МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет
Кафедра высшей математики ФФ

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФ, д.ф.-м.н
В.Е.Блинов
«26» 08 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Направление: 03.03.02 Физика
Направленность (профиль): Физическая информатика

Форма обучения
Очная

Семестр	**Общий объем**	**Виды учебных занятий (в часах)**				**Промежуточная аттестация (в часах)**				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	216	32	64	16	80	18	4			2
Всего 216 часов / 6 зачётных единиц, из них: - контактная работа 118 часов										
Компетенции ОПК-1										

Ответственный за образовательную программу
д.ф.-м.н., проф. С. В. Цыбуля

Новосибирск, 2022

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Цель учебной дисциплины «Уравнения математической физики» – дать студентам базовые знания по некоторым разделам теории уравнений в частных производных, необходимым для освоения теоретических основ физических дисциплины «Основы вычислительной физики», «Физика конденсированного состояния вещества» и «Физические основы микроэлектроники», читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета. Дисциплина нацелена на формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.	**ОПК-1.1.** Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях. **ОПК -1.2.** Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	**Знать** основные типы уравнений математической физики, постановку начальных и краевых задач и классические теоремы об их разрешимости. **Уметь** применять различные методы решения начальных и краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

В результате изучения дисциплины студенты физического факультета НГУ должны освоить методы решения начальных и краевых задач для основных типов дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме того, у обучающихся должно сформироваться умение применять методы теории дифференциальных уравнений для решения физических задач; умение использовать базовые знания о дифференциальных уравнениях в познавательной и профессиональной деятельности; умение приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

Для успешного освоения дисциплины «Уравнения математической физики» студенты должны обладать предварительными знаниями основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, основ функционального анализа и теории функций, а также теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В свою очередь, учебная дисциплина «Уравнения математической физики» предоставляет обучающимся теоретические знания и практические навыки, необходимые для изучения дисциплин «Основы вычислительной физики», «Физика конденсированного состояния вещества» и «Физические основы микроэлектроники».

3. **Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.**

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)				Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем			Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	216	32	64	16	80	18	4			2
Всего 216 часов / 6 зачётных единиц, из них: - контактная работа 118 часов										
Компетенции ОПК-1										

Реализация дисциплины предусматривает практическую подготовку при проведении следующих видов занятий, предусматривающих участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью: лекции, практические занятия, прием заданий, самостоятельная работа студента и её контроль преподавателями с помощью заданий, консультации, экзамен.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

- текущий контроль успеваемости: контрольные работы, задания для самостоятельного решения;
- промежуточная аттестация: экзамен.

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

- занятия лекционного типа – 32 часа;
- практические занятия – 64 часа;
- прием заданий - 16 часов;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 80 часов;
- промежуточная аттестация (подготовка к сдаче экзамена, консультации и экзамен) – 24 часа.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, консультации, экзамен) составляет 118 часов.

4. **Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведённого на них количества академических часов и видов учебных занятий.**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачётных единиц, 216 академических часов.

№ п/п	**Раздел дисциплины**	**Неделя семестра**	**Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)**						**Консультации перед экзаменом (часов)**	**Промежуточная аттестация (в часах)**
			Всего	Аудиторные часы: Лекции	Аудиторные часы: Практические занятия	Сам. работа во время занятий (не включая период сессии)	Сам. работа во время промежуточной аттестации	Прием заданий		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Решение задачи Коши. Классификация линейных уравнений второго порядка.	1-2	24	4	8	8		4		
2.	Гиперболические уравнения. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Даламбера, Кирхгофа, Пуассона. Метод разделения переменных для решения начально –краевых задач.	3-7	70	10	24	32		4		.
3.	Эллиптические уравнения. Свойства гармонических функций. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Функция Грина. Применение потенциалов к решению краевых задач.	8-12	54	10	18	22		4		
4.	Параболические уравнения. Применение интегральных преобразований для решения задачи Коши и начально–краевых задач для уравнения теплопроводности.	13-14	24	4	8	8		4		
5.	Системы линейных и квазилинейных уравнений первого порядка. Постановка начально–краевых задач для гиперболических систем.	15-16	20	4	6	10				
7.	Промежуточная аттестация (Экзамен)		24				18		4	2
Всего			**216**	**32**	**64**	**80**	**18**	**16**	**4**	**2**

Программа и основное содержание лекций (32 часа)

Раздел 1. Линейные уравнения в частных производных первого и второго порядка (4 часа)

Линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики и первые интегралы. Постановка и решение задачи Коши. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Классические уравнения математической физики. Постановка основных задач. Корректность. Пример Адамара.

Раздел 2. Гиперболические уравнения (10 часов)

Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера. Распространение волн в пространстве. Сферические волны. Принцип Гюйгенса. Формула Кирхгофа. Метод спуска, формула Пуассона. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения. Принцип Дюамеля для решения неоднородного уравнения. Начально–краевые задачи для волнового уравнения. Метод разделения переменных. Многомерная задача Штурма — Лиувилля. Разделение переменных для волнового уравнения в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат.

Раздел 3. Эллиптические уравнения (10 часов)

Фундаментальное решение оператора Лапласа. Интегральное представление решения уравнения Пуассона через потенциалы. Функции Грина задачи Дирихле и задачи Неймана. Формулы Пуассона для шара и полупространства. Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип максимума, теорема о потоке тепла. Единственность решения внутренней задачи Дирихле и неединственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Регулярность гармонических функций в бесконечно удаленной точке. Единственность решения внешних задач для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Ньютонов потенциал, потенциалы простого и двойного слоя, их основные свойства. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Доказательство теорем существования и единственности решения краевых задач с помощью теоремы Фредгольма. Применение потенциалов к решению краевых задач для оператора Лапласа.

Раздел 4. Параболические уравнения (4 часа)

Задача Коши для уравнения теплопроводности. Применение интегральных преобразований для построения фундаментального решения уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона и функция ошибок. Начально–краевые задачи для уравнения теплопроводности. Построение функции Грина. Неоднородная краевая задача на полупрямой, принцип Дюамеля.

Раздел 5. Системы уравнений первого порядка с частными производными (4 часа)

Системы линейных и квазилинейных уравнений первого порядка. Уравнение характеристических нормалей. Характеристические поверхности. Постановка задачи Коши. Система типа Коши – Ковалевской. Классификация систем квазилинейных уравнений первого порядка. Приведение гиперболической системы в двумерном случае к каноническому виду. Инварианты Римана. Соотношения на характеристиках. Симметрические t– гиперболические системы по Фридрихсу. Интеграл энергии и построение области единственности решения задачи Коши. Уравнение Гамильтона-Якоби. Постановка смешанных задач для гиперболических систем.

Программа практических занятий (64 часа)

1, 2. Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка. Характеристики. Задача Коши.
3, 4. Уравнения второго порядка. Классификация. Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду. Общее решение уравнения.
5. Задачи Коши и Гурса для гиперболических уравнений.
6. Формула Даламбера и метод бегущих волн. Решение задач на полупрямой.
7. Сферически–симметричные решения трехмерного волнового уравнения. Плоские волны.
8. Задача Коши для двумерного и трехмерного волнового уравнения.
9. *Контрольная работа.*
10. Метод Фурье решения задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа на плоскости.
11, 12. Метод Фурье решения смешанных задач для волнового уравнения. Вынужденные колебания и неоднородные граничные условия.
13. Метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности.
14, 15. Сферические гармоники и собственные функции уравнения Гельмгольца.
16, 17. Колебания шара и цилиндра.
18. *Контрольная работа.*
19. Построение функции Грина задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа на плоскости. Формулы Пуассона для круга и полуплоскости.
20. Построение функции Грина задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в пространстве. Формулы Пуассона для шара и полупространства.
21. Построение функции Грина для оператора Гельмгольца.
22. Ньютонов потенциал, его вычисление и свойства.
23, 24. Вычисление потенциалов простого и двойного слоя.
25. Применение потенциалов к решению краевых задач.
26. *Контрольная работа*.
27. Применение преобразования Фурье к решению различных задач математической физики. Построение фундаментального решения уравнения теплопроводности. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона.
28, 29. Применение преобразования Лапласа к решению различных задач математической физики.
30. Системы линейных уравнений первого порядка. Классификация. Характеристики и соотношения на них. Канонический вид гиперболической системы. Римановы инварианты. Общее решение.
31. Задача Коши и смешанная задача для гиперболических систем. Правильная постановка граничных условий.
32. *Контрольная работа.*

Самостоятельная работа студентов (98 часов)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям	32
Подготовка к контрольным работам	24
Подготовка к сдаче заданий	24
Подготовка к экзамену	18

5. Перечень учебной литературы.

1. В. С. Владимиров. Уравнения математической физики: учебник для студентов физико-технических специальностей вузов / Изд. 5-е, доп. - Москва: Наука, 1988. - 512 с. (196 экз.).

2. С. К. Годунов. Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей университетов / Изд. 2-е, испр. и доп. - Москва: Наука, 1979. - 391 с. (42 экз.).
3. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики: [в 4 т.] / пер. с англ. А. К. Погребкова, В. Н. Сушко; под ред. М. К. Поливанова; с предисл. Н. Н. Боголюбова. Т. 1.- Москва: Мир, 1978. - 395 с. (38 экз.).
4. Принципы современной математической физики / Пер. с англ. В.Е. Кондрашова и др.; под ред. И.Д. Софронова. [1]. М.: Мир, 1982. - 486 с. (50 экз.).

6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

Самостоятельная работа студентов поддерживается следующими учебными пособиями:

5. В. А. Александров. Преобразование Фурье: учебное пособие: [для студентов физического факультета НГУ] / М-во образования Рос. Федерации, Новосиб. гос. ун-т, Физ. Фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2002. - 62 с. (151 экз.).
6. В. А. Александров. Обобщённые функции: учебное пособие: [для студентов 2-го курса физического факультета НГУ] / Федер. агентство по образованию, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2005. - 46 с. (116 экз.).
7. В. А. Александров. Ортогональные многочлены: методические указания: [для студентов физического факультета НГУ] / Ком. по высшей школе М-ва науки, высшей школы и техн. политики Рос. Федерации, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский отдел НГУ, 1993. - 67 с. (71 экз.).
8. Р. К. Бельхеева. Ряды Фурье в примерах и задачах: учебное пособие: [для студентов Физического факультета НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2011. - 75 с. (48 экз.).
9. Р. К. Бельхеева. Преобразование Фурье в примерах и задачах: учебное пособие: [для студентов Физического факультета НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак.Новосибирск : Редакционно-издательский центр НГУ, 2014. - 80 с. (65 экз.).
10. Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах: учебное пособие: [для студентов Физического факультета НГУ] / М-во образования и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак. - Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2014. - 84 с. (69 экз.).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

7.1 Ресурсы сети Интернет

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:
- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

7.2 Современные профессиональные базы данных

Не используются.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.

8.1 Перечень программного обеспечения

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

8.2 Информационные справочные системы

Не используются.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для реализации дисциплины «Уравнения математической физики» используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.
2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

10. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

10.1 Порядок проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине

Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости студента предусматривает наличие следующих форм контроля, в ходе которых обучающиеся набирают баллы, учитываемые затем при проведении промежуточной аттестации:

1) сдача преподавателю задач из четырех месячных заданий (заданий для самостоятельного решения) с 1 по 16 недели семестра (термин «сдать задачу» означает объяснение хода её решения и при необходимости ответы на дополнительные вопросы преподавателя);
2) выполнение четырех контрольных работ;
3) максимальное количество баллов за месячное задание, сданное в срок, равно 50 баллам, за контрольную работу – 50 баллов. Таким образом, обучающийся может получить до 100 баллов по каждой теме, что в сумме составляет до 400 баллов за семестр.

Примеры заданий и контрольных работ приведены в п. 10.3.

В течение семестра проводится прием выполненных обучающимся заданий/задач в отведенное время. Примеры заданий/задач приведены в п.10.3. Термин «сдать задание/задачу» означает объяснение хода ее решения и при необходимости ответы на дополнительные вопросы преподавателей.

Промежуточная аттестация

Освоение компетенций оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня. Вывод об уровне сформированности компетенции принимается преподавателем.

Промежуточная аттестация по итогам семестра проводится в форме устного экзамена. При промежуточной аттестации учитываются итоги текущего контроля успеваемости: баллы, набранные на экзамене, суммируются с баллами, полученными за работу в семестре.

Билет содержит два теоретических вопроса. На подготовку ответа по билету отводится 60 минут. При подготовке ответа не разрешается использовать литературу и другие вспомогательные средства, а также общаться с другими студентами.

Ответ на каждый из теоретических вопросов оценивается по следующим критериям:

– если обучающийся правильно сформулировал все определения и теоремы из вопроса билета, привёл доказательство теоремы из вопроса билета, обосновал преобразования, ссылаясь на соответствующие теоремы, и в процессе беседы с преподавателем свободно отвечает на сопутствующие дополнительные вопросы по теме билета, ему начисляется 100 баллов за один вопрос;

– если обучающийся правильно сформулировал все определения и теоремы из вопроса билета, привёл доказательство теоремы, но в доказательстве имеются недочеты (пропущены преобразования, не даны ссылки на теоремы и свойства) или студент затрудняется при ответе на дополнительные вопросы по обсуждаемой теме, ему начисляется 50 баллов за вопрос;

– если обучающийся правильно сформулировал все определения и теоремы из вопроса билета и сопутствующих дополнительных вопросов, но не привёл доказательство теоремы из вопроса билета, ему начисляется 10 баллов;

– если обучающийся не сформулировал определение или теорему из билета или дополнительного вопроса, ему ставится оценка «неудовлетворительно» (компетенция ОПК-1 не сформирована).

При успешном прохождении промежуточной аттестации обучающийся может набрать до 600 баллов, которые конвертируются в оценку следующим образом:

оценка «удовлетворительно» (пороговый уровень освоения компетенции ОПК-1)– от 300 до 399 баллов

оценка «хорошо» (базовый уровень освоения компетенции ОПК-1) – от 400 до 499 баллов

оценка «отлично» (продвинутый уровень освоения компетенции ОПК-1) – от 500 до 600 баллов

Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины

Таблица 10.1

Индикатор	**Результат обучения по дисциплине**	**Оценочные средства**

ОПК-1.1. Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	Знать основные типы уравнений математической физики, постановку начальных и краевых задач и классические теоремы об их разрешимости.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен в устной форме.
ОПК -1.2. Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.	Уметь применять различные методы решения начальных и краевых задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка.	Проверка задач для самостоятельного решения, проведение контрольных работ, экзамен в устной форме.

10.2. Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Уравнения математической физики».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК 1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/ несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК 1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.

10.3. Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

Задания для самостоятельного решения

Задание 1

1. Решите задачи Коши для линейных уравнений:
$(а)\ xu_x + u_y = u - xy, \qquad u\big|_{x=2} = y^2 + 1;$
$(б)\ u_x + u_y + 2u_z = 0, \qquad u\big|_{x=1} = yz.$

2. Для каждого из приведенных ниже примеров укажите области, в которых сохраняется тип уравнения, определите этот тип, приведите уравнения к каноническому виду, а в областях параболичности и гиперболичности найдите общее решение:
(а) $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0;$ (б) $(\mathrm{sgn}y)u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$

3. Укажите тип дифференциальных уравнений, приведите их к каноническому виду:
(а) $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0;$ (б) $u_{xy} + u_{xz} - u_{tx} - u_{yz} + u_{ty} + u_{tz} = 0;$

4. Решите задачу Коши для гиперболического уравнения второго порядка:
$u = u(t, x)$ подчиняется уравнению

$$u_x + u_{tt} - 2u_{tx} - 3u_{xx} - \frac{1}{16}u = 0 \text{ в полуплоскости } t > 0$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$u(0, x) = 2xe^{x/8}, \qquad u_t(0, x) = \left(2 + \frac{x}{4}\right)e^{x/8}.$$

5. (а) Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определены и непрерывны соответственно на полуосях $x \geq 0$ и $y \geq 0$, имеют непрерывные вторые производные при положительных значениях своих аргументов и «согласованы» равенством $\varphi(0) = \psi(0)$. Решите задачу Гурса: найти функцию $u = u(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению $u_{xy} + xu_x = 0$ в первой четверти $x > 0,\ y > 0$ координатной плоскости, а на ее граничных лучах принимает значения

$$u\big|_{y=0} = \varphi(x), \qquad u\big|_{x=0} = \psi(y).$$

(б) Пусть $\alpha < 0$. Рассмотрим задачу: найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $u_{xy} = 0$ в секторе $x > 0,\ y > \alpha x$, и равную нулю на его границе. Покажите, что эта задача поставлена некорректно.

6. Решите смешанные задачи: найти функцию $u = u(t, x)$, определенную для всех $t \geq 0$ и $x \geq 0$, которая удовлетворяет
(а) уравнению $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в области $t > 0,\ x > 0$, начальным условиям $u(0, x) = x$ и $u_t(0, x) = 1$ при $x > 0$, а также граничному условию $u(t, 0) = 0$, где $t \geq 0$;
(б) уравнению $u_{tt} = 9u_{xx} + e^t$ в области $t > 0,\ x > 0$, начальным условиям $u(0, x) = 1 + x$ и $u_t(0, x) = 4 - 3\cos(x/3)$ при $x > 0$, а также условию $u_x(t, 0) = 2 - \cos t$, где $t \geq 0$;

7. Используя метод бегущих волн, найдите решение уравнения колебаний неограниченной струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. Нарисуйте профили струны для моментов времени t_k, где

$$t_k = \frac{kc}{2a}, \quad k = 0,1,2,3,4,5,$$

при условии, что
(а) начальная скорость равна нулю, а начальный профиль имеет «треугольный» вид:

$$u(0,x)=\begin{cases}\frac{2h}{c}(x-c), & \text{если } c\le x\le \frac{3c}{2},\\ \frac{2h}{c}(2c-x), & \text{если } \frac{3c}{2}\le x\le 2c,\end{cases}$$

и $u(0,x)=0$ для остальных значений x;
(б) начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость задана в форме «ступеньки»: $u_t(0,x)=v_0$, если $c\le x\le 2c$, и $u_t(0,x)=0$ всюду вне указанного отрезка.

8. Решите указанные ниже задачи Коши:
$(а)\ u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin\omega t,\quad u\big|_{t=0}=\sin x,\quad u_t\big|_{t=0}=x;$
$(б)\ u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad u\big|_{t=0}=xy,\quad u_t\big|_{t=0}=x^2+y^2;$
$(в)\ u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+2xyz,\quad \begin{cases}u\big|_{t=0}=x^2+y^2+z^2,\\ u_t\big|_{t=0}=e^z\sin 2x.\end{cases}$

Задание 2

1. Решите задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа:
(а) в прямоугольнике $0<x<a,\ 0<y<b$, если на его границе решение $u=u(x,y)$ принимает следующие значения:

$$u\big|_{x=0}=A\sin(\pi y/b),\quad u\big|_{x=a}=0,\quad u\big|_{y=0}=0,\quad u\big|_{y=b}=x(a-x);$$

(б) в том же прямоугольнике, но с другими граничными условиями, которые нужно выбрать так, чтобы задача имела решение:

$$u_x\big|_{x=0}=A,\quad u_x\big|_{x=a}=0,\quad u_y\big|_{y=0}=B,\quad u_y\big|_{y=b}=0;$$

(в) в круге $r<R$, если на его граничной окружности решение $u=u(r,\varphi)$ принимает следующие значения:

$$u\big|_{r=R}=\begin{cases}1, & \text{если}\quad 0<\varphi<\pi,\\ -1, & \text{если}\quad \pi<\varphi<2\pi.\end{cases}$$

2. Решите краевые задачи для гиперболических уравнений:

$(а)$
$$u_{tt}+2u_t=u_{xx}-u,$$
$$u\big|_{x=0}=0,\quad u_x\big|_{x=l}=0,\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=v_0;$$

$(б)$
$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0,$$
$$u_x\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=A\sin\omega t,\quad u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=0;$$

рассмотрите отдельно случай, когда $\omega=\pi a(2k+1)/2l$, где k — целое неотрицательное число.

3. Найдите стационарную температуру $u(r,z)$ внутри цилиндра, имеющего круглое основание радиуса R и высоту h, если температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность покрыта теплонепроницаемым чехлом, а температура верхнего основания есть функция от r.

4. Получите разложения по сферическим гармоникам следующих функций, заданных на сфере:
$(а)\ \cos(2\varphi+\pi/3)\sin^2\vartheta,\quad (б)\ \cos\vartheta\sin^2\vartheta,\quad (в)\ \sin 3\varphi.$

Для каждого из этих случаев решите внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре радиуса R, считая, что на границе шара искомое решение совпадает с указанной функцией.

5. Найдите гармоническую функцию u
(а) внутри единичной сферы такую, что $u_r\big|_{r=1} = \sin^{10}\vartheta \sin 10\varphi$;

(б) внутри сферы радиуса R такую, что $u = 1$ на одной половине сферы и $u = -1$ — на другой.

(в) вне единичной сферы такую, что

$$(u - u_r)\big|_{r=1} = (\sin\varphi + \cos\varphi\cos\vartheta + \sin\vartheta)\sin\vartheta;$$

Выясните, будет ли единственным решение краевой задачи $(u + u_r)\big|_{r=1} = f(\vartheta, \varphi)$ для уравнения Лапласа вне единичной сферы. Сравните с краевой задачей примера (в).

6. Найдите распределение температуры в шаре радиуса R, если оно описывается функцией $u(t, r)$, не имеющей особенностей, и подчиняется закону:

$$u_t = \Delta u, \qquad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_r\big|_{r=R} = c \quad при \quad t > 0.$$

7. Найдите колебания газа в круглом замкнутом цилиндре, вызванные поперечными колебаниями одного из его доньев, начавшимися в момент $t = 0$, если при $t > 0$ скорости частиц этого дна равны $f(r)\, cos\,\omega\, t$, где r означает расстояние от частицы до оси цилиндра. Второе дно и боковая стенка сосуда неподвижны.

Задание 3

1. Постройте функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в описанных ниже плоских областях. Для каждого примера найдите общую формулу, восстанавливающую гармоническую функцию по ее значениям на границе области. Примените эту формулу к указанным конкретным граничным условиям.
(а) полуплоскость $y > 0, \quad u\big|_{y=0} = \dfrac{1}{1+x^2}$;
(б) круг $r < R, \quad u\big|_{r=R} = \cos^3\varphi.$

2. Используя конформные отображения, решите задачу Дирихле в полосе $0 < y < \pi$ при условиях

$$u\big|_{y=0} = \vartheta(x), \quad u\big|_{y=\pi} = -\vartheta(x),$$

где $\vartheta(x)$ означает «ступеньку» Хевисайда: $\vartheta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\vartheta(x) = 1$ при $x > 0$.

3. Постройте функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в каждой из указанных трехмерных областей:
(а) двугранный угол $y > 0,\ z > 0$;
(б) полушар $x^2 + y^2 + z^2 < R^2,\ z > 0$;

4. Следующие три задачи решите двумя способами: во-первых, поставив краевые задачи для потенциалов, а во-вторых, прямым вычислением соответствующих интегралов.
(а) Найти объемный потенциал шара постоянной плотности.

(б) Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью на поверхности сферы.
(в) Найти потенциал двойного слоя, распределенного с постоянной плотностью на поверхности сферы.

5. Найдите решение внутренней и внешней задач Неймана и Дирихле для круга, опираясь на теорию потенциала.

6. Найдите разложение по сферическим гармоникам поверхностной плотности зарядов, индуцированных на проводящей заземленной сфере точечным зарядом, расположенным вне сферы.

7. (а) Докажите, что многочлен $u(x,y,z) = x^2 - y^2 + (x+2y)z^2$ не может служить потенциалом массивного шара.
(б) Проверьте, что функция $u(x,y) = \frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3}$ может являться потенциалом простого слоя вне круга единичного радиуса. Найдите значение этого потенциала внутри круга и плотность потенциала на окружности.

Задание 4

1. (а) Постройте функцию Грина для уравнения $u_t = a^2u_{xx} - u$ на прямой x. Решите с ее помощью задачу Коши: $u\big|_{t=0} = u_0$ на интервале $|x| < l$ и $u\big|_{t=0} = 0$ при $|x| > l$.
(б) Постройте функцию Грина для уравнения $u_t = a^2u_{xx}$ на полупрямой $x > 0$, на конце которой задано краевое условие первого рода. Найдите решение смешанной задачи:

$$u(t,0) = 0,\ t > 0, \qquad u(0,x) = \varphi(x),\ x > 0.$$

Для случая, когда $\varphi(x) \equiv u_0$, начертите графики функции $u(t,x)$
— на отрезке $0 \le x \le 4$ в моменты времени $t = \frac{1}{8a^2},\ \frac{1}{4a^2},\ \frac{1}{a^2}$;
— на отрезке $0 \le t \le \frac{1}{a^2}$ в точках $x = \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1.$

2. Решите краевые задачи для уравнения теплопроводности $u_t = a^2u_{xx}$, используя преобразование Лапласа:
$(а)\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u\big|_{x=0} = g(t), \quad (t > 0, x > 0);$ $\qquad (б)\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=0} = g(t), \quad (t > 0, x > 0);$
$(в)\ u\big|_{t=0} = 0, \quad u\big|_{x=0} = u_0, \quad u\big|_{x=l} = u_1, \quad (t > 0, 0 < x < l).$

3. Два полуограниченных стержня $x \le 0$ и $x \ge 0$ приведены в соприкосновение своими концами. Выясните, как меняются со временем температуры u_1 и u_2 этих стержней, если в момент $t = 0$ они равны соответственно 0 и T, а при $t > 0$ подчиняются уравнениям

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (x < 0), \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (x > 0)$$

и условиям «согласования» $\qquad u_1\big|_{x=0} = u_2\big|_{x=0}, \qquad k_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}.$

4. Рассмотрим три системы линейных уравнений первого порядка:

$$(s_1)\quad \begin{cases} 2xu_x - 2yv_y + u - v = 0, \\ v_x - u_y = 0; \end{cases} \qquad (s_2)\quad \begin{cases} 2u_t + (2t-1)u_x - (2t+1)v_x = 0, \\ 2v_t - (2t+1)u_x + (2t-1)v_x = 0; \end{cases}$$

$$(s_3) \quad \begin{cases} 2u_t + 4v_x + w_x = 0, \\ v_t + 8u_x = 0, \\ w_t + 3w_x = w. \end{cases}$$

Найдите характеристики этих систем и соотношения на них. Используя полученные соотношения, найдите для каждой системы ее общее решение. Укажите на плоскости (t, x) область, в которой можно определить решение задачи Коши для систем s_2 и s_3, если начальные условия поставлены в момент $t = 0$ и заданы лишь на отрезке $|x| \leq 1$.

5. (а) Рассматривая систему s_1 в области $x \geq 0, y \geq 0$, решите для нее задачу Гурса:

$u = \sqrt{x}$ *при* $y = 0$ *и* $v = 1$ *при* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

(б) Для системы s_2 решите задачу Коши:

$u = 0,\ v = 2x$ *при* $t = 0$.

(в) Для системы s_3 решите задачу Коши:

$u = x,\ v = 0,\ w = 1$ *при* $t = 0$.

6. Укажите, какие из указанных ниже краевых задач для системы s_3 поставлены правильно:

$(a) u\big|_{x=0} = 0, \quad (v + w)\big|_{x=l} = 1, \quad v\big|_{x=l} = 0;$

$(б)\ (14u - 7v - w)\big|_{x=0} = 0, \quad (u + v)\big|_{x=0} = 0, \quad (u - v)\big|_{x=l} = 0;$

$(в)\ (u - 3v)\big|_{x=0} = 0, \quad (u + v)\big|_{x=0} = 0, \quad (u - v)\big|_{x=l} = 1.$

Начальные условия предполагаются известными.

Образцы контрольных работ.

Контрольная работа №1

Решить начально-краевые задачи:

1. $u_{tt} = 25u_{xx} + e^t,\ t > 0, x > 0$

   $u(0, x) = 1 + x^2, \qquad u_t(0, x) = 4 - 3\cos(x/3),$

   $u_x(t, 0) = 2 - \sin t$

2. $u_{tt} - 4u_{xx} = 0,$

   $u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = \sin \omega t, u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0$

3. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике:
   $u|_{x=0} = 1, u|_{x=1} = \sin 3\pi y, u|_{y=2} = x, u|_{y=0} = x^2$
4. Найти собственные значения и функции оператора Лапласа для четверти $x > 0, y > 0$ единичного шара с центром в начале координат с краевыми условиями типа Дирихле.
5. Найти колебания газа в цилиндрическом сосуде единичной высоты и радиуса, вызванные малыми колебаниями его боковой стенки, начавшимися в момент времени t=0, $u|_{r=1} = \sin t \sin z$.

Контрольная работа №2

1.Построить функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в секторе круга $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{3}$.

2.Найти объемный потенциал шара с плотностью $f(r) = r$

3. Найти заряды, индуцированные на проводящей незаземленной сфере точечным зарядом вне сферы. Потенциал какого типа будут создавать эти заряды: простого слоя или двойного?

4. Выписать и решить интегральные уравнения, соответствующие внутренней и внешней задачам Дирихле для шара с постоянными функциями (константами) в краевых условиях.

Список вопросов для проведения промежуточной аттестации по дисциплине «Уравнения математической физики».

1. Линейные однородные уравнения первого порядка. Характеристики. Общее решение.
2. Линейные однородные уравнения первого порядка. Постановка и решение задачи Коши.
3. Линейные неоднородные уравнения первого порядка. Квазилинейные уравнения первого порядка. Постановка и решение задачи Коши.
4. Классификация и приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в случае $n = 2$.
5. Классификация и приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в случае $n > 2$.
6. Задача Коши для однородного волнового уравнения в случае $n = 1$. Формула Даламбера. Принцип Гюйгенса. Сведение первой и второй краевых задач в области $t > 0$, $x > 0$ к задаче Коши.
7. Задача Коши для однородного волнового уравнения в случае $n = 3$. Формула Кирхгофа. Принцип Гюйгенса.
8. Задача Коши для однородного волнового уравнения в случае $n = 2$. Формула Пуассона.
9. Принцип Дюамеля для решения неоднородного волнового уравнения. Формулы Кирхгофа, Пуассона и Даламбера.
10. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.
11. Смешанная задача для волнового уравнения в ограниченной области. Единственность решения. Метод Фурье. Многомерная задача Штурма – Лиувилля.
12. Смешанная задача для волнового уравнения. Разделение переменных в цилиндрической системе координат.
13. Смешанная задача для волнового уравнения. Разделение переменных в сферической системе координат.
14. Гармонические функции. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа.
15. Интегральное представление решения уравнения Пуассона через потенциалы.
16. Функции Грина задачи Дирихле и задачи Неймана для уравнения Лапласа.
17. Свойства гармонических функций: теорема о потоке тепла, теорема о среднем, принцип максимума. Единственность решения внутренней задачи Дирихле и неединственность решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.
18. Потенциалы и их свойства. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям Фредгольма.
19. Исследование интегральных уравнений, соответствующих внутренней задаче Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в случае $n = 3$.
20. Исследование интегральных уравнений, соответствующих внешней задаче Дирихле и внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в случае $n = 3$.

21. Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Интегральное представление решения уравнения теплопроводности через тепловые потенциалы. Существование классического решения задачи Коши.
22. Функции Грина первой и второй смешанных задач для уравнения теплопроводности.
23. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность решения смешанной задачи и задачи Коши.
24. Задача Коши для системы уравнений первого порядка. Теорема Коши-Ковалевской. Характеристические поверхности.
25. Линейные системы уравнений первого порядка. t-гиперболические, строго t-гиперболические и симметрические t-гиперболические системы. Приведение к каноническому виду строго t-гиперболической системы с двумя переменными.
26. Единственность решения задачи Коши для симметрической t-гиперболической системы. Задача Коши для симметрической t-гиперболической системы с постоянными коэффициентами.

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде.

Лист актуализации рабочей программы
по дисциплине «Уравнения математической физики»
Направление: 03.03.02 Физика
Направленность (профиль): Физическая информатика

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного