

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»  
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

**Физический факультет  
Кафедра теоретической физики**



УТВЕРЖДАЮ  
Декан ФФ  
В. Е. Блинов  
« 28 » 08 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины  
МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 1**

направление подготовки: **03.03.02 Физика**  
направленность (профиль): **Общая и фундаментальная физика**

Форма обучения: **Очная**

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)					Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем				Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	144	32	48		16	24	18	4			2
<b>Итого</b>	<b>144</b>	<b>32</b>	<b>48</b>		<b>16</b>	<b>24</b>	<b>18</b>	<b>4</b>			<b>2</b>
Всего 144 часа / 4 зачётные единицы, из них: - контактная работа 102 часа											
Компетенции: ОПК-1											

Ответственный за образовательную программу,

д.ф.-м.н., проф.

С.В. Цыбуля

Новосибирск, 2023

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.....	3
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.....	4
3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.....	5
5. Перечень учебной литературы.....	10
6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.....	10
7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.....	11
8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.....	11
9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.....	11
10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.....	12

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.**

Дисциплина (курс) «Методы математической физики 1» имеет своей целью обучение студентов-физиков основным математическим методам, применяемым в физике. В курсе излагается материал, знание которого необходимо как для теоретиков и вычислителей, так и для экспериментаторов. В процессе освоения дисциплины студенты знакомятся с методами решения уравнений в частных производных, решениями обыкновенных дифференциальных уравнений в виде специальных функций и асимптотическими методами.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
<p><b>ОПК-1.</b> Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности</p>	<p><b>ОПК-1.1.</b> Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.</p> <p><b>ОПК -1.2.</b> Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.</p>	<p><b>Знать:</b> - способ получения инвариантов Римана, способы решения задач с уравнениями второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов, свойства функций Бесселя и Лежандра, основные свойства асимптотических разложений, основные понятия теории представлений точечных групп;</p> <p>- физический смысл характеристик, типичные в физике постановки задач для эллиптического, параболического и гиперболического типов уравнений второго порядка (задачи Коши, Дирихле и Неймана), основные определения теории представлений групп Ли.</p> <p><b>Уметь:</b> - решать простейшие линейные и квазилинейные уравнения в частных производных, пользоваться формулами Родрига и интегральными представлениями специальных функций, определять тип особенности в уравнении второго порядка и сводить к уравнениям на гипергеометрические функции, оценивать асимптотику интегралов методами Лапласа и стационарной фазы, строить функцию Грина оператора Штурма – Лиувилля;</p> <p>- выполнять нелинейные замены в простых нелинейных уравнениях физики при воз-</p>

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
		<p>возможности сведения их к линейным, искать автомодельные подстановки, находить асимптотику интегралов методом перевала, разлагать представление группы в прямую сумму неприводимых, рассчитывать кратности вырождения молекулярных колебаний, строить функцию Грина задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона, задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.</p> <p><b>Владеть:</b> - методами характеристик, разделения переменных и Фурье, усреднения; - методами стационарной фазы и перевала.</p>

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Курс «Методы математической физики 1» – необходимый элемент образования физика, реализуется в 5-м семестре 3-го курса для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 Физика. Курс является одной из обязательных профессиональных дисциплин. В программу входят те темы, которые нужны студенту для изучения основных курсов теоретической физики – квантовой механики, статистической физики, физики сплошных сред. Основные разделы курса: уравнения в частных производных, специальные функции, асимптотические методы и составляют такой минимум. Курс рассчитан на один семестр, завершается экзаменом. Этот курс имеет практическую направленность, учит решать задачи и применять знания из изученных ранее разделов высшей математики.

Считается, что студенты третьего курса уже знакомы в достаточной степени с линейной алгеброй, математическим анализом, теорией функций комплексного переменного и обыкновенными дифференциальными уравнениями. Цель заключительного математического курса – научить решать простые математические задачи, возникающие в физике. Для этого надо свободно пользоваться высшей математикой из разных разделов. Поэтому практические занятия начинаются с повторения основных понятий из таких разделов. Далее следуют уравнения в частных производных. Среди уравнений в частных производных рассматриваются в первую очередь задачи для уравнений Лапласа и Пуассона с разными граничными условиями, уравнения теплопроводности и волнового уравнения, важными в физике сплошных сред. Наряду с классическими линейными действительными уравнениями в частных производных студентов учат искать решения простейших нелинейных

уравнений (Хопфа, Бюргерса, Кортевега – де Фриза) и комплексного уравнения Шрёдингера из квантовой механики. При разделении переменных в сферических и цилиндрических координатах появляются сферические и цилиндрические функции. Для решения задач из разных разделов физики с аксиальной или сферической симметрией в курсе изучаются специальные функции, в основном, функции Бесселя и Лежандра. Студенты учатся пользоваться интегральными представлениями специальных функций и получать простые формулы для их асимптотик методами стационарной фазы и перевала. Изучается также метод усреднения, позволяющий решить важную задачу аналитической механики – проследить эволюцию слабо нелинейного классического осциллятора на больших временах.

### 3. Трудоемкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)					Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем				Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	144	32	48		16	24	18	4			2
<b>Итого</b>	<b>144</b>	<b>32</b>	<b>48</b>		<b>16</b>	<b>24</b>	<b>18</b>	<b>4</b>			<b>2</b>
Всего 144 часа / 4 зачётные единицы, из них: - контактная работа 102 часа											
Компетенции: ОПК-1											

Реализация дисциплины предусматривает практическую подготовку при проведении следующих видов занятий, предусматривающих участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью: лекции, практические занятия, задачи для самостоятельного решения, консультации, самостоятельная работа студента, экзамен в конце семестра.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

Текущий контроль: решение задач из задания для самостоятельного решения

Промежуточная аттестация: экзамен

Общая трудоемкость рабочей программы дисциплины составляет **144** академических часа / **4** зачетных единицы:

- занятия лекционного типа – 32 часа;
- практические занятия – 48 часов;
- прием заданий – 16 часов;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 24 часа;
- промежуточная аттестация (самостоятельная подготовка к сдаче экзамена, консультация и экзамен) – 24 часа.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, приём заданий, групповые консультации, экзамен) составляет 102 часа.

**4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием ответственного на них количества академических часов и видов учебных занятий.**

Курс «Методы математической физики 1» является курсом, рассчитанным для 5-го семестра, читаемым для студентов 3-го курса физического факультета НГУ. Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 академических часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы			Сам. работа в течение семестра (не включая период сессии)		
				Лекции (кол-во часов)	Практические занятия (кол-во часов)	Прием заданий			
<b>3 курс, 5 семестр</b>									
1	Метод характеристик. Задача Коши. Образование разрывов.	1	7	2	3	2			
2	Понятие характеристик для систем уравнений с двумя переменными. Классификация по типам.	2	8	2	3		3		
3	Приведение гиперболической системы к каноническому виду. Инварианты Римана, простая волна Римана.	3	7	2	3	2			
4	Метод годографа. Точные решения для политропного газа. Волновое уравнение. Формула Даламбера.	4	8	2	3		3		
5	Приведение уравнения с двумя переменными к каноническому виду. Приведение многомерных уравнений к каноническому виду. Характеристики гиперболического уравнения.	5	7	2	3	2			
6	Понятие автомодельности. Автомодельные подстановки для уравнений теплопроводности.	6	8	2	3		3		
7	Разделение переменных. Метод Фурье.	7	7	2	3	2			
8	Разделение переменных в задаче о круглой мембране. Функции Бесселя.	8	8	2	3		3		
9	Разделение переменных в уравнении Шрёдингера для частицы в центрально-симметричном поле. Присоединенные функции Лежандра. Сферические гармоники. Функции Бесселя с полуцелым индексом.	9	7	2	3	2			
10	Решение дифференциального уравнения второго порядка вблизи обыкновенной точки и регулярной особой точки. Характеристические показатели.	10	8	2	3		3		
11	Функция Гаусса и вырожденная гипергеометрическая функция.	11	7	2	3	2			
12	Уравнение Шрёдингера для осциллятора и атома водорода. Полиномы Эрмита и Лагерра.	12	8	2	3		3		
13	Асимптотика интегралов. Интеграл Лапласа. Асимптотика гамма-функции Эйлера.	13	7	2	3	2			
14	Метод стационарной фазы. Асимптотика функции Бесселя.	14	8	2	3		3		

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы			Сам. работа в течение семестра (не включая период сессии)		
				Лекции (кол-во часов)	Практические занятия (кол-во часов)	Прием заданий			
15	Метод перевала. Асимптотика функций Лежандра и Эйри.	15	7	2	3	2			
16	Метод усреднения. Асимптотика усредненного решения дифференциального уравнения.	16	8	2	3		3		
17	Групповая консультация		4					4	
18	Самостоятельная подготовка обучающегося к экзамену		18						
19	Экзамен		2					2	
<b>Всего:</b>			<b>144</b>	<b>32</b>	<b>48</b>	<b>16</b>	<b>24</b>	<b>4</b>	<b>20</b>

### Самостоятельная работа студентов (42 часа)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям	8
Решение задач из задания	8
Подготовка к контрольным работам	4
Подготовка к ответам на дополнительные вопросы	4
Подготовка к экзамену	18

### Программа лекций (32 часа)

#### МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК (8 часов)

1. Метод характеристик для линейных и квазилинейных уравнений с частными производными. Задача Коши. Образование разрывов.
2. Понятие характеристик для систем линейных и квазилинейных уравнений с двумя переменными. Классификация по типам: гиперболические, эллиптические, параболические системы.
3. Приведение гиперболической системы к каноническому виду. Инварианты Римана, простая волна Римана.
4. Метод годографа для уравнений газовой динамики. Точные решения для политропного газа.

#### УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА (8 часов)

5. Волновое уравнение. Вывод из уравнений Максвелла и газодинамики. Решение одномерного волнового уравнения, формула Даламбера.

6. Приведение гиперболического, эллиптического и параболического уравнения с двумя переменными к каноническому виду.
7. Приведение многомерных уравнений к каноническому виду. Характеристики гиперболического уравнения и их физический смысл.
8. Понятие автомодельности. Автомодельные подстановки для уравнений теплопроводности.
9. Разделение переменных. Метод Фурье.

### *СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ (8 часов)*

10. Разделение переменных в задаче о круглой мембране. Функции Бесселя.
11. Разделение переменных в уравнении Шрёдингера для частицы в центрально-симметричном поле. Присоединенные функции Лежандра. Сферические гармоники. Функции Бесселя с полуцелым индексом.
12. Решение дифференциального уравнения второго порядка вблизи обыкновенной точки и регулярной особой точки. Характеристические показатели.
13. Функция Гаусса и вырожденная гипергеометрическая функция.
14. Уравнение Шрёдингера для осциллятора и атома водорода. Полиномы Эрмита и Лагерра.

### *АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ (8 часов)*

15. Асимптотика интегралов. Интеграл Лапласа.
16. Случаи стационарной точки на границе и внутри отрезка интегрирования. Асимптотика Г-функции Эйлера.
17. Метод стационарной фазы. Асимптотика функции Бесселя.
18. Метод перевала. Асимптотика функций Лежандра и Эйри.
19. Метод усреднения. Асимптотика усредненного решения дифференциального уравнения.

### **Примерный план практических занятий (48 часов)**

1. Собственные значения. Функции от матриц. Резольвента. Задачи 14, 2, 5, 20. Решить задачу 20 с помощью собственных значений (2 часа).

2. Унитарные и эрмитовы матрицы, проекторы. Матрицы Паули.

Задачи 1, 4, 8. Вывести формулу  $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$ . Показать, что для всякой матрицы  $2 \times 2$  коэффициенты разложения  $A = a_0 \sigma_0 + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$  даются формулой  $a_\alpha = \frac{1}{2} \text{Tr}(A \sigma_\alpha)$ , где  $\sigma_0$  – единичная матрица. Найти общий вид проектора  $2 \times 2$ . Решить задачу 20 с помощью разложения по матрицам Паули (2 часа).

3. Свойства  $\delta$ -функции. Ортогонализация. Полнота системы функций. Проверка самосопряженности дифференциальных операторов. Задачи 21 а,б, 24, 27 а,б, 30. Показать, что оператор –

$\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$  самосопряжен на отрезке  $[0,1]$ , если функции удовлетворяют граничным условиям:  $u(0)=u(1)=0$ ;  $u'(0)=u'(1)=0$ , линейной комбинации этих двух, или периодическим  $u(0)=u(1)$ ,  $u'(0)=u'(1)$  (2 часа).



4. Линейные уравнения первого порядка. Характеристики. Условие разрешимости задачи Коши. Задачи 36 а,б, 37, 38, 42 (2 часа).

5. Квазилинейные уравнения. Опрокидывание. Задача 43. Найти точку опрокидывания уравнения Хопфа для начального условия  $u(x,0) = 1 - \tanh(x)$ . Найти закон расширения области однозначности. Найти точку опрокидывания неоднородного уравнения Хопфа  $u_t + uu_x = 1$ . [+ 45а] (4 часа).

6. Системы линейных уравнений. Приведение к каноническому виду. Задачи 48, 47 а,б. Пример системы квазилинейных уравнений, задача 53 (2 часа).

7. Инварианты Римана и характеристики в случае двух переменных. Задача о политропном газе. Задачи 49, 50, 51, 52 [+58] (4 часа).

8. Характеристические переменные. Области эллиптичности и гиперболичности. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду. Исключение первых производных. Задачи 59 а,б,в, 60 а. Исключить первую производную в уравнениях  $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$ ;  
 $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$  (2 часа).

9. Поиск автомодельной подстановки с помощью масштабных преобразований. Автомодельные решения линейного и нелинейного уравнения теплопроводности. Решения нелинейных уравнений типа бегущей волны. Солитоны. Задача 98. Найти автомодельное решение задачи  $u_t = u_{xx}$ ,  $u(x,0) = x^3$ ,  $u(0,t) = 0$ . Задача 100 при  $n=2$ . Задачи 102, 103, 110 [+108,111] (2 часа).

10. Решение волнового уравнения, уравнений теплопроводности и Лапласа методом Фурье. Задачи 68, 71, 72, 73, 75,79. [+76,78] (2 часа).

11. Разделение переменных уравнения Шрёдингера в ортогональных системах координат. Разделить переменные стационарного уравнения Шрёдингера в сферических координатах. Задачи 88 в, г (2 часа).

12-13. Сферические гармоники. Полиномы Лежандра, Лагерра и Эрмита: разложение, рекуррентные соотношения, производящая функция, интегральное представление, соотношение ортогональности. Задачи 127, 128, 130, 157, 158, 137, 159. Получить формулу Родрига для полиномов Лагерра из интегрального представления (2 часа).

14-15. Основные свойства функции Бесселя: разложение, рекуррентные соотношения, производящая функция, интегральное представление, соотношение ортогональности. Задачи 161, 162, 139, 142, 143, 144, [+147, 148] (2 часа).

16. Характеристические показатели в особых точках. Определяющее уравнение. Гипергеометрические функции. Выразить  $\ln(1+z)/z$  и  $(1-z)^n$  через гипергеометрическую функцию. Задачи 120, 152, 153. Выразить функцию Эйри через вырожденную гипергеометрическую функцию. [Решить уравнение Шрёдингера для атома водорода в параболических координатах] (4 часа).

17. Асимптотика интеграла Лапласа. Задачи 177, 163, 180, 181, 182. Найти асимптотику инте-

грала  $\int_0^{\infty} dt \exp\left(-t^2 - \frac{a}{t^2}\right), a \rightarrow \infty$  (2 часа).

18. Метод стационарной фазы. Задачи 173, 185, 186, 187 (2 часа).

19. Метод перевала. Седловые точки, рельеф функции, линии Стокса. Асимптотика функции Эйри. Задачи 190, 189, 191, 165, 185 (методом перевала) (2 часа).

20. Асимптотики функции Бесселя и Лежандра. Метод перевала для подынтегральной функции с полюсами. Найти асимптотику функции Бесселя с произвольным индексом, пользуясь представлением Шлефли

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} t^{-\nu-1} dt, \quad |z| \rightarrow \infty. \text{ Задачи 194, 193 (2 часа).}$$

21. Метод усреднения. Преобразование Боголюбова – Крылова. Задачи 167, 169, 170, 195, 196, 171, 197, 168 [+198] (2 часа).

*Все задачи приводятся в нумерации задачника Колоколова и др. (см. ссылку [2] раздела 5.1). В квадратных скобках указаны необязательные задачи, которые можно решить на занятии, если останется время.*

## 5. Перечень учебной литературы.

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов университетов, обучающихся по специальности "Математика" и "Механика" / С.К. Годунов. Москва: Наука, 1971. 416 с. : ил. ; 22 см.(22 экз.)
2. Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И. и др. Задачи по математическим методам физики. — 2-е изд., испр. — Москва: Эдиториал УРСС, 2002. — 286 с.: ил., ISBN 5-8360-0429-3 (56 экз.)
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — Изд. 4-е, испр. — Москва: Наука, 1989. — 767 с.: ил. — (Теоретическая физика, т. III). (254 экз.)
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — Изд. 3-е, перераб. — Москва: Наука, 1986. — 736 с.: ил. — (Теоретическая физика, т. VI). (142 экз.)
5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — Москва: Наука, 1984. — 271 с.: ил. (57 экз.)
5. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.1. — М.: Мир, 1982. — 486 с.: ил. (50 экз.)
6. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.2. — М.: Мир, 1984. — 381 с.: ил. (50 экз.)
7. Мессиа А. Квантовая механика. Т.1. — М.: Наука, 1978. — 478 с.: ил. (27 экз.)
8. Мессиа А. Квантовая механика. Т.2. — М.: Наука, 1979. — 583 с.: ил. (27 экз.)
9. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. — Изд. 5-е, испр. — М.: Наука, 1992. — 431 с. (36 экз.)

## 6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.

1. Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И. и др. Задачи по математическим методам физики. — 2-е изд., испр. — Москва: Эдиториал УРСС, 2002. — 286 с.: ил.
2. Подивиллов Е.В., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Рабочая тетрадь по математическим методам физики: учебное пособие: [для студентов 3-го курса Физ. фак. НГУ]. — М-во образования

и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. теорет. физики. — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2012. — 125 с.: ил.

3. Кузнецов Е.А., Шапиро Д.А. Методы математической физики: курс лекций: [для студентов 3-го курса Физ. фак. НГУ]. Ч.1. — М-во образования и науки РФ, Новосиб. нац. исслед. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. теорет. физики. — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2011. — 114 с.: ил., граф.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:

- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

### **7.1 Современные профессиональные базы данных**

Не используются.

### **7.2. Информационные справочные системы**

Не используются.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.**

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.

2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным

программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

## **10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.**

### **10.1 Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине**

#### ***Текущий контроль***

В течение семестра проводится прием заданий. Результаты текущего контроля служат основанием для выставления оценок в ведомость контрольной недели на факультете, а решение и сдача половины задач из задания является необходимым условием получения положительной оценки на экзамене. За каждую задачу, сданную до контрольного срока, студент получает один балл, эти баллы в дальнейшем учитываются при выставлении итоговой оценки за курс (максимум за работу в семестре можно набрать 12 баллов).

В течение семестра проводится прием выполненных обучающимся заданий/задач в отведенное время. Примеры заданий/задач приведены в п.10.3. Термин «сдать задание/задачу» означает объяснение хода ее решения и при необходимости ответы на дополнительные вопросы преподавателей.

#### ***Промежуточная аттестация.***

Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен в конце семестра. Освоение компетенции оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня в части, относящейся к формированию способности использовать специализированные знания в области математической физики в профессиональной деятельности.

Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене. Экзамен проводится в конце семестра в экзаменационную сессию в письменной форме. Вопросы билета подбираются таким образом, чтобы проверить уровень сформированности компетенций ОПК-1.

Вывод об уровне сформированности компетенций принимается при проверке результатов итоговой контрольной работы. Каждая задача контрольной оценивается от 0 до 6 баллов, максимальный балл за контрольную равен 36. Положительная оценка ставится, когда компетенции освоены не ниже порогового уровня. Оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» означают успешное прохождение промежуточной аттестации.

### **Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины**

Таблица 10.1

<b>Индикатор</b>	<b>Результат обучения по дисциплине</b>	<b>Оценочные средства</b>
------------------	---	---------------------------

<p><b>ОПК-1.1.</b> Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.</p>	<p><b>Знать:</b> - способ получения инвариантов Римана, способы решения задач с уравнениями второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов, свойства функций Бесселя и Лежандра, основные свойства асимптотических разложений, основные понятия теории представлений точечных групп;</p> <p>- физический смысл характеристик, типичные в физике постановки задач для эллиптического, параболического и гиперболического типов уравнений второго порядка (задач Коши, Дирихле и Неймана), основные определения теории представлений групп Ли.</p>	<p>Опрос Контрольная работа Экзамен.</p>
<p><b>ОПК -1.2.</b> Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.</p>	<p><b>Уметь:</b> - решать простейшие линейные и квазилинейные уравнения в частных производных, пользоваться формулами Родрига и интегральными представлениями специальных функций, определять тип особенности в уравнении второго порядка и сводить к уравнениям на гипергеометрические функции, оценивать асимптотику интегралов методами Лапласа и стационарной фазы, строить функцию Грина оператора Штурма – Лиувилля;</p> <p>- выполнять нелинейные замены в простых нелинейных уравнениях физики при возможности сведения их к линейным, искать автомодельные подстановки, находить асимптотику интегралов методом перевала, разлагать представление группы в прямую сумму неприводимых, рассчитывать кратности вырождения молекулярных колебаний, строить функцию Грина задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона, задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.</p> <p><b>Владеть:</b> - методами характеристик, разделения переменных и Фурье, усреднения;</p> <p>- методами стационарной фазы и перевала, функций Грина, симметрии</p>	<p>Опрос Контрольная работа Экзамен.</p>

## 10.2 Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Методы математической физики 1».

Таблица 10.2

Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК-1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК-1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.

## 10.3 Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### Домашние задания по курсу «Методы математической физики 1»

#### ЗАДАНИЕ № 1

1. Вычислить  $\exp(\mathbf{a} + \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma})$ , где  $\boldsymbol{\sigma}$  – матрицы Паули,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – комплексные скаляр и вектор.
2. Найти решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

в скрещенных электрическом и магнитном полях  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ . Как выглядят характеристики?

3. Найти закон колебаний холодного электронного газа относительно однородного неподвижного ионного фона плотности  $n_0$ . Колебания описываются уравнением непрерывно-

сти для плотности электронов  $n(x,t)$ , уравнением Эйлера для их скорости  $u(x,t)$  и уравнением Пуассона для электрического поля  $E(x,t)$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{e}{m} E, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(n_0 - n)$$

При каких начальных значениях амплитуды электрического поля  $E_0$  происходит

опрокидывание, если  $u(x,0)=0$ ,  $E(x,0) = \frac{E_0}{1 + x^2/d^2}$  ?

4. Определить тип уравнения  $y(u_{xx} - u_{yy}) - 2xu_{xy} - u_y = 0$  привести к каноническому виду и решить задачу Коши  $u(0, y) = \frac{1}{chy}$ ,  $u_x(0, y) = 0$ . Исследовать разрешимость задачи Коши.

### ЗАДАНИЕ № 2

5. Решить задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности на положительной полуоси с начальным условием  $u(x,0)=x^4$  и граничным условием  $u_x(0,t)=0$ .
6. На границе бесконечного цилиндра радиуса  $R$  температура осциллирует как  $T(t)=T_0 \sin \omega t$ . Найти распределение температуры в цилиндре как функцию времени. Исследовать решение при  $\omega \gg \chi/R^2$ , где  $\chi$  – температуропроводность.
7. Найти собственные частоты  $\omega$  колебаний шара радиуса  $R$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$$

при условии  $\omega R/c \gg 1$ .

8. Показать, что уравнение Шрёдингера для двумерного «атома водорода» в электрическом поле  $F$

$$-\frac{1}{2} \Delta \psi - \frac{\psi}{\sqrt{x^2 + y^2}} + Fy\psi = E\psi$$

$$x = \xi \eta, \quad y = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}.$$

допускает разделение переменных в параболических координатах

Найти уровни энергии  $E$  и собственные функции  $\psi$  связанных состояний при  $F=0$ . Сравнить с ответом в полярных координатах.

### ЗАДАНИЕ № 3

9. Вычислить асимптотику интеграла  $\int_0^\infty dx \exp(-x^3/3 + ax)$ , где  $a$  – комплексная величина,

$|a|$  - большой параметр.

10. Найти решение  $\psi(x,t)$  уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + mgx\psi$$

с начальным условием  $\psi(x,0) = A \exp(-|x|/a)$ . Исследовать асимптотику на больших временах. С какой скоростью движется центр пакета и как меняется его ширина?

11. Методом усреднения найти эволюцию колебаний маятника, испытывающего трение при прохождении точки  $x=a$ , и сравнить с точным решением уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} \delta(x-a) + \omega_0^2 x = 0, \quad \gamma \rightarrow 0.$$

### Задачи, предлагаемые на контрольных работах

#### Вариант 1

- (2 балла) Найти  $\operatorname{tg} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ .
- (4 балла) Решить задачу Коши  $u_t + uu_x = 1, u(x, 0) = \pm \frac{x}{1+x^2}$ . Когда произойдет опрокидывание?
- (2 балла) Определить тип и привести к каноническому виду  $x^2 u_{xx} + xu_x + u_{yy} = 0$ .
- (3 балла) Найти автомодельную подстановку  $u_t = u_{xx}, u(x, 0) = \delta(x)$ .
- (3 балла) Найти решение уравнения малых колебаний струны  $u_{tt} - u_{xx} = 0, u(0, t) = u_x(1, t) = 0$  с начальными условиями

$$u(x, 0) = x - \frac{x^2}{2}, u_t(x, 0) = 0.$$

#### Вариант 2

- (2 балла) Найти  $\operatorname{arctg} \begin{pmatrix} x & x \\ 2x & 1 - 2x \end{pmatrix}$ .
- (4 балла) Решить задачу Коши  $u_t + uu_x = 1, u(x, 0) = 1/(1 + \exp(ax))$ . Когда произойдет опрокидывание?
- (2 балла) Определить тип и привести к каноническому виду  $xu_{xx} + uu_{yy} + u_x + u_y = 0$ .
- (3 балла) Найти автомодельную подстановку  $u_t = u_{xx}, u(x, 0) = \delta(x)$ .
- (3 балла) Найти решение уравнения малых колебаний струны  $u_{tt} - u_{xx} = 0, u(0, t) = u(1, t) = 0$  с начальными условиями

$$u(x, 0) = x - x^2, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

### Дополнительные задачи по курсу «Методы математической физики 1»

- Найти  $J_0(\sigma_2 x)$ , где  $\sigma_2$  – матрица Паули.
- Найти момент опрокидывания решения уравнения Хопфа  $u_t + uu_x = 0, u(x, 0) = \sin x$ .
- Определить тип и привести к каноническому виду  $x^2 u_{xx} - 2xu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ .
- Решить задачу Коши  $u_t + e^x u_x = u, u|_{x \rightarrow \infty} = e^{-t^2}$ .
- Найти автомодельную подстановку для уравнения  $u_t = u_{xx}, u(x, 0) = \delta(x)$ .
- Сводится ли уравнение Эйри  $y'' = xy$  к гипергеометрическому?
- Сводится ли к гипергеометрическому уравнение  $(ax^2 + bx + c)y'' + Axy' + By = 0$ ?



8. Разделить переменные двумерного уравнения Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = 0$  в эллиптических координатах  $x = \text{ch}\alpha \cos \beta$ ,  $y = \text{sh}\alpha \sin \beta$ . Сводится ли получившееся уравнение к гипергеометрическому?
9. Найти асимптотику интеграла  $\int_{\gamma}^{\infty} \exp(iqx - \sqrt{q^2 - 1}y) \frac{dq}{\sqrt{q^2 - 1}}$  при  $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow \infty$ . Контур  $\gamma$  обходит разрез  $(-\infty, -1)$  по верхнему, а  $(+1, +\infty)$  по нижнему берегу.
10. Найти асимптотику интеграла  $\int_0^{\infty} \exp(px - e^x) \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ,  $p \rightarrow \infty$
11. Пользуясь представлением  $D_{\nu}(x) = e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-i\infty}^{i\infty} t^{\nu} e^{-xt + \frac{t^2}{2}} dt$ , найти асимптотику функции параболического цилиндра при  $\nu \rightarrow \infty$  и фиксированном  $x$ .
12. Решить уравнение Гамильтона–Якоби с начальным условием  $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = 0$ ,  $S|_{t=0} = \exp x$ .
13. Найти общее решение уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$   
Решить задачу Коши  $u(1, y) = y^2$ ,  $u_x(1, y) = 0$ .
14. Струна длины  $l$  с закрепленными концами в начальный момент имеет форму полуокружности  $u(x, 0) = \sqrt{x(l-x)}$  и нулевую скорость. Найти зависимость смещения от координат и времени.
15. Найти собственные функции и энергии стационарных состояний двумерного осциллятора в полярных координатах  $-\Delta \psi + r^2 \psi = 2E \psi$ . Вычислить кратность вырождения.
16. Решить задачу Коши  $u_x^2 - u_y^2 = 0$ ,  $u(x, 0) = x$ .
17. Пользуясь рекуррентным соотношением  $J'_m(t) = J_{m-1}(t) - J_{m+1}(t)$  и начальными значениями  $J_m(0) = \delta_{m,0}$ , найти производящую функцию функций Бесселя  $G(z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m J_m(t)$ .
18. Найти минимальную частоту собственных колебаний бесконечного упругого цилиндра радиуса  $R$ .

### Список вопросов, знание которых необходимо для сдачи экзамена

1. Общее и частное решение квазилинейного уравнения I порядка.
2. Канонический вид уравнения II порядка. Формула Даламбера.
3. Автомодельное решение уравнения теплопроводности.
4. Метод Фурье для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.
5. Разделение переменных в цилиндрических и сферических координатах.
6. Функции Бесселя, полиномы Лежандра и Эрмита.
7. Асимптотика интеграла Лапласа. Метод стационарной фазы.

### Пример экзаменационного билета и дополнительных задач

1. Найти асимптотику интеграла  $\int_0^{\infty} \exp(-t^3 - \lambda t^{-3}) dt$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ .
2. Решить задачу Коши  $u_t + uu_x = u$ ,  $u(x, 0) = x$ .

3. Решить задачу Коши  $xu_y - yu_x = 1$ ,  $u(1, y) = y^2$ .
4. Найти решение уравнения Лапласа в единичном шаре с граничным условием  $u|_{r=1} = 3 \cos^2 \theta - 1$ .
5. Решить задачу Коши  $u_t + uu_x = x$ ,  $u(x, 0) = x$ .

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде

**Лист актуализации рабочей программы  
по дисциплине «Методы математической физики 1»  
по направлению подготовки 03.03.02 Физика  
Профиль «Общая и фундаментальная физика»**

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного