

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»  
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

**Физический факультет  
Кафедра высшей математики ФФ**



**Рабочая программа дисциплины**

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

направление подготовки: **03.03.02 Физика**  
направленность (профиль): **Общая и фундаментальная физика**

Форма обучения

**Очная**

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	144	32	32	8	48	18	4			2
<b>Итого</b>	<b>144</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>8</b>	<b>48</b>	<b>18</b>	<b>4</b>			<b>2</b>
Всего 144 часа / 4 зачётные единицы, из них: - контактная работа 78 часов										
Компетенции ОПК-1										

Ответственный за образовательную программу,  
д.ф.-м.н., проф.

С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2022

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы. ....	3
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы. ....	3
3. Трудоемкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу. ....	4
4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий. ....	4
5. Перечень учебной литературы. ....	8
6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся. ....	8
7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины. ....	8
8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине. ....	8
9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине. ....	9
10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине. ....	9

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Учебный курс «Теория функций комплексного переменного» имеет своей целью дать студенту базовые знания по таким разделам классической теории функций комплексного переменного, как основные свойства аналитических функций, интегрирование функций комплексного переменного, разложение аналитических функций в ряды, элементы теории вычетов, понятие конформного отображения, а также по двум важным приложениям: операционному исчислению, основанному на преобразовании Лапласа и асимптотическим оценкам, необходимые для освоения теоретических основ физических курсов, читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
<b>ОПК-1</b> -Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности, в том числе в сфере педагогической деятельности.	<p><b>ОПК-1.1</b>-Применяет теоретические и методологические основы физико-математических дисциплин, математический аппарат для решения профессиональных задач.</p> <p><b>ОПК-1.2</b>-Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин в своей профессиональной деятельности.</p> <p><b>ОПК -1.3.</b> Обладает знаниями, необходимыми для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.</p>	<p><b>Знать</b> базовые определения и теоремы по теории аналитических функций комплексного переменного.</p> <p><b>Уметь</b> решать конкретные задачи по теории аналитических функций комплексного переменного, такие как: вычислять интегралы с помощью вычетов, и строить элементарные конформные отображения плоских областей.</p> <p><b>Знать</b> общие принципы их применения в фундаментальных разделах физики.</p>

Учебный курс «Теория функции комплексного переменного» читается классическим способом: проводятся потоковые лекции, а также практические занятия по группам, в каждой из которых не более 15-и студентов. Все практические занятия проводятся в интерактивной форме. Самостоятельная работа студентов, усвоение ими материала курса, приобретение ими базовых знаний и умений контролируются еженедельно на приёме заданий, проводимом преподавателем в устной форме с каждым студентом индивидуально.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

В результате изучения курса студенты физического отделения физического факультета НГУ должны усвоить основы теории аналитических функций, конформных отображений, элементарных асимптотических методов и операционного исчисления (преобразования Лапласа), а также освоить основные методы решения стандартных задач из этих разделов высшей математики. Кроме того, у студентов должны сформироваться способность применять математические методы для решения физических задач; способность использовать в познавательной и

профессиональной деятельности базовые знания в области математики; способность приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

Для успешного освоения курса «Теория функций комплексного переменного» студенты должны обладать предварительными знаниями основ математического анализа и линейной алгебры.

**3. Трудоемкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.**

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	144	32	32	8	48	18	4			2
<b>Итого</b>	<b>144</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>8</b>	<b>48</b>	<b>18</b>	<b>4</b>			<b>2</b>
Всего 144 часа / 4 зачётные единицы, из них: - контактная работа 78 часов										
Компетенции ОПК-1										

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

- текущий контроль успеваемости: задания для самостоятельного решения;
- промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

- занятия лекционного типа – 32 часа;
- практические занятия – 32 часа;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 48 часов;
- промежуточная аттестация (подготовка к сдаче экзамена, консультации и экзамен) – 24 часа.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, консультации, экзамен) составляет 78 часов.

**4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачётные единицы, 144 академических часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)						Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы			Сам. работа во время занятий (не включая период сессии)	Сам. работа во время промежуточной аттестации		
				Лекции	Практические занятия	Прием заданий				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	Аналитические функции комплексного переменного	1-2	13	4	4		5			
2	Интегрирование функции комплексного переменного.	3-4	13	4	4		5			
3	Ряды аналитических функций	5-7	22	6	6		10			
4	Вычеты	8-10	22	6	6	2	8			
5.	Приложение вычетов к вычислению несобственных интегралов	11-12	13	4	4		5			
6.	Дробно-линейное отображение	13	12	2	2	2	6			
7.	Преобразование Лапласа	14	12	2	2	2	6			
8.	Введение в асимптотические методы	15-16	13	4	4	2	3			
9.	Самостоятельная работа в период подготовки к промежуточной аттестации		18					18		
10	Экзамен		6						4	2
<b>Всего</b>			<b>144</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>8</b>	<b>48</b>	<b>18</b>	<b>4</b>	<b>2</b>

## **Программа и основное содержание лекций (32 часа)**

### **1. Аналитические функции комплексного переменного (4 ч.)**

Комплексные числа. Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка. Производная, условия Коши-Римана. Выражение производной через производные вещественной и мнимой части функции в декартовых и полярных координатах. Теорема об обратной функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Сопряженные гармонические функции. Элементарные многозначные функции и их однозначные ветви.

### **2. Интегрирование функции комплексного переменного (4 ч.)**

Определение интеграла и его свойства. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Теорема о существовании первообразной. Теорема о среднем для аналитических функций. Принцип максимума модуля аналитической функции. Максимум гармонической функции. Теорема Мореры.

### **3. Ряды аналитических функций (6 ч.)**

Первая и вторая теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Степенные ряды, радиус сходимости. Теорема Тейлора. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Теорема единственности. Разложение аналитической в кольце функции в ряд Лорана: существование и единственность разложения, неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

### **4. Вычеты (6 ч.)**

Изолированные особые точки и их типы. Ряд Лорана аналитической функции в окрестностях особой точки. Критерии устранимой особой точки, полюса, существенно особой точки. Определение вычета в конечной и бесконечно удаленной точке. Вычисление вычета в конечной особой точке и бесконечно удаленной точке. Основная теорема теории вычетов. Теорема о сумме вычетов. Теорема о количестве нулей и полюсов. Принцип аргумента. Теорема Руше.

### **5. Приложение вычетов к вычислению несобственных интегралов (4 ч.)**

Интегралы от рациональных функций. Лемма Жордана. Интегралы Фурье. Интегралы со степенным и логарифмическим весом. Интегралы в смысле главного значения.

### **6. Дробно-линейное отображение (2 ч.)**

Определение дробно-линейного отображения. Свойства дробно-линейного отображения: круговое свойство, сохранение симметрии. Существование и единственность дробно-линейного отображения, переводящего 3 заданные точки в 3 заданные точки. Дробно-линейные отображения классических областей. Понятие конформного отображения. Теорема Римана. Принцип соответствия границ.

### **7. Преобразование Лапласа (2 ч.)**

Аналитичность интеграла, зависящего от параметра. Аналитичность изображения. Восстановление оригинала по изображению (первая и вторая теоремы разложения).

## 8. Введение в асимптотические методы (4 ч.)

Постановка задачи. Лемма об экспоненциальной оценке. Лемма Ватсона. Главный член асимптотики интеграла Лапласа при отсутствии и наличии стационарной точки. Лемма Эрдейи. Главный член асимптотики интеграла Фурье.

### Программа практических занятий (32 часа)

1. Комплексные числа и действия над ними. Производная. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля. (2 ч.)
2. Отыскание гармонической функции, сопряженной к данной гармонической функции. Выделение однозначных ветвей элементарных многозначных функций. (2 ч.)
3. Непосредственное вычисление интегралов от функций комплексного переменного. Вычисление интегралов при помощи интегральной формулы Коши. (2 ч.)
4. Отыскание первообразной аналитической функции. Нахождение максимума модуля аналитической функции на замыкании ограниченной области. (2 ч.)
5. Вычисление радиуса сходимости степенного ряда, исследование ряда на границе круга сходимости. (2 ч.)
6. Разложение элементарных аналитических функций в степенной ряд. (2 ч.)
7. Разложение аналитической в кольце функции в ряд Лорана. (2 ч.)
8. Изолированные особые точки аналитических функций. Вычисление вычетов в этих точках. Вычисление вычета бесконечно удаленной точки. (2 ч.)
9. Вычисление интегралов от аналитических функций комплексного переменного с помощью основной теоремы теории вычетов. (2 ч.)
10. Применения теоремы Руше к определению числа нулей аналитической функции в заданной области. (2 ч.)
11. Вычисление интегралов от рациональных функций и интегралов Фурье. (2 ч.)
12. Вычисление интегралов со степенным и логарифмическим весом и интегралов в смысле главного значения. (2 ч.)
13. Построение дробно-линейного отображения, переводящего три заданные точки в три заданные точки. Применение свойств дробно-линейного отображения и принципа соответствия границ для отыскания образов областей комплексной плоскости при дробно-линейном отображении. (2 ч.)
14. Восстановление оригинала по изображению с помощью первой и второй теорем разложения. (2 ч.)
15. Вычисление главного члена асимптотики интегралов Лапласа. (2 ч.)
16. Вычисление главного члена асимптотики интегралов Фурье. (2 ч.)

### Самостоятельная работа студентов (74 часа)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям.	24
Изучение теоретического материала, не освещаемого на лекциях	20
Подготовка к сдаче заданий	12
Подготовка к экзамену	18

## **5. Перечень учебной литературы.**

1. Александров В. А. Преобразование Лапласа. Методические указания. НГУ, 1992.
2. Волковыский Л.И. и др. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1992. (101 экз.)
3. Евграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1972.(152 экз.)
4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. (55 экз.)
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. (113 экз.)

## **6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.**

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

1. Александров В. А. Преобразование Лапласа. Методические указания. НГУ, 1992.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:

- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

### **7.1 Современные профессиональные базы данных**

Не используются.

### **7.2. Информационные справочные системы**

Не используются.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.**

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.



## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.

2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

## **10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.**

### **10.1 Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине**

#### ***Текущий контроль***

(1) В течение семестра студенту предлагается решить и сдать в устной форме 30 задач из заданий.

(2) За каждую задачу, полностью сданную в срок, студент получает 5 баллов. За задачу, сданную с недельным опозданием, студент получает один балл, с большим опозданием – ноль баллов.

(3) В конце семестра преподаватель оценивает работу каждого студента из своей группы и добавляет ему от 0 до 50 баллов в зависимости от того, насколько активно студент решал задачи у доски и т. п.

(4) Сумма баллов, начисленных студенту в соответствии с пунктами (2) и (3), называется "баллами за работу в семестре" и составляет максимум 200 баллов. Она сообщается всем студентам до проведения консультации, предшествующей промежуточной аттестации, и учитывается при выставлении оценки за семестр.

#### ***Промежуточная аттестация***

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем.

Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене. Экзаменационный билет содержит три теоретических раздела из программы курса: определения (3 понятия), формулировки теорем (2 теоремы), доказательство (1 доказательство) и задачу.

Баллы за ответы на вопросы билета начисляются следующим образом: первый раздел-максимум 120 баллов, второй раздел-максимум 130 баллов, третий раздел-максимум 200 баллов, задача-50 баллов. Если студент не знает хотя бы одно определение из первого раздела, то он получает оценку «неудовлетворительно».

Таким образом, за ответ на экзамене студент может получить до 500 баллов включительно, что в сумме с баллами за работу в семестре составляет максимум 700 баллов.

Итоговая оценка по промежуточной аттестации выставляется по пятибалльной шкале следующим образом:

«отлично» — если сумма баллов не меньше 600 (продвинутый уровень освоения компетенции ОПК-1);

«хорошо» — если сумма баллов не меньше 450 (базовый уровень освоения компетенции ОПК-1);

«удовлетворительно» — если сумма баллов не меньше 300 (пороговый уровень освоения компетенции ОПК-1);

«неудовлетворительно» - если сумма баллов меньше 300 (компетенция не сформирована).

Примечание: если для получения определенной оценки студенту не хватило не более 50 баллов, ему предлагается решить дополнительную задачу, за которую он может получить до 50 баллов включительно.

### Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	Результат обучения по дисциплине	Оценочные средства
<p><b>ОПК-1.1</b>-Применяет теоретические и методологические основы физико-математических дисциплин, математический аппарат для решения профессиональных задач.</p> <p><b>ОПК-1.2</b>-Использует терминологию и понятийный аппарат базовых физико-математических дисциплин в своей профессиональной деятельности.</p>	<p>Знать основные понятия булевой алгебры, устройство и способы производства цифровых схем различных технологий: ТТЛ, КМОП, ECL, элементы цифровой схемотехники, способы реализации запоминающих устройств, существующие технические и физические ограничения, основные современные методы обработки цифровой информации, устройство современных программируемых цифровых устройств и области их применения.</p>	<p>Задачи для самостоятельного решения, дифференцированный зачёт в устной форме.</p>
<p><b>ОПК -1.3.</b> Обладает знаниями, необходимыми для преподавания физико-математических дисциплин в средних специальных учебных заведениях.</p>	<p>Уметь строить простые цифровые схемы.</p>	<p>Задачи для самостоятельного решения, дифференцированный зачёт в устной форме.</p>

### 10.2 Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Теория функций комплексного переменного».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)

	(показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)				
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК 1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК 1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.
Наличие навыков (владение опытом)	ОПК 1.3	Отсутствие владения материалом по темам/разделам дисциплины. Нет навыков в решении стандартных задач. Наличие грубых ошибок.	Имеется минимальный набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.	Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.	Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. Продемонстрированы знания по решению нестандартных задач.

### 10.3 Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

#### Задания по теории функций комплексного переменного Третий семестр

Задание 1 (сдать до 24 октября)

1. Найдите все корни уравнения  $\operatorname{sh} iz - i\sqrt{3} \cos z + 1 = 0$  и укажите ближайший из них к точке  $z = 0$ .
2. Найдите аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$ , если  $f(0) = 4i$ ,  $f(i) = i$ ,  $\operatorname{Re} f'(z) = 3(x^2 - y^2) - 4y$ .
3. Докажите, что функция  $f(z) = \sqrt[3]{(1-z)^2 z}$ , допускает выделение однозначных ветвей в комплексной плоскости с разрезами по отрезку  $[0, 1]$  вещественной оси и найдите значение в точке  $z = i$  той ветви, которая принимает значение  $-\sqrt[3]{4}$  в точке  $z = -1$ .
4. Найдите дробно-линейное отображение, переводящее точки  $\infty, -i, 1$  соответственно в точки  $-i, 0, 1$ , и найдите образ полукруга

$$|z| < 2, \operatorname{Im} z > 0$$

при этом отображении.

5. Найдите образ области  $|z| > 1$  с выброшенными интервалами  $[-2, -1], [1, +\infty)$  действительной оси при отображении функцией Жуковского  $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ . Найдите также  $g(i)$ , где функция  $g(z)$  осуществляет отображение, обратное данному.

6. Используя интегральную формулу Коши, вычислите интеграл (контур обходится в положительном направлении)  $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ , где  $C$  - окружность  $|z| = r$ ,  $|a| < r < |b|$

7. Установив однозначность функции  $f(z) = z \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ , вычислите интеграл  $\int_C f(z) dz$ , где  $C$  - положительно ориентированная окружность  $|z| = 1$  (используйте разложение  $f(z)$  по степеням  $z$ .)

8. Дана функция  $f(z) = \frac{1}{z^3 - 6z^2 + 10z - 8}$ . Укажите максимальное кольцо, содержащее точку  $z = 3$ , в котором эта функция допускает разложение в ряд Лорана по степеням  $z + 1$ , и найдите это разложение.

9. Разложите в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0 = 2$  функцию  $f(z) = (z + 1)^2 \cos \frac{z}{z-2}$ , и найдите значение главной части этого разложения при  $z = 1$ .

10. Выясните, существует ли функции  $f(z)$ , аналитическая в окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая условию:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n + \cos \pi n}{3n^2 + 2}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Задание 2 (сдать до 30 ноября)

В следующих задачах для заданной функции  $f(z)$  требуется найти особые точки, определить их тип и в изолированных точках вычислить вычеты. Кроме того, необходимо исследовать поведение функции на бесконечности.

$$1. f(z) = \frac{(z^2 + 1) \sin(1/z)}{(3z + 1)^2}$$

$$2. f(z) = (z + 2)^2 \cos \frac{z}{1+z}$$

$$3. f(z) = \frac{1}{1 - \cos z} - \frac{2}{z^2}$$

Вычислите интегралы, считая, что контуры проходятся против часовой стрелки:

$$4. \int_{|z-1|=2} \frac{\sin(1/z^2)}{4z^2 + i} dz$$

$$5. \int_{|z+1|=1/2} \frac{z^2 dz}{\sin^2 3z}$$

$$6. \int_{|z|=5} \frac{(z-2) dz}{z(\cos(1/z) - 1)}$$

7. Вычислите интеграл по границе области, считая, что граница области проходится так, что сама область остается слева:

$$\int_{\partial D} \frac{ze^{z^2} dz}{2 - 2iz - z^2}, \quad D = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}.$$

8. Интегрируя функцию  $f(z) = \frac{e^{-2z\pi i}}{\operatorname{ch} z\pi}$  по границе прямоугольника

$$p = \{|x| \leq R, 0 \leq y \leq 1\}$$

и устремляя  $R$  к  $\infty$ , вычислите интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2x\pi t} dx}{\operatorname{ch} x\pi}$ . Сходимость интеграла и предельный переход нужно обосновать.

Вычислите интегралы:

$$9. \int_0^{2\pi} e^{\sin \varphi} \cos(n\varphi + \cos \varphi) d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$10. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x^3 + 4x}$$

$$11. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

$$12. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x dx}{(x+4)(x+2)}$$

Найдите главное значение интеграла:

$$13. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+9)(x+2)}$$

14. Используя теорему Руше, найдите количество корней уравнения  $\frac{n(z-2)}{z+5} + 2z^n + 7 = 0$  в круге  $|z| < 4$ , где  $n=0, 1, 2, \dots$ .

### Задание 3 (сдать до 30 декабря)

1. Используя первую теорему разложения, выразите через функцию Бесселя соответствующего порядка оригинал изображения  $F(p) = e^{-\frac{1}{p}} - 1$ . (Одно из определений функции Бесселя  $J_n(z)$ :

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{(k)!(k+n)!}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ ).

2. Используя вторую теорему разложения, восстановите оригинал по изображению  $F(p) = \frac{1}{p^2 \operatorname{sh} p}$ .

3. Найдите при  $\lambda \rightarrow +\infty$  главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int_{-1}^1 (3-x-2x^2)^\lambda e^{-x} dx.$$

4. Используя лемму Ватсона, найдите при  $\lambda \rightarrow +\infty$  асимптотическое разложение интеграла Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t^2} \frac{\sin^2 2t}{t^2} dt.$$

5. Используя лемму Эрдейи, найдите при  $\lambda \rightarrow +\infty$  асимптотическое разложение интеграла

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{(x+1)e^{i\lambda x^2} dx}{1+x^4}.$$

6.

Найдите при  $\lambda \rightarrow +\infty$  главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{(2x+3) \cos \lambda x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

## Список вопросов, выносимых на экзамен.

### Третий семестр

1. Сфера Римана. Стереографическая проекция, ее формулы и свойства. Бесконечно удалённая точка. Расширенная комплексная плоскость.
2. Дифференцирование функций комплексного переменного. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Аналитические функции.
3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Теорема об обратной функции. Понятие конформного отображения.
4. Сопряженные гармонические функции. Гармоничность действительной и мнимой частей аналитической функции. Существование для заданной гармонической функции, сопряженной к ней.
5. Многозначные функции и точки ветвления, ветви функций  $\sqrt[n]{z}$  и  $\operatorname{Ln} z$ . Понятие римановой поверхности.
6. Линейные и дробно-линейные функции. Конформность этих функций. Консерватизм углов.
7. Теорема о существовании и единственности дробно-линейного отображения. Инвариантность ангармонического отношения при дробно-линейных отображениях.
8. Круговое свойство для дробно-линейных отображений. Симметрия относительно окружности.
9. Функция Жуковского.
10. Интеграл функции комплексного переменного по ориентированной кривой. Корректность определения.
11. Общие свойства интеграла функции комплексного переменного по ориентированной кривой, связь с криволинейными интегралами.
12. Интегральные теоремы Коши для односвязной и конечносвязной области.
13. Интегральная формула Коши.
14. Интеграл типа Коши, интегральные представления для производных, бесконечная дифференцируемость аналитической функции.
15. Первообразная аналитической функции. Вспомогательная теорема. Формула Ньютона - Лейбница. Теорема Мореры.
16. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля аналитической функции.
17. Первая теорема Вейерштрасса о рядах аналитических функций.
18. Вторая теорема Вейерштрасса о рядах аналитических функций.
19. Степенные ряды: первая теорема Абеля, круг и радиус сходимости, аналитичность суммы степенного ряда.
20. Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.
21. Внутренняя теорема единственности.
22. Теорема о разложении аналитической в кольце функции в ряд Лорана. Главная и правильная части ряда Лорана.
23. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема Лиувилля.
24. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Бесконечно удалённая особая точка. Строение ряда Лорана в окрестности устранимой особой точки, полюса и существенно особой точки.
25. Вычет в конечной особой точке. Формулы для нахождения вычета в полюсе. Основная теорема теории вычетов.
26. Вычет в бесконечно удалённой точке. Теорема о сумме вычетов.
27. Тригонометрические интегралы. Интегралы по вещественной оси.
28. Интегралы вида преобразования Фурье. Лемма Жордана.
29. Интегрирование рациональных выражений со степенным «весом». Вычисление интегралов с логарифмическими особенностями.
30. Вычисление интегралов в смысле главного значения.
31. Теорема о «логарифмическом вычете». Принцип аргумента.

32. Теорема Руше. Доказательство основной теоремы алгебры.
33. Понятие аналитического продолжения функции. Степенные ряды как средство аналитического продолжения. Аналитическое продолжение гамма-функции. Интегралы, зависящие от параметра.
34. Аналитичность изображения. Восстановление оригиналов при помощи теорем разложения.
35. Асимптотические последовательности и ряды. Асимптотический нуль. Единственность асимптотического разложения. Арифметические операции с асимптотическими разложениями.
36. Интегрирование действительных асимптотических разложений.
37. Интеграл Лапласа. Лемма Ватсона.
38. Нахождение главного члена асимптотики интеграла Лапласа в типичных случаях.
39. Интеграл Фурье. Асимптотика интеграла Фурье с фазовой функцией без стационарных точек.
40. Лемма Эрдейи.
41. Нахождение главного члена асимптотики интеграла Фурье с фазовой функцией с невырожденной стационарной точкой.
42. Метод перевала: перевальный контур; линия наискорейшего спуска; главный член асимптотики.

### Пример билета для экзамена

#### Третий семестр Билет № 1

1. Сдача задач из заданий.
2. Определение сферы Римана.
3. Определение ряда Лорана.
4. Определение асимптотической последовательности.
5. Формулировка теоремы Мореры.
6. Формулировка принципа аргумента.
7. Доказательство принципа аргумента.
8. Найдите количество корней уравнения в левой полуплоскости  $z^4+z^3+4z^2+2z+3=0$ .

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

**Лист актуализации рабочей программы  
по дисциплине «Теория функций комплексного переменного»  
по направлению подготовки 03.03.02 Физика  
Профиль «Общая и фундаментальная физика»**

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного