: задания для самостоятельного решения;
- промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет 9 зачетных единиц.

- занятия лекционного типа – 64 часа;
- практические занятия – 64 часа;
- прием заданий – 16 часов;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 132 часа;
- промежуточная аттестация (подготовка к сдаче экзамена, консультации и экзамен) – 48 часов.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, консультации, экзамен) составляет 156 часов.

4. **Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 9 зачётных единиц, 324 академических часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)						Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы			Сам. работа во время занятий (не включая период сессии)	Сам. работа во время промежуточной аттестации		
				Лекции	Практические занятия	Консультации в период занятий				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Третий семестр										
1.	Элементы теории функций комплексного переменного	1-5	56	10	10	2	34			
2.	Ряды Фурье	6-8	32	6	6	2	18			
3.	Преобразование Фурье	9-12	40	8	8	2	22			
4.	Операционное исчисление	13	10	2	4	2	4			
5.	Обобщенные функции	14-16	36	6	4	3	21			
7.	Промежуточная аттестация (Экзамен)		6					18	4	2
Всего за 3 семестр			**198**	**32**	**32**	**11**	**99**	**18**	**4**	**2**
Четвёртый семестр										
1.	Геометрия пространств со скалярным произведением	1-4	27	8	8	1	10			
2.	Операторы в гильбертовых пространствах	5-8	27	8	8	2	9			
3.	Интегральные уравнения	9-12	24	8	8	2	6			
4.	Вариационное исчисление	13-16	24	8	8	2	6			
6.	Промежуточная аттестация (Экзамен)		6					18	4	2
Всего за 4 семестр			**126**	**32**	**32**	**7**	**31**	**18**	**4**	**2**
Итого			**324**	**64**	**64**	**18**	**130**	**36**	**8**	**4**

Программа и основное содержание лекций (64 часа)

Третий семестр (32 часа)

Раздел 1. Элементы теории функций комплексного переменного (10 часов)

Функции комплексного переменного. Геометрические понятия. Отображения, соответствующие элементарным функциям, обратные функции. Дифференцирование функций коплексного переменного. Условия Коши-Римана. Связь с гармоническими функциями.

Интегрирование функций комплексного переменного. Теорема Коши. Формула Коши. Высшие производные. Теорема о среднем и принцип максимума модуля.

Ряды Тейлора и Лорана. Аналитические функции. Изолированные особые точки и их классификация. Стереографическая проекция. Бесконечно удалённая изолированная особая точка. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Теорема о вычетах. Применение вычетов для вычисления определённых интегралов.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной по комплексному переменному. Понятие конформного отображения, примеры. Теорема Римана (формулировка). Дробно-линейные отображения.

Аналитическое продолжение. Обобщение понятия аналитической функции.

Раздел 2. Ряды Фурье (6 часов)

Лемма Римана-Лебега. Ряды Фурье для 2π-периодических функций в вещественной и комплексной форме. Ряды Фурье для функций с произвольным периодом.

Неравенство Бесселя. Дифференцирование рядов Фурье. Равномерная сходимость рядов Фурье. Равенство Ляпунова.

Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами. Явление Гиббса. Скорость сходимости рядов Фурье. Метод разделения переменных.

Раздел 3. Преобразование Фурье (8 часов)

Интегральная формула Фурье. Преобразование Фурье. Косинус- и синус-преобразования Фурье.

Свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций: ограниченность, непрерывность, асимптотическое поведение, дифференцирование, сдвиг, подобие.

Свёртка функций и её свойства: ограниченность, абсолютная интегрируемость, коммутативность, ассоциативность, преобразование Фурье.

Формула Парсеваля. Преобразование Фурье функций, интегрируемых с квадратом, теорема Планшереля(формулировка).

Раздел 4. Операционное исчисление (2часа)

Преобразование Лапласа. Свойства подобия, запаздывания, смещения, дифференцирование, свёртка. Обращение преобразования Лапласа. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений.

Раздел 5. Обобщенные функции (6 часов)

Обобщенные функции, δ-функция Дирака. Сходимость последовательности обобщённых функций. Операции над обобщёнными функциями.

Дифференцирование обобщённых функций. Фундаментальное решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Преобразование Фурье обобщенных функций, операции дифференцирования и свёртки. Примеры. Формула Пуассона. Теорема Котельникова-Шеннона. Дискретное преобразование Фурье. Быстрое преобразование Фурье. Приложения преобразования Фурье.

Четвёртый семестр (32 часа)

Раздел 6. Геометрия пространств со скалярным произведением (8 часов)

Линейные пространства со скалярным произведением. Евклидовы и унитарные пространства. Нормированные пространства. Метрические пространства. Гильбертовы пространства. Неравенство Шварца. Ортогональность векторов. Проектирование на замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта. Коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы. Задача о наилучшем приближении — проектирование на конечномерные подпространства. Неравенство Бесселя. Полные ортогональные системы и ряды Фурье. Гильбертовы базисы. Равенство Парсеваля.

Понятие замкнутой ортогональной системы. Ортогональность и полнота тригонометрической системы функций.

Определение и общие свойства ортогональных многочленов (рекуррентные соотношения, расположение нулей). Основная информация о многочленах Лежандра, Эрмита, Лагерра — производящие функции, рекуррентные соотношения, дифференциальные уравнения, формулы Родрига. Многочлены Чебышёва и их основные свойства.

Раздел 7. Операторы в гильбертовых пространствах (8 часов)

Линейные операторы, их общие свойства, операции над ними. Ограниченные операторы, норма оператора. Обратимость операторов. Резольвента и спектр. Классификация точек спектра. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса. Бра- и кет-векторы. Операторная функция Грина. Сопряжённый оператор и его свойства. Ограниченные самосопряжённые (эрмитовы) операторы. Квадратичная форма оператора. Теорема о регулярных значениях эрмитова оператора. Вещественность спектра эрмитова оператора. Теорема Рэлея о норме эрмитова оператора. Теорема о границах спектра. Компактные операторы. Дискретность спектра компактного эрмитова оператора. Инвариантные подпространства. Теорема Гильберта – Шмидта о собственном базисе (диагонализуемость) компактного эрмитова оператора. Вариационный метод Куранта отыскания собственных чисел.

Раздел 8. Интегральные уравнения (8 часов)

Интегральные уравнения Фредгольма. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Уравнение с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта – Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра. Разложение ядра интегрального оператора по его собственным функциям (билинейная форма). Интегральные уравнения Вольтерра — теорема о существовании и единственности решения.

Раздел 9. Вариационное исчисление (8 часов)

Примеры задач классического вариационного исчисления. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума. Уравнения Эйлера. Задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера. Задачи о брахистохроне и о поверхности вращения минимальной площади. Задачи с несколькими переменными. Гармонические функции как экстремали интеграла Дирихле. Уравнение Эйлера для задачи с высшими производными. Задача с подвижными концами, условия трансверсальности. Изопериметрическая задача — теорема Эйлера. Условный экстремум. Правило множителей Лагранжа. Вывод уравнения малых колебаний струны.

Программа практических занятий (64 часа)

Третий семестр (32 часа)

1 занятие — Функции комплексного переменного, условия Коши-Римана. *(2 часа).*
2 занятие — Комплексное интегрирование. Основные свойства интеграла. *(2 часа).*
3 занятие — Ряды Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции и их классификация. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. *(2 часа).*
4 занятие — Теорема о вычетах. Применение вычетов для вычисления определённых интегралов. *(2 часа).*
5 занятие — Конформные отображения. Дробно-линейные отображения, их основные свойства, некоторые применения. *(2 часа).*

6 занятие — Разложение периодических функций в ряд Фурье. Разложение только по синусам или только по косинусам. *(2 часа).*
7 занятие — Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом. Комплексная форма ряда Фурье. Разложение в ряд Фурье функций вида без вычисления интегралов. *(2 часа).*
8 занятие — Равенство Ляпунова. Суммирование числовых рядов с помощью рядов Фурье. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов Фурье. *(2 часа).*
9 занятие — Представление функции её интегралом Фурье. Общие свойства преобразования Фурье: сдвиг по фазе, сдвиг по аргументу. *(2 часа).*
10 занятие — Производная от преобразования Фурье и преобразование Фурье от производной. Нахождение преобразования Фурье конкретных функций. *(2 часа).*
11 занятие — Свёртка и ее связь с преобразованием Фурье. *(2 часа).*
12 занятие — Формула Пуассона. Применение преобразования Фурье к решению уравнения Лапласа в полуплоскости. *(2 часа).*
13 занятие — Преобразование Лапласа: оригиналы и изображения. Теоремы подобия и смещения, дифференцирование и интегрирование изображений и оригиналов. Решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. *(2 часа)*
14 занятие — Запаздывание и свёртка оригиналов. Теорема Бореля и формула Дюамеля. Решение интегральных уравнений. *(2 часа).*
15 занятие — Основные и обобщённые функции. Свойства обобщённых функций. Свёртка обобщённых функций. Применение теоремы о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального оператора. *(2 часа).*
16 занятие — Обобщённые функции медленного роста и преобразование Фурье от них. *(2 часа).*

Четвёртый семестр (32 часа)

1 занятие. — Линейные пространства со скалярным произведением. Евклидовы и унитарные пространства. Нормированные пространства. Метрические пространства. Гильбертовы пространства. Неравенство Шварца. Линейные пространства со скалярным произведением. Евклидовы и унитарные пространства. Нормированные пространства. Метрические пространства. Гильбертовы пространства. Неравенство Шварца. Равенство параллелограмма. Ортогональность векторов. *(2 часа).*
2 занятие. — Гильбертово пространство. Угол между векторами. Ортогональность векторов. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Полные ортонормированные системы, состоящие из многочленов, ступенчатых функций и тригонометрических функций. *(2 часа).*
3 занятие. — Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов. Общие свойства ортогональных многочленов. Свойства нулей ортогональных многочленов. Классические ортогональные многочлены и их свойства. *(2 часа).*
4 занятие. — Многочлены Лежандра. *(2 часа).*
5 занятие. — Линейные операторы, их общие свойства. Непрерывные и ограниченные операторы. *(2 часа).*
*6 занятие. —*Норма оператора. Сходимость операторов. Операторный ряд. Критерий Коши. *(2 часа).*
7 занятие. — Обратимость операторов. Резольвента и спектр. Классификация точек спектра. *(2 часа).*
8 занятие. — Линейные функционалы. Бра-векторы и кет-векторы. Операторная функция Грина. *(2 часа).*
9 занятие. — Сопряжённый оператор и его свойства. Ограниченные самосопряжённые (эрмитовы) операторы. *(2 часа).*
10 занятие. — Компактные операторы: определения и простейшие свойства. Теорема о дискретности точечного спектра компактного оператора. Компактные самосопряжённые операторы. Альтернатива Фредгольма. *(2 часа).*

11 занятие. — Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром. *(2 часа).*
12 занятие. — Повторные ядра и резольвента интегрального уравнения. *(2 часа).*
13 занятие. — Задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера. Решение задачи о поверхности вращения минимальной площади *(2 часа).*
14 занятие. — Задачи с несколькими переменными, задачи с высшими производными. *(2 часа).*
15 занятие. — Задача с подвижными концами, условия трансверсальности. *(2 часа).*
16 занятие. — Изопериметрическая задача — теорема Эйлера. Условный экстремум. *(2 часа).*

Самостоятельная работа студентов (168 часов)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям.	32
Изучение теоретического материала, не освещаемого на лекциях	14
Подготовка к сдаче заданий	86
Подготовка к экзамену	36

5. Перечень учебной литературы.

1. В. А. Александров. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах: методическое пособие: [для студентов физического факультета НГУ] / Гос. ком. Рос. Федерации по высш. образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский отдел НГУ, 1996. - 80 с. (165 экз.).
2. В. А. Александров. Ортогональные многочлены: методические указания: [для студентов физического факультета НГУ] / Ком. по высшей школе М-ва науки, высшей школы и техн. политики Рос. Федерации, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский отдел НГУ, 1993. - 67 с. (71 экз.).
3. В. А. Александров, Е. В. Колесников. Интегральные уравнения: методические указания: [для студентов физического факультета НГУ] / Ком. по высш. шк. М-ва науки, высш. шк. и техн. политики Рос. Федерации, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский отдел НГУ, 1993. - 47 с. (88 экз.).
4. В. А. Александров. Геометрия пространств со скалярным произведением: методическое пособие: [для студентов физического фвкультета НГУ] /; Гос. ком. Рос. Федерации по высш. образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский отдел НГУ, 1995. - 47 с. (131 экз.).
5. В. А. Александров. Преобразование Фурье: учебное пособие: [для студентов физического факультета НГУ] / М-во образования Рос. Федерации, Новосиб. гос. ун-т, Физ. Фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2002. - 62 с. (151 экз.).
6. В. А. Александров. Обобщённые функции: учебное пособие: [для студентов 2-го курса физического факультета НГУ] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2005. - 46 с. (116 экз.).
7. В. А. Александров. Ряды Фурье: методическое пособие: [для студентов физического факультета НГУ] / Гос. ком. Рос. Федерации по высш. образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский отдел НГУ, 1996. - 56 с. (143 экз.).
8. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного: учебное пособие для студентов университетов, обучающихся по специальности "Математика", "Физика", "Механика" / Изд. 5-е, испр. - Москва: Наука, 1987. - 688 с. (113 экз.).
9. Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: [для вузов] / Изд. 2-е, перераб. и доп. - Москва: Наука, 1970. - 318 с. (180 экз.).

10. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа: учебник для студентов математических специальностей университетов / Изд. 3-е, перераб. - Москва: Наука, 1972. - 496 с. (98 экз.).
11. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебное пособие для университетов и педагогических институтов: [в 3 т.] / Москва: Наука, Т.2. Изд. 7-е, стер., 1970. - 800 с. (61 экз.).
12. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебное пособие для университетов и педагогических институтов: [в 3 т.] / Москва: Наука, Т.3. Изд. 7-е, стер., 1969 - 1970. - 656 с. (117 экз.).
13. Р. К. Бельхеева. Ряды Фурье в примерах и задачах: учебное пособие: [для студентов Физического факультета НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2011. - 75 с. (48 экз.).
14. Р. К. Бельхеева. Преобразование Фурье в примерах и задачах: учебное пособие: [для студентов Физического факультета НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак.Новосибирск : Редакционно-издательский центр НГУ, 2014. - 80 с. (65 экз.).
15. Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах: учебное пособие: [для студентов Физического факультета НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2014. - 84 с. (69 экз.).
16. И. В. Подвигин. Гильбертово пространство в примерах и задачах: учебно-методическое пособие: [для студентов Физ. фак. НГУ] /; М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. высшей математики. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2012. – 71 с. (91 экз.).

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

17. Н. Л. Абашеева. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах: учебное пособие: [для студентов 2-го курса ФФ НГУ] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2007. - 39 с. (69 экз.).
18. В. А. Александров. Преобразование Фурье: учебное пособие: [для студентов физического факультета НГУ] / М-во образования Рос. Федерации, Новосиб. гос. ун-т, Физ. Фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2002. - 62 с. (151 экз.).
19. В. А. Александров. Обобщённые функции: учебное пособие: [для студентов 2-го курса физического факультета НГУ] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2005. - 46 с. (116 экз.).
20. В. А. Александров. Ортогональные многочлены: методические указания: [для студентов физического факультета НГУ] / Ком. по высшей школе М-ва науки, высшей школы и техн. политики Рос. Федерации, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский отдел НГУ, 1993. - 67 с. (71 экз.).
21. В. А. Александров. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах: методическое пособие: [для студентов физического факультета НГУ] / Гос. ком. Рос. Федерации по высш. образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский отдел НГУ, 1996. - 80 с. (165 экз.).
22. В. А. Александров, Е. В. Колесников. Интегральные уравнения: методические указания: [для студентов физического факультета НГУ] / Ком. по высш. шк. М-ва науки, высш. шк. и техн. политики Рос. Федерации, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский отдел НГУ, 1993. - 47 с. (88 экз.).

23. Р. К. Бельхеева. Ряды Фурье в примерах и задачах: учебное пособие: [для студентов Физического факультета НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2011. - 75 с. (48 экз.).
24. Р. К. Бельхеева. Преобразование Фурье в примерах и задачах: учебное пособие: [для студентов Физического факультета НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак.Новосибирск : Редакционно-издательский центр НГУ, 2014. - 80 с. (65 экз.).
25. Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах: учебное пособие: [для студентов Физического факультета НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2014. - 84 с. (69 экз.).
26. И. В. Подвигин. Гильбертово пространство в примерах и задачах: учебно-методическое пособие: [для студентов Физ. фак. НГУ] /; М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. высшей математики. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2012. – 71 с. (91 экз.).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

7.1 Ресурсы сети Интернет

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.2 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

8.1 Перечень программного обеспечения

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

8.2 Информационные справочные системы

Не используются.

.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.

2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.1. Порядок проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль успеваемости

В течение каждого семестра студент должен сдать преподавателю, ведущему практические занятия, в устной форме все задачи из заданий, типовые примеры которых приведены в п. 10.3 (термин «сдать задачу» означает объяснение хода её решения и при необходимости ответы на дополнительные вопросы преподавателя).

В течение семестра проводится прием выполненных обучающимся заданий/задач в отведенное время. Примеры заданий/задач приведены в п.10.3. Термин «сдать задание/задачу» означает объяснение хода ее решения и при необходимости ответы на дополнительные вопросы преподавателей.

Промежуточная аттестация

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем.

Экзаменационный билет содержит три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий». Два других вопроса являются теоретическими вопросами из программы курса.

Если студент не сдал какие-то задачи из заданий, то, вытянув экзаменационный билет, он должен без подготовки начать отвечать на первый вопрос билета "Сдача задач из заданий", используя свою рабочую тетрадь.

Ответ на первый вопрос не может длиться более 30 минут. Если за это время студент объяснил экзаменатору решения всех своих долгов по заданиям, то он получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам. В противном случае студенту выставляется оценка "неудовлетворительно".

Если студент уже сдал все задачи из заданий в течение семестра, то вытянув билет, он пропускает первый вопрос «Сдача задач из заданий» и получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам билета.

При подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами и подсказками товарищей. Нарушающие это правило удаляются с экзамена.

Выходить из аудитории до начала ответа на второй и третий вопросы билета нельзя.

Ответы на второй и третий вопросы билета оцениваются по пятибалльной системе:

оценка «отлично» ставится за полный и правильный ответ как на вопрос билета, так и на сопутствующие вопросы преподавателя;

оценка «хорошо» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из данного вопроса билета и объяснение основных идей доказательства (при этом допускается, что доказательство не доведено до конца);

оценка «удовлетворительно» ставится за правильные формулировки всех определений и теорем из билета (при этом допускается, что о доказательстве не сказано ничего);

оценка «неудовлетворительно» ставится за незнание хоть одной из теорем или хоть одного из важных (т.е. многократно используемых в курсе) определений.

Если хотя бы за один из вопросов билета получена оценка «неудовлетворительно», то экзамен прекращается с общей оценкой «неудовлетворительно».

В случае необходимости преподаватель может заменить дополнительный вопрос задачей. В качестве таких задач, заменяющих дополнительные вопросы, не бывает задач, требующих сложных вычислений или нестандартных подходов.

После того, как студент ответил на все вопросы билета, выставляется общая оценка по курсу «Основы функционального анализа и теории функций», равная средней за ответы на второй и третий вопросы билета с округлением по общепринятым правилам. Студенту могут быть заданы дополнительные вопросы в случае расхождения оценок за ответы на вопросы билета. Оценка «отлично» соответствует продвинутому уровню усвоения компетенции. Оценка «хорошо» соответствует базовому уровню усвоения компетенции. Оценка «удовлетворительно» соответствует пороговому уровню усвоения компетенции. Оценка «неудовлетворительно» - компетенция не сформирована.

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	**Результат обучения по дисциплине**	**Оценочные средства**
ОПК-1.1. Применяет теоретические и методологические основы физико-математических дисциплин, математический аппарат для решения профессиональных задач.	Знать базовые определения и теоремы основных разделов функционального анализа и теории функций, общие принципы их применения в фундаментальных разделах физики.	Проверка задач для самостоятельного решения, экзамен в устной форме.

ОПК-1.2. Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин в своей профессиональной деятельности.	Уметь: решать конкретные задачи о рядах Фурье, преобразованиях Фурье и Лапласа, обобщенных функциях, ортогональных многочленах, гильбертовых пространствах и линейных операторах в них, интегральных уравнениях, находить экстремали функционалов.	Проверка задач для самостоятельного решения, экзамен в устной форме.

10.2. Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Основы функционального анализа и теории функций».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК 1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/ несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК 1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.

10.3. Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Третий семестр

Задания по основам функционального анализа и теории функций

3-й семестр

Задание 1

(сдать до 17 октября)

1. Написать условия Коши-Римана в полярных координатах.

2. Выяснить в каком случае существует аналитическая функция, у которой вещественная часть u задается формулой

$$a)\ u = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2, \qquad b)\ u = exp(y/x).$$

3. Найти дробно-линейное отображение $w = w(z)$, переводящее точки $z = \ -1,\ i,\ 1+i$ соответственно в точки $w = \ 0,\ 2i,\ 1-i$.

4. Функцию

$$\frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$$

разложить в ряд Лорана в точке $z = 2$ и в кольце $1 < |z| < 2$.

5. Найти вычеты относительно всех изолированнных особых точек функции

$$\frac{z^5}{(1-z)^2} + z^3 \sin\frac{1}{z-2}.$$

6. Вычислить интеграл

$$\int_C \frac{3z^2+4}{(z+1)(z-2)(z+3)} dz,$$

по контуру $C = \{|z| = 4\}$.

7. Вычислить интеграл

$$\int\limits_C \frac{dz}{3\,\mathrm{e}^{2z} - 10\,\mathrm{e}^{z} + 3},$$

по контуру $C = \{z : |z+1-\mathrm{i}| = 2\}$, где интегрирование ведется в положительном направлении относительно точки $z = -1 + \mathrm{i}$.

8. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx.$$

9. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2} dx.$$

10. Доказать формулу дополнения для Г-функции

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0 < p < 1.$$

Задание 2

(сдать до 21 ноября)

11. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье: по косинусам кратных дуг; по синусам кратных дуг; в интервале между 0 и 2π. Найти суммы следующих рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

12. Разложить функцию $f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2)$ в ряд Фурье с использованием комплексной формы ряда Фурье ($|a| < 1$).

13. Пусть гладкая на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ функция $f(x)$ принимает равные значения на концах этого отрезка и "в среднем" равна нулю:

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

С помощью равенства Ляпунова, доказать следующее неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

14. Используя интегральную формулу Фурье, доказать равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{a\cos xy + y\sin xy}{a^2 + y^2} dy = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \pi/2, & x = 0, \\ \pi e^{-ax}, & x > 0. \end{cases}$$

15. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = H(x)e^{-ax}$, где $H(x)$– функция Хевисайда, $a > 0$.

16. Найти преобразование Фурье прямоугольного импульса

$$rect_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

17. Найти обратное преобразование Фурье для функции $f(ay)$, если $f(y) = \frac{\sin y}{y}$.

18. Найти обратное преобразование Фурье для функции $f(ay)$, если $f(y) = \frac{\sin^2 y}{y^2}$.

19. Для функции

$$f_a(x) = \frac{e^{-x^2/2a^2}}{\sqrt{2\pi}\, a}, \ a > 0,$$

вычислить свёртку $f_a * f_b$.

20. Для скалярного поля $u(x, y, z)$ и векторного поля $F(x, y, z)$ найти Фурье-образы $\nabla u, \mathrm{div} F, \mathrm{rot} F, \Delta u$. Записать уравнения Максвелла в однородной среде без свободных зарядов относительно компонент Фурье полей при разложении на монохроматические, плоские и плоские монохроматические волны.

Задание 3

(сдать до 26 декабря)

21. Найти изображение следующего оригинала

$$\int_1^\infty \frac{\cos \tau t}{\tau} d\tau.$$

22. Восстановить оригинал по его изображению

$$\frac{p}{(p^2-1)(p^2+1)}.$$

23. Используя преобразование Лапласа, решить уравнение

$$y'' + y' = \cos x, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

24. Используя преобразование Лапласа, решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$y_1'' + y_2' + y_1 = e^t, \quad y_1' + y_2'' = 1,$$
$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2'(0) = 2.$$

25. Используя преобразование Лапласа, решить интегральное уравнение

$$x(t) - e^{-2t} \int_0^t e^{2s} x(s) ds = 1 + t, \quad t > 0.$$

26. Показать, что регулярные обобщенные функции $[\delta_a]$, порожденные функциями

$$\delta_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)},$$

при $a \to +0$ сходятся к δ-функции Дирака.

27. Описать действие обобщенной функции $\delta'(x) * H(x)$.

28. Вычислить вторую производную обобщенной функции $|\sin x|$.

29. Вычислить производную обобщенной функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, и найти преобразование Фурье обобщенной функции $|x|$.

30. Найти фундаментальное решение дифференциального оператора и записать частное решение уравнения

$$y'(x) + \cos x \ y(x) = f(x).$$

Четвертый семестр

Задания по основам функционального анализа и теории функций

4-й семестр

Задание 4

сдать до 20 марта

1. Убедитесь, что произвольные три элемента x, y и z унитарного пространства связаны тождеством Аполлония
$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2.$$
2. Докажите, что можно определить скалярное произведение в пространстве $L_p[0,1]$, $p\geq 1$, согласованное с его «естественной» нормой, тогда и только тогда, когда $p=2$.
3. Посчитайте углы треугольника, образованного элементами $0, t\sqrt{12}, 5t^2-3$ евклидова пространства $L_2[-1,1]$.
4. В пространстве $L_2[-1,1]$ найдите ортогональную проекцию функции $\cos t$ на подпространство многочленов степени не выше 2.
5. Доказать тождества:
(а) $\dfrac{d}{dx}(e^{-x^2}H_{n-1}(x))=-e^{-x^2}H_n(x)$;
(б) $\dfrac{d}{dx}(e^{-x}x^{\alpha+1}L_{n-1}^{\alpha+1}(x))=ne^{-x}x^{\alpha}L_n^{\alpha}(x)$.
6. Вычислить интегралы:
(а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}xH_n(x)H_{n+1}(x)\,dx$;
(б) $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha+1}L_n^{\alpha}(x)L_{n+1}^{\alpha}(x)\,dx$.
7. Разложить функции:
(а) $\sin 2x$ по многочленам Эрмита;
(б) $\sqrt{x}$ по многочленам Лагерра.

Задание 5

сдать до 25 апреля

В задачах 8–16 рассматривается «диагональный» оператор $A: l_2\to l_2$, действующий по правилу:
$$A:(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\mapsto(a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n,\ldots),$$
где $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.
8. Докажите, что A — линейный непрерывный оператор, и посчитайте его норму.
9. Выясните, когда оператор A обратим, и в случае обратимости найдите обратный оператор.
10. Найдите точечный спектр оператора A.
11. Найдите резольвентное множество и резольвенту оператора A.
12. Найдите сопряжённый к A оператор.
13. Выясните, когда оператор A самосопряжён.
14. Выясните, когда оператор A унитарен.
15. Найдите остаточный и непрерывный спектры оператора A.
16. Докажите, что оператор A компактен тогда и только тогда, когда $a_n\to 0$ при $n\to\infty$.

В задачах 17–19 рассматривается оператор «сдвига» $A: L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$, действующий по правилу $(Ax)(t)=x(t-a)$, $t\in\mathbb{R}$, где a — фиксированное вещественное число.
17. Докажите, что A — линейный непрерывный оператор, и посчитайте его норму.
18. Докажите, что оператор A обратим, и найдите его обратный оператор.
19. Найдите сопряжённый к A оператор.

Задание 6

сдать до 29 мая

20. Составить интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши:

$$x''' + tx' - 2x = \cos t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 2.$$

21. Решить интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^{\pi} \sin(t + 2s)x(s)\,ds + \sin 2t.$$

22. Найти повторные ядра и резольвенту, а также представить через резольвенту решение интегрального уравнения

$$x(t) - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x(s)}{(2-t)(2-s)}\,ds = 2 - t.$$

23. Найти собственные числа и собственные функции интегрального уравнения

$$x(t) - \lambda\int_0^1 (2\pi t\sin 2\pi s - 1)x(s)\,ds = 0.$$

24. Выяснить, для каких функций f из пространства $L_2[0,1]$ разрешимо интегральное уравнение

$$x(t) - 6\int_0^1 (2ts - s^2)x(s)\,ds = f(t).$$

25. Найти экстремали функционала в классе гладких функций

$$I[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2e^{2x}y)\,dx, \quad y(0) = 1/3,\ y(1) = e^2/3.$$

26. Найти экстремали функционала в классе гладких функций

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2xyy')\,dx, \quad y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1.$$

27. Найти экстремали функционала в классе гладких функций

$$I[y,z] = \int_0^{\pi/2} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1,\ z(0) = 0,\ z(\pi/2) = -1.$$

28. Найти экстремали функционала в классе гладких функций

$$I[y] = \int_0^{\pi/2} [2y\sin x + (y'')^2]\,dx, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1,\ y(\pi/2) = -1,\ y'(\pi/2) = \pi^2/4.$$

29. Найти экстремали изопериметрической задачи

$$I[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2)\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 4e,$$

со связью $\int_0^1 ye^x\,dx = 1 + e^2$.

Список вопросов, выносимых на экзамен.

Третий семестр

1. Функции комплексного переменного. Геометрические понятия. Функции z^n и $\sqrt[n]{z}$.
2. Функции комплексного переменного. Геометрические понятия. Функции e^z и $\operatorname{Ln} z$.
3. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Связь с гармоническими функциями.
4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной по комплексному переменному. Примеры конформных отображений. Теорема Римана (формулировка).
5. Дробно-линейные отображения.
6. Интегрирование функций комплексного переменного. Теорема Коши.
7. Интегральная формула Коши. Высшие производные. Теорема о среднем.
8. Ряды Лорана и Тейлора.
9. Изолированные особые точки и их классификация.
10. Стереографическая проекция. Бесконечно удалённая изолированная особая точка.
11. Вычет в изолированной особой точке. Теорема о вычетах. Способы вычисления вычетов.
12. Применение вычетов для вычисления определённых интегралов от рациональных функций и функций, содержащих $\cos x$, $\sin x$.
13. Применение вычетов для вычисления определённых интегралов от функций, содержащих $\ln x$.
14. Аналитическое продолжение, теорема единственности.
15. Лемма Римана-Лебега.
16. Теорема о разложении функции в ряд Фурье.
17. Ряды Фурье для 2π-периодических функций в вещественной и комплексной форме.
18. Ряды Фурье для функций с произвольным периодом.
19. Неравенство Бесселя.
20. Дифференцирование рядов Фурье.
21. Равномерная сходимость рядов Фурье. Равенство Ляпунова.
22. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.
23. Явление Гиббса.
24. Скорость сходимости рядов Фурье.
25. Метод разделения переменных.
26. Интегральная формула Фурье.
27. Прямое и обратное преобразование Фурье. Косинус- и синус- преобразования Фурье.
28. Свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций: ограниченность, непрерывность, асимптотическое поведение, преобразование Фурье от производной, производная от преобразования Фурье, сдвиг, подобие.
29. Свойства свертки функций: ограниченность, абсолютная интегрируемость, коммутативность, ассоциативность. Прямое и обратное преобразование Фурье от свертки и произведения функций.
30. Преобразование Фурье быстро убывающих функций, формула Парсеваля.
31. Преобразование Фурье функций, интегрируемых с квадратом, теорема Планшереля (формулировка).

32. Преобразование Лапласа. Свойства подобия, запаздывания, смещения, дифференцирование.
33. Преобразование Лапласа и операция интегрирования, свёртка.
34. Обращение преобразования Лапласа. Применение преобразования Лапласа к решению задач для дифференциальных уравнений.
35. Обобщенные функции. Сходимость последовательности обобщённых функций. δ-функция Дирака и δ-образующие последовательности.
36. Дифференцирование обобщенных функций, замена переменной, умножение на функции класса C^{∞}. Примеры.
37. Фундаментальное решение линейных дифференциальных уравнений. Частное решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
38. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста, операции дифференцирования и свёртки. Примеры.
39. Формула Пуассона.
40. Теорема Котельникова-Шеннона.

Четвертый семестр

1. Линейные пространства и их подпространства.
2. Линейные пространства со скалярным произведением. Евклидовы и унитарные пространства. Неравенство Коши - Буняковского.
4. Нормированные пространства.
5. Гильбертовы пространства.
6. Ортогональность векторов. Процесс ортогонализации Грама - Шмидта.
7. Коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы.
8. Проектирование на замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве.
9. Задача о наилучшем приближении - проектирование на конечномерные подпространства.
10. Полные ортогональные системы и ряды Фурье.
11. Гильбертовы базисы.
12. Равенство Парсеваля. Понятие замкнутой ортогональной системы.
13. Ортогональность и полнота тригонометрической системы функций.
14. Определение и общие свойства ортогональных многочленов (рекуррентные соотношения, расположение нулей).
15. Производящая функция, рекуррентное соотношение, дифференциальное уравнение, формула Родрига для многочленов Лежандра.
16. Линейные операторы, их общие свойства, операции над ними.
17. Норма оператора, ограниченные операторы.
18. Обратимость операторов.
19. Резольвента и спектр. Классификация точек спектра.
20. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса.
21. Бра- и кет-векторы.
22. Сопряжённый оператор и его свойства. Ограниченные самосопряжённые (эрмитовы) операторы.
23. Вещественность спектра эрмитова оператора.
24. Компактные операторы. Дискретность спектра.
25. Теорема Гильберта - Шмидта о собственном базисе компактного эрмитова оператора.
26. Интегральные уравнения Фредгольма.
27. Уравнение с вырожденным ядром.

28. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений.
29. Теоремы Фредгольма.
30. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта - Шмидта для интегральных операторов.
31. Интегральные уравнения Вольтерра.
32. Примеры задач классического вариационного исчисления. Простейшая задача вариационного исчисления.
33. Необходимые условия экстремума. Лемма Лагранжа. Уравнения Эйлера.
34. Вариационные задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера.
35. Задачи о брахистохроне и о поверхности вращения минимальной площади.
36. Вариационные задачи с несколькими переменными.
37. Уравнение Эйлера для вариационной задачи с высшими производными.
38. Вариационная задача с подвижными концами, условия трансверсальности.
39. Изопериметрическая задача - теорема Эйлера.
40. Вариационная задача на условный экстремум. Правило множителей Лагранжа.

Примеры билетов для экзамена

Третий семестр

Билет № 1

1. Сдача задач из заданий.
2. Функции комплексного переменного. Геометрические понятия. Функции z^n и $\sqrt[n]{z}$.
3. Лемма Римана-Лебега.

Билет № 2

1. Сдача задач из заданий.
2. Функции комплексного переменного. Геометрические понятия. Функции e^z и $Ln\, z$.
3. Ряды Фурье для функций с произвольным периодом.

Билет № 3

1. Сдача задач из заданий.
2. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Связь с гармоническими функциями.
3. Преобразование Фурье быстро убывающих функций, формула Парсеваля.

Четвертый семестр

Билет № 1

4. Сдача задач из заданий.
5. Линейные пространства и их подпространства.
6. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса.

Билет № 2

4. Сдача задач из заданий.
5. Линейные пространства со скалярным произведением. Евклидовы и унитарные пространства. Неравенство Коши - Буняковского.
6. Бра- и кет-векторы.

Билет № 3

4. Сдача задач из заданий.
5. Нормированные пространства.
6. Сопряжённый оператор и его свойства. Ограниченные самосопряжённые (эрмитовы) операторы.

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

Лист актуализации рабочей программы
по дисциплине «Основы функционального анализа и теории функций»
по направлению подготовки 03.03.02 Физическая информатика

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного