

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»  
(Новосибирский государственный университет, НГУ)

**Физический факультет  
Кафедра теоретической физики**



д.ф.-м.н. \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ

Декан ФФ

В. Е. Блинов

08 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины  
МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 2**

направление подготовки: **03.03.02 Физика**  
направленность (профиль): **Общая и фундаментальная физика**

Форма обучения: **Очная**

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)					Промежуточная аттестация (в часах)					
		Контактная работа обучающихся с преподавателем				Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем				
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
6	144	32	48		16	24	18	4				2
<b>Итого</b>	<b>144</b>	<b>32</b>	<b>48</b>		<b>16</b>	<b>24</b>	<b>18</b>	<b>4</b>				<b>2</b>
Всего 144 часа / 4 зачётные единицы, из них: - контактная работа 102 часа												
Компетенции: ОПК-1												

Ответственный за образовательную программу,

д.ф.-м.н., проф.

С.В. Цыбуля

Новосибирск, 2023

## Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.....	3
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.....	4
3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.....	5
4. Структура и содержание дисциплины .....	6
5. Перечень учебной литературы.....	10
6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.....	10
7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.....	11
8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.....	11
9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.....	11
10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.....	12

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы.**

Дисциплина (курс) «Методы математической физики 2» имеет своей целью обучение студентов-физиков основным математическим методам, применяемым в физике. В курсе излагается материал, знание которого необходимо как для теоретиков и вычислителей, так и для экспериментаторов. В процессе освоения дисциплины студенты знакомятся с методом функций Грина решения неоднородных уравнений в частных производных и применением теории неприводимых представлений групп.

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
<p><b>ОПК-1.</b> Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности</p>	<p><b>ОПК-1.1.</b> Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.</p> <p><b>ОПК -1.2.</b> Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.</p>	<p><b>Знать:</b> - способ получения инвариантов Римана, способы решения задач с уравнениями второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов, свойства функций Бесселя и Лежандра, основные свойства асимптотических разложений, основные понятия теории представлений точечных групп;</p> <p>- физический смысл характеристик, типичные в физике постановки задач для эллиптического, параболического и гиперболического типов уравнений второго порядка (задачи Коши, Дирихле и Неймана), основные определения теории представлений групп Ли.</p> <p><b>Уметь:</b> - решать простейшие линейные и квазилинейные уравнения в частных производных, пользоваться формулами Родрига и интегральными представлениями специальных функций, определять тип особенности в уравнении второго порядка и сводить к уравнениям на гипергеометрические функции, оценивать асимптотику интегралов методами Лапласа и стационарной фазы, строить функцию Грина оператора Штурма – Лиувилля;</p> <p>- выполнять нелинейные замены в простых нелинейных</p>

Результаты освоения образовательной программы (компетенции)	Индикаторы	Результаты обучения по дисциплине
		уравнениях физики при возможности сведения их к линейным, искать автомодельные подстановки, находить асимптотику интегралов методом перевала, разлагать представление группы в прямую сумму неприводимых, рассчитывать кратности вырождения молекулярных колебаний, строить функцию Грина задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона, задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.  <b>Владеть:</b> - методами характеристик, разделения переменных и Фурье, усреднения;  - методами стационарной фазы и перевала, функций Грина, симметрии

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Курс «Методы математической физики 2» – необходимый элемент образования физика, реализуется в 6-м семестре 3-го курса для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 Физика. Курс является одной из обязательных профессиональных дисциплин. В программу входят те темы, которые нужны студенту для изучения основных курсов теоретической физики – квантовой механики, статистической физики, физики сплошных сред. Основные разделы курса: применение теории представлений групп и функции Грина. Курс рассчитан на один семестр, завершается экзаменом. Этот курс имеет практическую направленность, учит решать задачи и применять знания из изученных ранее разделов высшей математики.

Считается, что студенты третьего курса уже знакомы в достаточной степени с линейной алгеброй, математическим анализом, теорией функций комплексного переменного и обыкновенными дифференциальными уравнениями. Цель заключительного математического курса – научить решать простые математические задачи, возникающие в физике. Для этого надо свободно пользоваться высшей математикой из разных разделов. При изучении теории групп активно используются сведения из линейной алгебры (операции с матрицами, проекторы, собственные векторы), с повторения которых начинаются практические занятия. После этого идет изложение теории групп и ее приложений в физике. Для лучшего усвоения квантовой физики в программе предусмотрено решение задач по применению теории представлений групп. К таким задачам относятся расчет кратности вырождения молекулярных колебаний, количества независимых компонент симметричных и антисимметричных инвариантных тензоров разных рангов, снятие вырождения квантовых уровней энергии при понижении симметрии системы, а также рассматриваются пра-

вила отбора в молекулах средней и высокой симметрии. Для решения задач электростатики студентов знакомят с методом функций Грина, в частности, с потенциалами объемного заряда, простого и двойного слоя, с запаздывающей функцией Грина классической электродинамики, для квантовой механики - с функциями Грина уравнений Шрёдингера.

### 3. Трудоёмкость дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающегося с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу.

Семестр	Общий объем	Виды учебных занятий (в часах)					Промежуточная аттестация (в часах)				
		Контактная работа обучающихся с преподавателем				Самостоятельная работа, не включая период сессии	Самостоятельная подготовка к промежуточной аттестации	Контактная работа обучающихся с преподавателем			
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Прием заданий			Консультации	Зачет	Дифференцированный зачет	Экзамен
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	144	32	48		16	24	18	4			2
<b>Итого</b>	<b>144</b>	<b>32</b>	<b>48</b>		<b>16</b>	<b>24</b>	<b>18</b>	<b>4</b>			<b>2</b>
Всего 144 часа / 4 зачётные единицы, из них: - контактная работа 102 часа											
Компетенции: ОПК-1											

Реализация дисциплины предусматривает практическую подготовку при проведении следующих видов занятий, предусматривающих участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью: лекции, практические занятия, задачи для самостоятельного решения, консультации, самостоятельная работа студента, экзамен в конце семестра.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

Текущий контроль: решение задач из задания для самостоятельного решения

Промежуточная аттестация: экзамен

Общая трудоёмкость рабочей программы дисциплины составляет **144** академических часа / 4 зачетных единицы:

- занятия лекционного типа – 32 часа;
- практические занятия – 48 часов;
- прием заданий – 16 часов;
- самостоятельная работа обучающегося в течение семестра, не включая период сессии – 24 часа;
- промежуточная аттестация (самостоятельная подготовка к сдаче экзамена, консультация и экзамен) – 24 часа.

Объём контактной работы обучающегося с преподавателем (занятия лекционного типа, практические занятия, приём заданий, групповые консультации, экзамен) составляет 102 часа.

#### 4. Структура и содержание дисциплины

Курс «Методы математической физики 2» является курсом, рассчитанным для 6-го семестра, читаемым для студентов 3-го курса физического факультета НГУ. Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 академических часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы			Сам. работа в течение семестра (не включая период сессии)		
				Лекции (кол-во часов)	Практические занятия (кол-во часов)	Прием заданий			
<b>3 курс, 6 семестр</b>									
1	Симметрия молекул, точечная группа. Определение формальной группы, гомоморфизм, изоморфизм. Примеры конечных групп.	1	7	2	3	2			
2	Основные понятия теории групп.	2	8	2	3		3		
3	Матричные представления конечных групп. Приводимые и неприводимые представления. Лемма Шура.	3	7	2	3	2			
4	Соотношение ортогональности неприводимых представлений. Таблица неприводимых характеров. Разложение представления на неприводимые.	4	8	2	3		3		
5	Симметрии, законы сохранения и вырождение в квантовой механике. Снятие вырождения при понижении симметрии.	5	7	2	3	2			
6	Общие свойства групп Ли. Примеры групп Ли. Алгебра Ли, структурные константы, генераторы. Алгебра Ли группы Ли.	6	8	2	3		3		
7	Восстановление группы Ли по ее алгебре Ли. Группы $SO(3)$ , $SU(2)$ и их параметризации. Изоморфизм алгебр Ли $ASU(2)$ и $ASO(3)$ . Гомоморфизм группы $SU(2)$ на $SO(3)$ . Спиноры.	7	7	2	3	2			
8	Построение неприводимых представлений группы вращений. Повышающий и понижающий операторы, оператор Казимира. Базис неприводимого представления из сферических гармоник.	8	8	2	3		3		
9	Тензорное произведение представлений. Разложение Клебша – Гордана. Тензорные представления группы. Симметричные тензоры, симметризаторы Юнга. Инвариантные тензоры. Правила отбора.	9	7	2	3	2			
10	Фундаментальное решение и функция Грина краевой задачи. Принцип взаимности. Функция Грина уравнения Штурма – Лиувилля на конечном интервале.	10	8	2	3		3		
11	Альтернатива Фредгольма. Разложение обратного оператора по проекторам, нулевые моды. Обобщенная функция Грина.	11	7	2	3	2			

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Консультации перед экзаменом (часов)	Промежуточная аттестация (в часах)
			Всего	Аудиторные часы			Сам. работа в течение семестра (не включая период сессии)		
				Лекции (кол-во часов)	Практические занятия (кол-во часов)	Прием заданий			
12	Принцип максимума для оператора Лапласа. Единственность решения задач Дирихле и Неймана. Особенность фундаментального решения уравнения Пуассона в пространствах разной размерности.	12	8	2	3		3		
13	Формула Грина. Функции Грина второго рода для задач Дирихле и Неймана. Потенциалы объемного заряда, простого и двойного слоя. Функция Грина уравнения Гельмгольца. Применение в квантовой теории рассеяния.	13	7	2	3	2			
14	Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение с помощью преобразования Фурье.	14	8	2	3		3		
15	Единственность решения волнового уравнения. Запаздывающая функция Грина. Принцип Гюйгенса - Френеля.	15	8	2	3	2	1		
16	Дополнительные главы теории групп.	16	7	2	3		2		
17	Групповая консультация		4					4	
18	Самостоятельная подготовка обучающегося к экзамену		18						
19	Экзамен		2					2	
<b>Всего:</b>			<b>144</b>	<b>32</b>	<b>46</b>	<b>16</b>	<b>24</b>	<b>4</b>	<b>20</b>

### Самостоятельная работа студентов (42 часа)

Перечень занятий на СРС	Объем, час
Подготовка к практическим занятиям	8
Решение задач из задания	8
Подготовка к контрольным работам	4
Подготовка к ответам на дополнительные вопросы	4
Подготовка к экзамену	18

### Программа лекций (32 часа)

#### ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРУПП (20 часов)

1. Симметрия молекул (повороты, отражения, зеркальные повороты). Определение группы, гомоморфизм, изоморфизм. Примеры конечных групп:  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $T$ ,  $O$ ,  $Y$ .

2. Основные понятия теории групп: порядок элемента и группы, подгруппа, смежный класс, класс сопряженных элементов, нормальная подгруппа, центр группы, фактор-группа.
3. Матричные представления конечных групп. Единичное, точное, регулярное представления, размерность представления. Приводимые и неприводимые представления. Лемма Шура. Соотношение ортогональности неприводимых представлений. Таблица характеров. Соотношение ортогональности характеров. Разложение представления на неприводимые.
4. Симметрии, законы сохранения и вырождение в квантовой механике. Снятие вырождения при понижении симметрии. Использование симметрии для расчета кратности вырождения колебаний молекул.
5. Общие свойства групп Ли, связность, размерность, компактность. Примеры групп Ли: **GL(n,C), U(n,C), SU(n,C), O(n,R), SO(n,R)**. Алгебра Ли, структурные константы. Инфинитезимальные операторы (генераторы). Алгебра Ли группы Ли.
6. Восстановление группы Ли по ее алгебре Ли. Экспоненциальная формула. Группа **SO(3)**, **SU(2)** и их параметризации. Изоморфизм алгебр Ли **ASU(2)** и **ASO(3)**. Гомоморфизм группы **SU(2)** на **SO(3)**. Спиноры.
7. Построение неприводимых представлений группы вращений. Повышающий и понижающий операторы, оператор Казимира. Базис представления из сферических гармоник. Связь с квантованием момента импульса.
8. Тензорное произведение представлений. Разложение Клебша – Гордана. Тензорные представления группы, понятие тензора. Симметричные тензоры, симметризаторы Юнга. Инвариантные тензоры, расчет количества независимых компонент. Правила отбора.

#### *МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА (12 часов)*

9. Необходимые условия существования обратного оператора. Фундаментальное решение и функция Грина краевой задачи. Принцип взаимности. Функция Грина уравнения Штурма – Лиувилля на конечном интервале.
10. Альтернатива Фредгольма. Разложение обратного оператора по проекторам, нулевые моды. Обобщенная функция Грина.
11. Принцип максимума для оператора Лапласа. Единственность решения задач Дирихле и Неймана. Особенность фундаментального решения уравнения Пуассона в пространствах разной размерности. Формула Грина. Функции Грина второго рода для задач Дирихле и Неймана. Потенциалы объемного заряда, простого и двойного слоя. Функция Грина уравнения Гельмгольца. Применение в квантовой теории рассеяния.
12. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение с помощью преобразования Фурье. Единственность решения волнового уравнения. Запаздывающая функция Грина. Правило обхода полюсов. Принцип Гюйгенса - Френеля.

#### **Примерный план практических занятий (48 часов)**

1. Группа симметрии правильного треугольника: таблица умножения, подгруппы, смежные классы. Задачи 292, 293, 295, 294, 296, 283, 297, 284 (4 часа).
2. Сопряженные классы, инвариантные подгруппы, факторгруппы. Группы подстановок. Задачи 302 (а), 303, 306, 307, 309 (а). Найти порядок группы вращений куба (4 часа).
3. Группа симметрии квадрата и куба. Центр группы. Задачи 302 (б), 287, 299, 286, 305 (2 часа).

4. Матрицы неприводимых представлений группы треугольника. Характеры. Соотношения ортогональности. Разложение произвольного представления на неприводимые. Найти неприводимые представления группы треугольника и построить таблицу неприводимых характеров. Построить и сравнить таблицы неприводимых характеров групп  $D_2$  и  $C_4$ . Задачи 309 (б), 310, 311 (2 часа).
5. Таблица неприводимых характеров группы квадрата. Кратности вырождения нормальных колебаний симметричной молекулы. Задача 344. Двумерная система из трех одинаковых грузов в вершинах правильного треугольника. Грузы соединены между собой и с центром одинаковыми пружинами. Выписать матрицы исходного представления и разложить его на неприводимые. В молекуле  $C_2H_6$  треугольник из атомов водорода развернут относительно второго треугольника на 60 градусов. Найти кратности вырождения нормальных колебаний. [То же для  $NH_3$  и  $CH_3F$ ] (2 часа).
6. Действие элемента группы на функциях. Снятие вырождения при понижении симметрии в задачах о колебаниях круглой мембраны и об уровнях энергии квантовой системы. Прямое произведение представлений. Снимается ли вырождение колебаний круглой мембраны, если на ее края помещены четыре одинаковых груза в вершинах квадрата? Задачи 349, 350 (2 часа).
7. Примеры групп Ли, вычисление размерности. Различные параметризации. Генераторы, алгебры Ли. Восстановление группы Ли по ее алгебре с помощью экспоненциальной формулы. Задачи 329, 328 (в), (г), 315 (4 часа).
8. Неприводимые представления группы  $SO(2)$  и их характеры. Тензорные представления, разложение на неприводимые представления, инвариантные тензоры. Найти размерность тензора ранга  $n$ , разложить на неприводимые. Сколько независимых компонент имеет тензор третьего ранга, инвариантный относительно группы  $SO(2)$  (2 часа).
9. Неприводимые представления групп  $O(2)$  и  $SO(3)$  и их характеры. Оператор Казимира в представлении на функциях. Задачи 316, 317(а), 333 (4 часа).
10. Преобразование тензоров при вращении и инверсии. Разложение Клебша – Гордана. Задача 334. Разложить  $D^{(1)} \otimes D^{(1)}$  на неприводимые в группе  $SO(3)$ . Выделить линейные комбинации компонент бесследового симметричного тензора второго ранга, которые преобразуются при вращении как  $Y_{2,m}$  (2 часа).
11. Симметризация тензоров и разложение симметричного тензора на неприводимые. Представления в пространстве полиномов. Задача 340(а),(б),(в) (4 часа).
12. Количество независимых компонент инвариантного тензора. Правила отбора. Сколько независимых компонент имеет тензор второго ранга, инвариантный относительно группы  $SO(3), D_3 [T]$ ? То же для симметричного тензора. Найти правила отбора для дипольного момента в группах  $SO(3), D_3 [T]$  (2 часа).
13. Связь групп  $SU(2)$  и  $SO(3)$ . Оператор Казимира и неприводимые представления. Задача 317 (б), 318. Линейное преобразование вектора  $r$ :  $\vec{r}' = \hat{R}\vec{r}$  задается формулой  

$$(\vec{r}' \cdot \vec{\sigma}) = e^{-i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \frac{\phi}{2}} (\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) e^{+i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \frac{\phi}{2}}$$
 Найти матрицу  $\hat{R}$  [341-343] (2 часа).
14. Построение функции Грина для одномерных краевых задач. Фундаментальное решение. Скачок производной. Задачи 219, 220, 199, 224 (а), 225 (а), (б), 227 (2 часа).

15. Функция Грина для оператора Штурма-Лиувилля. Нулевые моды и обобщенная функция Грина. Принцип взаимности. Задачи 228 (а), (б) (2 часа).
16. Функция Грина уравнений Пуассона и Гельмгольца. Задачи Дирихле и Неймана. Характер особенностей в двумерном и трехмерном случаях. Функция Грина второго рода. Интеграл Пуассона. Метод изображений и метод конформных преобразований. Задачи 230, 231, 232, [233], 204, 236 (2 часа).
17. Функция Грина уравнений теплопроводности и Фоккера–Планка. Преобразования Фурье по координатам и времени. Задачи 238, 207 (а), 240, 241, 242 с х3, [208] (2 часа).
18. Функция Грина уравнения Шрёдингера. Правило обхода полюсов. Запаздывающая функция Грина волнового уравнения. Формула Кирхгофа. [Пропагатор уравнения Клейна – Гордона – Фока.] Задачи 207 (б), 246, 209-212 [213] (4 часа).

*Все задачи приводятся в нумерации задачника Колоколова и др. (см. ссылку [2] раздела 5.1). В квадратных скобках указаны необязательные задачи, которые можно решить на занятии, если останется время.*

## **5. Перечень учебной литературы.**

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов университетов, обучающихся по специальности "Математика" и "Механика" / С.К. Годунов. Москва: Наука, 1971. 416 с. : ил. ; 22 см.(22 экз.)
2. Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И. и др. Задачи по математическим методам физики. — 2-е изд., испр. — Москва: Эдиториал УРСС, 2002. — 286 с.: ил., ISBN 5-8360-0429-3 (56 экз.)
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — Изд. 4-е, испр. — Москва: Наука, 1989. — 767 с.: ил. — (Теоретическая физика, т. III). (254 экз.)
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — Изд. 3-е, перераб. — Москва: Наука, 1986. — 736 с.: ил. — (Теоретическая физика, т. VI). (142 экз.)
5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — Москва: Наука, 1984. — 271 с.: ил. (57 экз.)
5. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.1. — М.: Мир, 1982. — 486 с.: ил. (50 экз.)
6. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.2. — М.: Мир, 1984. — 381 с.: ил. (50 экз.)
7. Мессиа А. Квантовая механика. Т.1. — М.: Наука, 1978. — 478 с.: ил. (27 экз.)
8. Мессиа А. Квантовая механика. Т.2. — М.: Наука, 1979. — 583 с.: ил. (27 экз.)
9. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. — Изд. 5-е, испр. — М.: Наука, 1992. — 431 с. (36 экз.)

## **6. Перечень учебно-методических материалов по самостоятельной работе обучающихся.**

1. Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И. и др. Задачи по математическим методам физики. — 2-е изд., испр. — Москва: Эдиториал УРСС, 2002. — 286 с.: ил.
2. Подивилов Е.В., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Рабочая тетрадь по математическим методам физики: учебное пособие: [для студентов 3-го курса Физ. фак. НГУ]. — М-во образования

и науки РФ, Новосиб. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. теорет. физики. — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2012. — 125 с.: ил.

3. Кузнецов Е.А., Шапиро Д.А. Методы математической физики: курс лекций: [для студентов 3-го курса Физ. фак. НГУ]. Ч.1. — М-во образования и науки РФ, Новосиб. нац. исслед. гос. ун-т, Физ. фак., Каф. теорет. физики. — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2011. — 114 с.: ил., граф.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

Для освоения дисциплины используются следующие ресурсы:

- электронная информационно-образовательная среда НГУ (ЭИОС);
- образовательные интернет-порталы;
- информационно-телекоммуникационная сеть Интернет.

### **7.1 Современные профессиональные базы данных**

Не используются.

### **7.2. Информационные справочные системы**

Не используются.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине.**

Для обеспечения реализации дисциплины используется стандартный комплект программного обеспечения (ПО), включающий регулярно обновляемое лицензионное ПО Windows и MS Office.

Использование специализированного программного обеспечения для изучения дисциплины не требуется.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Для реализации дисциплины используются специальные помещения:

1. Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной и итоговой аттестации.

2. Помещения для самостоятельной работы обучающихся.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду НГУ.

Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине для обучающихся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется согласно «Порядку организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным

программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья в Новосибирском государственном университете».

## **10. Оценочные средства для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине.**

### **10.1 Порядок проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине**

#### ***Текущий контроль***

В течение семестра проводится прием заданий. Результаты текущего контроля служат основанием для выставления оценок в ведомость контрольной недели на факультете, а решение и сдача половины задач из задания является необходимым условием получения положительной оценки на экзамене. За каждую задачу, сданную до контрольного срока, студент получает один балл, эти баллы в дальнейшем учитываются при выставлении итоговой оценки за курс (максимум за работу в семестре можно набрать 12 баллов).

В течение семестра проводится прием выполненных обучающимся заданий/задач в отведенное время. Примеры заданий/задач приведены в п.10.3. Термин «сдать задание/задачу» означает объяснение хода ее решения и при необходимости ответы на дополнительные вопросы преподавателей.

#### ***Промежуточная аттестация.***

Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен в конце семестра.

Освоение компетенции оценивается согласно шкале оценки уровня сформированности компетенции. Положительная оценка по дисциплине выставляется в том случае, если заявленная компетенция ОПК-1 сформирована не ниже порогового уровня в части, относящейся к формированию способности использовать специализированные знания в области математической физики в профессиональной деятельности.

Окончательная оценка работы студента в течение семестра происходит на экзамене. Экзамен проводится в конце семестра в экзаменационную сессию в письменной форме. Вопросы билета подбираются таким образом, чтобы проверить уровень сформированности компетенций ОПК-1.

Вывод об уровне сформированности компетенций принимается при проверке результатов итоговой контрольной работы. Каждая задача контрольной оценивается от 0 до 6 баллов, максимальный балл за контрольную равен 36. Положительная оценка ставится, когда компетенции освоены не ниже порогового уровня. Оценки «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» означают успешное прохождение промежуточной аттестации.

### **Соответствие индикаторов и результатов освоения дисциплины**

Таблица 10.1

<b>Индикатор</b>	<b>Результат обучения по дисциплине</b>	<b>Оценочные средства</b>
------------------	---	---------------------------

<p><b>ОПК-1.1.</b> Применяет математический аппарат, теоретические и методологические основы математических дисциплин для решения профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.</p>	<p><b>Знать:</b> - способ получения инвариантов Римана, способы решения задач с уравнениями второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов, свойства функций Бесселя и Лежандра, основные свойства асимптотических разложений, основные понятия теории представлений точечных групп;</p> <p>- физический смысл характеристик, типичные в физике постановки задач для эллиптического, параболического и гиперболического типов уравнений второго порядка (задач Коши, Дирихле и Неймана), основные определения теории представлений групп Ли.</p>	<p>Опрос Контрольная работа Экзамен.</p>
<p><b>ОПК -1.2.</b> Использует теоретические основы базовых разделов математических и естественнонаучных дисциплин при решении профессиональных задач в области физики и смежных с ней областях.</p>	<p><b>Уметь:</b> - решать простейшие линейные и квазилинейные уравнения в частных производных, пользоваться формулами Родрига и интегральными представлениями специальных функций, определять тип особенности в уравнении второго порядка и сводить к уравнениям на гипергеометрические функции, оценивать асимптотику интегралов методами Лапласа и стационарной фазы, строить функцию Грина оператора Штурма – Лиувилля;</p> <p>- выполнять нелинейные замены в простых нелинейных уравнениях физики при возможности сведения их к линейным, искать автомодельные подстановки, находить асимптотику интегралов методом перевала, разлагать представление группы в прямую сумму неприводимых, рассчитывать кратности вырождения молекулярных колебаний, строить функцию Грина задач Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона, задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.</p> <p><b>Владеть:</b> - методами характеристик, разделения переменных и Фурье, усреднения;</p> <p>- методами стационарной фазы и перевала, функций Грина, симметрии</p>	<p>Опрос Контрольная работа Экзамен.</p>

## 10.2 Описание критериев и шкал оценивания индикаторов достижения результатов обучения по дисциплине «Методы математической физики 2».

Таблица 10.2

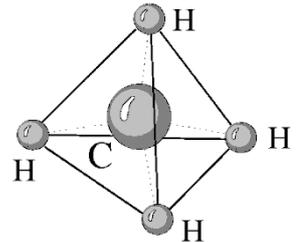
Критерии оценивания результатов обучения	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Уровень освоения компетенции			
		Не сформирован (0 баллов)	Пороговый уровень (3 балла)	Базовый уровень (4 балла)	Продвинутый уровень (5 баллов)
1	2	3	4	5	6
Полнота знаний	ОПК-1.1	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имеют место грубые ошибки.	Демонстрирует общие знания базовых понятий по темам/разделам дисциплины. Допускается значительное количество негрубых ошибок.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Допускается несколько негрубых/несущественных ошибок. Не отвечает на дополнительные вопросы.	Уровень знаний соответствует программе подготовки по темам/разделам дисциплины. Свободно и аргументированно отвечает на дополнительные вопросы.
Наличие умений	ОПК-1.2	Отсутствие минимальных умений. Не умеет решать стандартные задачи. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы частично основные умения. Решены типовые задачи. Допущены негрубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания с негрубыми ошибками или с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задания в полном объеме без недочетов и ошибок.
Наличие навыков (владение опытом)	ОПК-1.2	Отсутствие владения материалом по темам/разделам дисциплины. Нет навыков в решении стандартных задач. Наличие грубых ошибок.	Имеется минимальный набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.	Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.	Имеется базовый набор навыков при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. Продемонстрированы знания по решению нестандартных задач.

### 10.3 Типовые контрольные задания и материалы, необходимые для оценки результатов обучения

#### Домашние задания по курсу «Методы математической физики 2»

##### ЗАДАНИЕ № 1

1. Определить порядок и число классов сопряженных элементов группы вращений тетраэдра  $T$ . Найти инвариантную подгруппу  $H$  и фактор-группу  $T/H$ . Построить таблицу неприводимых характеров.
2. Построить таблицу неприводимых характеров полной группы тетраэдра  $T_d$ . Найти кратности вырождения частот нормальных колебаний молекулы метана  $CH_4$ .



3. В квантовой механике можно обозначить спиновую волновую функцию электрона как  $\alpha$ , если спин направлен “вверх” или  $\beta$ , когда спин направлен “вниз”. Состояния  $\alpha$  и  $\beta$  ортогональны. Для системы из трех электронов можно сформировать волновые функции вида  $\alpha(1)\alpha(2)\alpha(3)$ ,  $\alpha(1)\alpha(2)\beta(3)$  и т.д., всего 8 волновых функций. Эти волновые функции преобразуются друг через друга под действием элементов группы подстановок  $P_3$ . Разложить данное представление на неприводимые.

##### ЗАДАНИЕ №2

4. Вывести правила отбора для матричных элементов электрического дипольного момента в молекуле из задачи 2.
5. Построить представление группы вращений в пространстве однородных полиномов третьей степени  $P(x, y, z) = \sum_{m+n+l=3} C_{mnl} x^m y^n z^l$ . Найти базис подпространства гармонических полиномов. Разложить исходное представление на неприводимые и выразить базис последних через сферические функции  $Y_{lm}$ .
6. Разложить на неприводимые представление группы вращений  $SO(3)$  на тензорах третьего ранга в трехмерном пространстве. Рассмотреть полностью симметричную часть. Приводима ли она?
7. Центробежная поправка в гамильтониане многоатомной молекулы имеет вид  $V = \sum_{ijkl} \tau_{ijkl} J_i J_j J_k J_l$ , где  $J_i$  – вектор углового момента,  $\tau_{ijkl}$  – симметричный тензор.

Сколько независимых компонент содержит тензор  $\tau$ , если молекула имеет симметрию треугольника  $D_3$ ?

8. Две переменные  $z_1, z_2$  преобразуются вещественной матрицей из группы  $G=SL(2)$

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1.$$

Найти генераторы  $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$  группы  $G$  в представлении на функциях  $w(z_1, z_2)$  и их коммутационные соотношения. Найти оператор Казимира, коммутирующий со всеми генераторами. Найти собственные функции оператора Казимира. Построить повышающий и понижающий операторы для  $\hat{I}_3$ .

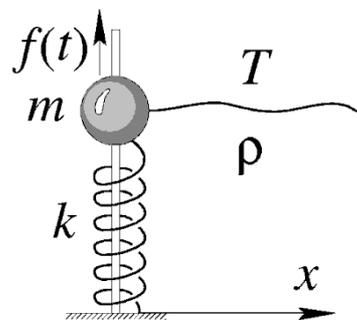
### ЗАДАНИЕ № 3

9. Найти функцию Грина и решение уравнения  $y''' = f(x)$  с граничными условиями  $y(0) = a$ ,  $y(l) = 0$ ,  $y'(0) + y'(l) = 0$ .
10. Найти функцию Грина неоднородного уравнения теплопроводности на поверхности цилиндра радиуса  $R$ :

$$u_t = \chi \Delta u + f(z, \varphi, t).$$

Выписать решение задачи с источником  $f = Q\delta(z - Vt)$ .

11. Найти функцию Грина второго рода  $G(x, t|t')$  механической системы, состоящей из шарика, скользящего по вертикальной спице, соединенного с пружинкой и полубесконечной струной, натянутой вдоль оси  $x$ .



$$\rho u_{tt}(x, t) = T u_{xx}(x, t), \quad m u_{tt}(0, t) = -k u(0, t) + T u_x(0, t) + f(t).$$

### Задачи, предлагаемые на контрольных работах

#### Вариант 1

- (2 балла) Может ли в группе из 35 элементов быть 7 мерное неприводимое представление?
- (3 балла) Сколько классов сопряженных элементов в группе  $O$  собственных вращений куба? Перечислите эти классы.

3. (4 балла) Сколькими различными способами можно раскрасить грани тетраэдра в 4 различных заданных цвета, каждую грань своим цветом? Различными считаются раскраски, которые нельзя совместить друг с другом вращением тетраэдра.
4. (4 балла) Построить таблицу неприводимых характеров группы, порождаемой двумя элементами 4-го порядка  $P, Q$ :  $P^4=Q^4=1, P^2=Q^2, QPQ=P$ .
5. (2 балла) Три одинаковых грузика на плоскости, расположенные в вершинах равностороннего треугольника, соединены между собой и с центром одинаковыми пружинами. Найти кратности вырождения нормальных колебаний системы.

## Вариант 2

1. (2 балла) Может ли в группе  $Y$  порядка 60 быть 8 мерное неприводимое представление?
2. (3 балла) Какие подгруппы есть в группе симметрии квадрата? Какие из них инвариантны?
3. (4 балла) Сколькими различными способами можно раскрасить грани октаэдра в 8 различных заданных цветов, каждую грань своим цветом? Различными считаются раскраски, которые нельзя совместить друг с другом вращением октаэдра.
4. (4 балла) Найти порядок группы, порождаемой двумя элементами 4-го порядка  $P, Q$ :  $P^4=Q^4=1, QPQ=P$ .
5. (2 балла) Четыре одинаковых грузика на плоскости, расположенные в вершинах квадрата, соединены между собой и с центром одинаковыми пружинами. Найти кратности вырождения нормальных колебаний системы.

## Дополнительные задачи по курсу «Методы математической физики 2»

1. Дата 20.11.2010 допускает перестановки цифр. Найти порядок группы симметрии.
2. Показать, что  $J = -d/dz$  – понижающий оператор для  $J^3 = zd/dz - \lambda$ , где  $\lambda$  – комплексная константа, а  $z$  – комплексная переменная. Построить повышающий оператор.
3. Доказать, что  $f(x + \varepsilon) = \exp\left(\varepsilon \frac{d}{dx}\right) f(x)$ .
4. Молекула  $SF_6$  имеет форму правильного октаэдра. Найти кратности вырождения нормальных колебаний.
5. Усреднить по углам тензора  $a_i a_j a_k a_l$  ( $a$  – вектор длины 2).
6. Как действует оператор Лапласа на тензор квадрупольного момента  $Q_{ij} = x_i x_j - \frac{1}{3} x^2 \delta_{ij}$ ?
7. Найти функцию Грина задачи  $y'' + 4y' + 3y = 0, y(0) = y(\infty) = 0, y(\infty) = 0$ . Указание: Искать решение в виде  $u = \exp(-3x) u(x)$ .
8. Построить функцию Грина двумерного уравнения теплопроводности  $u_t = \Delta u + f(z, \varphi, t)$  на поверхности бесконечного цилиндра радиуса  $R$ .
9. Решить уравнение распространения волн  $u_t - cu_x + i\alpha u_{tt} = 0$  с точечным граничным условием  $u(0, t) = \delta(t)$  и нулевым начальным условием. Указание: выполнить преобразование Фурье по времени.

10. Показать, что операторы

$$K_1 = \frac{1}{4}(a^{+2} + a^2), \quad K_2 = \frac{1}{4i}(a^{+2} - a^2), \quad K_3 = \frac{1}{4}(aa^+ + a^+a), \quad \text{где } [a, a^+] = 1,$$

образуют алгебру Ли, и найти ее структурные константы. Найти квадратичную комбинацию генераторов, которая перестановочна с  $K_{1,2,3}$ . Выписать повышающий и понижающий операторы для  $K_3$  и найти их матричные элементы.

11. Найти генераторы алгебры Ли группы  $SL(2, R)$  над полем вещественных чисел. Построить оператор Казимира, повышающий и понижающий операторы. Найти явный вид генераторов в представлении на функциях двух вещественных переменных.
12. Разложить на неприводимые представление группы вращений  $SO(3)$  на тензорах четвертого ранга в трехмерном пространстве. Рассмотреть полностью симметричную часть. Приводима ли она?
13. Вычислить функцию Грина двумерного волнового уравнения. Указание: Выполнить преобразование Фурье по времени.
14. Найти функцию Грина уравнения теплопроводности в бесконечном цилиндре радиуса  $R$  с нулевым граничным условием на поверхности.
15. Найти функции Грина для задачи  $u_{tt} = u_{xx} + \alpha^2 u$  при начальных условиях  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = p(x)$  и стандартных граничных условиях убывание на бесконечности.
16. Показать, что действительное решение уравнения Гельмгольца  $\Delta u - k^2 u = 0$ , непрерывное вплоть до границы открытой области  $D$ , не может иметь в  $D$  положительного наибольшего значения.
17. Плоскость покрыта паркетом из правильных треугольников. Описать группу симметрии. Найти ее фактор-группу по подгруппе трансляций.
18. Молекула  $OsF_8$  имеет форму куба. Найти кратности вырождения нормальных колебаний.

### Список вопросов, знание которых необходимо для сдачи экзамена

1. Правые смежные классы, классы сопряженных элементов, инвариантные подгруппы в группе  $D_3$ .
2. Неприводимые представления и характеры  $D_3$ ,  $D_4$  и  $SO(3)$ . Разложение представления группы в прямую сумму неприводимых. Тензорное представление.
3. Кратность вырождения колебаний молекулы.
4. Размерность групп  $GL(n)$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$ . Параметризация в группах  $SU(2)$  и  $SO(3)$ .
5. Функция Грина оператора Штурма – Лиувилля. Условия на скачке. Нулевые моды.
6. Функция Грина уравнений Пуассона и Лапласа. Задачи Дирихле и Неймана. Метод изображений.
7. Функция Грина уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Правило обхода полюсов.

### Пример экзаменационного билета

1. Правило обхода полюсов. Построить функцию Грина двумерного уравнения Шрёдингера  $i\psi_t = \Delta\psi$ ,  $\psi(\mathbf{r}, 0) = g(\mathbf{r})$ .
2. Каждому повороту группы  $D_3$  соответствует линейное преобразование коэффициентов квадратичной формы  $P(x, y, z) = \sum_{i+j+k=2} x^i y^j z^k$ . Разложить полученное представление на неприводимые.

**Пример дополнительных задач**

1. Построить функцию Грина уравнения  $y''+y'-2y=f(x)$ ,  $y(0)=y'(1)=0$ .
2. Построить функцию Грина уравнения  $y''+\pi^2y=f(x)$ ,  $y(0)=y(1)=0$ .
3. Найти функцию Грина уравнения теплопроводности на единичной окружности.

Оценочные материалы по промежуточной аттестации, предназначенные для проверки соответствия уровня подготовки по дисциплине требованиям СУОС, хранятся на кафедре-разработчике РПД в печатном и электронном виде

**Лист актуализации рабочей программы  
по дисциплине «Методы математической физики 2»  
по направлению подготовки 03.03.02 Физика  
Профиль «Общая и фундаментальная физика»**

№	Характеристика внесенных изменений (с указанием пунктов документа)	Дата и № протокола Учёного совета ФФ НГУ	Подпись ответственного