

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

**Физический факультет
Кафедра высшей математики ФФ**



УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.-м.н
В.Е.Блинов
2022 г.

Рабочая программа дисциплины

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

направление подготовки: **03.03.02 Физика**
направленность (профиль): **Общая и фундаментальная физика**

Форма обучения
Очная

| Семестр | Общий объем | Виды учебных занятий (в часах) | | | | | Промежуточная аттестация (в часах) | | | |
|---|-------------|--|----------------------|----------------------|--|---|--|-------|--------------------------|---------|
| | | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | Самостоятельная работа, не включая период сессии | Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | |
| | | Лекции | Практические занятия | Лабораторные занятия | | | Консультации | Зачет | Дифференцированный зачет | Экзамен |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 | 144 | 32 | 32 | | 56 | 18 | 4 | | | 2 |
| Всего 144 часа / 4 зачётных единиц, из них: - контактная работа 70 часов | | | | | | | | | | |
| Компетенции ОПК-1 | | | | | | | | | | |

Ответственный за образовательную программу,

д.ф.-м.н., проф.

С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2022

Содержание

| | |
|---|----|
| 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы. | 3 |
| 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы. | 3 |
| 3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу. | 4 |
| 4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий. | 5 |
| 5. Перечень учебной литературы. | 7 |
| 6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся. | 8 |
| 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины. | 8 |
| 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине. | 8 |
| 9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине. | 8 |
| 10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине. | 9 |
| Аннотация. | 14 |

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Курс «Дифференциальные уравнения» имеет своей целью дать набор необходимых сведений в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационного исчисления и научить владению математическим аппаратом этой теории для освоения теоретических основ и практического использования физических методов, в частности, для решения задач аналитической механики и квантовой теории.

Учебный курс «Дифференциальные уравнения» читается классическим способом: проводятся потоковые лекции, а также практические занятия по группам, в каждой из которых не более 15-и студентов. Все практические занятия проводятся в интерактивной форме. Преподаватели ориентируют студентов на то, что для хорошего усвоения материала они должны еженедельно отводить на самостоятельную работу столько же времени, сколько они проводят в аудиториях на лекциях и практических занятиях.

| Результаты освоения образовательной программы (компетенции) | Индикаторы | Результаты обучения по дисциплине |
|--|---|--|
| ОПК-1 -Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности. | ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. ОПК -1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. ОПК -1.3 Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности. | Знать базовые определения и теоремы о дифференциальных уравнениях. Уметь решать конкретные обыкновенные дифференциальные уравнения, а также краевые и начальные задачи для них. Владеть общими принципами применения обыкновенных дифференциальных уравнений в фундаментальных разделах физики. |

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

В результате прохождения курса у студентов второго курса физического факультета должно сформироваться представление о том, что многие физические (а также геометрические, экономические и т. д.) закономерности описываются на языке дифференциальных уравнений, например, колебание маятника, явление атомного распада, закона геометрической оптики, экологические закономерности, связанные с численностью вида, и другие. Таким образом, со времен Ньютона теория дифференциальных уравнений

является математическим фундаментом теоретической физики. Необходимыми предпосылками для успешного освоения курса являются следующие в цикле математических дисциплин: знание основ линейной алгебры, геометрии, математического анализа, и, частично, функционального анализа. Необходимость владения указанными математическими дисциплинами обусловлена тем обстоятельством, что они активно используются при изучении дифференциальных уравнений.

3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

| Семестр | Общий объем | Виды учебных занятий (в часах) | | | | | Промежуточная аттестация (в часах) | | | |
|---|-------------|--|----------------------|----------------------|--|---|--|-------|--------------------------|---------|
| | | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | Самостоятельная работа, не включая период сессии | Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | |
| | | Лекции | Практические занятия | Лабораторные занятия | | | Консультации | Зачет | Дифференцированный зачет | Экзамен |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 | 144 | 32 | 32 | | 56 | 18 | 4 | | | 2 |
| Всего 144 часа / 4 зачётных единиц, из них: - контактная работа 70 часов | | | | | | | | | | |
| Компетенции ОПК-1 | | | | | | | | | | |

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

- текущий контроль успеваемости: контрольные работы, задания для самостоятельного решения;
- промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоёмкость рабочей программы дисциплины составляет 8 зачетных единиц.

- занятия лекционного типа – 32 часа;
- практические занятия – 32 часа;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 56 часа;
- промежуточная аттестация (подготовка к сдаче экзамена, консультации и экзамен) – 24 часа.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, консультации, экзамен) составляет 70 часов.

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зачётных единиц, 144 академических часа.

Третий семестр

| № п/п | Раздел дисциплины | Неделя семестра | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах) | | | | | Консультации перед экзаменом (часов) | Промежуточная аттестация (в часах) |
|--------------|---|-----------------|--|-----------------|----------------------|---|---|--------------------------------------|------------------------------------|
| | | | Всего | Аудиторные часы | | Сам. работа во время занятий (не включая период сессии) | Сам. работа во время промежуточной аттестации | | |
| | | | | Лекции | Практические занятия | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1. | Уравнения первого порядка | 1-7 | 46 | 14 | 14 | 18 | | | |
| 2 | Системы дифференциальных уравнений и уравнения высокого порядка | 8 | 12 | 2 | 2 | 8 | | | |
| 3 | Общая теория линейных систем | 9 | 12 | 2 | 2 | 8 | | | |
| 4 | Линейные системы с постоянными коэффициентами | 10 | 12 | 2 | 2 | 8 | | | |
| 5. | Линейные уравнения высокого порядка | 11,12 | 14 | 4 | 4 | 6 | | | |
| 6. | Краевые задачи | 13-16 | 24 | 8 | 8 | 8 | | | |
| 7. | Самостоятельная работа в период подготовки к промежуточной аттестации | | 18 | | | | 18 | | |
| 8. | Экзамен | | 6 | | | | | 4 | 2 |
| Всего | | | 144 | 32 | 32 | 56 | 18 | 4 | 2 |

Семестр III (32 часа)

1. Уравнения первого порядка (14 часов)

Уравнение $y'=f(x,y)$. Определение решения. Непродолжаемое решение. Задача Коши. Теорема Пеано существования решения. Теорема Пикара существования и единственности решения. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения и его решений. Поле направлений, порождаемое дифференциальным уравнением, изоклины. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородные и обобщённо-однородные уравнения. Линейное уравнение. Принцип суперпозиции. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Уравнение в симметричной форме: поле направлений на плоскости, интегральные линии, связь с решениями дифференциального уравнения. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель и уравнение в частных производных для него. Доказательство теоремы Пикара для уравнения первого порядка. Теорема о покидании компакта. Поведение непродолжаемых решений в «вертикальной полосе». Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

2. Системы дифференциальных уравнений и уравнения высокого порядка (2 часа)

Нормальные системы. Запись системы в векторной форме. Поведение непродолжаемых решений. Теорема Уинтнера. Уравнение $y^{(n)}=f(t,y,y',\dots,y^{(n-1)})$, сведение к системе, постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности.

3. Общая теория линейных систем (2 часа)

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы $\dot{X} = AX + B(t)$. Принцип суперпозиции, связь решений неоднородной и однородной системы. Линейность пространства всех непродолжаемых решений однородной системы $\dot{X} = AX$. Определитель Вронского, его связь с линейной зависимостью решений. Формула Лиувилля - Остроградского. Размерность пространства решений однородной системы. Фундаментальные системы решений (ФСР). Фундаментальные матрицы и их свойства. Построение частного решения методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

4. Линейные системы с постоянными коэффициентами (2 часа)

Построение ФСР для системы $\dot{X} = AX$ с постоянными коэффициентами при помощи базиса Жордана матрицы A . Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Комплексные линейные системы, сведение к действительным системам.

5. Линейные уравнения высокого порядка (4 часа)

Линейное уравнение n -го порядка, сведение к линейной системе. Теория линейного уравнения n -го порядка как следствие теории линейных систем. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, построение ФСР. Частное решение в случае квазиполиномиальной неоднородности. Метод вариации для отысканий частных решений.

1. Краевые задачи (8 часов)

Понятие краевой задачи. Теорема об однозначной разрешимости краевой задачи. Структура решений в случае неоднозначной разрешимости. Сведение к задаче с однородными краевыми условиями и ее решение. Функция Грина краевой задачи.

Собственные числа и собственные функции задачи Штурма - Лиувилля: существование вещественных собственных значений; размерность пространства собственных функций; ортогональность (с весом) собственных функций; односторонняя ограниченность спектра. Разложение в ряд по собственным функциям краевой задачи. Эквивалентность краевой задачи интегральному уравнению с непрерывным симметричным ядром.

Программа практических занятий (64 часа)

1 семестр

1 и 2 занятия. — Поле направлений, изоклины, задача Коши.

3 занятие. — Уравнения с разделяющимися переменными.

4-занятие. — Однородное уравнение.

5 и 6 занятия. — Линейное уравнение, уравнение Бернулли, уравнение Риккати.

7 занятие. — Уравнение в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.

8, 9, 10 занятия. — Постановка задачи Коши. Существование и единственность решения.

Использование теоремы Пикара. Уравнения, допускающие понижение порядка

11 занятие. — Линейные системы с постоянными коэффициентами, матричная экспонента.

12-й 12 занятие. — Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, однородные и неоднородные. Уравнение Эйлера.

13 занятие. — Линейные уравнения с переменными коэффициентами, формула Остроградского - Лиувилля.

14 занятие. — Прямое решение краевых задач, регулярных и сингулярных.

15 занятие. — Построение функции Грина и решение с ее помощью краевых задач

16 занятие. — Собственные значения и собственные функции краевых задач.

Самостоятельная работа студентов (74 часа)

| Перечень занятий на СРС | Объем, час |
|--|------------|
| Подготовка к практическим занятиям. | 19 |
| Изучение теоретического материала, не освещаемого на лекциях | 12 |
| Подготовка к контрольным работам | 15 |
| Подготовка к сдаче заданий | 10 |
| Подготовка к экзамену | 18 |

5. Перечень учебной литературы.

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: [учебник для механико-математических специальностей университетов]; под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Олейник.— 7-е изд., испр. — Москва : Изд-во МГУ, 1984 .— 295 с. : ил. ; 21 см., (331экз.)
2. Александров В. А., Егоров А. А. Вариационное исчисление: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2000.

3. . Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник для физических специальностей университетов. — Изд. 2-е, стер.— Москва : Наука, 1969 .— 424 с.
4. Коробков М. В. Функции Ляпунова: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2008.

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

5. В. А. Александров, А. А. Егоров, Вариационное исчисление, НГУ, 2000.
6. М. В. Коробков, Функции Ляпунова, НГУ, 2008.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:

- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.1 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

7.2. Информационные справочные системы

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.
2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.1 Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль

- (1) В течение каждого семестра студент обязан сдать своему семинаристу в устной форме все задачи из заданий.
- (2) Во время каждого семестра проводится по две контрольные. Те задачи, которые решены на минус/плюс либо меньше, сдаются в устной форме своему семинаристу.
- (3) Приём задач в первом семестре прекращается 30 декабря 2020 года, во втором – 30-го мая 2021 года.

Промежуточная аттестация

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем. Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене. Он проводится в конце семестра.

- (4) Студент может сдавать экзамен только в тот день и только в той аудитории, которые указаны в расписании экзаменов для его группы.
- (5) Экзаменационный билет содержит три вопроса. Первый вопрос одинаков во всех билетах и выглядит так: «Сдача задач из заданий». Второй – теоретический вопрос из программы дисциплины, третий – задача. Список вопросов, выносимых на экзамен, выкладывается на сайт кафедры <http://www.phys.nsu.ru/ok03/exam.html> и/или <http://www.phys.nsu.ru/>.
- (6) Если студент не сдал какие-то задачи из п.1 и п.2, то, вытянув экзаменационный билет, он должен без подготовки начать отвечать на первый вопрос билета «Сдача задач из заданий».
- (7) Ответ на первый вопрос не может длиться более 30 минут. При этом студент может пользоваться своей тетрадью, в которой он решил задачи из п.1 и п.2, решения которых он не сумел рассказать во время семестра. Если за это время студент объяснил решения всех своих долгов по заданиям, то он получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам. Если за это время студент не сумел объяснить решения всех своих долгов по заданиям, то экзамен прекращается, студент отправляется на пересдачу, а в экзаменационную ведомость выставляется оценка "неудовлетворительно".

- (8) Если студент уже сдал все задачи из заданий, то вытянув билет, он пропускает первый вопрос «Сдача задач из заданий» и получает один час на подготовку к двум оставшимся вопросам билета.
- (9) При подготовке к ответу на второй и третий вопросы билета запрещается пользоваться какой-либо литературой, конспектами, шпаргалками, мобильными телефонами, планшетами, ноутбуками и т.п., а также подсказками товарищей. Нарушающие это правило будут удалены с экзамена.
- (10) Выходить из аудитории до начала ответа на билет нельзя.
- (11) Для получения оценки «удовлетворительно» необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Для получения оценки «хорошо» необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Предъявить доказательства теорем, возможно с некоторыми недочётами. Для получения оценки «отлично» необходимо решить задачу и сформулировать все определения и теоремы, содержащиеся в теоретическом вопросе. Предъявить полное со всеми выкладками доказательство теорем.
- (12) По усмотрению экзаменатора могут быть заданы дополнительные вопросы и задачи.
- (13) Также имеется список вопросов (выкладывается на сайт кафедры <http://www.phys.nsu.ru/ok03/exam.html> и/или <http://www.phys.nsu.ru/balagina> в начале семестра), знать ответы, на которые необходимо для получения положительной оценки. Это ключевые вопросы дисциплины, не знание ответа на которые сразу предполагает «неудовлетворительно», вне зависимости от того, насколько хорошо даны ответы на вопросы из билета.
- (14) Студенты, написавшие обе контрольные на пятёрки, получают «плюс балл» на экзамене (исключением является повышение на повторной промежуточной аттестации и с «неудовлетворительно»).

Проведение повторной промежуточной аттестации

- (15) Повторная промежуточная аттестация проводится по тем же правилам и тем же вопросам, что и основной экзамен.

Особые ситуации

- (16) При необходимости и наличии уважительной причины семинарист может продлить срок приёма заданий как всей группе, так и отдельному студенту.
- (17) Конфликтные и спорные ситуации, возникающие между студентом и семинаристом, урегулирует лектор. Это касается и работы в семестре, и сдачи задач, и сдачи экзамена.

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

| Индикатор | Результат обучения по дисциплине | Оценочные средства |
|--|---|--|
| ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. | Знать базовые определения и теоремы о дифференциальных уравнениях. | Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме, экзамен. |

| | | |
|--|--|---|
| <p>ОПК -1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.</p> | <p>Уметь решать конкретные обыкновенные дифференциальные уравнения, а также краевые и начальные задачи для них.</p> | <p>Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме, экзамен.</p> |
| <p>ОПК -1.3 Работает с учебной литературой в области физики и смежных с ней областях, необходимых в профессиональной деятельности.</p> | <p>Владеть общими принципами применения обыкновенных дифференциальных уравнений в фундаментальных разделах физики..</p> | <p>Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, дифференцированный зачёт в устной форме, экзамен.</p> |

10.2 Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Введение в дифференциальные уравнения».

Таблица 10.2

| Критерии и оценивания результатов обучения | Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций) | Уровень освоения компетенции | | | |
|--|---|--|---|--|---|
| | | Не сформирован (0 баллов) | Пороговый уровень (3 балла) | Базовый уровень (4 балла) | Продвинутый уровень (5 баллов) |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Полнота знаний | ОПК 1.1 | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки. | Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок. | Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы. | Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы. |
| Наличие умений | ОПК 1.2 | Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки. | Продemonстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок. |
| Наличие навыков (владение опытом) | ОПК 1.3 | Отсутствие владения материалом по темам/разделам дисциплины. Нет навыков в решении стандартных задач. Наличие грубых ошибок. | Имеется минимальный набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами. | Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами. | Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. Продemonстрированы знания по решению нестандартных задач. |

10.3 Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Задачи для сдачи в первом семестре

1. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{3y^2}{x}.$$

С помощью изоклин построить картину решений, найти области возрастания и убывания. Исследовать выпуклость решений, найти линию перегиба.

2. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{y^2 - xy}{x^2}.$$

С помощью изоклин построить картину решений. Указать, какой тип симметрии имеет картина решений. Найти области возрастания и убывания. Изобразить прямолинейные интегральные кривые. Исследовать выпуклость решений, найти линии перегиба. Сколько интегральных кривых проходит через точку (x_0, y_0) , если $x_0 \neq 0$?

3. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{4x + y + 7}{x - y + 3}.$$

4. Для уравнения

$$y' = 4y \sin^2 x - \sin 2x$$

доказать утверждения:

а) существует решение $y^*(x)$, $-\infty < x < +\infty$, ограниченное на \mathbb{R} , и такое решение только одно; дать его формулу; оценить верхнюю границу его модуля;

б) показать, что $y^*(x)$ — π -периодическая функция.

5. Найти все решения уравнения

$$xy' = y - e^x y^2.$$

6. Найти все решения уравнения

$$y \left(y^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx - x \left(y^2 + \frac{3}{x^2} \right) dy = 0.$$

7. Используя теорему Пикара, найти интервал, на котором определено решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = \cos x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Найти интервал, на котором определено непродолжаемое решение. Является ли непродолжаемое решение ограниченным?

8. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} 2yy'' - 2(y')^2 + y + 6 = 0, \\ y(5) = -2, \\ y'(5) = 1. \end{cases}$$

9. Решить уравнение

$$x (yy'' - (y')^2) = yy' + 3y^2.$$

10. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x^4 y'' - x^2 y (y')^2 + 2xy' y^2 = y^3, \\ y(2) = 3, \\ y'(2) = 1. \end{cases}$$

11. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x + 2y + 4z, \\ \dot{z} = -2x - y - z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

12. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

13. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - z, \\ \dot{y} = -4x + 2y - z, \\ \dot{z} = 16x + 4y + 6z. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

14. Найти все вещественнозначные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -12x - 8y, \\ \dot{y} = 20x + 12y. \end{cases}$$

Выписать фундаментальную систему решений, фундаментальную матрицу решений.

15. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \cos(2t) - 2 \sin(2t) \\ \dot{y} = -x + 2y + 2 \sin(2t) + 3 \cos(2t). \end{cases}$$

16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = -\frac{e^{3x}}{x^2}.$$

17. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 30y = xe^{5x}.$$

18. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 10y = \sin x + e^{3x}.$$

19. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = x^2 + e^{-2x} + \cos x.$$

20. Найти общее решение уравнения

$$x^2 y'' - xy' + y = \frac{x}{\ln x} + \ln x.$$

21. Найти общее решение уравнения

$$x^2 \ln x y'' - (\ln x + 1)xy' + (\ln x + 1)y = 2x.$$

22. При каких $a \in \mathbb{R}$ и $f(x) \in C([0, \pi])$ краевая задача

$$\begin{cases} y'' + y = f(x), \\ y(0) + ay'(0) = 0, \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение, б) не имеет решений, в) имеет бесконечно много решений?

Контрольные работы, проводящиеся в первом семестре

Контрольная работа № 1 (образец)

1. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{y}{x^2}.$$

С помощью изоклин построить картину решений, найти области возрастания и убывания. Исследовать выпуклость решений, найти линию перегиба.

2. Найти все решения уравнения

$$y' = \frac{-x - 2}{2x + y + 3}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$y' + 2y \operatorname{tg} x = 2 \frac{\cos x}{1 + x^2} \sqrt{y}.$$

4. Найти все решения уравнения

$$(1 + y^2 \cos(x) + e^{x+2y}) dx + (2y \sin(x) + 2e^{x+2y}) dy = 0.$$

Контрольная работа № 2 (образец)

1. Найти все решения уравнения $y^3 y'' + 2 = 0$.
2. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} 2xyy'' - 2yy' - 3x^2(y')^2 = 0, \\ y(1) = -1, \\ y'(1) = -1. \end{cases}$$

3. Найти все вещественнозначные решения системы при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + (\alpha - 4)y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ все решения ограничены?

4. Найти все решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - y + e^{3t} t^{1/2}, \\ \dot{y} = 4x + y + e^{3t} t^{1/3}. \end{cases}$$

Контрольные работы, проводящиеся во втором семестре

Контрольная работа № 1 (образец)

1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int_0^{\pi/3} \left((y')^2 - 9y^2 + \frac{18y}{1 + \cos^2(3x)} \right) dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + x_2 = 0, \\ 17\ddot{x}_2 + x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0, \\ \ddot{x}_3 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Дано уравнение $y'' + 100y = \cos(7\omega t) + 4$.
- а) При каких $\omega > 0$ существует единственное периодическое решение с периодом, равным периоду правой части? Выписать это решение.
- б) При каких $\omega > 0$ не существует периодических решений?
- в) При каких $\omega > 0$ существует бесконечно много периодических решений? Выписать все периодические решения и указать их периоды.

Замечание. Под периодом понимается НАИМЕНЬШЕЕ число $T > 0$, при котором выполнено $y(t + T) = y(t)$.

4. Найти производные по параметру $\frac{\partial x}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$ и $\frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$ от компонент решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 4te^{-16t}y^2 + \mu^2 \ln(1 + x^2 + y^2), & x|_{t=0} = \mu, \\ \dot{y} = 8y + e^{8t} + 5\mu x e^{8t}, & y|_{t=0} = 5\mu^2. \end{cases}$$

Контрольная работа № 2 (образец)

1. Используя определения, выяснить, является ли решение задачи Коши устойчивым по Ляпунову, симметрически устойчивым:

$$\begin{cases} \dot{y} = t^3(1 - 4t^2)y, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. Исследовать на устойчивость решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + \sin t, & x(10) = 5, \\ \dot{y} = 2x + 2y + 2z + \ln(1 + t^2), & y(10) = 6, \\ \dot{z} = -x - 5y - 2z + e^{5t}, & z(10) = 7. \end{cases}$$

3. Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2, \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1. \end{cases}$$

4. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y^6 - x^5, \\ \dot{y} = y^5 - x^3y - y^3. \end{cases}$$

5. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 4y + 4, \\ \dot{y} = x + 4y + 1. \end{cases}$$

Список экзаменационных вопросов

Зимняя сессия

1. Определение решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, определение непродолжаемого решения. Постановка задачи Коши. Формулировки теорем Пеано и Пикара. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения, определение интегральной кривой. Поле направлений, изоклины.

2. Уравнения с разделяющимися переменными, уравнения вида $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$, однородные уравнения. Примеры.

3. Линейные уравнения первого порядка. Принцип суперпозиции. Пространство решений однородного уравнения. Связь общего решения однородного уравнения с общим решением неоднородного уравнения. Метод вариации произвольной постоянной.

4. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати. Примеры.

5. Уравнения в симметричной форме. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Примеры.

6. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство (первая часть): эквивалентность задачи Коши и интегрального уравнения, единственность решения.

7. Формулировка теоремы Пикара для уравнений первого порядка. Доказательство (вторая часть): существование локального решения.
8. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений $G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$: а) G — однородная, б) G не зависит от x (автономное уравнение), в) уравнение Эйлера, г) G — обобщённо-однородная. Доказательство для случая $n = 2$.
9. Нормальные системы $Y' = F(x, Y)$. Определение решения, постановка задачи Коши. Формулировки теорем Пеано и Пикара для систем. Теорема о покидании компакта для систем. Теорема о поведении непродолжаемых решений в полосе. Теорема Уинтнера.
10. Линейные системы. Теорема Пикара для линейных систем (с доказательством). Принцип суперпозиции. Связь общего решения однородной системы с общим решением неоднородной системы.
11. Линейные однородные системы. Размерность пространства решений. Определения ФСР, ФМР. Общее решение линейной однородной системы.
12. Фундаментальные матрицы и их свойства: невырожденность ФМР, дифференциальное уравнение для ФМР, связь между двумя ФМР.
13. Матрица Вронского. Формула Остроградского – Лиувилля для систем (вывод формулы для случая $n = 2$). Эквивалентность линейной независимости в точке и на интервале для решений линейной однородной системы.
14. Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольной постоянной.
15. Решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами $Y' = AY$. Матричная экспонента.
16. Сведение уравнения высокого порядка к системе. Связь решений уравнения и соответствующей системы. Теорема Пикара для уравнений высокого порядка. Теория линейных уравнений высокого порядка как следствие теории линейных систем: пространство решений однородного уравнения, определения ФСР, ФМР, формула Остроградского – Лиувилля, связь общего решения однородного уравнения с общим решением неоднородного уравнения, метод вариации произвольной постоянной.
17. Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Формула сдвига.
18. Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о виде решений, соответствующих корню характеристического полинома кратности k .
19. Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о кратности корня характеристического полинома.
20. Линейные однородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Построение ФСР.
21. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольной постоянной. Частное решение в случае неоднородности в виде квазиполинома. Метод комплексных амплитуд. Примеры.
22. Линейные уравнения Эйлера. Примеры.
23. Постановка краевой задачи. Условие однозначной разрешимости (с доказательством). Условия, при которых краевая задача имеет бесконечно много решений, не имеет решений.
24. Постановка краевой задачи. Решение задачи в случае неоднозначной разрешимости.
25. Постановка краевой задачи. Сведение задачи (α, β, f) к задаче $(0, 0, \tilde{f})$.
26. Постановка краевой задачи. Решение задачи $(0, 0, f)$ в случае однозначной разрешимости. Функция Грина, четыре ее свойства.
27. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Сведение к краевой задаче для уравнения, не содержащего первую производную.
28. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Размерность пространства собственных функций, соответствующих одному собственному значению. Существование действительной собственной функции, соответствующей действительному собственному значению.
29. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Ортогональность с весом собственных функций. Вещественность собственных значений.
30. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Теорема об односторонней ограниченности множества собственных значений (доказательство для случая $y(a) = y(b) = 0$).
31. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции краевых задач. Количество собственных значений, их расположение (без доказательства). Теорема Стеклова: разложение дважды непрерывно дифференцируемых функций по собственным функциям (без доказательства).

Летняя сессия

1. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка задачи, определение локального и глобального экстремума.

Форма экзаменационного билета представлена на рисунке

| |
|---|
| <p>МИНОБРНАУКИ РОССИИ</p> <p><i>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования</i> «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» <i>(Новосибирский государственный университет, НГУ)</i></p> <p>Физический факультет</p> |
| <p>ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № _____</p> <p>1 2 3</p> <p>Составитель _____ /Ф.И.О. преподавателя/ (подпись)</p> <p>« ____ » _____ 20 ____ г.</p> |

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

Аннотация

к рабочей программе дисциплины «Введение в дифференциальные уравнения»

Направление: **03.03.02 Физика**

Направленность (профиль): **Общая и фундаментальная физика**

Программа курса «Введение в дифференциальные уравнения» составлена в соответствии с требованиями СУОС по направлению подготовки **03.03.02 Физика, направленность «Общая и фундаментальная физика»**, а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ. Дисциплина реализуется на физическом факультете Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ) кафедрой высшей математики физического факультета. Дисциплина изучается студентами второго курса физического факультета.

Цели курса – дать студентам базовые знания, умения и навыки по обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые, как известно, являются основным языком и инструментом при изучении всех разделов классической физики и многих разделов квантовой физики.

Дисциплина нацелена на формирование общепрофессиональной компетенции:

| Результаты освоения образовательной программы (компетенции) | Индикаторы | Результаты обучения по дисциплине |
|--|---|--|
| ОПК-1 -Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности. | ОПК-1.1 -Применяет теоретические и методологические основы физико-математических дисциплин, математический аппарат для решения профессиональных задач. ОПК-1.2 -Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин в своей профессиональной деятельности. ОПК -1.3. Обладает знаниями, необходимыми для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях. | Знать базовые определения и теоремы о дифференциальных уравнениях. Уметь решать конкретные обыкновенные дифференциальные уравнения, а также краевые и начальные задачи для них. Владеть общими принципами применения обыкновенных дифференциальных уравнений в фундаментальных разделах физики. |

Курс рассчитан на два семестра. Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

Текущий контроль: контрольные работы, задания для самостоятельного решения.

Промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет **144** академических часа/
4 зачетных единиц

