

[www.phys.nsu.ru](http://www.phys.nsu.ru)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет  
Кафедра физики ускорителей

Д. В. Пестриков

**ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА  
НА ДИПОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ФЛУКТУАЦИИ  
НЕПРЕРЫВНОГО ИОННОГО ПУЧКА**

Учебное пособие

Новосибирск  
2012

ББК В381.1 я73-1

УДК 621.384.6.01

**Пестриков Д. В.** Влияние пространственного заряда на дипольные колебания и флуктуации непрерывного ионного пучка: Учеб. пособие/ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 83 с.

В пособии описываются вычисления условий устойчивости дипольных когерентных колебаний и спектров шумов интенсивного, непрерывного ионного пучка, движущегося в накопителе. При решении таких задач нетривиальные предсказания появляются благодаря совместному действию на колебания частиц нелинейностей фокусирующих полей накопителя и нелинейностей полей пространственного заряда пучка.

Учебное пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов физического факультета НГУ, занимающихся на кафедре физики ускорителей, и для сопровождения курса "Коллективные эффекты в динамике пучков". Оно будет полезно студентам для укрепления их практических знаний в исследовании когерентных эффектов на современных и будущих накопителях и коллайдерах.

Рецензент

академик РАН, зав. кафедрой Физики ускорителей  
ФФ НГУ Н. С. Диканский

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009-2018 г.г.

- © Новосибирский государственный университет, 2012
- © Д. В. Пестриков, 2012

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>1. Вводные замечания и определения</b>	<b>7</b>
1. Поля пространственного заряда . . . . .	7
1.1. Кулоновский сдвиг частоты . . . . .	8
1.2. Резонансы за счет полей пространственного заряда . . . . .	14
2. Когерентные колебания ионных пучков . . . . .	16
<b>2. Колебания и шумы квази-жесткого пучка</b>	<b>19</b>
3. Уравнение Власова . . . . .	19
3.1. Сдвиги частот некогерентных колебаний . . . . .	24
3.2. Дисперсионное уравнение . . . . .	26
4. Границы области устойчивости . . . . .	28
4.1. Хроматическое затухание Ландау . . . . .	29
4.2. Влияние кубической нелинейности фокусировки . . . . .	32
5. Спектры шума бетатронных колебаний ионного пучка . . . . .	37
5.1. Разброс частот за счет хроматичности фокусировки . . . . .	43
<b>3. Самосогласованные поля пространственного заряда</b>	<b>46</b>
6. Общие уравнения . . . . .	46
7. Модель . . . . .	49
7.1. Простые примеры . . . . .	51
8. Гауссовы функции распределения . . . . .	54
9. Вычисление амплитуд дипольных бетатронных колебаний . . . . .	57
10. Вычисление дипольного момента пучка . . . . .	59

11. Собственные частоты и условия устойчивости . . . . .	61
11.1. Хроматические разбросы частот . . . . .	63
11.2. Кубическая нелинейность фокусировки . . . . .	65
<b>4. Заключительные замечания</b>	<b>72</b>
12. Колебания в модели квази-жесткого пучка . . . . .	72
13. Самосогласованные поля пространственного заряда . . . . .	74
14. Измерения кулоновского сдвига частоты . . . . .	75
<b>A Частное решение уравнения (8.18)</b>	<b>77</b>
<b>B Вычисление <math>w'_0</math>.</b>	<b>79</b>
<b>Литература</b>	<b>82</b>

# Предисловие

В этом пособии мы обсудим ряд проблем, решения которых иллюстрируют применение общих методов теории линейных когерентных колебаний для описания дипольных когерентных колебаний нерелятивистских пучков ионов. При увеличении плотности таких пучков заметную роль в динамике и кинетике частиц может играть кулоновское расталкивание ионов, которое по тем, или иным, причинам приводит к неустойчивости их когерентных, или некогерентных колебаний. Мэру опасности этих неустойчивостей принято характеризовать величиной кулоновского сдвига частоты пучка  $\Delta\nu_L$ . По разным причинам увеличение параметра  $\Delta\nu_L$  усиливает увеличение размеров пучка в его фазовом пространстве и тем ограничивает достижимую величину плотности ионного пучка. Конкретное пороговое значение  $\Delta\nu_L$  зависит от типа машины, в которой движутся ионы и его вычисление обычно является очень сложной и многоплановой задачей. Поэтому при проектировании новых машин (ускорителей, или накопителей ионов) часто принимают в качестве порогового некоторое "среднемировое" значение  $\Delta\nu_L$ . Для накопителей ионов эта величина обычно не превышает 0.1.

Вместе с тем, конкретизация эффектов ответственных за установление того, или иного, значения порогового числа частиц в пучке представляется очень заманчивой. Если удастся установить главную причину ограничения интенсивности пучка, то открывается возможность устранения, или существенного ослабления, конкретного механизма неустойчивости. Поэтому различные попытки вычисления порогового значения  $\Delta\nu_L$  предпринимаются постоянно.

Одним из механизмов ограничения достижимых в машине величин кулоновского сдвига частоты ионного пучка может являться нарушение условий устойчивости когерентных колебаний пучка из-за его взаимодействия с окружающими электродами. Обычно считается, что наиболее сильно с окружающими электродами взаимодействуют дипольные когерентные колебания. Эти же колебания пучка наиболее просто наблюдаются с пикап

электродами. В накопителях с идеальной, линейной фокусировкой дипольные когерентные колебания пучка вообще не связаны с полями его пространственного заряда. Правда, в таких условиях взаимодействие когерентных колебаний пучка с диссипативными окружающими электродами приводит к глобальной неустойчивости колебаний пучка. Пороговые токи пучка в накопителе с такой фокусировкой равны нулю. Для обеспечения функционирования подобных установок в них должен быть задействован тот, или иной, механизм подавления когерентных колебаний пучка. Такая возможность появляется, например, в машинах с реальной фокусировкой, в которых частоты колебаний частиц зависят от амплитуд их колебаний или от их энергий. Помимо прочего, эти особенности движения частиц вдоль замкнутой орбиты связывают некогерентные и когерентные колебания в пучке. В частности, обеспечивается влияние полей пространственного заряда пучка на устойчивость его дипольных когерентных колебаний. Кроме определения условий устойчивости когерентных колебаний, в измерениях с такими пучками появляется возможность непосредственного измерения величины  $\Delta\nu_L$  посредством наблюдения спектров их дипольных когерентных колебаний и флуктуаций.

В тексте пособия [1], а также в книгах [2] и [3] изучение этих вопросов вообще никак не отражено. Между тем, оно является важной задачей теории когерентных колебаний ионных пучков в накопителях. Поэтому знакомство студентов с этой гранью физики пучков в накопителях существенно расширит их кругозор и возможности планирования полезных измерений с пучками.

Описание современного состояния большинства из этих проблем рассеяно по журнальным статьям и докладам на ускорительных конференциях. Материалы, включенные в пособие, существенно расширяют доступную студентам и научным сотрудникам литературу по влиянию полей пространственного заряда пучка на его параметры. К тому же изложение этого круга в общем непростых вопросов физики пучков с единых позиций может представлять определенную дидактическую ценность.

## Глава 1.

# Вводные замечания и определения

### 1. Поля пространственного заряда

Достижимые плотности пучков в ускорителях и накопителях заряженных частиц могут ограничиваются кулоновским отталкиванием одноименно заряженных частиц пучка. По принятой терминологии этот круг явлений сокращенно называют эффектами пространственного заряда пучка. Обычно такие ограничения обсуждаются в связи с пучками тяжелых частиц (ионов), энергии частиц в которых далеки от ультрарелятивистских областей. Из всего многообразия таких явлений мы обсудим лишь некоторые, ограничивающие возможности получения плотных пучков в циклических машинах за счет неустойчивости поперечных колебаний частиц.

Ниже мы предполагаем, что основные ограничения на достижимое значение плотности пучка связаны с кулоновским взаимодействием частиц. Если средняя скорость движения частиц пучка вдоль замкнутой орбиты равна  $v$ ,  $x$  обозначает отклонение частицы от замкнутой орбиты в горизонтальном, а  $y$  – в вертикальном направлении, то возмущения бетатронных колебаний частиц силами пространственного заряда пучка описывается силой

$$F_{\alpha} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial U}{\partial r_{\alpha}}, \quad \alpha = x, y. \quad (1.1)$$

Здесь  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  – релятивистский фактор частицы,  $v$  – ее скорость. Появление в формуле (1.1) множителя  $1/\gamma^2$  описывает частичную компенсацию кулоновского отталкивания частиц пучка притяжением сов-

местно движущихся токов этих частиц. Если  $N$  – число частиц в пучке, а  $e$  – заряд иона, то входящая в (1.1) функция  $U$  в удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) U = -4\pi N e^2 \varrho(x, y) \rho(z) \quad (1.2)$$

с соответствующими граничными условиями на поверхности вакуумной камеры. В этом уравнении  $z = s - vt$ ,  $s$  – путь пройденный частицей вдоль замкнутой орбиты к моменту времени  $t$ , а  $\rho(z)$  – линейная плотность частиц в пучке. Если  $l_{\perp}$  – характерный поперечный размер вакуумной камеры, а  $l_s$  – характерный масштаб изменения поля пучка вдоль замкнутой орбиты, то производные в уравнении (1.2) по порядку величины оцениваются отношениями

$$\frac{\partial U}{\partial r_{\perp}} \sim \frac{U}{l_{\perp}}, \quad \frac{\partial U}{\partial s} \sim \frac{U}{l_s}.$$

Обычно предполагают, что в типичной области параметров пучка и накопителя выполнено соотношение  $l_{\perp} \ll \gamma l_s$ . Тогда при решении уравнения (1.2) можно пренебречь кривизной траектории, а также, где это не бессмысленно, отнести граничные условия вычисления полей пучка на бесконечность. Приняв, что распределение частиц по поперечным координатам гауссово с ширинами  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , приходим к выражению

$$U(\mathbf{r}) = N e^2 \rho(z) \int \frac{dk_x dk_y u_y u_x}{\pi(k_x^2 + k_y^2)}, \quad (1.3)$$

где  $u_x = \exp(ik_x x - k_x^2 \sigma_x^2 / 2)$ , а  $u_y = \exp(ik_y y - k_y^2 \sigma_y^2 / 2)$ . Эти формулы дают значения сил возмущения колебаний частиц пучка в приближении локальных полей. Из общих соображений ясно, что при удалении от центра пучка компоненты силы в формуле (1.1) сначала увеличиваются. Например, в области, где  $x \ll \sigma_x$  это происходит по линейному закону. Вне пучка компоненты  $F_{\alpha}$  уменьшаются пропорционально  $1/\sqrt{x^2 + y^2}$ . Поэтому силы полей пространственного заряда пучка существенно нелинейно зависят от координат частиц.

## 1.1. Кулоновский сдвиг частоты

Основные ограничения интенсивности пучка полями пространственно заряда в циклических машинах связаны с нелинейными зависимостями этих полей от отклонений частицы от замкнутой орбиты. По этой причине эмиттанс пучка и акцептанс кольца могут быть согласованы лишь для какой-то области амплитуд колебаний. В накопителе с жесткой фокусировкой поперечные колебания ионов относительно замкнутой орбиты



описываются формулами:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{J_x \beta_x(s)} \cos \psi_x + \eta(s) \frac{\Delta p}{p}, \\
 x' &= \frac{\beta'_x}{2\beta_x} \left( x - \eta(s) \frac{\Delta p}{p} \right) + \eta'(s) \frac{\Delta p}{p} - \sqrt{\frac{J_x}{\beta_x}} \sin \psi_x, \\
 y &= \sqrt{J_y \beta_y(s)} \cos \psi_y, \quad y' = \frac{\beta'_y}{2\beta_y} y - \sqrt{\frac{J_y}{\beta_y}} \sin \psi_y, \\
 J_x &= \frac{1}{\beta_x} \left( x - \eta(s) \frac{\Delta p}{p} \right)^2 + \beta_x \left( x' - \eta'(s) \frac{\Delta p}{p} - \frac{\beta'_x}{2\beta_x} \left[ x - \eta(s) \frac{\Delta p}{p} \right] \right)^2, \\
 J_y &= \frac{y^2}{\beta_y} + \beta_y \left( y' - \frac{\beta'_y}{2\beta_y} y \right)^2, \quad I_{x,y} = \frac{J_{x,y} p}{2}, \quad \frac{d\psi_{x,y}}{ds} = \frac{1}{\beta_{x,y}(s)}.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь  $\beta_{x,y}(s)$  –  $\beta$ -функции бетатронных колебаний частиц,  $I_{x,y}$  – переменные действие, а  $\psi_{x,y}$  – фазы горизонтальных и вертикальных колебаний,  $\eta$  – дисперсионная функция кольца,  $s$  – текущее расстояние вдоль замкнутой орбиты, штрих означает производную по  $s$ . Формулы (1.4) осуществляют каноническое преобразование от переменных  $x$ ,  $p_x = px'$  и  $y$ ,  $p_y = py'$  к переменным действие-фаза невозмущенных колебаний,  $p = \gamma M v$  – импульс синхронной частицы.

Используя формулы (1.1) и (1.3), найдем, что в первом приближении метода усреднения сдвиг частоты, например, горизонтальных бетатронных колебаний определяется выражением (например, в [4])

$$\begin{aligned}
 \Delta\nu_x &= \frac{2R_0}{pv} \frac{\partial U_{00}}{\partial J_x} = \frac{2R_0}{pv} \frac{Ne^2 \rho(z)}{\gamma^2} \\
 &\times \frac{\partial}{\partial J_x} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \int \frac{d^2 k}{\pi k^2} J_0(k_x a_x) J_0(k_y a_y) \exp\left(-\frac{k_x^2 \sigma_x^2 + k_y^2 \sigma_y^2}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь  $J_m(x)$  – функции Бесселя порядка  $m$ ,  $a_{x,y} = \sqrt{J_{x,y} \beta_{x,y}}$  – амплитуды горизонтальных или вертикальных бетатронных колебаний частиц,  $2\pi R_0$  – периметр замкнутой орбиты. Ниже, для простоты, мы предположим что разброс импульсов в пучке настолько мал, что в каждой точке замкнутой орбиты выполняется соотношение  $\beta_x \epsilon_x \gg \eta^2 \sigma_p^2$ , где  $\epsilon_x$  – горизонтальный эмиттанс, а  $\sigma_p$  – относительный разброс импульсов пучка.

Вычислим сначала  $\Delta\nu_x$ , приняв, что  $I_y = 0$ . Используя соотношение

$$\frac{\partial}{\partial J_x} J_0(k_x \sqrt{J_x \beta_x}) = -\frac{k_x}{2} \sqrt{\frac{\beta_x}{J_x}} J_1(k_x \sqrt{J_x \beta_x}),$$

пишем

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x(J_x) &= -\frac{R_0 N e^2 \rho(z)}{pv \gamma^2} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \sqrt{\frac{\beta_x}{J_x}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dk_x k_x J_1(k_x \sqrt{J_x \beta_x}) \exp\left(-\frac{k_x^2 \sigma_x^2}{2}\right) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{\pi(k_x^2 + k_y^2)} \exp\left(-\frac{k_y^2 \sigma_y^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Подставив в это выражение  $\sigma_{x,y}^2 = \epsilon_{x,y} \beta_{x,y}$  и  $x = k_x \sqrt{J_x \beta_x}$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x &= -\frac{4R_0 N e^2 \rho(z)}{\pi p v \gamma^2} \frac{\rho(z)}{J_x} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)} \\ &\times \int_0^\infty dx J_1(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2J_x} \left[\epsilon_x + u^2 \epsilon_y \frac{\beta_y}{\beta_x}\right]\right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Входящий в это выражение интеграл по  $x$  вычисляется используя разложение функции Бесселя  $J_1(x)$  в ряд по степеням  $x$ :

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} k! (k+1)!}.$$

Поэтому пишем

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\infty dx J_1(x) e^{-ax^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \int_0^\infty dx x^{2k+1} e^{-ax^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+2} k! (k+1)!} \int_0^\infty dt t^k e^{-at} = \frac{1}{4a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{-1}{4a}\right)^k, \end{aligned}$$

или

$$S = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{-1}{4a}\right)^{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-1}{4a}\right)^k = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4a}\right). \quad (1.7)$$

Подставив это выражение в формулу (1.6), находим

$$\begin{aligned} \Delta\nu_x &= -\frac{2R_0 N e^2 \rho(z)}{p v \gamma^2} \frac{\rho(z)}{J_x} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \\ &\times \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)} \exp\left(-\frac{J_x \beta_x}{2[\sigma_x^2 + u^2 \sigma_y^2]}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Входящие в это выражение бетатронные функции, в свою очередь, должны вычисляться с учетом возмущений колебаний частиц полями пространственного заряда. Соответствующие изменения особенно велики вблизи границ области устойчивости колебаний. Считая, что рабочая точка по частотам колебаний частиц не приближена к этим границам, мы не будем здесь обсуждать этот вопрос.

Формула (1.8) упрощается в двух важных случаях. Так, для плоских пучков ( $\sigma_x \gg \sigma_y$ ) мы можем положить в ней  $\epsilon_y = 0$ . В этом случае вычисление интеграла по  $u$  дает

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)} \exp\left(-\frac{J_x \beta_x}{2[\sigma_x^2 + u^2 \sigma_y^2]}\right) \\ & \simeq \exp\left(-\frac{J_x}{2\epsilon_x}\right) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)} = \exp\left(-\frac{J_x}{2\epsilon_x}\right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\Delta\nu_x(J_x) = -\Delta\nu_L \frac{\rho(z) [1 - \exp(-J_x/(2\epsilon_x))]}{\rho(0) J_x/(2\epsilon_x)}. \quad (1.9)$$

Здесь мы ввели величину

$$\Delta\nu_L = \frac{Ne^2 \Pi \rho(0)}{2\pi p v \gamma^2 \epsilon_x}, \quad (1.10)$$

которая равна (с обратным знаком) сдвигу безразмерной частоты малых бетатронных колебаний синхронной частицы. В отсутствии других возмущений величина  $\Delta\nu_L$  помимо сдвигов частот определяет мощности резонансов колебаний частиц, обусловленных полями пространственного заряда. Она играет фундаментальную роль при описании эффектов пространственного заряда и носит название кулоновского сдвига частоты. Отметим, что при заданной величине эмиттанса пучка значение  $\Delta\nu_L$  уменьшается с ростом энергии частиц пропорционально  $1/(\gamma^3(v/c)^2)$ . По этой причине быстрое ускорение частиц позволяет ослабить ограничения интенсивности пучка, обязанные влиянию полей его пространственного заряда.

Другой важный случай, когда вычисление правой части выражения в (1.8) удастся упростить, реализуется для пучков с круглым поперечным сечением ( $\sigma_x = \sigma_y$ ). Для этой области параметров пишем

$$\Delta\nu_x = \frac{2R_0 Ne^2}{p v \gamma^2} \frac{\rho(z)}{J_x} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} (1 - A(s)), \quad (1.11)$$

где

$$A(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{b}{1+u^2}\right) \frac{du}{1+u^2}, \quad b = \frac{J_x \beta_x(s)}{\sigma^2(s)},$$

или

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-b \cos^2 \alpha) d\alpha \\ &= e^{-b/2} \int_0^{\pi} \exp\left(-\frac{b}{2} \cos(\alpha)\right) \frac{d\alpha}{\pi} = e^{-b/2} I_0(b/2). \end{aligned}$$

Здесь  $I_0(x)$  – функция Бесселя порядка 0 от мнимого аргумента. Подставив это выражение в (1.11), получаем

$$\Delta\nu_x = -\Delta\nu_L \frac{\rho(z)}{\rho(0)} \frac{2\epsilon_x}{J_x} \int_0^{\Pi} \frac{ds}{\Pi} \left(1 - e^{-b/2} I_0(b/2)\right). \quad (1.12)$$

Для частиц с малыми амплитудами бетатронных колебаний выражение (1.8) записывается в виде

$$\Delta\nu_x(0) = -\Delta\nu_L \frac{\rho(z)}{\rho(0)} \int_0^{\Pi} \frac{ds}{\Pi} \frac{\sigma_x(s)}{\sigma_x(s) + \sigma_y(s)}.$$

Если  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon$ , а фокусировка машины составлена из ФODO-ячеек, то вдоль орбиты сумма  $\beta_x + \beta_y$  примерно постоянна. Поэтому пишут

$$\Delta\nu_x(z) = -\Delta\nu_L \frac{\rho(z)}{\rho(0)} \frac{\overline{\beta_x(s)}}{[\beta_x(s) + \beta_y(s)]/2}, \quad (1.13)$$

а величину  $\Delta\nu_L$  определяют согласно формуле:

$$\Delta\nu_L = \frac{Ne^2 \Pi \rho(0)}{4\pi p v \gamma^2 \epsilon}. \quad (1.14)$$

Довольно часто в таких формулах вместо среднеквадратичных поперечных размеров пучка подставляют их ширины ( $d$ ) считая, например, что плотности пучка в вертикальном и радиальном направлениях постоянны. Тогда поскольку  $d^2 \simeq 2\sigma_{\perp}^2$ , формула (1.14) может быть записана в виде:

$$\Delta\nu_L = \frac{Ne^2 \Pi \rho(0) \overline{\beta_{\perp}}}{2\pi p v \gamma^2 d^2}. \quad (1.15)$$

Величины сдвигов частот колебаний частиц за счет их возмущений полями пространственного заряда стремятся к нулю при неограниченном увеличении амплитуд колебаний ( $I_{x,y} \rightarrow \infty$ ). Поэтому, например, частоты бетатронных колебаний всех частиц пучка на плоскости ( $\nu_x, \nu_y$ ) расположены в области, границы которой определяются неравенствами

$$-\Delta\nu_L \leq \Delta\nu_{x,y}(J_x, J_y) \leq 0.$$

По принятой терминологии, эта область называется следом пучка на плоскости  $(\nu_x, \nu_y)$ . Если нелинейность бетатронных колебаний частиц определяется исключительно нелинейными зависимостями полей пространственного заряда пучка от поперечных координат частиц, то для вычисления следа пучка на плоскости  $(\nu_x, \nu_y)$  помимо  $\Delta\nu_x(J_x, 0)$  требуется вычисление сдвигов частот  $\Delta\nu_x(0, J_y)$ , а также  $\Delta\nu_y(J_x, 0)$  и  $\Delta\nu_y(0, J_y)$ . Согласно уравнению (1.5) величина  $\Delta\nu_x(0, J_y)$  равна

$$\Delta\nu_x(0, J_y) = -\frac{2R_0 N e^2 \rho(z)}{\pi p v \gamma^2} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \beta_x \int_0^\infty du \frac{u^2}{(1+u^2)} \times \int_0^\infty dk k J_0(ka_y) \exp\left(-\frac{k^2 [u^2 \sigma_x^2 + \sigma_y^2]}{2}\right)$$

Интеграл по  $k$  в этом выражении вычисляется с использованием формулы:

$$\int_0^\infty k J_0(ka) e^{-k^2 b^2/2} dk = \frac{1}{b^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2b^2}\right).$$

Результат записывается в виде

$$\Delta\nu_x(0, J_y) = -\frac{2R_0 N e^2 \rho(z)}{\pi p v \gamma^2} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \beta_x(s) \times \int_0^\infty \frac{u^2}{(1+u^2)(u^2 \sigma_x^2 + \sigma_y^2)} \exp\left(-\frac{a_y^2}{2(u^2 \sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right) du. \quad (1.16)$$

Простые выражения для  $\Delta\nu_x(0, J_y)$  получаются для пучков с плоским поперечным сечением ( $\sigma_y \ll \sigma_x$ ) и для пучков с круглым поперечным сечением ( $\sigma_y = \sigma_x = \sigma$ ). В первом случае ( $\sigma_y \ll \sigma_x$ ) в интеграле по  $u$  полагаем  $\sigma_y = 0$  и поэтому пишем

$$\Delta\nu_x(0, J_y) \simeq -\frac{2R_0 N e^2 \rho(z)}{\pi p v \gamma^2 \sigma_x^2} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \beta_x(s) \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} \exp\left(-\frac{a_y^2}{2u^2 \sigma_x^2}\right).$$

Интегрирование по  $u$  выполняется с использованием формул:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} \exp\left(-\frac{a^2}{u^2}\right) du &= \int_0^\infty \frac{1}{1+1/u^2} \exp\left(-\frac{a^2}{u^2}\right) \frac{du}{u^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} \exp(-a^2 u^2) du = \frac{\pi}{2} e^{a^2} (1 - \operatorname{erf}(a)), \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

– интеграл вероятности. Поэтому для плоского пучка получаем

$$\Delta\nu_x(0, J_y) \simeq -\frac{R_0}{pv} \frac{Ne^2\rho(z)}{\gamma^2\sigma_x^2} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \beta_x(s) \exp\left(\frac{a_y^2}{2\sigma_x^2}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a_y}{\sigma_x\sqrt{2}}\right)\right]. \quad (1.17)$$

Для пучка с круглым поперечным сечением пишем

$$\Delta\nu_x(0, J_y) = -\frac{R_0}{2pv} \frac{Ne^2\rho(z)}{\gamma^2\sigma^2} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \beta_x(s) e^{-a^2/2} \times \left[ I_0\left(\frac{a^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{a^2}{2}\right) \right], \quad a^2 = \frac{J_y\beta_y}{2\sigma^2}. \quad (1.18)$$

Из этих выражений видно, что при больших амплитудах вертикальных колебаний величина  $\Delta\nu_x(0, J_y)$  уменьшается пропорционально  $1/\sqrt{J_y}$ .

Резонансные возмущения, частоты которых попадают в область следа пучка, будут увеличивать амплитуды колебаний частиц. Это может сопровождаться как увеличением размеров пучка, так и уменьшением числа частиц в пучке. Во всяком случае, мощности таких резонансов следует подавлять.

В сгруппированном пучке кулоновские сдвиги частот бетатронных колебаний синхронных и несинхронных частиц пучка различны. Это приводит к модуляции сдвигов частот бетатронных колебаний синхротронными колебаниями частиц. В результате становится возможным многократное прохождение частицами резонансов, или возбуждение синхробетатронных резонансов.

## 1.2. Резонансы за счет полей пространственного заряда

Модуляция размеров пучка при его движении вдоль орбиты может вызывать резонансные возмущения колебаний частиц полями пространственного заряда пучка. Поскольку сдвиги частот бетатронных колебаний частиц за счет полей пространственного заряда отрицательны, положение таких резонансов на рабочей клетке частот отличается от положений машинных резонансов. Так, для одномерных бетатронных колебаний условие резонанса

$$\Delta\nu_\perp(J_x, J_z) = \frac{n}{m} - \nu_\perp$$

выполняется для частот  $\nu_\perp$ , расположенных выше линии машинного резонанса  $n/m$ . В силу симметрии полей пространственного заряда пучка и по аналогии с неустойчивостью встречных пучков (например, в [5]) можно

было бы ожидать, что в машинах с большим пространственным зарядом пучка предпочтительные значения частот бетатронных колебаний частиц будут располагаться непосредственно ниже линий резонансов кольца четного порядка ( $m = 2k$ , где  $k$  – целое число). Между тем это не всегда так.

Для упрощенной иллюстрации этого утверждения рассмотрим случай одномерных бетатронных колебаний частиц. Пусть, например, частица колеблется в горизонтальной плоскости. Тогда в первом приближении метода усреднения мощности резонансов из-за полей пространственного заряда определяются гармониками

$$U_{mn}(J_x) = \frac{4R_0}{\pi p v} \frac{N e^2 \rho(z)}{\gamma^2} \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} \exp(im\psi_x(\theta) - im\nu_x\theta + in\theta) \times \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{k} J_m(k) \exp\left(\frac{ik\eta(s)\delta}{\sqrt{J_x\beta_x}} - \frac{k^2[\sigma_x^2 + u^2\sigma_y^2]}{2J_x\beta_x}\right). \quad (1.19)$$

Здесь  $\theta = s/R_0$ , а  $\delta = \Delta p/p$ . Поскольку выражение  $\psi_x(\theta) - im\nu_x\theta$  является периодической функцией  $\theta$ , в формуле (1.19) ясно видны две важные особенности резонансов из-за сил пространственного заряда. Во-первых, гармоники  $U_{mn}$  отличны от нуля лишь благодаря модуляциям бетатронных функций вдоль орбиты накопителя. Поэтому, например, в машинах с круговыми орбитами поля пространственного заряда не вызывают резонансных возмущений. Наряду с этим, более плавная распределенность возмущения колебаний частиц силами пространственного заряда вдоль орбиты приводит к более быстрому уменьшению величин резонансных гармоник  $|U_{mn}|$  с увеличением их номеров ( $m$ ) по сравнению с тем, как это было, например, для эффектов встречи.

Во-вторых, в циклических ускорителях и накопителях заряженных частиц дисперсионная функция кольца во многих областях замкнутой орбиты не равна нулю. По этой причине, поля действующие на несинхронные частицы, не обладают определенной симметрией относительно смены знака  $x_b = x - \eta\delta$ . Для таких частиц гармоники  $U_{mn}$  отличны от нуля как при четных, так и при нечетных значениях  $m$ . Это вдвое расширяет семейство опасных резонансов по сравнению со случаем неустойчивости встречных пучков. Вычислим, например,  $U_{1,n}$ . Предполагая  $\sigma_y = 0$  и  $|\eta\delta| \ll \sigma_x$ , согласно уравнению (1.19) пишем

$$U_{1,n}(J_x) \simeq \frac{4R_0}{p v} \frac{N e^2 \rho(z)}{\gamma^2 \sqrt{J_x}} i\delta \int_0^\Pi \frac{ds}{\Pi} e^{i\phi(s)} \frac{\eta(s)}{\sqrt{\beta_x}} \times \int_0^\infty dk J_1(k) \exp\left(-\frac{k^2 \epsilon_x}{2J_x}\right).$$

Воспользовавшись формулами (1.7) и (1.9), окончательно получим

$$U_{1,n}(J_x) = -2i\delta\Delta\nu_x(z, J_x)\sqrt{\frac{J_x}{\epsilon_x}}\int_0^\Pi\frac{ds}{\Pi}e^{i\phi(s)}\frac{\eta(s)}{\sigma_x(s)}. \quad (1.20)$$

Величины этих гармоник тем больше, чем ближе частоты бетатронных колебаний к целому резонансу и чем больше величина  $\Delta\nu_L$ .

При проектировании машин ограничения интенсивности пучка его пространственным зарядом обычно учитывается определением некоторого предельного значения  $\Delta\nu_L$ . При быстром ускорении частиц могут оказаться допустимыми значения  $\Delta\nu_L \leq 0.5$ . Для накопителей с длительным удержанием пучка предельное значение  $\Delta\nu_L$  обычно не превышает 0.1.

## 2. Когерентные колебания ионных пучков

В циклических ускорителях и накопителях ионов в дополнение к ограничениям из-за полей пространственного заряда достижимые интенсивности пучков могут ограничиваться теми полями, которые пучок наводит в окружающих его электродах вакуумной камеры. В частности, такие неустойчивости могут быть обусловлены и полями пространственного заряда пучка, если, например, частоты бетатронных колебаний ионов приближаются к рациональным числам. Соответствующие неустойчивости когерентных колебаний являются резонансными и реализуются при попадании частот когерентных колебаний в запрещенные полосы частот, окружающие резонансное значение. Изучение совместного действия на пучок нелинейных резонансов, генерируемых полями пространственного заряда, и полей, которые наводятся пучком в окружающих его электродах, является очень сложной задачей. Обычно, для ее решения необходимо применение численных методов.

К счастью, очень многие накопительные кольца ионов могут быть настроены так, чтобы частоты бетатронных колебаний частиц не попадали в запрещенные полосы резонансных возмущений. В таких случаях, действие на колебания частиц полей пространственного заряда пучка сводится к сдвигу частот колебаний частиц, что может существенно упростить требуемые вычисления. Как известно, в таких случаях когерентные колебания монохроматических ионных пучков могут стать неустойчивыми из-за диссипации энергии полей, которые пучок наводит в окружающих его электродах. В дополнение к неустойчивостям из-за полей пространственного заряда такие неустойчивости могут ограничивать достижимые интенсивности пучков в широких областях спектров когерентных колебаний пучка. Поскольку такие неустойчивости сами по себе не связаны с действием на



пучок полей пространственного заряда, мы будем называть их обычными неустойчивостями когерентных колебаний. Как известно, они особенно сильны для дипольных когерентных колебаний пучков. Мощности же неустойчивостей мультипольных бетатронных колебаний экспоненциально убывают с ростом номера мультипольности при условии, что поперечные размеры пучка малы по сравнению с характерным расстоянием до электродов, вызывающих неустойчивость. Разбросы частот бетатронных колебаний в пучке могут стабилизировать развитие неустойчивых когерентных колебаний благодаря действию на колебания затухания Ландау. В общих случаях, декременты затухания Ландау увеличиваются с увеличением разбросов частот в пучке.

Поля пространственного заряда пучка зависят от разности поперечных координат ионов и координат центров тяжести пучка. Для несгруппированного пучка ионов таких координат две. Это положение центра тяжести пучка в горизонтальном направлении ( $d_x$ ) и в вертикальном направлении ( $d_y$ ). Обе эти величины (дипольные моменты пучка) определяются как среднеарифметические значения смещений частиц пучка от замкнутой орбиты, Например, мы можем записать

$$d_x(t) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N x_a(t), \quad d_y(t) = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N y_a(t). \quad (2.1)$$

Здесь  $a$  нумерует частицы в пучке. При возбуждении в пучке когерентных колебаний величины  $d_{x,y}$  могут принимать различные значения в различных точках замкнутой орбиты  $s$  и в различные моменты времени. В таком случае пучок разбивается на слои разумно малой длины  $\delta s$  вблизи точек орбиты  $s$  такие, чтобы можно было бы принять, что плотность пучка на отрезке от  $s - \delta s/2$  до  $s + \delta s/2$  является постоянной величиной. После такого разбиения суммы по  $a$  в (2.1) заменяются суммами, которые вычисляются в пределах интервала разбиения с суммированием по числу частиц, попадающих в выбранный слой. Например, для горизонтальных колебаний пишем:

$$d_x(s_a, t) = \frac{1}{N} \sum_{s_a - \delta s \leq s_{a_1} \leq s_a + \delta s} x_{a_1}(s_{a_1}, t), \quad (2.2)$$

Действуя аналогичным образом, мы можем разбить фазовое пространство поперечных колебаний частиц пучка на малые ячейки и представить дипольные моменты  $d_{x,y}(s, t)$  суммами дипольных моментов частиц пучка, попадающих в заданную ячейку фазового пространства пучка. Если частоты колебаний частиц не зависят от их координат в фазовом пространстве, то колебания дипольного момента и колебания частиц пучка будут оставаться когерентными бесконечно долго. Поэтому в накопительном кольце

с фокусирующей системой, которая сама по себе обеспечивает монохроматичность пучка, уравнения описывающие дипольные когерентные колебания и некогерентные бетатронные колебания ионов относительно положений центров тяжести пучка не связаны между собой. Такой результат был получен во многих работах (например, в [6] – [10]). В кольцах с такой фокусировкой нелинейные зависимости полей пространственного заряда пучка от координат частиц приводят к разбросам частот колебаний частиц относительно колебаний центра тяжести пучка, которые не влияют на взаимодействие частиц и мод дипольных когерентных колебаний. Поэтому в таких условиях разбросы частот колебаний частиц из-за нелинейных зависимостей сил пространственного заряда от координат частиц не приводят к дополнительному затуханию Ландау когерентных колебаний пучка.

В пренебрежении возмущениями движения частиц полями пространственного заряда несгруппированного пучка затухание Ландау когерентных колебаний определяется разбросами частот обращения частиц вдоль замкнутой орбиты, а также разбросами частот из-за хроматичности частот бетатронных колебаний или, например, кубической нелинейности фокусирующих ионы полей. Чтобы отличить их от изменений частот колебаний частиц полями пространственного заряда, мы будем называть такие разбросы частот внешними. Они вызывают разрушение когерентности колебаний частиц и дипольных когерентных колебаний пучка. Это связывает дипольные когерентные колебания и колебания частиц относительно координат центров тяжести пучка. Как известно (например, в [1]), характерные особенности затухания Ландау существенно зависят от распределения в пучке частот некогерентных колебаний. В ионных пучках с внешними разбросами частот ширины и форма таких распределений может изменяться полями пространственного заряда. Поэтому можно ожидать изменений спектров дипольных когерентных колебаний пучка из-за интерференции влияний внешних разбросов и разбросов частот, обусловленных пространственным зарядом пучка. Помимо общего интереса, изучения таких интерференций позволяет проводить прямые измерения кулоновского сдвига частоты интенсивного ионного пучка посредством, например, измерения диаграмм устойчивости дипольных бетатронных когерентных колебаний, или их функций отклика.

## Глава 2.

# Колебания и шумы кВАЗИ-ЖЕСТКОГО ПУЧКА

### 3. Уравнение Власова

Вычислим дисперсионные уравнения, определяющие спектры дипольных когерентных колебаний несгруппированного ионного пучка и учитывающие взаимное отталкивание ионов полями пространственного заряда. Мы упростим вычисления предполагая, что ионы движутся в накопителе с нерелятивистскими энергиями. Для упрощения вычислений мы также предположим, что бетатронные колебания частиц могут быть описаны в приближении сглаженной фокусировки. По этой причине силы пространственного заряда пучка не будут вызывать резонансных неустойчивостей некогерентных колебаний ионов. Мы также пренебрежем в наших расчетах влиянием на дипольные когерентные колебания пучка дисперсионных искажений орбит ионов. Тогда, невозмущенные некогерентные колебания частиц вблизи замкнутой орбиты описываются формулами

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{2I_x}{M\omega_{x0}}} \cos \psi_x, \quad p_x = -\sqrt{2I_x M\omega_{x0}} \sin \psi_x, \quad \dot{\psi}_x = \omega_x, \\
 y &= \sqrt{\frac{2I_y}{M\omega_{y0}}} \cos \psi_y, \quad p_y = -\sqrt{2I_y M\omega_{y0}} \sin \psi_y, \quad \dot{\psi}_y = \omega_y, \\
 \theta &= \omega_0 t + \phi = \theta_0 + \phi, \quad \dot{\phi} = \omega_0 \eta \frac{\Delta p}{p_0}, \quad \Delta p = p - p_0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь индексом 0 помечаются величины, относящиеся к некоторой центральной (равновесной) частице пучка (например, это может быть частица с импульсом, соответствующим максимуму функции распределения пучка по импульсам),  $\theta = s/R_0$  – азимут частицы,  $\Pi = 2\pi R_0$  – периметр замкнутой орбиты центральной частицы,  $\omega_0$  – её частота обращения вдоль замкнутой орбиты,  $\eta = 1/\gamma^2 - \alpha$ ,  $\gamma$  – релятивистский фактор частицы,  $\alpha$  – коэффициент пространственного уплотнения орбит,  $M$  – масса иона,  $\omega_{x0}$  и  $\omega_{y0}$  – частоты горизонтальных и вертикальных бетатронных колебаний центральной частицы, соответствующие линейной фокусировке ионов. Хроматичность фокусировки и нелинейные зависимости фокусирующих сил от горизонтального  $x$  и вертикального  $y$  отклонений иона от замкнутой орбиты приводят к зависимости частот бетатронных колебаний  $\omega_{x,y}$  от переменных действие невозмущенных бетатронных колебаний  $I_x, I_y$  и от отклонения импульса частицы от его центрального значения.

В отсутствии на замкнутой орбите сил трения и шумовых возмущений коллективные колебания частиц пучка описываются уравнением Власова. Если  $H$  – гамильтониан, описывающий движение частиц, а  $f$  – одночастичная функция распределения частиц пучка в фазовом пространстве, то уравнение Власова записывается в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0, \quad (3.2)$$

где  $[H, f]$  – скобка Пуассона функций  $H$  и  $f$ . Как уже говорилось, мы предположим, что безразмерные частоты бетатронных колебаний ионов удалены от нелинейных резонансов. Тогда, несгруппированный пучок без поперечных когерентных колебаний описывается функцией распределения, которая не зависит от фазовых переменных  $\phi, \psi_x$  и  $\psi_y$ :

$$f = f_0(I)\rho(\Delta p), \quad I = \{I_x, I_y\}. \quad (3.3)$$

Когерентные колебания пучка описываются малыми добавками к  $f_0$ , которые зависят от времени  $t$  и являются периодическими функциями фазовых переменных. Поэтому пишем

$$f = f_0(I)\rho(\Delta p) + \sum_{m,n} f_{m,n}(I, \Delta p, t) \exp(im_x\psi_x + im_y\psi_y + in\phi). \quad (3.4)$$

Здесь  $m = \{m_x, m_y\}$ . Вертикальные дипольные когерентные колебания описываются набором  $m = \{0, \pm 1\}$ . Предполагая, что возмущения колебаний частиц наведенными полями приводит к малым изменениям переменных действие  $I$  на временах, порядка периода обращения частиц в кольце ( $2\pi/\omega_0$ ), мы можем вычислять амплитуды  $f_{m,n}$  линеаризацией уравнения

Власова вблизи  $f_0(I)\rho(\Delta p)$  по амплитудам  $f_{m,n}$ . В тех случаях, когда возмущения колебаний частиц желательнее описывать компонентами сил, а в качестве координат частиц используют переменные действие-фаза невозмущенного движения, уравнение Власова для функции распределения сгруппированного пучка записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \left( \omega_\alpha - \overline{\frac{\partial x}{\partial I_\alpha} F_x} - \overline{\frac{\partial y}{\partial I_\alpha} F_y} \right) \frac{\partial f}{\partial \psi_\alpha} \\ + \overline{\left( \frac{\partial x}{\partial \psi_\alpha} F_x + \frac{\partial y}{\partial \psi_\alpha} F_y \right)} \frac{\partial f}{\partial I_\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь принято, что по повторяющимся индексам  $\alpha = x, y$  ведется суммирование, а также то, что невозмущенные бетатронные колебания частиц описываются гамильтонианом  $H_0(I)$ :

$$\dot{\psi}_\alpha = \omega_\alpha = \frac{\partial H_0}{\partial I_\alpha}, \quad \alpha = x, y, \quad (3.6)$$

$F_\alpha$  – компоненты силы, описывающей возмущения колебаний частиц, а символ  $\overline{(\dots)}$  – описывает усреднение величины в скобках по азимуту центральной частицы:

$$\overline{(\dots)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_0}{2\pi} (\dots). \quad (3.7)$$

Из-за хроматичности фокусировки кольца и нелинейных зависимостей фокусирующих сил от координат частиц частоты  $\omega_\alpha$ , вообще говоря, могут зависеть от импульса частицы  $\Delta p$  и от ее амплитуд бетатронных колебаний, например, мы будем писать

$$\omega_y = \omega_{y0} + \Delta\omega_y(\Delta p, I_y, I_x). \quad (3.8)$$

В этом пособии мы рассматриваем совместные возмущения бетатронных колебаний частиц наведенными пучком полями и полями его пространственного заряда. При этом, действие наведенных полей на вертикальные колебания частиц будет описываться силой  $F_W$ , которая вычисляется в терминах поперечного локализованного импеданса  $Z_\perp$  (например, в [1]). Кроме того, в этом разделе мы упростим вычисления используя модель, в которой силы пространственного заряда пучка описываются выражениями  $F_y(y - d(\phi, t), x)$  и  $F_x(y - d(\phi, t), x)$  такими, как если бы пучок имел жесткие распределения частиц в поперечных направлениях ( $x$  и  $y$ ). Здесь

$$d(\phi, t) = \int d\Delta p d\Gamma_\perp y f, \quad d\Gamma_\perp = dx dp_x dy dp_y \quad (3.9)$$

– дипольный момент пучка в вертикальном направлении. Для малых вертикальных когерентных колебаний пишем  $F_x(y-d, x) \simeq F_x(y, x)$  и

$$F_y(y-d, x) \simeq F_y(y, x) - d(\dot{\phi}, t) \frac{\partial F_y}{\partial y}. \quad (3.10)$$

Такое предположение существенно упрощает вычисление дисперсионного уравнения, хотя и нарушает, в определенной степени, самосогласованность учета возмущения пучка действием его полей пространственного заряда. Важность последнего свойства для описания дипольных когерентных колебаний интенсивного ионного пучка будет детально изучена в следующем разделе работы.

После линеаризации уравнения Власова (3.5) по  $f_{m,n}$  находим, что амплитуды  $f_{m,n}$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{m,n}}{\partial t} = & - \left[ in\dot{\phi} + im_y\omega_y \right] f_{m,n} - im_y y_{m_y} F_W(t, \theta) \rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \\ & + d_n(t) \left( \frac{\partial y}{\partial \psi_y} \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_m \rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I_y}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В этом уравнении частоты бетатронных колебаний частиц  $\omega_y$  содержат вклады хроматичности фокусировки, а также вклады нелинейностей всех полей, возмущающих колебания частиц,  $y_{m_y} = \sqrt{I_y/(2M\omega_{y0})}$ ,  $m_y = \pm 1$ . Поскольку  $\partial x/\partial \psi_y = 0$ , входящие в (3.11) гармоники  $[(\partial y/\partial \psi_y)(\partial F_y/\partial y)]_m$  вычисляются с использованием тождеств:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial y}{\partial \psi_y} \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_m &= \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_x d\psi_y}{(2\pi)^2} \frac{\partial y}{\partial \psi_y} \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial y} e^{-im_y\psi_y} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_x d\psi_y}{(2\pi)^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \psi_y} \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \psi_y} \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} \right) e^{-im_y\psi_y}. \end{aligned}$$

Учитывая равенство

$$\frac{\partial y}{\partial \psi_y} \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \psi_y} \frac{\partial F_y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial \psi_y},$$

пишем

$$\left( \frac{\partial y}{\partial \psi_y} \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_m = im_y (F_y)_m = im_y \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_x d\psi_y}{(2\pi)^2} F_y(x, y) e^{-im_y\psi_y}. \quad (3.12)$$

Уравнения (3.11) позволяют вычислять решения, которые описывают развитие когерентных колебаний пучка при заданных начальных условиях,

либо позволяют вычислять собственные моды когерентных колебаний. В последнем случае мы подставляем в (3.11) решения в форме  $f_{m,n} \propto e^{-i\omega t}$  и в соответствии с определением (3.5) усредняем обе части этого уравнения по периоду обращения частиц в машине. Результат записывается в виде:

$$(\omega - n\dot{\phi} - m_y\omega_y)f_{m,n}(\omega) = m_y y_{m_y} \overline{F_W(t, \theta) e^{i\omega t}} \rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I_y} - d_{m,n}(\omega) (F_y)_m \rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I_y}, \quad (3.13)$$

где

$$d_{m,n}(\omega) = \overline{d_{m,n}(t) e^{i\omega t}} = \int dI d\Delta p \sqrt{\frac{I_y}{2M\omega_{y0}}} f_{mn}(I, \Delta p, \omega). \quad (3.14)$$

В правой части уравнения (3.13) опущены вклады быстроосциллирующих слагаемых, которые в этом приближении малы. Предполагая нерезонансность взаимодействия когерентных колебаний пучка с окружающими электродами, пишем [1]

$$\overline{F_W(t, \theta) e^{i\omega t}} = -\frac{iNe^2 Z_{\perp}(\omega + n\omega_0)}{\Pi} d_{mn}(\omega). \quad (3.15)$$

Подставив это выражение в (3.13), получаем амплитуды когерентных колебаний пучка

$$f_{m,n} = -\frac{im_y Ne^2 Z_{\perp}(\omega + n\omega_0) y_{m_y}}{\Pi(\omega - n\dot{\phi} - m_y\omega_y)} d_{m,n}(\omega) \rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I_y} - \frac{m_y (F_y)_m \rho(\Delta p)}{\omega - n\dot{\phi} - m_y\omega_y} d_{m,n}(\omega) \frac{\partial f_0}{\partial I_y}, \quad \text{Im}\omega > 0 \quad (3.16)$$

и дисперсионное уравнение задачи:

$$1 = -\int_0^{\infty} dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \left[ \Omega_{m,n} + \frac{m_y (F_y)_m}{\sqrt{2M\omega_{y0} I_y}} \right] \times \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)}{\omega - n\dot{\phi} - m_y\omega_y}. \quad (3.17)$$

Здесь величина  $\Omega_{m,n}$  определена формулой

$$\Omega_{m,n} = \frac{im_y Ne^2 Z_{\perp}(m_y\omega_{y0} + n\omega_0)}{2M\omega_{y0}\Pi}. \quad (3.18)$$

В силу предположения о широкополосности импеданса  $Z_{\perp}$  точное значение  $\omega$  в аргументе  $Z_{\perp}$  заменено его приближенным значением  $m_y\omega_{y0}$ . Для монохроматического пучка ( $\omega_y = \omega_{y0}$ ,  $\rho(\Delta p) = \delta(\Delta p)$ ) и в пренебрежении влиянием полей пространственного заряда ( $F_{x,y} = 0$ ) решение дисперсионного уравнения (3.17) записывается в виде

$$\Delta\omega_m = \omega - m_y\omega_{y0} = \Omega_{m,n}.$$

Эти моды устойчивы, если  $\text{Im}(\Delta\omega_m) < 0$ . Поскольку  $\text{Re}Z_{\perp}(\omega)$  является нечетной функцией  $\omega$  на действительной оси  $\omega$ , условия устойчивости мод монохроматического, несгруппированного пучка определяются знаками произведений  $m_y(m_y\nu_{y0} + n)$ . Это означает, что моды с большими значениями азимутальных номеров гармоник  $|n| > \nu_{y0}$  глобально неустойчивы (например, если моды с номерами  $m_y n > 0$  устойчивы, то моды с номерами  $m_y n < 0$  неустойчивы).

В пренебрежении вкладами сил пространственного заряда пучка уравнение (3.17) представляет собой стандартное дисперсионное уравнение теории линейных когерентных колебаний, записанное для вертикальных дипольных когерентных колебаний несгруппированного пучка, взаимодействующего с наведенными полями, описываемыми локализованным поперечным импедансом  $Z_{\perp}(\omega)$ .

### 3.1. Сдвиги частот некогерентных колебаний

Мы будем изучать особенности решений дисперсионного уравнения (3.17) предполагая, что разброс частот бетатронных колебаний формируется хроматичностью фокусировки, октупольными компонентами фокусирующих полей и нелинейными зависимостями полей пространственного заряда пучка от координат частиц  $(x, y)$ . Соответственно, пишем

$$\omega_y(I, \Delta p) = \omega_{y0} + \omega_0 \left[ \eta\nu_{y0} + \frac{d\nu_y}{d \ln p_0} \right] \frac{\Delta p}{p_0} + \Delta\omega_3 - \Omega_y(I), \quad (3.19)$$

где  $\omega_{y0} = \omega_0\nu_{y0}$ ,  $d\nu_y/d \ln p$  – хроматичность вертикальных бетатронных колебаний,  $\Delta\omega_3$  – сдвиг частоты вертикальных бетатронных колебаний из-за октупольных полей, а  $\Omega(I)$  – величина сдвига частоты вертикальных бетатронных колебаний, обусловленная действием сил пространственного заряда пучка.

Сдвиг частоты бетатронных колебаний частицы за счет октупольных полей записывается в виде

$$\Delta\omega_3 = \omega_0(a_c J_y - b_c J_x), \quad (3.20)$$



где  $J_{x,y} = 2I_{x,y}/p_0$ ,

$$a_c = -\frac{R_0 e}{16pc} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \beta_y^2(\theta) \left( \frac{\partial^3 H_y}{\partial y^3} \right)_0, \quad (3.21)$$

$$b_c = -\frac{R_0 e}{8pc} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \beta_x(\theta) \beta_y(\theta) \left( \frac{\partial^3 H_y}{\partial y^3} \right)_0, \quad (3.22)$$

а величина  $(\partial^3 H_y / \partial y^3)_0$  описывает распределение и силу октуполя на замкнутой орбите.

В нашей модели возмущения вертикальных бетатронных колебаний частиц полями пространственного заряда пучка описываются силой  $F_y(x, y - d)$ . При этом некогерентный сдвиг частоты бетатронных колебаний частицы  $(-\Omega)$  определяется выражением:

$$\Omega_y(I) = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_y d\psi_x}{(2\pi)^2} \frac{\partial y}{\partial I_y} F_y(x, y - d),$$

или, согласно формуле (3.10),

$$\Omega_y(I) = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_y d\psi_x}{(2\pi)^2} \frac{\partial y}{\partial I_y} \left( F_y(x, y) - d \frac{\partial F_y}{\partial y} \right). \quad (3.23)$$

Учитывая, что в силу нечетной зависимости  $F_y(x, y)$  от  $y$ , выполняется тождество

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi_x d\psi_y}{(2\pi)^2} \frac{\partial y}{\partial I_y} \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial I_y} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_x d\psi_y}{(2\pi)^2} F_y(x, y) = 0,$$

находим, что только первое слагаемое в выражениях (3.10) и (3.23) дает вклад в сдвиги частот, например, вертикальных бетатронных колебаний частиц. Поэтому пишем

$$\Omega_y(I) = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_y d\psi_x}{(2\pi)^2} \frac{\partial y}{\partial I_y} F_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2M\omega_{y0}I_y}} \left[ \frac{(F_y)_{1,0} + (F_y)_{-1,0}}{2} \right]. \quad (3.24)$$

Поскольку сила  $F_y(y, x)$  является нечетной функцией  $y$ , а также четной функцией  $x$ , пишем  $(F_y)_{1,0} = (F_y)_{-1,0}$ . Поэтому

$$\Omega_y(I) = \frac{(F_y)_{\pm 1,0}(I)}{\sqrt{2M\omega_{y0}I_y}}. \quad (3.25)$$

### 3.2. Дисперсионное уравнение

Подстановкой формул (3.19), (3.25) в (3.17), определением величин  $\Delta\omega_m = \omega - m_y\omega_{y0}$  и

$$g = \frac{\omega_0}{p_0}(n\eta + m_y\nu_{y0}) + m_y\omega_0 \frac{\partial\nu_y}{\partial\Delta p}, \quad (3.26)$$

перепишем уравнение (3.17) в виде:

$$1 = - \int_0^\infty dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} [\Omega_{m,n} + m_y\Omega_y(I)] \times \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3 + m_y\Omega_y(I)}. \quad (3.27)$$

Для улучшения понимания последнего уравнения воспользуемся тождеством:

$$\frac{m_y\Omega_y(I)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3 + m_y\Omega_y(I)} = 1 - \frac{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3 + m_y\Omega_y(I)}.$$

Тогда, простые преобразования:

$$1 = -\Omega_{m,n} \int_0^\infty dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3 + m_y\Omega_y(I)} - \int_0^\infty dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \rho(\Delta p) \frac{m_y\Omega_y(I)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3 + m_y\Omega_y(I)},$$

$$0 = -\Omega_{m,n} \int_0^\infty dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3 + m_y\Omega_y(I)} + \int_0^\infty dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)(\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3 + m_y\Omega_y(I)},$$

$$\Delta\omega_m - \Omega_{m,n} = \frac{\int_0^\infty dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)(g\Delta p + m_y\Delta\omega_3)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3 + m_y\Omega_y(I)}}{\int_0^\infty dI_x dI_y I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3 + m_y\Omega_y(I)}},$$

позволяют переписать (3.27) в виде

$$\Delta\omega_m = \Omega_{m,n} + g \frac{Q_{yp}}{Q_y} + m_y\omega_0 \left( a_c \frac{Q_{yy}}{Q_y} - b_c \frac{Q_{yx}}{Q_y} \right), \quad \text{Im}\Delta\omega_m > 0. \quad (3.28)$$

Здесь мы ввели обозначения:

$$Q_y = \int_0^\infty dII_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I)}, \quad (3.29)$$

$$Q_{yp} = \int_0^\infty dII_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{\Delta p \rho(\Delta p)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I)}, \quad (3.30)$$

$$Q_{yy} = \int_0^\infty dII_y^2 \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I)}, \quad (3.31)$$

$$Q_{yx} = \int_0^\infty dII_x I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \int_{-\infty}^\infty d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I)}. \quad (3.32)$$

Дисперсионное уравнение для горизонтальных дипольных когерентных колебаний несгруппированного пучка ( $m_y = 0$ ,  $m_x = \pm 1$ ,  $n$ ) получается перестановкой в (3.28) индексов  $y$  и  $x$ .

Полученное дисперсионное уравнение явно указывает на то, что в пучке с сильным пространственным зарядом возможность подавления неустойчивостей дипольных когерентных колебаний затуханием Ландау полностью обязана внешним разбросам частот бетатронных колебаний частиц. Без этих источников разброса частот ( $g = 0$ ,  $a_c = 0$  и  $b_c = 0$ ) дисперсионное уравнение (3.28) имеет единственный корень  $\Delta\omega_m = \Omega_{m,n}$ , а затухание Ландау мод полностью отсутствует несмотря на (возможно) значительный разброс частот бетатронных колебаний, обусловленный нелинейностью сил пространственного заряда пучка  $\Omega(I)$ . В таких условиях отсутствуют и пороги неустойчивости. С другой стороны, при наличии в спектре пучка внешних разбросов частот затухание Ландау когерентных колебаний является благодаря присутствию в пучке резонансных частиц:

$$\Delta\omega_m = g\Delta p + m_y\Delta\omega_3(I) - m_y\Omega_y(I). \quad (3.33)$$

По этой причине увеличение сдвига частоты  $\Omega(I)$ , вообще, увеличивает число резонансных частиц в пучке, а также ширины областей частот, в которых может появляться затухание Ландау когерентных колебаний.

Простые решения уравнения (3.28) можно получить, если мы, например, пренебрежем нелинейностью сил пространственного заряда, заменив в дисперсионном уравнении функцию  $\Omega_y(I)$  ее максимальным значением  $\Omega_0$ , положим  $a_c = b_c = 0$  и определим  $\Omega_{m,n} = \Omega'_{m,n} + i\Omega''_{m,n}$ . Значение  $\Omega_0$  можно определить, приняв, например, что  $\Omega_0 = \Omega_y(I_x = 0, I_y = 0)$ . Вместе с тем, если функция распределения стационарного состояния соответствует, например, параболическому распределения в пучке по переменной  $y$ :

$$f(I_x, I_y) = \frac{\delta(I_x)}{I_0} \begin{cases} 1, & I_y \leq I_0, \\ 0, & I_y > I_0, \end{cases}$$

то  $\Omega_0$  следует определить соотношением  $\Omega_0 = \Omega_y(I_x = 0, I_y = I_0)$ .

В области  $|\Omega'_{m,n}| \gg |\Omega''_{m,n}|$ ,  $\delta\omega$ , где  $\delta\omega = |g|\sigma_p$  – разброс частот в пучке, определив новые переменные  $W = \Omega'_{m,n} + \Omega_0$  и  $r = \Delta\omega_m + \Omega_0$ , находим приближенные равенства

$$Q_y \simeq -\frac{1}{W} + \frac{i\pi}{|g|} \rho \left( \frac{W}{g} \right), \quad Q_{yp} \simeq -\frac{1}{W} + \frac{i\pi}{|g|} \frac{W}{g} \rho \left( \frac{W}{g} \right).$$

Подставив эти выражения в (3.28), получаем

$$\Delta\omega_m \simeq \Omega_{m,n} - i\pi \frac{W^2}{|g|} \rho \left( \frac{W}{g} \right). \quad (3.34)$$

Первый член в этой формуле совпадает с результатом вычисления когерентного сдвига частоты колебаний в приближении жесткого сгустка. Второе слагаемое описывает затухание Ландау коллективных мод. Оно зависит от величины кулоновского сдвига частоты ионного пучка. Как обычно, вычисление этого слагаемого требует выхода за пределы применимости модели жесткого пучка.

## 4. Границы области устойчивости

Помимо вычислений собственных частот когерентных колебаний  $\Delta\omega_m$  дисперсионное уравнение (3.28) может быть использовано для нахождения границ области устойчивости мод колебаний пучка. Подставляя, например, в (3.28) значения  $\Delta\omega_m \rightarrow \Delta\omega_m + i0$ , получаем дисперсионное уравнение на пороге неустойчивости:

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n} = \Delta\omega_m - g \frac{Q_{yp}(\Delta\omega_m + i0)}{Q_y(\Delta\omega_m + i0)} \\ - m_y \omega_0 a_c \frac{Q_{yy}(\Delta\omega_m + i0)}{Q_y(\Delta\omega_m + i0)} + m_y \omega_0 b_c \frac{Q_{yx}(\Delta\omega_m + i0)}{Q_y(\Delta\omega_m + i0)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

При заданном значении поперечного импеданса  $Z_\perp$  это уравнение определяет пороговое число частиц в пучке, а также значение когерентного сдвига частоты колебаний на пороге неустойчивости. Мы можем, однако, использовать это уравнение несколько по-другому. Для этого заметим, что при изменении в нем переменной  $\Delta\omega_m$  вдоль действительной оси мы получим в параметрическом виде зависимость величины  $\text{Im}(\Omega_{m,n})$  от  $\text{Re}(\Omega_{m,n})$  такую, что в каждой точке параметры пучка находятся на границе области устойчивости когерентных колебаний. В плоскости комплексной переменной  $\Omega_{m,n}$  график такой зависимости будет разделять области, в которых

когерентные колебания пучка устойчивы, или неустойчивы. В теории когерентных колебаний пучков такая кривая называется границей области устойчивости когерентных колебаний.

Прежде чем переходить к конкретным вычислениям мы заметим, что, в общем случае, сдвиги частот бетатронных колебаний частиц полями пространственного заряда могут определяться довольно сложными выражениями. Мы упростим наши вычисления, предположив, что функция распределения пучка без когерентных колебаний определяется выражением:

$$f_0 = \frac{1}{p_0^2 \epsilon_x \epsilon_y} \exp\left(-\frac{J_x}{2\epsilon_x} - \frac{J_y}{2\epsilon_y}\right), \quad (4.2)$$

где  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  – горизонтальный и вертикальный эмиттансы пучка. Во многих случаях мы будем предполагать, что поперечное сечение пучка является таким плоским, что выполняется неравенство  $\epsilon_x \gg \epsilon_y$ . Тогда, сдвиги частот горизонтальных и вертикальных бетатронных колебаний частиц за счет пространственного заряда пучка могут определяться следующими простыми выражениями:

$$\Omega_x(J_y = 0, J_x) = \omega_0 \Delta\nu_{Lx} \frac{1 - e^{-x}}{x}, \quad x = \frac{J_x}{2\epsilon_x}, \quad (4.3)$$

и

$$\Omega_y(J_y = 0, J_x) = \omega_0 \Delta\nu_{Ly} I_0\left(\frac{x}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad (4.4)$$

где  $I_n(x)$  – функция Бесселя мнимого аргумента порядка  $n$ , а

$$\Delta\nu_{Lx} = \frac{Ne^2}{2\pi p_0 v \gamma^2 \epsilon_x}, \quad \Delta\nu_{Ly} = \frac{Ne^2 \sqrt{\nu_{x0}/\nu_{y0}}}{2\pi p_0 v \gamma^2 \sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}} \quad (4.5)$$

– соответствующие значения кулоновского сдвига частоты пучка для горизонтальных и вертикальных колебаний.

#### 4.1. Хроматическое затухание Ландау

Изучим сначала действие полей пространственного заряда пучка на форму границы области устойчивости для случая, когда неустойчивые когерентные колебания пучка стабилизируются разбросами частот из-за разброса импульсов в пучке. Для этого мы подставляем в (4.1) значения  $a_c = 0$  и  $b_c = 0$ , что приводит к уравнению

$$\Omega_{m,n} = \Delta\omega_m - g \frac{Q_{xp}(\Delta\omega_m + i0)}{Q_x(\Delta\omega_m + i0)} \quad (4.6)$$

для горизонтальных когерентных колебаний и к уравнению

$$\Omega_{m,n} = \Delta\omega_m - g \frac{Q_{yp}(\Delta\omega_m + i0)}{Q_y(\Delta\omega_m + i0)} \quad (4.7)$$

для вертикальных колебаний. Из этих уравнений можно видеть, что форма границы области устойчивости, ее чувствительность к возмущениям, обусловленных пространственным зарядом пучка, а также величины пороговых чисел частиц в пучке, вообще, зависят от вида функции распределения пучка по импульсам частиц. Для оценок, в качестве такого распределения часто используется функция Лоренца

$$\rho(\Delta p) = \frac{1}{\pi(\Delta p^2 + \sigma_p^2)}, \quad (4.8)$$

где величина  $\sigma_p$  определяет разброс импульсов в пучке. Подстановкой  $\rho(\Delta p)$  в модифицированные формулы (3.29) и (3.30) дает

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_0^\infty dI_y dI_x I_x \frac{\partial f_0}{\partial I_x} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\Delta p}{\pi(\Delta p^2 + \sigma_p^2)(\Delta\omega_m - g\Delta p + m_x \Omega_x(I))} \\ &= \frac{1}{\sigma_p} \int_0^\infty dI_y dI_x \frac{I_x \partial f_0 / \partial I_x}{(\Delta\omega_m + i\delta\omega + m_x \Omega_x(I))}, \quad \delta\omega = |g|\sigma_p, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Q_{xp} &= \int_0^\infty dI_y dI_x I_x \frac{\partial f_0}{\partial I_x} \int_{-\infty}^\infty \frac{\Delta p d\Delta p}{\pi(\Delta p^2 + \sigma_p^2)(\Delta\omega_m - g\Delta p + m_x \Omega_x(I))} \\ &= i \frac{g}{|g|} \int_0^\infty dI_y dI_x \frac{I_x \partial f_0 / \partial I_x}{(\Delta\omega_m + i\delta\omega + m_x \Omega_x(I))}. \end{aligned}$$

Поэтому  $Q_{xp} = i(g\sigma_p/|g|)Q_x$ , а уравнение (4.6) записывается в виде

$$\Omega_{m,n} = \Delta\omega_m + i\delta\omega. \quad (4.9)$$

Оно в точности совпадает с уравнением, вычисленным для лоренцева распределения импульсов в пучке при полном игнорировании действием на частицы сил пространственного заряда пучка. Это явление является специфическим для моделей, использующих лоренцево распределение импульсов.

В более реалистическом случае гауссова распределения импульсов в пучке

$$\rho(\Delta p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left(-\frac{\Delta p^2}{2\sigma_p^2}\right), \quad (4.10)$$

и для нашей модели плоского пучка пишем

$$\begin{aligned}
 Q_{xp} &= \int_0^\infty dI_y dI_x I_x \frac{\partial f_0}{\partial I_x} \int_{-\infty}^\infty \frac{\Delta p d\Delta p \exp(-\Delta p^2/2\sigma_p^2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_p(\Delta\omega_m - g\Delta p + m_x\Omega_x(I))} \\
 &= -\sigma_p \epsilon_x \int_0^\infty dx x e^{-x} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \frac{u \exp(-u^2/2)}{\Delta\omega_m - \delta\omega u + m_x \omega_0 \Delta\nu_{Lx} \Phi_x(x)} \quad (4.11) \\
 &= -\frac{\epsilon_x}{|g|} \int_0^\infty dx x e^{-x} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \frac{u \exp(-u^2/2)}{z_m - \chi u + m_x q \Phi_x(x) + i0}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\chi = g/|g|$ ,  $z_m = \Delta\omega_m/\delta\omega$ ,  $q = \omega_0 \Delta\nu_{Lx}/\delta\omega$ ,  $\Phi_x(x) = (1 - e^{-x})/x$  и использовано предположение о том, что  $\epsilon_x \gg \epsilon_y$ . Аналогично, находим

$$Q_x = -\frac{\epsilon_x}{|g|} \int_0^\infty dx x e^{-x} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-u^2/2)}{z_m - \chi u + m_x q \Phi_x(x) + i0}. \quad (4.12)$$

Определив безразмерную переменную  $\zeta = \Omega_{m,n}/\delta\omega$ , перепишем уравнение границы области устойчивости горизонтальных когерентных колебаний в следующем виде:

$$\zeta = z_m - \chi \frac{Q_{xp}(z_m)}{Q_x(z_m)}. \quad (4.13)$$

Согласно уравнениям (4.11), (4.12) и (4.13) положения границ области устойчивости не зависит от знака  $\chi$ . Изучая ход кривых на рис. 1, находим, что для пучка с гауссовым распределением импульсов влияние полей пространственного заряда существенно влияет на величину порогового числа частиц в пучке, на форму границы области устойчивости и на положение границы области устойчивости относительно оси  $\text{Im}\zeta$ . В частности, высота границы уменьшается, а ее ширина увеличивается при увеличении величины кулоновского сдвига пучка. Такое изменение кулоновского сдвига может быть обусловлено, например, охлаждением пучка. При усилении пространственного заряда пучка граница области устойчивости сдвигается влево от оси  $\text{Im}\zeta$ . Аналогичные вычисления, выполненные для вертикальных когерентных колебаний приводят к границам области устойчивости, изображенным на рис. 2. Хотя форма этих кривых и отличается от изображенных на рис. 1, они показывают похожее поведение при увеличении параметра  $\Delta\nu_{Ly}$ . Зависимости порогового числа частиц в пучке от величины кулоновского сдвига частоты определяются соотношениями действительной и мнимой частей импеданса, возмущающего колебания пучка (например, на рис. 1 и 2). Если действительная часть  $Z_\perp(\omega)$  мала так, что выполнено неравенство  $|\Omega'_{m,n}| \gg |\Omega''_{m,n}|$ , то при увеличении кулоновского сдвига частоты также увеличивается ширина границы области устойчивости. Следовательно, пороговое число частиц в пучке может возрасти. Если

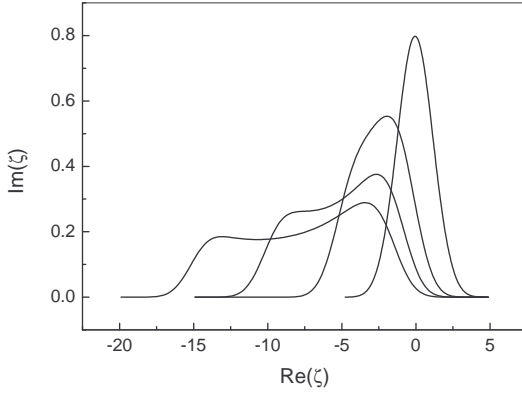


Рис. 1. Граница области устойчивости горизонтальных когерентных колебаний. Колебания устойчивы под граничной кривой, гауссово распределение импульсов, сверху вниз  $q = 0, 5, 10$  и  $15$ ;  $m_x = 1$ .

же выполнено обратное неравенство  $|\Omega'_{m,n}| \ll |\Omega''_{m,n}|$ , то увеличение кулоновского сдвига частоты уменьшает значение порогового числа частиц в пучке.

#### 4.2. Влияние кубической нелинейности фокусировки

В тех случаях, когда разбросы частот в пучке определяются кубической нелинейностью фокусировки и нелинейностью сил пространственного заряда, изменения форм границ области устойчивости когерентных колебаний зависят от знаков параметров  $a_c$  и  $b_c$  в формуле (3.20). Мы упростим вычисления используя уже обсуждавшуюся модель плоского пучка в которой  $\Delta\omega_z = -\omega_0 b_c J_x$ , а  $\Omega_y$  определяется формулой (4.4). Распределение импульсов в пучке предполагается гауссовым. Для простоты мы также пренебрежем разбросами частот бетатронных колебаний из-за хроматичности ( $g = 0$ ). В таких предположениях уравнение границы области устойчивости, например, вертикальных когерентных колебаний записывается в виде:

$$\zeta = z_m + m_y \chi \frac{Q_{yx}}{Q_y}, \quad \text{Im}\Delta\omega_m > 0, \quad (4.14)$$

где  $\chi = b_c/|b_c|$ ,  $\delta\omega = |b_c|\epsilon_x$ ,  $q = \omega_0 \Delta\nu_{Ly}/\delta\omega$ ,  $z_m = \Delta\omega_m/\delta\omega$ ,

$$Q_{yx} = - \int_0^\infty dx \frac{x e^{-x}}{z_m + m_y [\chi x + q\Phi(x)] + i0}, \quad (4.15)$$



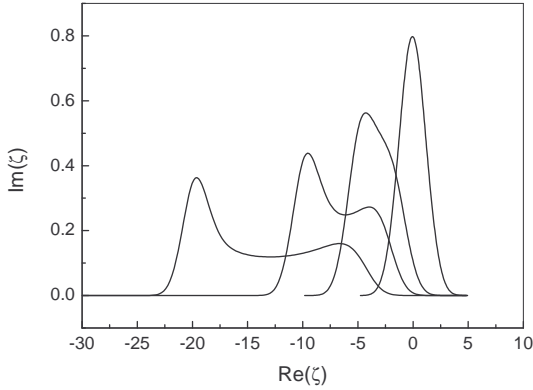


Рис. 2. То же, что на рис. 1 для вертикальных когерентных колебаний. Колебания устойчивы под граничной кривой, гауссово распределение импульсов, сверху вниз  $q = 0, 5, 10$  and  $20$ ;  $m_x = 0, m_y = 1$ .

$$Q_y = - \int_0^\infty dx \frac{e^{-x}}{z_m + m_y [\chi x + q\Phi(x)] + i0}, \quad (4.16)$$

а

$$\Phi(x) = I_0 \left( \frac{x}{2} \right) \exp \left( -\frac{x}{2} \right). \quad (4.17)$$

Если  $b_c$  отрицательно, что соответствует монотонному увеличению частоты вертикальных бетатронных колебаний частиц, то граница области устойчивости напоминает ту, что получается для нормального пучка. Действие полей пространственного заряда выражается в сдвиге границы области устойчивости влево, в небольшом увеличении высоты границы с ростом кулоновского сдвига частоты и в значительном увеличении ширины граничной области (рис. 3).

В противоположность этому, если  $b_c$  положительно, то обе функции  $\delta\omega(J_x)$  и  $-\Omega_y(J_x)$  отрицательны. В таком случае сдвиг частоты вертикальных бетатронных колебаний частиц является монотонной функцией  $J_x$  только в тех областях параметров, где величина кулоновского сдвига частоты пучка достаточно мала (например, рис. 4). При этом форма границы области устойчивости когерентных колебаний напоминает вычисленную в пренебрежении действием сил пространственного заряда пучка. Само действие пространственного заряда пучка выражается в некотором сдвиге граничных кривых влево (например, две правых кривых на рис. 5). Для заданного положительного значения  $b_c$  с ростом величины кулоновского сдвига частоты пучка в окрестности начала координат ( $0 \leq J_x \leq J_{\max}$ ;

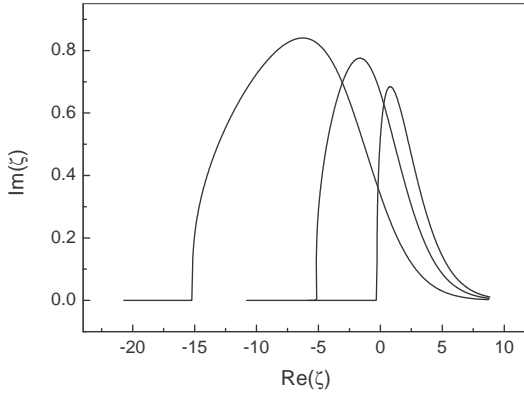


Рис. 3. Граница области устойчивости вертикальных когерентных колебаний. Колебания устойчивы ниже граничной кривой, гауссово распределение импульсов, слева направо  $q = 15, 5, 0$ ;  $\chi = -1$ ,  $m_x = 0$ ,  $m_y = 1$

например, сегмент ABC на рис. 4) появляется область, в которой резонансное условие

$$z_m + m_y [\chi x + q\Phi(x)] = 0 \quad (4.18)$$

выполняется для двух значений амплитуд бетатронных колебаний. Это приводит к появлению на кривой границы области устойчивости когерентных колебаний провала при больших отрицательных значениях  $\text{Re}(\zeta)$ . Глубина этого провала увеличивается с ростом величины кулоновского сдвига частот пучка (рис. 5). После прохождения провала форма границы области устойчивости возвращается к нормальной. В этой хвостовой области границы резонансное условие в (4.18) снова имеет единственный корень. Поскольку колебания устойчивы ниже граничной кривой, описанный провал на кривой границы области устойчивости соответствует особому режиму колебаний, когда знак декремента затухания Ландау становится отрицательным. Это означает, что действие разброса частот колебаний частиц приводит к антизатуханию Ландау. Компенсация такого антизатухания может обеспечиваться подавлением неустойчивых когерентных колебаний наведенными пучком полями. Такая возможность и описывается провалом на кривой границы области устойчивости. В противоположность обычным случаям это антизатухание является результатом общего действия изменения когерентного сдвига частот полями пространственного

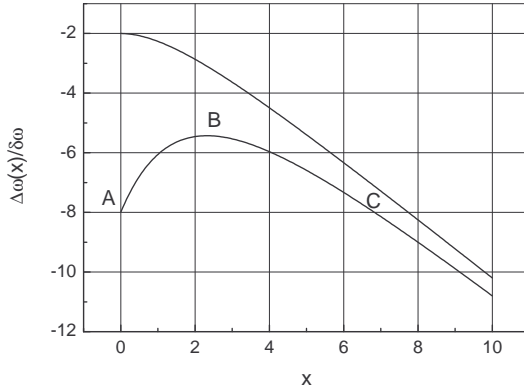


Рис. 4. Зависимость сдвига частоты вертикальных бетатронных колебаний частиц от  $x = J_x/\epsilon_x$ . Верхняя кривая:  $q = 2$ , нижняя:  $q = 6$ ,  $b_c > 0$

заряда и появления нескольких корней в резонансном условии Ландау в формуле (4.18) <sup>1</sup>.

Конкретные особенности описанного антизатухания Ландау когерентных колебаний пучка с сильным пространственным зарядом могут зависеть от формы поперечного сечения пучка. В качестве примера рассмотрим простейший случай, когда функция распределения пучка в стационарном состоянии определяется выражением:

$$f_0 = \frac{1}{4\epsilon} \delta(\Delta p) \exp\left(-\frac{J_x + J_y}{2\epsilon}\right). \quad (4.19)$$

Если также предположить, что  $\beta_{av,x} = \beta_{av,y} = \beta_{av}$ , где  $\beta_{av}$  – среднее значение  $\beta$ -функции в кольце, то такая функция распределения описывает пучок с круглым поперечным сечением с размерами  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ,  $\sigma = \sqrt{\epsilon\beta_{av}}$ . Действие полей пространственного заряда такого пучка на частицы приводит к сдвигу частоты вертикальных бетатронных колебаний:

$$\Omega_y(I) = \omega_0 \Delta\nu_L \Phi(J_x, J_y), \quad (4.20)$$

где  $\Delta\nu_L$  определено в (1.14), а

$$\Phi(J_x, J_y) = \int_0^1 dt \exp\left(-\frac{[J_x + J_y]t}{4\epsilon}\right) I_0\left(\frac{J_x t}{4\epsilon}\right) \left(I_0\left(\frac{J_y t}{4\epsilon}\right) - I_1\left(\frac{J_y t}{4\epsilon}\right)\right). \quad (4.21)$$

<sup>1</sup>Например, антизатухание пропадает, если мы опустим в первой строке уравнения (3.27) слагаемое, пропорциональное  $m_y \Omega_y(I)$ .

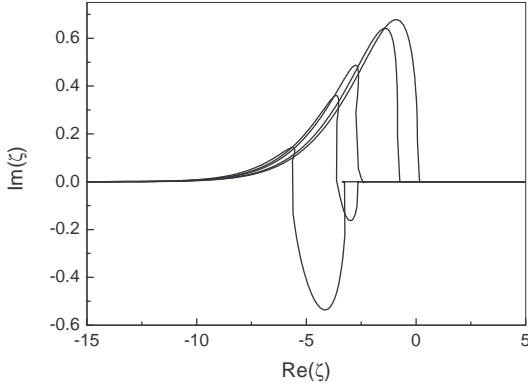


Рис. 5. То же, что на рис. 3, но  $\chi = 1$ . Слева направо  $q = 6, 4, 3, 1, 0$ ;  $m_x = 0$ ,  $m_y = 1$

Граница области устойчивости вертикальных дипольных когерентных колебаний такого пучка определяется уравнением ( $m_y = 1$ )

$$\zeta = z_m - \chi \left( h \frac{Q_{yy}}{Q_y} - \frac{Q_{yx}}{Q_y} \right), \quad h = \frac{a_c}{b_c}. \quad (4.22)$$

Здесь  $\chi = b_c/|b_c|$ , все сдвиги частот измеряются в единицах  $\delta\omega = \omega_0|b_c|\epsilon$ ,  $x = J_x/(2\epsilon)$ ,  $y = J_y/(2\epsilon)$ ,

$$Q_{yy} = \int_0^\infty dx dy \frac{y^2 e^{-(y+x)}}{z_m - \chi(hy - x) + q\Phi(x/2, y/2) + i0}, \quad (4.23)$$

$$Q_{yx} = \int_0^\infty dx dy \frac{yx e^{-(y+x)}}{z_m - \chi(hy - x) + q\Phi(x/2, y/2) + i0}, \quad (4.24)$$

а

$$Q_y = \int_0^\infty dx dy \frac{y e^{-(y+x)}}{z_m - \chi(hy - x) + q\Phi(x/2, y/2) + i0}. \quad (4.25)$$

Несколько примеров кривых границы области устойчивости для такого пучка показаны на рис. 6. Сравнение этих кривых с изображенными на рис. 5 показывает, что описанное явление антитухания Ландау присутствует и у когерентных колебаний пучка круглого сечения, но оно появляется при больших значениях кулоновского сдвига частоты пучка. Описанное явление антитухания когерентных колебаний может дополнительно ограничивать достижимые значения кулоновского сдвига частоты при охлаждении ионных пучков.

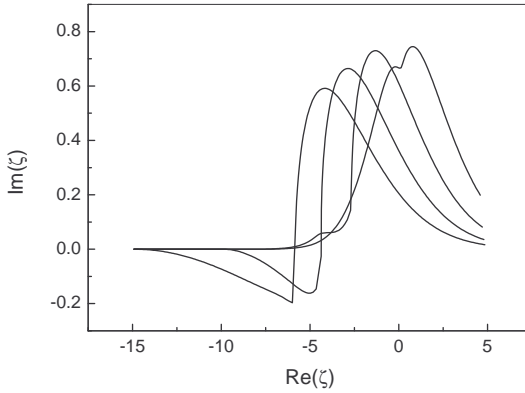


Рис. 6. То же, что на рис. 5, но для пучка с круглым поперечным сечением ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ); слева направо  $q = 15, 10, 5, 0$ ;  $\chi = -1$ ,  $h = 0.5$ ,  $m_x = 0$ ,  $m_y = 1$

## 5. Спектры шума бетатронных колебаний ионного пучка

Одним из способов определения границы области устойчивости когерентных колебаний ионного пучка может быть измерение т.н. мощностей и спектров шума его дипольных когерентных колебаний (например, в [11]). В отличие от поперечных когерентных колебаний возбуждаемых внешним ударом частиц пучка заданными поперечными полями специального устройства – дефлектора, колебания пучка могут спонтанно возникать за счет, например, теплового движения частиц. Поскольку такое движение носит хаотический характер, амплитуды и фазы появляющихся когерентных колебаний являются случайными величинами координат частиц в фазовом пространстве и времени. Они описывают флуктуации одночастичной функции распределения тепловым движением частиц и составляют когерентный, или флуктуационный, фон пучка. Как и систематические поперечные когерентные колебания, флуктуации дипольного момента пучка могут быть измерены дифференциальными пикап-электродами. Такие сигналы носят случайный характер. Их средние значения по времени, или по координатам частиц в фазовом пространстве, равны нулю. Поэтому если, например, амплитуда сигнала описывается величиной  $X(t)$ , то измеряемыми величинами оказываются средние значения произведений величины  $X$ , в заданный момент времени, или таких произведений в некоторые различные моменты времени. Если усредняется величина  $X^2$ , то измеряемой величиной является мощность шума величины  $X$ . Во втором случае изме-

ряются корреляции значений величины  $X$  в различные моменты времени. Для т.н. стационарных шумов Фурье-образ коррелятора

$$K(\tau) = \langle X(t)X(t + \tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t)X(t + \tau)dt \quad (5.1)$$

определяет спектр шума величины  $X$ . Как видно из определения (5.1), для успешного применения таких процедур в расчетах и в измерениях масштабы времени, характерные для макроскопических процессов в пучке должны заметно превышать масштабы времени, характерные для микроскопических процессов. В таких случаях говорят о существовании в задаче иерархии времен.

С ростом числа частиц в пучке, или с уменьшением в нем разбросов частот характеристики такого шума становятся чувствительны к особенностям когерентных колебаний пучка. Мощности шумов пучка, вообще, увеличиваются при приближении параметров пучка и поперечного импеданса к границам области устойчивости мод когерентных колебаний. Мы переходим к вычислению особенностей спектров шума дипольных колебаний ионного пучка, обусловленных возмущениями колебаний частиц пучка его пространственным зарядом. Для этого мы воспользуемся методом микроскопической фазовой плотности, предложенным Ю. Л. Климонтовичем [12] (описание применения этого метода для пучков в накопителях можно еще найти в книге [2]).

Применение этого метода основывается на вычислениях т.н. микроскопической плотности пучка в фазовом пространстве  $D(I, \psi, \Delta p, \phi, t)$ . Она определяется как сумма  $\delta$ -функций на точных траекториях частиц пучка. Функция  $D(I, \psi, \Delta p, \phi, t)$  удовлетворяет уравнению непрерывности в фазовом пространстве. Поскольку точные траектории частиц по многим причинам не известны мгновенное значение плотности  $D(I, \psi, \Delta p, \phi, t)$  записывается в виде

$$D = Nf(I, \psi, \Delta p, \phi, t) + \delta D(I, \psi, \Delta p, \phi, t), \quad (5.2)$$

где по определению

$$f = \frac{1}{N} \langle D(I, \psi, \Delta p, \phi, t) \rangle, \quad (5.3)$$

– одночастичная функция распределения пучка, скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают статистическое усреднение по шумам пучка и по шумам сил, действующих на частицы, величина  $\delta D$  описывает когерентные флуктуации пучка из-за, например, теплового движения частиц, или за счет других шумовых процессов. По определению, для функции  $\delta D$  выполняется тождество  $\langle \delta D \rangle = 0$ . Согласно определениям  $D$  и  $f$  величина  $\delta D$  является

сингулярной функцией координат частицы в фазовом пространстве. Она также является случайной функцией времени. По этим причинам физический смысл имеют не сами значения  $\delta D$ , а т.н. моменты  $\delta D$ , которые определяются как средние произведений случайных величин  $\delta D$ , относящихся к различным точкам фазового пространства и к различным моментам времени. Например, это могут быть величины  $\langle \delta D(1, t_1) \delta D(2, t_2) \rangle$ ,  $\langle \delta D(1, t_1) \delta D(2, t_2) \delta D(3, t_3) \rangle$  и т.д., где цифры обозначают наборы координат частиц в фазовом пространстве (например,  $1 \equiv \{I, \psi, \Delta p, \phi\}$ ). Моменты выражаются через комбинации одночастичных функций распределения  $f(I, \psi, \Delta p, \phi, t)$  и через различные комбинации корреляционных функций пучка (некоторые примеры таких вычислений можно найти в книге [2]). Для наших целей важно знать, что ниже порогов неустойчивостей когерентных колебаний шум пучка часто может рассматриваться как стационарный, для которого, например, коррелятор  $\langle \delta D(1, t_1) \delta D(2, t_2) \rangle$  является функцией разности  $t_1 - t_2$ , а также то, что для типичных областей параметров пучков в накопителях величину  $\delta D$  можно вычислять пренебрегая тройными и более высокими корреляциями в движениях частиц пучка. В таких предположениях функция  $\delta D$  удовлетворяет уравнению, которое по форме совпадает с линеаризованным уравнением Власова (например, в [2]).

Если предположить, что возмущения колебаний частиц силами пространственного заряда определяются выражениями

$$F_y(y - \delta d(\phi, t), x) \simeq F_y(y, x) - \delta d(\phi, t) \frac{\partial F_y}{\partial y},$$

и  $F_x(y - \delta d(\phi, t), x) \simeq F_x(y, x)$ , где

$$\delta d(\phi, t) = \frac{1}{N} \int d\Delta p d\Gamma_{\perp} y \delta D, \quad (5.4)$$

а также что неслучайные когерентные колебания в пучке не возбуждены:

$$f = f_0(I) \rho(\Delta p),$$

то уравнение для  $\delta D$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta D}{\partial t} = & -\dot{\phi} \frac{\partial \delta D}{\partial \phi} - \omega_y \frac{\partial \delta D}{\partial \psi_y} - \frac{\partial y}{\partial \psi_y} \delta F_2(t, \theta) \rho(\Delta p) \frac{\partial (N f_0)}{\partial I_y} \\ & + \delta d(\phi, t) \frac{\partial y}{\partial \psi_y} \frac{\partial F_y}{\partial y} \rho(\Delta p) \frac{\partial (N f_0)}{\partial I_y}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь  $\delta F_2$  – сила, возмущающая движение частиц пучка полями, наведенными флуктуацией  $\delta D$  в окружающих пучок электродах. Используя

аналогии уравнений (5.5) и (3.11), усредняя уравнение (5.5) по периоду обращения частиц и выполнив в полученном уравнении Фурье преобразование по времени, получим

$$\delta D_{m,n}(I, \Delta p, \omega) = \frac{i\delta D_{m,n}(I, \Delta p, 0)}{(\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I))} - \frac{[\Omega_{m,n} + m_y\Omega(I)] \sqrt{I_y}\rho(\Delta p)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I)} \frac{\partial f_0}{\partial I_y} \quad (5.6)$$

$$\times \int dI' d\Delta p' \sqrt{I'_y} \delta D_{mn}(I', \Delta p', \omega),$$

где

$$\delta D_{m,n}(I, \Delta p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \delta D_{m,n}(I, \Delta p, \omega), \quad \text{Im}\omega > 0, \quad (5.7)$$

а  $\delta D_{m,n}(I, \Delta p, 0) = \delta D_{m,n}(I, \Delta p, t = 0)$ . Переписав уравнение (5.4) для Фурье амплитуд

$$\delta d_{m,n}(\Delta\omega_m) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \int dI \sqrt{\frac{I_y}{2M\omega_{y0}}} \delta D_{m,n}(I, \Delta p, \omega) \quad (5.8)$$

и подставив в него  $\delta D_{m,n}(I, \Delta p, \omega)$  из (5.6), получим

$$\delta d_{m,n}(\Delta\omega_m) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \int dI \frac{i\delta D_{m,n}(I, \Delta p, 0) \sqrt{\frac{I_y}{2M\omega_{y0}}}}{(\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I))} - \delta d_{m,n}(\Delta\omega_m) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \rho(\Delta p) \int dI \frac{[\Omega_{m,n} + m_y\Omega(I)] I_y \frac{\partial f_0}{\partial I_y}}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I)},$$

или

$$\delta d_{m,n}(\Delta\omega_m) = \frac{\delta d_{m,n}^{(0)}(\Delta\omega_m)}{\varepsilon_{m,n}(\Delta\omega_m)}. \quad (5.9)$$

Здесь величина

$$\delta d_{m,n}^{(0)}(\Delta\omega_m) = \frac{i}{N\sqrt{2M\omega_{y0}}} \int dI \sqrt{I_y} \quad (5.10)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\delta D_{m,n}(I, \Delta p, 0)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I)}$$

описывает флуктуации центра тяжести пучка, вычисленные в пренебрежении действием на частицы наведенных полей, а коллективная реакция пучка на эти поля описывается величиной

$$\varepsilon_{m,n}(\Delta\omega_m) = 1 + \int dI d\Delta p \frac{[\Omega_{m,n} + m_y\Omega_y(I)] \rho(\Delta p) I_y (\partial f_0 / \partial I_y)}{\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I)}, \quad (5.11)$$



или

$$\varepsilon_{m,n}(\Delta\omega_m) = Q_y \left( \Omega_{m,n} - \Delta\omega_m + g \frac{Q_{yp}}{Q_y} + m_y \omega_0 \left( a_c \frac{Q_{yy}}{Q_y} - b_c \frac{Q_{yx}}{Q_y} \right) \right), \quad (5.12)$$

которая имеет смысл диэлектрической проницаемости пучка. При этом уравнение  $\varepsilon_{m,n}(\Delta\omega_m) = 0$  совпадает с дисперсионным уравнением когерентных мод пучка. В этих уравнениях факторы  $Q_y$ ,  $Q_{yp}$ ,  $Q_{yy}$  и  $Q_{yx}$  определяются формулами (3.29) – (3.32). Напомним, что все эти уравнения записаны в предположении о том, что комплексная переменная  $\Delta\omega_m$  находится в верхней полуплоскости ( $\text{Im}\Delta\omega_m > 0$ ). Значения функций в нижней полуплоскости  $\Delta\omega_m$  получаются их аналитическим продолжением.

Согласно общей теории когерентных флуктуаций [12] спектральная плотность шумового сигнала  $\delta d_{m,n}(t)$  вычисляется по формуле

$$(\delta d_{m,n})_\omega^2 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \langle \delta d_{m,n}(\omega + i\Delta) \delta d_{m,n}^*(\omega + i\Delta) \rangle. \quad (5.13)$$

Подставив сюда  $\delta d_{m,n}(\Delta\omega_m)$  из уравнения (5.9), получаем

$$(\delta d_{m,n})_\omega^2 = \frac{(\delta d_{m,n}^{(0)})_\omega^2}{|\varepsilon_{m,n}(\Delta\omega_m)|^2}, \quad (5.14)$$

где

$$(\delta d_{m,n}^{(0)})_\omega^2 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \langle \delta d_{m,n}^{(0)}(\omega + i\Delta) \delta d_{m,n}^{(0)*}(\omega + i\Delta) \rangle \quad (5.15)$$

– спектральная плотность дипольного момента пучка вычисленная в пренебрежении его коллективной реакцией (т.н. шум Шоттки). Используя формулу (5.10)

$$\begin{aligned} (\delta d_{m,n}^{(0)})_\omega^2 &= \frac{1}{2M\omega_0 N^2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \int dI_1 \sqrt{I_{y1}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta p_1}{\Delta\omega_m - g\Delta p_1 - m_y \Delta\omega_3(I_1) + m_y \Omega_y(I_1) + i\Delta} \\ &\times \int dI_2 \sqrt{I_{y2}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p_2 \frac{\langle \delta D_{m,n}(I_1, \Delta p_1, 0) \delta D_{m,n}^*(I_2, \Delta p_2, 0) \rangle}{\Delta\omega_m - g\Delta p_2 - m_y \Delta\omega_3(I_2) + m_y \Omega_y(I_2) - i\Delta}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

находим, что плотность  $(\delta d_{m,n}^{(0)})_\omega^2$  выражается через одновременную двухчастичную корреляционную функцию начальных флуктуаций в пучке:

$$K(1, 2) = \langle \delta D_{m,n}(I_1, \Delta p_1, 0) \delta D_{m,n}(I_2, \Delta p_2, 0) \rangle.$$

Ниже порогов неустойчивости когерентных колебаний тепловое движение частиц рождает когерентные флуктуации плотности пучка в фазовом пространстве статистически независимо. В терминах парных корреляционных функций это описывается следующим формальным соотношением:

$$K(1, 2) = \delta_{m,m'}\delta_{n,n'}\delta(I_1 - I_2)\delta(\Delta p_1 - \Delta p_2)Nf_0(I_1)\rho(\Delta p). \quad (5.17)$$

Подставив его в формулу (5.16), выполнив в этой формуле одно из интегрирований по координатам частицы 1 или 2, и воспользовавшись тождеством

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{x^2 + \Delta^2} = \pi\delta(x), \quad (5.18)$$

получаем

$$\begin{aligned} (\delta d_{m,n}^{(0)})_{\omega}^2 &= \frac{\pi}{NM\omega_{y0}} \int_0^{\infty} dI_x dI_y I_y f_0(I_x, I_y) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \rho(\Delta p) \\ &\times \delta [\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I)]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Для экспоненциального распределения по переменным действие вертикальных или горизонтальных бетатронных колебаний:

$$\frac{\partial f_0}{\partial I_y} = -\frac{f_0}{I_{y0}}, \quad I_{y0} = Mv\epsilon_y, \quad (5.20)$$

замечаем, что

$$\begin{aligned} \text{Im}Q_y(\Delta\omega_m + i0) &= \frac{\pi}{I_{y0}} \int dII f_0(I) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \rho(\Delta p) \delta(\Delta\omega_m - g\Delta p - m_y\Delta\omega_3(I) + m_y\Omega_y(I)) \end{aligned} \quad (5.21)$$

и, следовательно,

$$(\delta d_{m,n}^{(0)})_{\omega}^2 = \frac{\epsilon_y\beta_{av}}{N} \text{Im}Q_y(\Delta\omega_m + i0), \quad (5.22)$$

где  $\beta_{av} = R_0/\nu_{y0}$ . Подставив это выражение в (5.14), находим

$$(\delta d_{m,n})_{\omega}^2 = \frac{\epsilon_y\beta_{av}}{N} \frac{\text{Im}Q_y(\Delta\omega_m + i0)}{|\varepsilon_{m,n}(\Delta\omega_m + i0)|^2}. \quad (5.23)$$

В этих формулах спектральные плотности дипольного момента пучка пропорциональны множителю  $\epsilon\beta_{av}/N$ . Поэтому ниже мы будем также использовать безразмерную величину

$$X_m = \frac{(\delta d_{m,n}^{(0)})_{\omega}^2}{(\epsilon\beta_{av}/N)}. \quad (5.24)$$

## 5.1. Разброс частот за счет хроматичности фокусировки

Для иллюстрации действия сил пространственного заряда на форму спектра шумов дипольных когерентных колебаний ионного пучка мы рассмотрим специальный случай, когда, например,  $a_c = b_c = 0$ , а  $g \neq 0$ . В таких предположениях и для горизонтальных колебаний уравнение (5.12) записывается в виде

$$\varepsilon_{m,n}(\Delta\omega_m) = (\Omega_{m,n} - \Delta\omega_m)Q_x + gQ_{xp}. \quad (5.25)$$

Для простоты мы снова воспользуемся моделью с плоским пучком ( $\epsilon_x \gg \epsilon_y$ ) с гауссовыми функциями распределения по амплитудам бетатронных колебаний и по импульсам частиц. Измеряя частоты в единицах разброса частот бетатронных колебаний  $\delta\omega = |g|\sigma_p$ , перепишем уравнение (5.25) в форме:

$$\varepsilon_{m,n}(\Delta\omega_m) = Q_x(\zeta - z_m) + \chi Q_{xp}, \quad (5.26)$$

где  $\zeta = \Omega_{mn}/\delta\omega$ ,  $z_m = \Delta\omega_m/\delta\omega$ ,  $\chi = g/|g|$ , а функции  $Q_x$  и  $Q_{xp}$  определены формулами (4.11) и (4.12).

С увеличением величины кулоновского сдвига частоты пучка ( $q$ ) максимумы спектров сдвигаются по частоте в направлении начала координат, амплитуды шумового сигнала увеличиваются как в районе их максимума, так и в низкочастотных хвостах распределения (рис. 7). Наблюдаемое

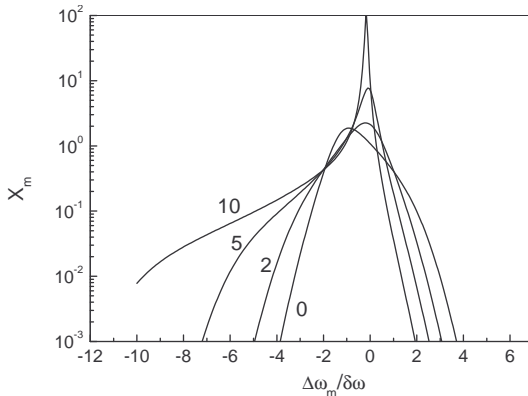


Рис. 7. Спектры шума дипольных когерентных колебаний вблизи  $\omega_{x0}$  (в единицах  $\beta_{av}\epsilon_x/N$ ). Хроматический разброс частот, числа около кривых задают значения  $q = \omega_0\Delta\nu_{Lx}/\delta\omega$ ,  $\zeta = -0.5 + i0.1$

увеличение амплитуды сигнала соответствует приближению параметров

пучка к порогу неустойчивости когерентных колебаний. Спектры, вычисленные в пренебрежении коллективными наведенными полями пучка (рис. 8) демонстрируют преобразование от гауссова распределения частот в пучке ( $\Delta\nu_L = 0$ ) к более широким кривым со смещением их максимумов в область отрицательных значений  $\Delta\omega_m$ . Из этих графиков видно, что

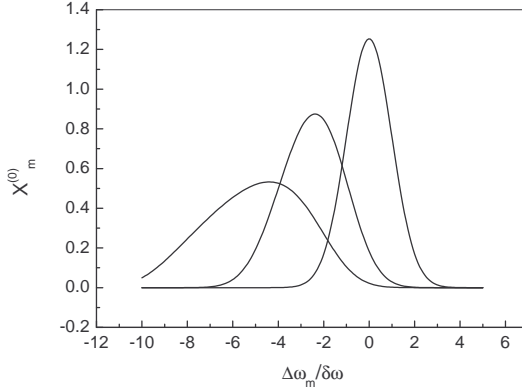


Рис. 8. Спектры шума дипольных когерентных колебаний вблизи  $\omega_{x0}$  ( $(\delta d_{m,n}^{(0)})_\omega^2$  в единицах  $\beta_{av}\epsilon_x/N$ ), вычисленные в пренебрежении коллективными наведенными полями пучка. Слева направо  $q = 10, 5, 0$

максимумы в спектрах  $(\delta d_{m,n}^{(0)})_\omega^2$  располагаются несколько выше частот  $\Delta\omega_m \simeq -\omega_0\Delta\nu_{Lx}/2$ . Если величины  $\Delta\nu_{Lx}$  не очень велики (например,  $q \leq 5$ ), то формы спектров остаются близкими к гауссовым.

Действие коллективных полей на дипольные когерентные колебания пучка приводит к еще более сильным изменениям формы спектра шума (сравним, например, рис. 7 и рис. 9, или сплошную и пунктирную линии отмеченные на рис. 9 цифрой 0).

Такую чувствительность спектров шума дипольного момента пучка к действию на частицы полей пространственного заряда пучка можно использовать для прямого измерения величины кулоновского сдвига частоты ионного пучка. Проведение таких измерений существенно облегчается тем обстоятельством, что оно требует наблюдений лишь дипольных колебаний пучка и может осуществляться с использованием обычных пикап-электродов. Для таких измерений пикап-электроды и передающая сигналы аппаратура должны иметь достаточно широкие полосы передачи по частотам для обеспечения наблюдения измеряемых сигналов пучка без их искажений. Поскольку результатом таких измерений фактически являются распределение частот в пучке и зависимость его диэлектрической прони-

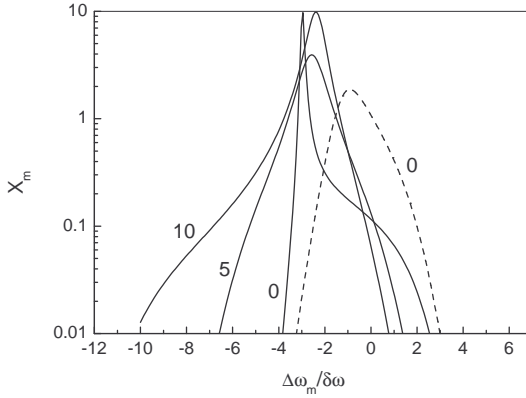


Рис. 9. То же, что и на рис. 7, но для  $\zeta = -2.5 + i0$  (сплошные линии). Пунктир:  $q = 0$  и  $\zeta = -0.5 + i0.1$

цаемости от частоты, подробная обработка измерения спектров дипольных когерентных сигналов позволяет также восстановить величину импеданса связи и разбросы частот в пучке.

Вместе с тем, следует отметить, что увеличение уровня шума пучка и увеличение времени жизни флуктуаций в пучке при приближении его параметров к границе области устойчивости когерентных колебаний приводит к усилению рассеяния частиц на когерентных флуктуациях пучка. В частности, это может вызывать увеличение поперечных размеров пучка и соответствующее уменьшение величины его кулоновского сдвига частоты.

Вблизи порогов неустойчивости когерентных колебаний характерные времена изменений функции распределения частиц и спектральных плотностей шума пучка оказываются сравнимыми по величине. Сами такие изменения описываются соответствующими кинетическими уравнениями. Выяснение деталей таких процессов требуют одновременного решения кинетических уравнений для функции распределения частиц и корреляторов флуктуаций полей пучка. Под порогом неустойчивости когерентных колебаний процесс релаксации заканчивается выравниванием температур частиц пучка и температур его когерентных флуктуаций. Некоторые примеры таких кинетических уравнений и их решений можно найти, например, в книгах [2] и [3].

## Глава 3.

# Самосогласованные поля пространственного заряда

### 6. Общие уравнения

Для получения уравнений, которые учитывали бы поля пространственного заряда пучка самосогласованным образом, мы повторим некоторые вычисления позволяющие преобразовать уравнение Власова для функции распределения пучка  $f$  в уравнения для амплитуд когерентных колебаний пучка. Как и прежде, мы предполагаем, что частоты бетатронных колебаний частиц  $\nu_{x,y}$  удалены от нелинейных резонансов. Напомним, что несгруппированный пучок без когерентных колебаний описывается функцией распределения, которая не зависит от фазовых переменных  $\phi$ ,  $\psi_x$  и  $\psi_y$ :

$$f = f_0(I)\rho(\Delta p), \quad I = \{I_x, I_y\}. \quad (6.1)$$

Когерентные колебания пучка описываются малыми добавками к  $f_0$ , которые зависят от времени  $t$  и являются периодическими функциями фаз колебаний частиц. Поэтому пишем

$$f = f_0(I)\rho(\Delta p) + \delta f, \quad (6.2)$$

где

$$\delta f = \sum_{m,n} f_{m,n}(I, \Delta p, t) \exp(im_x\psi_x + im_y\psi_y + in\phi). \quad (6.3)$$

Здесь  $m = \{m_x, m_y\}$ . Например, горизонтальные дипольные когерентные колебания описываются набором чисел  $m = \{\pm 1, 0\}$ . Если взаимодействие

когерентных колебаний с наведенными полями приводит к малым изменениям переменных действие колебаний  $I$  на интервалах времени порядка периода обращения частиц в машине ( $2\pi/\omega_0$ ), то амплитуды  $f_{m,n}$  можно вычислять, линеаризуя уравнение Власова по  $f_{m,n}$  и усредняя полученные уравнения для  $f_{m,n}$  по периоду обращения. Кроме возмущений колебаний частиц наведенными пучком полями в окружающих его электродах мы хотим также учесть возмущения движения частиц полями пространственного заряда пучка. Тогда, предполагая горизонтальные дипольные когерентные колебания и пренебрегая в линеаризованном уравнении Власова быстроосциллирующими слагаемыми, находим, что амплитуды  $f_m$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{m,n}}{\partial t} = & -i \left[ n\dot{\phi} + m_x (\omega_{x0} + \Delta\omega_x) \right] f_{m,n} \\ & - \left( \frac{\partial x}{\partial \psi_x} \delta F(x, \theta, t) \right)_{m,n} \rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I_x} \\ & - \overline{\left( \frac{\partial x}{\partial \psi_x} F_W(\theta, t) \right)}_{m,n} \rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I_x}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь  $\Delta\omega_x$  – сдвиг частоты горизонтальных бетатронных колебаний частиц из-за хроматических эффектов, а также из-за нелинейных зависимостей всех сил, действующих на частицы от их координат, функция  $F_W(\theta, t)$  обозначает силу, возмущающую колебания частиц полями, которые пучок наводит в окружающих его электродах, а слагаемое, пропорциональное  $\delta F(x, \theta, t)$  описывает возмущения горизонтальных когерентных колебаний пучка полями его пространственного заряда. Предположив, что номера гармоник  $n$  в уравнении (6.4) не очень велики, мы упростим вычисления  $\delta F(x, \theta, t)$ , используя приближение локальных полей. Тогда, имеет место соотношение:

$$\delta F(x, y, \theta, t) \frac{\partial x}{\partial \psi_x} = -\frac{\partial}{\partial \psi_x} \int d\Gamma_{\perp} d\Delta p_2 G(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \delta f(I_2, \psi_2, \Delta p_2, \theta, t). \quad (6.5)$$

Здесь  $d\Gamma_{\perp} = dI_x dI_y d\psi_x d\psi_y$ , а  $G(r)$  – функция Грина двумерной электростатической задачи. Предполагая, что функция распределения пучка нормирована на единицу, мы будем писать

$$G(r) = \frac{Ne^2}{\Pi} \int \frac{dk_x dk_y}{\pi (k_x^2 + k_y^2)} \exp(ik_x x + ik_y y), \quad (6.6)$$

$\Pi = 2\pi R_0$  – периметр замкнутой орбиты. Если функция  $\delta f$  в (6.5) вычисляется с использованием уравнения Власова, то уравнение Eq.(6.5) определяет самосогласованные поля пространственного заряда пучка. Ранее мы

упростили вычисления этих полей, предполагая, что плотность пучка может быть получена заменой  $\delta f$  на приближенную функцию распределения

$$\delta f = f_0(y, x - d(\phi, t), p_y, p_x - Md(\phi, t)) - f_0(y, x, p_y, p_x), \quad (6.7)$$

где  $d(\phi, t)$  – горизонтальный дипольный момент пучка:

$$d(\phi, t) = \int d\Delta p d\Gamma_{\perp} x f. \quad (6.8)$$

Такая функция распределения пучка может, например, получаться после короткого удара пучка в горизонтальном направлении. При конечном разбросе частот в пучке такое состояние пучка разрушается его расфазировкой в фазовом пространстве. Поэтому указанные функции распределения могут существовать лишь на интервалах времени, которые существенно короче времен расфазировки. В свою очередь, последнее утверждение предполагает, что разбросы частот в пучке малы, что позволяет рассматривать пучок как жесткий, или почти жесткий объект. Поскольку последующие вычисления в такой модели могут использовать для описания когерентных колебаний пучка уравнение Власова, мы назвали такую модель описания когерентных колебаний моделью квази-жесткого пучка.

Возвращаясь к общему описанию, заметим, что уравнение (6.4) может решаться, например, используя Фурье преобразование. При этом интегрирование левой части в (6.4) дает:

$$\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{\partial f_{m,n}}{\partial t} = -f_{m,n}^{(0)} - i\omega f_{m,n}(\omega), \quad \text{Im}\omega > 0, \quad (6.9)$$

где функции  $f_{m,n}^{(0)}$  представляют собой начальные значения амплитуд  $f_{m,n}(t)$ . Тогда, согласно (6.4) Фурье амплитуды  $f_{m,n}(\omega)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (\Delta\omega_{m,n} - \Delta\omega_{inc}) f_{m,n}(\omega) &= i f_{m,n}^{(0)} - i \overline{\left( \frac{\partial x}{\partial \psi_x} F_W(\theta, \omega) \right)}_{m,n} \rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I_x} \\ &- m_x \frac{\partial f_0}{\partial I_x} \rho(\Delta p) \int dI_{x2} dI_{y2} X_{m,n}(I_2, \omega) G_m(I_x, I_y, I_{x2}, I_{y2}), \end{aligned} \quad (6.10)$$

где мы обозначили

$$X_{m,n}(I, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p f_{m,n}(I, \Delta p, \omega), \quad (6.11)$$

а

$$\Delta\omega_{inc} = n\omega_0 \eta \frac{\Delta p}{p} + m_x \delta\omega_x(\Delta p, I_x, I_y), \quad \Delta\omega_{m,n} = \omega - m_x \omega_{x0} - n\omega_0. \quad (6.12)$$



Подставляя в (6.10)

$$\overline{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi_x} F_W(\theta, \omega)\right)}_{m,n} = -i\Omega_{mn} \sqrt{I} \int_0^\infty dI_2 \sqrt{I_2} X_{mn}(I_2, \omega), \quad m_x = \pm 1, \quad (6.13)$$

находим интегральное уравнение для определения амплитуд  $f_{m,n}$

$$\begin{aligned} (\Delta\omega_{m,n} - \Delta\omega_{inc}) f_{m,n}(\omega) &= i f_{m,n}^{(0)} - \rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I_x} \Omega_{mn} \sqrt{I_x} \\ &\times \int_0^\infty dI_{2x} dI_{y2} \sqrt{I_{x2}} X_{mn}(I_2, \omega) - m_x \frac{\partial f_0}{\partial I_x} \rho(\Delta p) \\ &\times \int_0^\infty dI_{x2} dI_{y2} X_{mn}(I_2, \omega) G_m(I_x, I_y, I_{x2}, I_{y2}). \end{aligned} \quad (6.14)$$

В этих формулах множитель

$$\Omega_{m,n} = \frac{im_x N e^2 Z_\perp (m_x \omega_{x0} + n \omega_0)}{2M \omega_{x0} \Pi} \quad (6.15)$$

описывает взаимодействие когерентных колебаний пучка с окружающими его электродами. Наведенные в электродах поля описываются широкополосным, локализованным поперечным импедансом  $Z_\perp(\omega)$ . Величина  $\Omega_{m,n}$  представляет собой когерентный сдвиг частоты горизонтальных дипольных колебаний монохроматического несгруппированного пучка. В противоположность вычислениям, описанным в предыдущей главе, коэффициенты в уравнении (6.14) содержат лишь самосогласованные выражения для полей пространственного заряда пучка.

## 7. Модель

Интегральное уравнение (6.14) слишком сложно даже для его численного решения. Для упрощения исследования основных особенностей решений таких уравнений мы воспользуемся специальной моделью [13]. Как и раньше, мы предположим, что распределение пучка в фазовом пространстве имеет очень плоскую форму такую, что стационарное состояние пучка может быть описано функцией распределения

$$f_0(I_x, I_y) = \delta(I_y) f_0(I_x), \quad (7.1)$$

Кроме того, мы предположим, что начальные значения амплитуд когерентных колебаний пучка также описываются выражениями вида

$$f_{m,n}^{(0)}(I_x, I_y, \Delta p_2) \propto \delta(I_y). \quad (7.2)$$

Для пучков с такой функцией распределения мы попытаемся изучить устойчивость дипольных, горизонтальных когерентных колебаний ( $m_y = 0$  и  $m_x = \pm 1$ ). Хотя такая модель не дает полного решения проблемы, она позволяет проследить различия развития когерентных колебаний реального и квази-жесткого пучков.

Согласно принятой модели, решения уравнения (6.14) пропорциональны  $\delta(I_y)$ . Интегрируя обе части в (6.14) по  $I_y$ , получим

$$\begin{aligned} (\Delta\omega_{m,n} - \Delta\omega_{inc}) f_{m,n}(\omega) &= i f_{m,n}^{(0)} \\ -\rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I} \Omega_{mn} \sqrt{I} \int_0^\infty dI_2 \sqrt{I_2} X_{mn}(I_2, \omega) \\ -m_x \frac{\partial f_0}{\partial I} \rho(\Delta p) \int dI_2 G_m(I, 0, I_2, 0) X_{m,n}(I_2, \omega). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь

$$f_{m,n}(I, \Delta p, \omega) = \int_0^\infty dI_y f_{m,n}(I_x, I_y, \Delta p, \omega). \quad (7.4)$$

В последующих вычислениях будет появляться только переменная  $I_x$ . Поэтому чтобы сократить записи мы будем писать  $I$  вместо  $I_x$ . Теперь заметим, что согласно формуле (6.6)

$$G_m(I, 0, I_2, 0) = \frac{2Ne^2}{\Pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_1 \left( k \sqrt{\frac{2I}{M\omega_{x0}}} \right) J_1 \left( k \sqrt{\frac{2I_2}{M\omega_{x0}}} \right), \quad m = \pm 1,$$

или (например, в [14])

$$G_m(I, 0, I_2, 0) = \frac{Ne^2}{\Pi} \begin{cases} \sqrt{I/I_2}, & I < I_2, \\ \sqrt{I_2/I}, & I > I_2. \end{cases} \quad (7.5)$$

Отметим также, что согласно нашей модели сдвиг частоты некогерентных колебаний иона под действием сил пространственного заряда пучка ( $-\Omega(I)$ ) описывается выражением

$$\Omega(I) = -\frac{\partial}{\partial I} \int dI_2 G_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) f_0(I_2),$$

или ( $a = \sqrt{2I/(M\omega_{x0})}$ )

$$\Omega(I) = \frac{2Ne^2}{\Pi M\omega_y a} \int_0^\infty dk J_1(ka) \int_0^\infty dI_2 J_0(ka_2) f_0(I_2) = \frac{Ne^2}{\Pi I} \int_0^I dI_2 f_0(I_2). \quad (7.6)$$

Поскольку пучок предполагается очень плоским, определим значение кулоновского сдвига частоты пучка выражением

$$\Delta\nu_L = \frac{Ne^2}{\Pi I_0 \omega_0} = \frac{Ne^2}{2\pi M v^2 \epsilon}, \quad (7.7)$$

где  $I_0 = M v \epsilon$  – ширина функции распределения  $f_0$ , а  $\epsilon$  – горизонтальный эмиттанс пучка. Поэтому пишем

$$\Omega(I) = \omega_0 \Delta\nu_L \frac{I_0}{I} \int_0^I dI_2 f_0(I_2). \quad (7.8)$$

Используя это выражение и предположив, что разброс частот бетатронных колебаний частиц определяется хроматичностью фокусировки, октупольной частью фокусирующих полей ( $a_c I$ ) и нелинейностями полей пространственного заряда, запишем

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{inc} &= n\omega_0 \eta \frac{\Delta p}{p} + m \frac{\partial \omega_x}{\partial p} \Delta p + m a_c I - m \Omega(I) \\ &= g \Delta p + m a_c I - m \Omega(I), \end{aligned} \quad (7.9)$$

где

$$g = \frac{n\omega_0 \eta}{p} + m \frac{\partial \omega_x}{\partial p} = \frac{\omega_0 \eta}{p} (n + m \nu_{x0}) + \frac{m \omega_0}{p} \frac{d \ln p}{d \ln p}. \quad (7.10)$$

Подставив все эти выражения в уравнение (7.3), получим

$$\begin{aligned} Q(\Delta p, I) f_{m,n}(\omega) &= i f_{m,n}^{(0)} - \rho(\Delta p) \frac{\partial f_0}{\partial I} \Omega_{mn} \sqrt{I} \int_0^\infty dI_2 \sqrt{I_2} X_{mn}(I_2, \omega) \\ &\quad - m \frac{\partial f_0}{\partial I} \rho(\Delta p) \frac{Ne^2}{\Pi} \int_0^I dI_2 \sqrt{\frac{I_2}{I}} X_{m,n}(I_2, \omega) \\ &\quad - m \frac{\partial f_0}{\partial I} \rho(\Delta p) \frac{Ne^2}{\Pi} \int_I^\infty dI_2 \sqrt{\frac{I}{I_2}} X_{m,n}(I_2, \omega). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Здесь мы ввели обозначение:

$$Q(\Delta p, I) = \Delta\omega_{m,n} - g \Delta p - m a_c I + m \Omega(I). \quad (7.12)$$

## 7.1. Простые примеры

Укажем несколько простых примеров, в которых однородная часть интегрального уравнения (7.11) может быть решена точно и в которых вычисления с самосогласованными полями пространственного заряда предсказывают те же спектры собственных частот когерентных колебаний, что

и модель квази-жесткого пучка. Во-первых, пусть  $g = 0$  и  $a_c = 0$ . Тогда решение однородной части уравнения (7.11):

$$\begin{aligned}
 (\Delta\omega_{m,n} + m\Omega(I))X_{m,n}(\omega) &= -\frac{\partial f_0}{\partial I}\Omega_{mn}\sqrt{I}\int_0^\infty dI_2\sqrt{I_2}X_{mn}(I_2,\omega) \\
 &\quad - m\frac{\partial f_0}{\partial I}\frac{Ne^2}{\Pi}\int_0^I dI_2\sqrt{\frac{I_2}{I}}X_{m,n}(I_2,\omega) \quad (7.13) \\
 &\quad - m\frac{\partial f_0}{\partial I}\frac{Ne^2}{\Pi}\int_I^\infty dI_2\sqrt{\frac{I}{I_2}}X_{m,n}(I_2,\omega)
 \end{aligned}$$

записывается в виде

$$X_{m,n}(\omega) = C_{m,n}\frac{\partial f_0}{\partial I}\sqrt{I}, \quad (7.14)$$

где  $C_{m,n}$  – произвольный постоянный множитель. Подставив это решение в (7.13), получим

$$\begin{aligned}
 (\Delta\omega_{m,n} + m\Omega(I))\frac{\partial f_0}{\partial I}\sqrt{I} &= -\frac{\partial f_0}{\partial I}\Omega_{mn}\sqrt{I}\int_0^\infty dI_2I_2\frac{\partial f_0}{\partial I_2} \\
 -m\frac{\partial f_0}{\partial I}\frac{Ne^2}{\Pi\sqrt{I}}\int_0^I dI_2I_2\frac{\partial f_0}{\partial I_2} &- m\frac{\partial f_0}{\partial I}\frac{Ne^2\sqrt{I}}{\Pi}\int_I^\infty dI_2\frac{\partial f_0}{\partial I_2},
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 (\Delta\omega_{m,n} + m\Omega(I)) &= -\Omega_{mn}\int_0^\infty dI_2f_0(I_2) \\
 -m\frac{Ne^2}{\Pi I}\int_0^I dI_2I_2\frac{\partial f_0}{\partial I_2} &- m\frac{Ne^2}{\Pi}\int_I^\infty dI_2\frac{\partial f_0}{\partial I_2}.
 \end{aligned}$$

Учитывая тождество

$$\begin{aligned}
 m\frac{Ne^2}{\Pi I}\int_0^I dI_2I_2\frac{\partial f_0}{\partial I_2} + m\frac{Ne^2}{\Pi}\int_I^\infty dI_2\frac{\partial f_0}{\partial I_2} &\quad (7.15) \\
 = -m\frac{Ne^2}{\Pi I}\int_0^I dI_2f_0(I_2) &= -m\Omega(I)
 \end{aligned}$$

и условие нормировки функции  $f_0$ , приходим к дисперсионному уравнению

$$\Delta\omega_{m,n} = \Omega_{m,n}. \quad (7.16)$$

Такой результат полностью совпадает с предсказаниями модели жесткого или квази-жесткого пучков.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда  $a_c = 0$ , а  $\rho(\Delta p)$  является распределением Лоренца

$$\rho(\Delta p) = \frac{b}{\pi (\Delta p^2 + b^2)}. \quad (7.17)$$

Решение однородной части уравнения (7.11) записывается в виде

$$f_{m,n}(\omega) = \frac{\rho(\Delta p)}{\Delta\omega_{m,n} - g\Delta p + m\Omega(I)} \frac{\partial f_0}{\partial I} \sqrt{I} X_{mn}(I), \quad (7.18)$$

где  $X_{mn}(I)$  – новая неизвестная функция. С учетом соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{b}{\pi (\Delta p^2 + b^2) (\Delta\omega_{m,n} - g\Delta p + m\Omega(I))} = \frac{1}{(\Delta\omega_{m,n} + m\Omega(I) + i|g|b)}$$

подстановка выражения (7.18) в однородную часть уравнения (7.11):

$$\begin{aligned} & \frac{(\Delta\omega_{m,n} - g\Delta p + m\Omega(I)) b}{\pi (\Delta p^2 + b^2) (\Delta\omega_{m,n} - g\Delta p + m\Omega(I))} \frac{\partial f_0}{\partial I} \sqrt{I} X_{mn}(I) \\ &= -\frac{b\Omega_{mn}}{\pi (\Delta p^2 + b^2)} \frac{\partial f_0}{\partial I} \sqrt{I} \int_0^{\infty} dI_2 \frac{I_2 (\partial f_0 / \partial I_2) X_{mn}(I_2)}{(\Delta\omega_{m,n} + m\Omega(I_2) + i|g|b)} \\ & - m \frac{\partial f_0}{\partial I} \frac{b}{\pi (\Delta p^2 + b^2)} \frac{Ne^2}{\Pi \sqrt{I}} \int_0^I dI_2 \frac{I_2 (\partial f_0 / \partial I_2) X_{mn}(I_2)}{(\Delta\omega_m + m\Omega(I_2) + i|g|b)} \\ & - m \frac{\partial f_0}{\partial I} \frac{b}{\pi (\Delta p^2 + b^2)} \frac{Ne^2 \sqrt{I}}{\Pi} \int_I^{\infty} dI_2 \frac{(\partial f_0 / \partial I_2) X_{mn}(I_2)}{(\Delta\omega_m + m\Omega(I_2) + i|g|b)}, \end{aligned}$$

приводит к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} X_{mn}(I) &= -\Omega_{mn} \int_0^{\infty} dI_2 \frac{I_2 (\partial f_0 / \partial I_2) X_{mn}(I_2)}{(\Delta\omega_{m,n} + m\Omega(I_2) + i|g|b)} \\ & - m \frac{Ne^2}{\Pi I} \int_0^I dI_2 \frac{I_2 (\partial f_0 / \partial I_2) X_{mn}(I_2)}{(\Delta\omega_{m,n} + m\Omega(I_2) + i|g|b)} \\ & - m \frac{Ne^2}{\Pi} \int_I^{\infty} dI_2 \frac{(\partial f_0 / \partial I_2) X_{mn}(I_2)}{(\Delta\omega_{m,n} + m\Omega(I_2) + i|g|b)}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Учитывая соотношение (7.15) убеждаемся в том, что решениями этого уравнения являются функции

$$X_{mn}(I) = C_{mn} (\Delta\omega_{m,n} + m\Omega(I) + i|g|b), \quad (7.20)$$

где  $C_{mn}$  – произвольные постоянные. Действительно, после подстановки (7.20) в (7.19) и сокращения постоянных множителей получаем

$$\Delta\omega_{m,n} + m\Omega(I) + i|g|b = \Omega_{mn} - m \frac{Ne^2}{\Pi\sqrt{I}} \int_0^I dI_2 I_2 \frac{\partial f_0}{\partial I_2} - m \frac{Ne^2\sqrt{I}}{\Pi} \int_I^\infty dI_2 \frac{\partial f_0}{\partial I_2}.$$

Учитывая здесь тождество (7.15), приходим к дисперсионному уравнению

$$\Delta\omega_{m,n} = \Omega_{m,n} - i|g|b. \quad (7.21)$$

Оно в точности совпадает с тем, которое получалось в модели квази-жесткого пучка для лоренцева распределения импульсов.

Наконец, рассмотрим случай, когда

$$\frac{\partial f_0}{\partial I} = -\frac{\delta(I - I_0)}{I_0}, \quad (7.22)$$

и, соответственно, решения однородной части (7.11) записываются в виде

$$f_{m,n}(\omega) = \frac{\rho(\Delta p)}{Q(\Delta p, I_0)} \delta(I - I_0) C_{mn}. \quad (7.23)$$

а дисперсионное уравнение – в виде:

$$1 = (\Omega_{mn} + m\Omega(I_0)) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta p \frac{\rho(\Delta p)}{\Delta\omega_{m,n} - ma_c I_0 + m\Omega(I_0) - g\Delta p}. \quad (7.24)$$

Согласно этому уравнению, для моноэнергетического пучка ( $\rho(\Delta p) = \delta(\Delta p)$ ) когерентный сдвиг частоты ( $\Delta\omega_{m,n}$ ) не зависит от величины пространственного заряда пучка. Для пучка с гладким распределением импульсов декременты затухания Ландау, вообще, зависят от величины кулоновского сдвига частоты пучка посредством фактора  $m\Omega(I_0)$ .

## 8. Гауссовы функции распределения

Больше отличий от предсказаний модели квази-жесткого пучка демонстрируют случаи, в которых стационарные состояния пучка описываются более реалистическими и гладкими функциями распределения. Мы изучим пример, в котором

$$\rho(\Delta p) f_0(I) = \frac{1}{I_0} \exp\left(-\frac{I}{I_0}\right) \frac{\rho(u)}{\sigma}, \quad (8.1)$$

где  $\Delta p = \sigma u$ ,  $\sigma$  – разброс импульсов в пучке, и предполагается выполненным условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \rho(u) = 1. \quad (8.2)$$

Подставив эти функции в уравнение (7.11) и определив

$$\delta\omega = \sqrt{g^2\sigma^2 + (a_c I_0)^2}, \quad z_m = \frac{\Delta\omega_{m,n}}{\delta\omega}, \quad (8.3)$$

а также

$$x = \frac{I}{I_0}, \quad q = \frac{\omega_0 \Delta\nu_L}{\delta\omega}, \quad \chi_I = \frac{a_c I_0}{\delta\omega}, \quad \chi_p = \frac{g\sigma}{\delta\omega}, \quad \zeta = \frac{\Omega_{m,n}}{\delta\omega}, \quad (8.4)$$

и

$$r(u, x) = \frac{f_{m,n}^{(0)}(u, x)}{\delta\omega}, \quad (8.5)$$

перепишем (7.11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_{mn} = & \frac{ir(u, x)}{Q(u, x)} + \zeta \frac{\sqrt{x}e^{-x}}{Q(u, x)} \rho(u) \int_0^\infty dx_1 \sqrt{x_1} \int_{-\infty}^\infty du_1 f_{mn}(u_1, x_1) \\ & + \frac{qe^{-x}\rho(u)}{Q(u, x)} \left[ \int_0^x dx_1 \sqrt{\frac{x_1}{x}} \int_{-\infty}^\infty du_1 f_{mn} + \int_x^\infty dx_1 \sqrt{\frac{x}{x_1}} \int_{-\infty}^\infty du_1 f_{mn} \right]. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Здесь

$$Q(u, x) = z_m - \chi_p u - \chi_I x + q \frac{1 - e^{-x}}{x}. \quad (8.7)$$

Решения уравнения (8.6) будем записывать в форме

$$f_{mn} = \frac{ir(u, x)}{Q(u, x)} + \rho(u) \frac{\sqrt{x}e^{-x}}{Q(u, x)} p(x), \quad (8.8)$$

где новая неизвестная функция  $p(x)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$p(x) = \zeta \int_0^\infty dx_1 \sqrt{x_1} X(x_1) + \frac{q}{x} \int_0^x dx_1 \sqrt{x_1} X(x_1) + q \int_x^\infty \frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} X(x_1), \quad (8.9)$$

а

$$X(x) = \int_{-\infty}^\infty du f_{mn}(u, x). \quad (8.10)$$

Дифференцируя обе части (8.9) по  $x$ , получим

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{q}{x^2} \int_0^x dx_1 \sqrt{x_1} X(x_1), \quad (8.11)$$

а после повторного дифференцирования по  $x$ :

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dp}{dx} \right) = -q\sqrt{x} X(x). \quad (8.12)$$

Поскольку

$$X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{ir(u, x)}{Q(u, x)} + \frac{\sqrt{x}e^{-x}}{Q(x)} p(x), \quad (8.13)$$

где

$$\frac{1}{Q(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(u)}{Q(u, x)} du, \quad (8.14)$$

находим дифференциальное уравнение для определения функции  $p(x)$

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dp}{dx} \right) = -iq\sqrt{x}R(x) - q\frac{xe^{-x}}{Q(x)}p(x). \quad (8.15)$$

Здесь

$$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{r(u, x)}{Q(u, x)}. \quad (8.16)$$

Подставляя в (8.15) определения

$$p(x) = \frac{w(x)}{x}, \quad x^2 \frac{dp}{dx} = x \frac{dw}{dx} - w, \quad (8.17)$$

мы можем получить уравнения для еще одной неизвестной функции  $w(x)$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -q\frac{iR(x)}{\sqrt{x}} - \frac{qe^{-x}}{xQ(x)}w(x). \quad (8.18)$$

Используя уравнение (8.9), находим одно из граничных условий для  $p(x)$  или  $w' = dw/dx$

$$p(0) = w'(0) = \int_0^{\infty} dx \left( \zeta\sqrt{x} + \frac{q}{\sqrt{x}} \right) X(x).$$

Оно означает, что дифференциальное уравнение (8.18) следует решать с граничными условиями:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = \int_0^{\infty} dx \left( \zeta\sqrt{x} + \frac{q}{\sqrt{x}} \right) X(x). \quad (8.19)$$



## 9. Вычисление амплитуд дипольных бетатронных колебаний

Общее решение уравнения (8.18) ищется в виде суммы линейной комбинации двух линейно независимых решений однородной части этого уравнения ( $C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)$ ) и частного вынужденного решения  $W(x)$  этого уравнения. Определим функции  $w_{1,2}(x)$  уравнениями

$$\frac{d^2 w_{1,2}}{dx^2} = -\frac{qe^{-x}}{xQ(x)} w_{1,2}(x). \quad (9.1)$$

Тогда, общее решение (8.18) определяется формулой

$$w(x) = C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x) + W(x). \quad (9.2)$$

Условие нормировки функций  $w_{1,2}(x)$  задается удобным выбором их Вронскиана

$$D = w_1(x) \frac{dw_2}{dx} - \frac{dw_1}{dx} w_2(x) \neq 0, \quad (9.3)$$

который является интегралом уравнений (9.1). В общем случае, решения  $w_{1,2}(x)$  являются комплексными функциями как  $x$ , так и частоты колебаний  $z_m$ . Как функции комплексной переменной  $z_m$  решения  $w_{1,2}(x)$  могут иметь особые точки на действительной оси  $z_m$ . Сами по себе уравнения (9.1) справедливы в области, где выполнено неравенство  $\text{Im} z_m > 0$ . Их решения в области  $\text{Im} z_m < 0$  должны получаться подходящим аналитическим продолжением функций  $w_{1,2}(x)$  из верхней в нижнюю полуплоскость комплексной переменной  $z_m$ . Поскольку конкретные решения уравнений (9.1) обычно должны находиться численно, полезно заметить, что в асимптотической области  $x \rightarrow \infty$  функции  $w_{1,2}$  линейно зависят от  $x$ . В такой области  $x$  мы будем писать

$$w_1 = ax + b, \quad w_2 = cx + d, \quad (9.4)$$

где коэффициенты  $a, b, c, d$  являются функциями частоты  $z_m$ . Они удовлетворяют условию

$$D = bc - ad. \quad (9.5)$$

Частное решение  $W(x)$  вычисляется с использованием граничных условий

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 0 \quad (9.6)$$

и метода вариации произвольных постоянных. Простые вычисления, приведенные, например, в Приложении А, позволяют записать

$$W(x) = \frac{qw_1(x)}{D} \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1)w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} - \frac{qw_2(x)}{D} \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}}. \quad (9.7)$$

В виду допустимости определенного произвола при выборе конкретного представления линейно независимых решений определим функцию  $w_1(x)$  так, чтобы выполнялись граничные условия:

$$w_1(0) = 0, \quad w_1'(0) = 1. \quad (9.8)$$

Тогда, согласно (9.1) и (9.3) и как показано в Приложении A производная функции  $w_2(x)$  логарифмически расходится в нуле ( $w_2'(x \rightarrow 0) \sim \ln(x)$ ). Это означает, что граничные условия в (8.19) будут выполнены, если мы положим в (9.2)  $C_2 = 0$  и  $C_1 = w_1'(0) = w_0'$ . Подставив эти значения в (9.2), получаем

$$w(x) = w_0' w_1(x) + \frac{q}{D} w_1(x) \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1) w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} - \frac{q}{D} w_2(x) \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1) w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}}. \quad (9.9)$$

Входящая в это выражение постоянная  $w_0'$  вычисляется подстановкой формулы (9.9) последовательно в (8.17), (8.13) и в (8.19). В результате простых вычислений (Приложение B) приходим к выражению

$$w_0' = \frac{[\zeta(x \frac{dw_2}{dx} - w_2) + q \frac{dw_2}{dx}]_\infty}{\varepsilon(\omega) D} \int_0^\infty dx_1 \frac{iR(x_1) w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}} - \frac{q}{D} \int_0^\infty dx_1 \frac{iR(x_1) w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}}. \quad (9.10)$$

Здесь

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \int_0^\infty dx (\zeta x + q) \frac{e^{-x}}{xQ(x)} w_1(x) \quad (9.11)$$

$$= \frac{\zeta}{q} \left[ x \frac{dw_1}{dx} - w_1(x) \right]_\infty + \left[ \frac{dw_1}{dx} \right]_\infty \quad (9.12)$$

– диэлектрическая проницаемость, описывающая коллективную реакцию дипольных когерентных колебаний пучка, а выражения  $[f(x)]_\infty$  понимаются, как предел функции  $f(x)$  в бесконечно удаленной точке:

$$[f(x)]_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x). \quad (9.13)$$

Подставив (9.10) в (9.9), мы получаем окончательное выражение для искомого общего решения

$$\begin{aligned}
 w(x) = & w_1(x) \frac{[\zeta(x \frac{dw_2}{dx} - w_2) + q \frac{dw_2}{dx}]_{\infty}}{\varepsilon(\omega) D} \int_0^{\infty} dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}} \\
 & - w_1(x) \frac{q}{D} \int_x^{\infty} dx_1 \frac{iR(x_1)w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} \\
 & - \frac{q}{D} w_2(x) \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}}.
 \end{aligned} \tag{9.14}$$

Дальнейшая подстановка  $w(x) = xp(x)$  в формулу (8.8) завершает вычисления Фурье амплитуд  $f_{m,n}(u, x, \omega)$ , учитывающих действия на частицы пучка его самосогласованных полей пространственного заряда. Обратное преобразование Фурье позволяет вычислить зависимости амплитуд когерентных колебаний от времени:

$$f_{m,n}(u, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_{m,n}(u, x, \omega), \quad \text{Im}\omega > 0. \tag{9.15}$$

Эти выражения могут применяться как непосредственно для вычислений гармоник функции распределения пучка, так и для вычисления различных моментов функции распределения.

## 10. Вычисление дипольного момента пучка

Одним из полезных применений формул предыдущего раздела являются вычисления дипольного момента пучка, или его Фурье амплитуд. Помимо прочего, эти величины могут быть непосредственно измерены датчиками поперечных смещений пучка от замкнутой орбиты (т.н. пикап электродами). По определению дипольного момента горизонтальных когерентных колебаний пучка пишем

$$d_{m,n}(\omega) = \int_0^{\infty} dx \sqrt{x} \int_{-\infty}^{\infty} du f_{mn} = \int_0^{\infty} dx \sqrt{x} X(x). \tag{10.1}$$

Теперь, замечаем, что согласно формулам (10.1) и (8.19) выполняется тождество

$$\zeta d_{m,n}(\omega) = w'_0 - q \int_0^{\infty} dx \frac{X(x)}{\sqrt{x}}. \tag{10.2}$$

Подставляя сюда (8.13):

$$q \int_0^\infty dx \frac{X(x)}{\sqrt{x}} = q \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \left( iR(x) + \frac{e^{-x}w(x)}{\sqrt{x}Q(x)} \right), \quad R(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dur(u, x)}{Q(u, x)}$$

и вспомяная уравнение (8.18):

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -q \frac{iR(x)}{\sqrt{x}} - \frac{qe^{-x}}{xQ(x)}w(x),$$

перепишем (10.2) в виде

$$\zeta d_{m,n}(\omega) = w'_0 + \int_0^\infty dx \frac{d^2w}{dx^2} = \left[ \frac{dw}{dx} \right]_\infty. \quad (10.3)$$

Правая часть этого уравнения вычисляется с помощью формулы (9.14). Для этого пишем

$$\begin{aligned} w'(x) &= w'_1(x) \frac{[\zeta (x \frac{dw_2}{dx} - w_2) + q \frac{dw_2}{dx}]_\infty}{\varepsilon D} \int_0^\infty dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}} \\ &- w'_1(x) \frac{q}{D} \int_x^\infty dx_1 \frac{iR(x_1)w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} - \frac{q}{D} w'_2(x) \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}} \\ &+ \frac{q}{D} \frac{iR(x)}{\sqrt{x}} (w'_1(x)w_2(x) - w'_2(x)w_1(x)), \end{aligned}$$

или, вспомяная, что  $w'_1(x)w_2(x) - w'_2(x)w_1(x) = -D$ ,

$$\begin{aligned} w'(x) &= w'_1(x) \frac{[\zeta (x \frac{dw_2}{dx} - w_2) + q \frac{dw_2}{dx}]_\infty}{\varepsilon D} \int_0^\infty dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}} - q \frac{iR(x)}{\sqrt{x}} \\ &- w'_1(x) \frac{q}{D} \int_x^\infty dx_1 \frac{iR(x_1)w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} - \frac{q}{D} w'_2(x) \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}}. \end{aligned}$$

Используя очевидные предельные значения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{\sqrt{x}} = 0 \quad (10.4)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ w'_1(x) \int_x^\infty dx_1 \frac{iR(x_1)w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} \right] = 0, \quad (10.5)$$

получаем

$$\left[ \frac{dw}{dx} \right]_\infty = \frac{S}{D} \int_0^\infty dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}}. \quad (10.6)$$

Здесь

$$S = \left[ \frac{dw_1}{dx} \right]_{\infty} \frac{[\zeta (x \frac{dw_2}{dx} - w_2) + q \frac{dw_2}{dx}]_{\infty}}{\varepsilon} - q \left[ \frac{dw_2}{dx} \right]_{\infty}. \quad (10.7)$$

Подставляя в это выражение асимптотические значения функций  $w_{1,2}$  из формул (9.4)

$$w_1 = ax + b, \quad w_2 = cx + d, \quad D = -(ad - bc)$$

и используя (9.12):

$$\varepsilon(\omega) = a - \frac{\zeta b}{q},$$

находим

$$S = q \frac{-\zeta ad + qac}{-b\zeta + qa} - qc = \frac{qD\zeta}{qa - b\zeta} = \frac{D\zeta}{\varepsilon}, \quad (10.8)$$

или

$$d_{m,n}(\omega) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} dx \frac{iR(x)w_1(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\varepsilon(\omega)} \int_0^{\infty} \frac{dxw_1(x)}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{ir(u,x)}{Q(u,x)}. \quad (10.9)$$

Это соотношение показывает, что Фурье амплитуды дипольного момента пучка выражаются только через неособенное линейно независимое решение  $w_1(x)$ . Используя (10.9) и формулу (5.13):

$$(\delta d_{m,n})_{\omega}^2 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2\Delta \langle \delta d_{m,n}(\omega + i\Delta) \delta d_{m,n}^*(\omega + i\Delta) \rangle, \quad (10.10)$$

получаем также выражение для спектральной плотности стационарного шума дипольного момента пучка, вычисленную с учетом самосогласованных полей его пространственного заряда

$$(d_{m,n})_{\omega}^2 = \frac{2\pi N}{|\varepsilon(\omega)|^2} \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x}}{x} |w_1(x, \omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} du \rho(u) \delta[Q(u, x, \omega)]. \quad (10.11)$$

Напомним, что плотность такого шума может достигать стационарных значений лишь в области, где параметр  $\zeta$  располагается внутри границы области устойчивости дипольных когерентных колебаний пучка.

## 11. Собственные частоты и условия устойчивости

Функция  $\varepsilon(\omega)$  в уравнениях (9.10), (9.11), (9.14) и (10.9) является диэлектрической проницаемостью горизонтальных, дипольных когерентных

колебаний пучка, взаимодействующего с собственными наведенными полями, которые описываются локализованным, широкополосным импедансом  $Z_{\perp}(\omega)$ . В соответствии с этим, собственные частоты коллективных мод пучка  $\Delta\omega_{m,n}$  вычисляются решением дисперсионного уравнения

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \int_0^{\infty} dx \left( \zeta + \frac{q}{x} \right) \frac{e^{-x} w_1(x)}{Q(x)} = 0, \quad \text{Im}\omega > 0. \quad (11.1)$$

Оно может быть непосредственно вычислено, полагая нулевые начальные условия ( $r(u, x) = 0$ ) в соответствующих уравнениях предыдущих разделов. Например, вместо уравнения (8.13) пишем

$$X(x) = \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{Q(x)} p(x). \quad (11.2)$$

Это преобразует, например, уравнение (8.9) в однородное интегральное уравнение

$$p(x) = \zeta \int_0^{\infty} dx_1 \frac{x_1 e^{-x_1}}{Q(x_1)} p(x_1) + \frac{q}{x} \int_0^x dx_1 \frac{x_1 e^{-x_1}}{Q(x_1)} p(x_1) + q \int_x^{\infty} dx_1 \frac{e^{-x_1}}{Q(x_1)} p(x_1). \quad (11.3)$$

Используя то обстоятельство, что решения такого уравнения определены с точностью до произвольного множителя, мы найдем дисперсионное уравнение, потребовав, например, выполнения равенства  $p(0) = 1$ , или

$$1 = \int_0^{\infty} dx (\zeta x + q) \frac{e^{-x}}{Q(x)} p(x). \quad (11.4)$$

После этого двукратное дифференцирование обеих частей в (11.3) приводит к дифференциальному уравнению для функции  $p(x)$

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dp}{dx} \right) = -q \frac{x e^{-x}}{Q(x)} p(x). \quad (11.5)$$

Как и ожидалось, оно совпадает с однородной частью уравнения (8.15). Подставив сюда  $w(x) = xp(x)$ , получим дифференциальное уравнение для функции  $w(x)$ , которое совпадает с уравнением (9.1)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -q \frac{e^{-x}}{x Q(x)} w(x). \quad (11.6)$$

Условие нормировки  $p(0) = 1$  будет выполнено, если это уравнение решается с граничными условиями  $w(0) = 0$  и  $w'(0) = 1$ . Поэтому найденная

в таких вычислениях функция  $w(x)$  совпадает с линейно независимым решением уравнения (9.1) которое мы обозначали посредством  $w_1(x)$ . Подставив в (11.4)  $p(x) = w_1(x)/x$ , приходим к дисперсионному уравнению, записанному в (11.1).

Напомним, что при заданных граничных условиях и при выполнении условия  $\text{Im}z_m > 0$ , решения уравнения (11.6) можно найти для любого произвольно заданного комплексного значения  $z_m$ . При этом, однако, функция  $w(x)/x$  будет соответствовать одному из решений однородного интегрального уравнения (11.3) только в том случае, когда комплексное число  $z_m$  является одним из корней дисперсионного уравнения (11.1) (или уравнения (11.4)).

Согласно уравнениям (9.11) и (9.12) для решения дисперсионного уравнения (11.1) требуется знание функции  $w_1(x)$  лишь в бесконечно удаленной точке:

$$\zeta \left[ x \frac{dw_1}{dx} - w_1(x) \right]_{\infty} + q \left[ \frac{dw_1}{dx} \right]_{\infty} = 0. \quad (11.7)$$

Это обстоятельство существенно упрощает и, вообще, повышает достижимую точность вычислений собственных частот  $z_m$  и границ области устойчивости дипольных когерентных колебаний пучка с сильным пространственным зарядом.

Отметим также, что при существенном ослаблении пространственных полей пучка ( $q \rightarrow 0$ ) неособенное решение уравнения (11.6) записывается в виде  $w(x) = x$ . В таком случае пределом дисперсионного уравнения (11.1) при ( $q \rightarrow 0$ ) является дисперсионное уравнение, записанное для горизонтальных, дипольных когерентных колебаний пучка с нулевыми значениями полей пространственного заряда:

$$1 = \zeta \int_0^{\infty} dx x e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du \rho(u)}{z_m - \chi_p u - \chi_I x}, \quad \text{Im}z_m > 0. \quad (11.8)$$

### 11.1. Хроматические разбросы частот

Перейдем к сравнению результатов расчетов в рамках модели с самосогласованными вычислениями полей пространственного заряда пучка и модели квази-жесткого пучка. Для простоты мы будем вычислять границы областей устойчивости горизонтальных дипольных когерентных колебаний. Сначала мы, для простоты, положим  $a_c = 0$ , а распределение импульсов в пучке выберем гауссовым:

$$\rho(u) = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (11.9)$$

В таком случае, уравнение (8.14) записывается в виде ( $g > 0$  and  $\chi_p = 1$ ,  $\chi_I = 0$ )

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-u^2/2)}{z_m - u + q(1 - e^{-x})/x} du, \quad \text{Im}z_m > 0,$$

или (например, в [14])

$$\frac{1}{Q(x)} = -i\sqrt{2\pi}e^{-z_1^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-z_1^2}\text{erfc}(iz_1), \quad z_1 = \frac{z_m}{\sqrt{2}} + q\frac{1 - e^{-x}}{\sqrt{2x}}, \quad (11.10)$$

где  $\text{erfc}(z)$  – функция дополнительный интеграл вероятности комплексной переменной  $z$ . Эта формула выполняется при любом знаке параметра  $\text{Im}z_m$ . Положение границы области устойчивости в плоскости комплексной переменной  $\zeta$  вычисляется согласно уравнению (11.7):

$$\zeta = -q \frac{\left[ \frac{dw_1}{dx} \right]_{\infty}}{\left[ x \frac{dw_1}{dx} - w_1(x) \right]_{\infty}}, \quad (11.11)$$

в котором переменная  $z_m$  изменяется вдоль действительной оси. Входящие в это уравнение значения функции  $w_1(x)$  и ее производной по  $x$  вычисляются численным решением дифференциального уравнения (11.6) с граничными условиями  $w_1(0) = 0$  и  $w_1'(0) = 1$ . Результаты таких вычис-

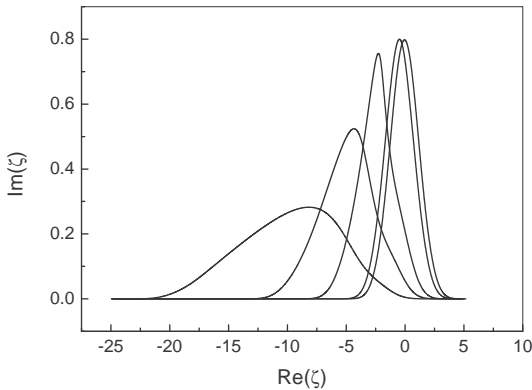


Рис. 10. Граница области устойчивости горизонтальных, дипольных когерентных колебаний из-за хроматического разброса частот бетатронных колебаний частиц. Колебания устойчивы ниже граничной кривой, гауссово распределение импульсов в пучке, справа налево  $q = 0, 1, 5, 10$  and  $20$ ;  $m_x = 1$ ,  $a_c = 0$

лений, учитывающие самосогласованные поля пространственного заряда



(рис. 10) подтверждают общий характер изменений границ области устойчивости когерентных колебаний с усилением полей пространственного заряда. Увеличение параметра  $q$  сопровождается сдвигом границ областей устойчивости влево и отклонением форм границ областей устойчивости от симметричных колоколообразных кривых. Кроме того, сравнение этих графиков с их аналогами из предыдущей главы позволяет видеть и явные отличия их форм. Более внимательное изучение (рис. 11 и рис. 12) позво-

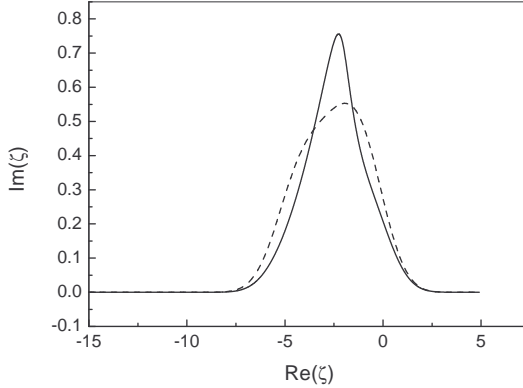


Рис. 11. Границы области устойчивости горизонтальных когерентных колебаний из-за хроматического разброса частот. Колебания устойчивы ниже граничных кривых, гауссово распределение импульсов в пучке,  $q = 5$ , сплошная линия – самосогласованный расчет, пунктирная – предсказания модели квази-жесткого пучка;  $m_x = 1$ ,  $a_c = 0$

ляет установить, что предсказания, учитывающие самосогласованные поля пространственного заряда, соответствуют более быстрому затуханию Ландау вблизи вершины граничной кривой и несколько меньшим ширинам областей устойчивости вдоль оси  $\text{Re}\zeta$ . Пунктирные линии на этих рисунках вычислялись используя (11.10) и дисперсионное уравнение модели квази-жесткого пучка:

$$1 - \int_0^\infty dx \left( \zeta + q \frac{1 - e^{-x}}{x} \right) \frac{x e^{-x}}{Q(x)} = 0, \quad \text{Im}\omega > 0. \quad (11.12)$$

## 11.2. Кубическая нелинейность фокусировки

Перейдем к изучению области параметров, в которой разброс импульсов в пучке настолько мал, что выполняется условие  $|\chi_p| \ll |\chi_I|$  и поэтому мы можем считать, что разброс частот бетатронных колебаний ча-

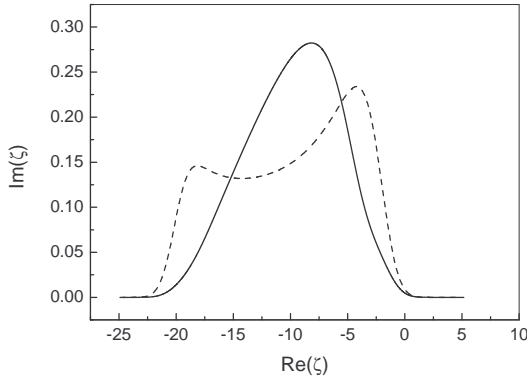


Рис. 12. То же, что и на рис. 11, но  $q = 20$

стиц целиком определяется октупольной компонентой фокусирующих полей  $\delta\omega \simeq |a_c| I_0$ . Для этого случая пишем

$$Q(x) = z_m - \chi x + q \frac{1 - e^{-x}}{x} + i\Delta, \quad (11.13)$$

где  $\chi = \pm 1$ , а  $\Delta$  – бесконечно малое положительное число. Рассмотрим сначала область, в которой  $\chi = 1$  и, поэтому для любого действительного значения  $z_m$  резонансное условие Ландау

$$z_m - \chi x + q \frac{1 - e^{-x}}{x} = 0 \quad (11.14)$$

выполняется для единственного значения  $x$ . Подставляя (11.13) в (11.6), решая это уравнение с граничными условиями  $w(0) = 0$  и  $w'(0) = 1$ , а также используя уравнение (11.11), находим положение границы области устойчивости с учетом самосогласованности полей пространственного заряда пучка (сплошные линии на рис. 13). Сравнивая на этом рисунке поведения сплошных и пунктирных линий, находим, что предсказания модели с самосогласованными полями пространственного заряда и модели квази-жесткого пучка согласуются только в описании общих изменений граничных кривых. Обе модели предсказывают увеличение сдвига границы влево и уширение областей устойчивости с увеличением кулоновского сдвига частоты пучка ( $q$ ). Однако, ширины и высоты областей устойчивости когерентных колебаний, вычисленные в модели квази-жесткого пучка могут существенно превышать те, что получены в модели с самосогласованными полями пространственного заряда.

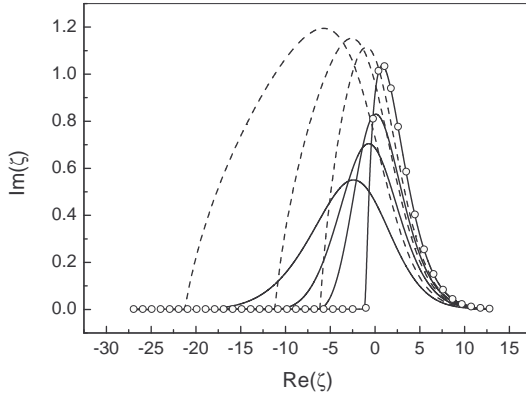


Рис. 13. Границы областей устойчивости дипольных, горизонтальных когерентных колебаний. Колебания устойчивы под граничной кривой. Сплошные линии – самосогласованные поля пространственного заряда, окружности и пунктир – модель квази-жесткого пучка; слева направо  $q = 0.1, 5, 10, 20$ ;  $\chi = 1, m_x = 1, \Delta = 0.001$

Более сильные отличия от предсказаний модели квази-жесткого пучка обнаруживаются в области, где кубическая нелинейность фокусировки приводит к уменьшению сдвигов частот бетатронных колебаний частиц ( $\chi = -1$ ). В этой области параметров совместное действие кубической нелинейности фокусировки и нелинейностей полей пространственного заряда пучка приводит к тому, что сдвиг частоты некогерентных горизонтальных бетатронных колебаний может достигать максимума при некотором значении амплитуды колебаний частицы (рис. 4). Положение точки максимума сдвига частоты  $\Delta\omega_x(x)$  устанавливается решением уравнения

$$\left[ \frac{d}{dx} \left( x + q \frac{1 - e^{-x}}{x} \right) \right]_{x=x_0} = 1 + \frac{q e^{-x_0} - q \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0}}{x_0} = 0. \quad (11.15)$$

В неявной форме корни этого уравнения  $x_0$  определяются формулой

$$q = \frac{x_0^2}{1 - e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0}} = 2 + \frac{4}{3} x_0 + \frac{7}{18} x_0^2 + O(x_0^3). \quad (11.16)$$

Это выражение позволяет установить, что максимумы  $\Delta\omega_x(x)$  появляются лишь в областях, где  $q \geq 2$  и где кривая  $x_0(q)$  является монотонно возрастающей функцией переменной  $q$  (рис. 14). Это означает, что для пучков с малыми полями пространственного заряда  $q \leq 2$  резонансное условие

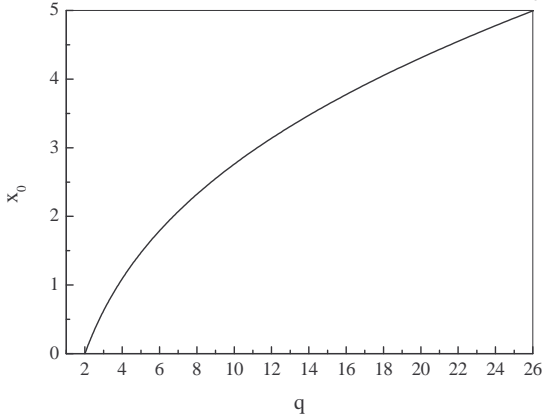


Рис. 14. Зависимость положения максимума  $x_0$  сдвига частоты горизонтальных бетатронных колебаний  $\Delta\omega_x(x)$  от  $q$ ,  $\chi = -1$

Ландау (11.14) выполняется для единственных значений  $x$ . В противоположном случае ( $q > 2$ ) на кривой  $\Delta\omega_x(x)$  появляется область, в которой резонансное условие (11.14) выполняется в двух точках  $x$  (на рис. 4 это сегмент ABC). Напомним, что именно в этой области параметров модель квази-жесткого пучка предсказывала эффект антизатухания Ландау дипольных когерентных колебаний для пучка с сильным пространственным зарядом.

В области, где  $\chi = -1$ , а  $q > 2$ , вычисления границ области устойчивости  $\zeta(z_m)$  с помощью уравнения (11.11), в котором переменная  $z_m$  изменяется параллельно ее действительной оси приводят к более сложным кривым, чем те, которые нам уже встречались в подобных задачах (например, рис. 15). Во-первых, все такие линии целиком расположены в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\zeta$ . Это означает, что при любом значении величины  $\text{Im}z_m$  вычисления с самосогласованными полями пространственного заряда предсказывают спектры когерентных колебаний без антизатухания Ландау. Во-вторых, например, сплошная линия на рис. 15 и аналогичные кривые имеют, по крайней мере, одну точку самопересечения (на рис. 15 это точки B и B'). Поэтому, если  $\zeta$  попадает в такую точку, то у дисперсионного уравнения (11.1) появляются два корня, например,  $z_m^{(1)}$  и  $z_m^{(2)}$  с одним и тем же значением  $\text{Im}z_m^{(1,2)} = \Delta$ , но с отличающимися значениями  $\text{Re}z_m$ . Для всех остальных точек на, например, кривой ABDBC на этом рисунке дисперсионное уравнение имеет единственные корни  $z_m + i\Delta$ , действительная часть которых изменяются с изменением

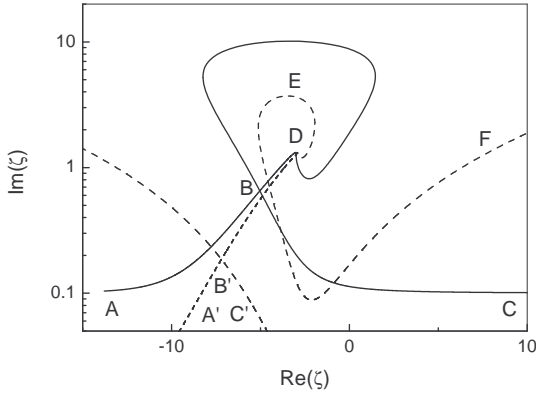


Рис. 15. К определению границы области устойчивости горизонтальных когерентных колебаний. Сплошная линия –  $\Delta = 0.1$ , пунктирная –  $\Delta = 0.01$ ;  $q = 8$ ,  $\chi = -1$ ,  $m_x = 1$

параметра  $\zeta$ . Численные исследования показывают, что для используемой модели самопересечения на кривых  $\zeta(z_m)$  пропадают только в области, где  $q \geq 370$  ( $\text{Im}z_m = 10^{-8}$ ) или в области, где  $q < 0.1$ . Это качественно согласуется с предсказаниями модели квази-жесткого пучка, в которой явление антизатухания Ландау когерентных колебаний появлялось в ограниченной области параметра  $q$ .

Внутри областей параметра  $q$ , соответствующих появлению самопересечений кривых  $\zeta(z_m)$ , можно численно найти области  $\zeta$ , в которых мнимые части корней дисперсионного уравнения оказываются меньше заданного значения. Например, сравнение на рис. 15 хода сплошной и пунктирной линий указывает на то, что области под сплошной кривой ABC, а также область, ограниченная петлей BDB, содержат лишь корни дисперсионного уравнения с  $\text{Im}z_m \leq 0.1$ . При этом уменьшение параметра  $\Delta$  смещает положение точки самопересечения в сторону меньших значений параметра  $\text{Im}\zeta$ . После такого смещения высота области ABC также уменьшается. Например, уменьшение  $\Delta$  в 10 раз сужает область ABC в область A'B'C' (на рис. 15 показана лишь малая часть этой области). В пределе  $\text{Im}z_m \rightarrow 0$ , который соответствует обычному определению границы области устойчивости, сегмент ABC стремится к действительной оси  $\zeta$ . Это означает, что хотя вычисления с самосогласованными полями пространственного заряда пучка и не предсказывают прямого антизатухания Ландау когерентных колебаний, которое появлялось в модели квази-жесткого пучка, они предсказывают нулевые значения для декрементов затухания Ландау интенсивных ион-

ных пучков в области  $\chi = -1$ . В соответствии с этим, уравнение границы области устойчивости колебаний определяется уравнением  $\text{Im}\zeta = 0$ .

Более подробное изучение этого явления показывает, что самопересечения кривых  $\zeta(z_m + i\Delta)$  появляются при изменении  $z_m$  в нерезонансной области частот  $z_m$ , в которой для всех значений  $x$  выполнено условие (см. также рис. 16)

$$Q(z_m, x) = z_m + x + q \frac{1 - e^{-x}}{x} > 0. \quad (11.17)$$

Например, для пунктирной кривой на рис. 15 это точки сегмента  $DEFB'C'$ .

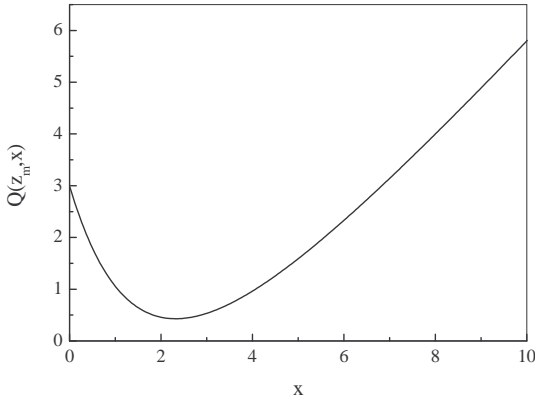


Рис. 16. Пример зависимости фактора  $Q(z_m, x)$  от  $x$  в нерезонансной области;  $z_m = 5$ ,  $\chi = -1$ ,  $m_x = 1$

В этой области взаимодействие когерентных и некогерентных колебаний ионов не является резонансным и не приводит к затуханию Ландау. Для пучка с очень слабыми полями пространственного заряда в такой области уравнение границы области устойчивости совпадает с  $\text{Im}\zeta(z_m) = 0$ , а величина  $\text{Re}\zeta(z_m)$  монотонно увеличивается с ростом параметра  $z_m$ . Поэтому области плоскости комплексной переменной  $\zeta$ , содержащие устойчивые и неустойчивые решения, не пересекаются.

Это свойство границы области устойчивости может нарушаться для пучка с сильными, самосогласованными полями пространственного заряда. Согласно уравнению (11.6) действие полей пространственного заряда вызывает изменения амплитуд и фаз дипольных когерентных колебаний пучка при изменении амплитуд некогерентных колебаний частиц. В области, определенной неравенством (11.17), такие изменения являются осцилляторными. Используя формулу (11.1), запишем уравнение для границы

области устойчивости в следующем виде:

$$\zeta = \frac{1 - q \int_0^\infty dx \frac{e^{-x} w_1(x)}{x Q(z_m, x)}}{\int_0^\infty dx \frac{e^{-x} w_1(x)}{Q(z_m, x)}}. \quad (11.18)$$

В области, определяемой неравенством (11.17), функции  $w_1$  и  $Q(z_m, x)$  являются действительными. Поэтому  $\text{Im}\zeta$  в (11.18) обращается в нуль автоматически. Теперь заметим, что при некотором значении  $z_m = z_{m0}$  осцилляции  $w_1$  могут обратить в нуль фактор:

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-x} w_1(x)}{Q(z_{m0}, x)}. \quad (11.19)$$

Если это не сопровождается одновременным обращением в нуль фактора

$$1 - q \int_0^\infty dx \frac{e^{-x} w_1(x)}{x Q(z_{m0}, x)}, \quad (11.20)$$

то в окрестности точки  $z_{m0}$  функция  $\text{Re}\zeta(z_m)$  оказывается быстроизменяющейся по величине и по знаку. Это приводит к самопересечениям кривой  $\zeta(z_m)$  при прохождении параметром  $z_m$  окрестности точки  $z_{m0}$ . Отметим, что аналогичными самопересечения границ области устойчивости появляются при изучении устойчивости когерентных колебаний в т.н. двухпоточковых пучках, взаимодействующих с широкополосными импедансами.

## Глава 4.

# Заключительные замечания

Для нерезонансного взаимодействия дипольных когерентных колебаний непрерывного пучка с окружающими его электродами мы изучили влияние полей пространственного заряда пучка на формы границ области устойчивости колебаний и на формы спектров шума пучка. Эти формы существенно зависят от распределения частот в пучке и, в частности, от величин разбросов частот некогерентных колебаний в пучке. Результаты таких исследований оказываются чувствительными к особенностям моделей, которые используются для упрощения вычислений. Например, силы полей пространственного заряда пучка не влияют на дипольные когерентные колебания пучка, если разбросы частот в нем, вычисленные в пренебрежении вкладами полей пространственного заряда пучка, равны нулю. Без октупольных полей на замкнутой орбите ( $a_c = b_c = 0$ ) поля пространственного заряда пучка не изменяют диаграмму устойчивости его дипольных когерентных колебаний при условии, что распределение импульсов в пучке лоренцево. Эти обстоятельства следует учитывать при выборе модели описания пучка.

## 12. Колебания в модели квази-жесткого пучка

Одним из способов упрощения вычислений полей пространственного заряда пучка основана на предположении о том, что при описании дипольных когерентных колебаний поля пространственного заряда определяются теми же формулами, которые получаются при жестком распределении частиц в пучке. Это предположение существенно упрощает вычисления дисперсионных уравнений дипольных колебаний, но, строго говоря, нарушает самосогласованность вычислений полей пространственного заряда. В на-



ших вычислениях мы также игнорировали вклады в поля пространственного заряда зарядов изображений пучка в стенках вакуумной камеры. Это предположение справедливо лишь при условии, что поперечные размеры пучка существенно меньше поперечных расстояний от пучка до стенок.

Положения и формы границ области устойчивости дипольных колебаний отражают изменения в их затухании Ландау и порогов неустойчивостей с изменением величины когерентного сдвига частоты монохроматического пучка  $\Omega_{m,n}$ . В согласии с результатами работ Refs.[6] и [10] максимальные значения декрементов затухания Ландау определяются разбросами частот пучка за счет хроматичности фокусировки и нелинейных зависимостей фокусирующих полей кольца от поперечных координат частиц. При этом усиление полей пространственного заряда может существенно уменьшить декременты затухания Ландау. Помимо этого поля пространственного заряда интенсивного пучка могут перераспределять затухание Ландау на области  $\Omega_{m,n}$ , в которых дипольные когерентные колебания пучков с малыми значениями  $\Delta\nu_L$  были бы неустойчивыми.

Совместное действие на частицы кубической нелинейности фокусировки кольца и нелинейностей полей пространственного заряда может приводить к немонотонным зависимостям частот бетатронных колебаний от амплитуд колебаний частиц. Если функции распределения пучка по амплитудам бетатронных колебаний являются гладкими функциями  $I_x$  и  $I_y$ , то такие немонотонные зависимости частот от  $I_x$  и  $I_y$  приводят к появлению резонансных частиц в пучке. Например, может оказаться что колебаниям частиц с двумя отличающимися амплитудами в спектре пучка соответствует одно значение частоты колебаний. В противоположность обычному случаю, в модели квази-жесткого пучка такое совпадение приводит к антизатуханию Ландау когерентных колебаний пучка с сильным пространственным зарядом. Эта особенность границы области устойчивости дипольных колебаний пучка с плоским и круглым поперечным сечением. При заданной величине поперечного импеданса вакуумной камеры накопителя нежелательность таких изменений границы области устойчивости может устанавливать предел на достижимое значение кулоновского сдвига частоты ионного пучка. Например, такой предел может достигаться в накопителях с электронным охлаждением ионов.

Одной из причин появления когерентных колебаний пучка ионов может служить действие на пучок случайных толчков, или тепловое движение частиц пучка. Амплитуды и фазы таких колебаний являются случайными величинами, а соответствующие сигналы наблюдаемые, например, пикап-электродами представляют собой шум, или флуктуационный фон пучка. Влияя на когерентные колебания, поля пространственного заряда изменяют спектры шума дипольных когерентных флуктуаций пучка. На-

блюдаемые в таких измерениях изменения спектров зависят от величины кулоновского сдвига частоты пучка и могут быть использованы для прямого измерения величины  $\Delta\nu_L$ . Формы и особенности спектров шума пучка зависят от расстояния  $\Omega_{m,n}$  до границы области устойчивости колебаний. При заданном числе частиц в пучке оно может регулироваться использованием системы охлаждения пучка, или подходящей системой обратной связи, демпфирующей неустойчивые моды.

Увеличение шумовых сигналов пучка вблизи порогов неустойчивости когерентных колебаний может усиливать диффузию частиц пучка на его когерентных флуктуациях (например, в [3]). Среди прочего, это может приводить к дополнительному нагреву пучка ионов и к соответствующему увеличению его поперечных размеров при охлаждении пучка.

### 13. Самосогласованные поля пространственного заряда

Ввиду сложности задачи об учете влияния самосогласованности полей пространственного заряда пучка на особенности его дипольных когерентных колебаний, ее решения изучались в Пособии в рамках специальной модели. В этой модели вычисления проводятся для горизонтальных когерентных колебаний пучка ионов, поперечное сечение которого в фазовом пространстве невозмущенных бетатронных колебаний частиц представляет собой ленту, вытянутую в горизонтальном и в продольном направлениях. Полученные результаты сравнивались с предсказаниями модели квази-жесткого пучка. Было найдено, что предсказания обеих моделей совпадают в тех случаях, когда функция распределения ионов по амплитудам горизонтальных колебаний является ступенчатой функцией  $I_x$ , или когда на орбите отсутствуют октапольные поля, а распределение импульсов в пучке является монохроматическим, или задается лоренцевым распределением.

Для непрерывных пучков с экспоненциальным распределением по  $I_x$  интегральные уравнения для гармоник функции распределения удается преобразовать в дифференциальные уравнения. Для задач на собственные значения это однородное, а для задач о развитии начального режима это неоднородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Наблюдаемые параметры пучка (диэлектрическая проницаемость, дипольный момент и т.п.) выражаются через несингулярное решение уравнения (9.1). В общем случае такое решение является комплексной функцией частоты ( $z_m$ ) и амплитуды бетатронных колебаний частицы. Эта функция описывает коллективную реакцию колебаний пространственного заряда в пучке. В противоположность предсказанию модели квази-жесткого

пучка колебания пространственного заряда, описываемые форм-фактором  $w_1(x)$  изменяют как когерентный сдвиг частоты пучка его пространственным зарядом, так и действие на частицы широкополосных наведенных полей пучка. Это изменяет спектр частот когерентных колебаний и форму границы области устойчивости этих колебаний.

Наиболее значительные отличия от предсказаний модели квази-жесткого пучка найдены при расчете границы области устойчивости дипольных колебаний для случая, когда затухание Ландау колебаний обеспечивается нелинейностью полей пространственного заряда и такой октупольной нелинейностью фокусирующих полей, при которой частоты бетатронных колебаний частиц уменьшаются с ростом амплитуд бетатронных колебаний. В такой области и для очень широкого диапазона параметра пространственного заряда  $q$  вычисления учитывающие самосогласованность полей пространственного заряда предсказывают, что дипольные колебания будут устойчивы лишь в области  $\text{Im}\zeta < 0$ . Это означает, что такая комбинация октупольных полей и полей пространственного заряда уничтожает затухание Ландау дипольных колебаний пучка для всех значений  $\text{Re}\zeta$ . То обстоятельство, что эффект антизатухания Ландау не имеет такого же яркого выражения, как это было в модели квази-жесткого пучка не должно вводить читателя в заблуждение. Выполнение требования обеспечения устойчивости когерентных колебаний пучка с самосогласованными полями пространственного заряда вынуждает в таких условиях усиливать хроматическое затухание Ландау когерентных колебаний, или использования для демпфирования неустойчивых мод подходящей системы обратной связи.

## 14. Измерения кулоновского сдвига частоты

Вычисления характеристик когерентных колебаний ионных пучков, учитывающие самосогласованность полей пространственного заряда, подтверждают чувствительность границ области устойчивости колебаний и спектров дипольных когерентных шумов пучка к величине его кулоновского сдвига частоты. По этой причине измерения таких спектров и функций отклика пучка могут быть использованы для прямого измерения параметра  $\Delta\nu_L$  и, например, эмиттанса пучка.

Следует помнить, что результаты таких измерений также весьма чувствительны к значениям параметров, определяющих внешние разбросы частот бетатронных колебаний в пучке. Поэтому для проведения измерений, например,  $\Delta\nu_L$  с помощью наблюдения дипольных когерентных колебаний пучка может оказаться полезным размещение на замкнутой орбите накопи-

теля достаточного количества хорошо калиброванных октупольных и/или секступольных линз.

При проведении измерений с использованием внешней раскачки когерентных колебаний следует помнить, что, по крайней мере, силы пространственного заряда пучка нелинейным образом зависят от поперечных смещений частиц. Помимо прочего, такая нелинейность приводит к зависимости частот дипольных когерентных колебаний от их амплитуд и к соответствующим искажениям спектров этих колебаний. Если амплитуды внешней раскачки невелики, это может приводить к уширению резонансных линий отклика когерентных колебаний на величины, зависящие от амплитуды раскачки. Кроме того, с ростом амплитуд внешней раскачки измерения резонансных кривых когерентных колебаний могут сопровождаться наблюдением их гистерезисов – т.е. зависимости амплитуд вынужденных колебаний от направления прохождения резонанса частотой вынуждающей силы.

Для правильной интерпретации результатов измерений эти эффекты нужно либо явно учесть в расчетах спектров колебаний, либо выбирать амплитуды раскачки настолько малыми, чтобы они не сказывались на результатах измерений частот и амплитуд когерентных колебаний пучка.

Эти затруднения удастся ослабить использованием неразрушительных методов диагностики колебаний пучка ионов, которые основаны на измерениях шумов дипольных моментов пучка. После установления достаточной удаленности параметров пучка от границ области устойчивости когерентных колебаний измерения спектров и мощности шума позволяют установить значение  $\Delta\nu_L$  непосредственно. В околопороговой области параметров интерпретация результатов таких измерений должна учитывать возможность совместной релаксации частиц пучка и его шумов.

## Приложение А

# Частное решение уравнения (8.18)

Для вычисления частного решения неоднородного уравнения (8.18), удовлетворяющего граничным условиям (9.6), пишем

$$W(x) = A(x)w_1 + B(x)w_2, \quad W' = A(x)w_1' + B(x)w_2', \quad (\text{A.1})$$

где  $w_{1,2}(x)$  – линейно-независимые решения однородного уравнения (9.1):

$$\frac{d^2 w_{1,2}}{dx^2} = -\frac{qe^{-x}}{xQ(x)} w_{1,2}(x). \quad (\text{A.2})$$

Мы можем нормализовать такие решения, вычисляя функции  $w_{1,2}(x)$ , например, в окрестности начала координат

$$x \ll \frac{|Q(0)|}{|(\partial Q/\partial x)_{x=0}|} \ll 1.$$

В такой области уравнение (A.2) записывается в виде

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{q_1}{x} w, \quad q_1 = \frac{q}{Q(0)}, \quad \text{Im} z_m > 0, \quad (\text{A.3})$$

а его линейно-независимыми решениями являются функции:

$$w_1(x) = \sqrt{x} J_1(2\sqrt{q_1 x}), \quad w_1'(x) = \sqrt{q_1} J_0(2\sqrt{q_1 x}), \quad (\text{A.4})$$

и

$$w_2(x) = \sqrt{x} Y_1(2\sqrt{q_1 x}), \quad w_2'(x) = \sqrt{q_1} Y_0(2\sqrt{q_1 x}). \quad (\text{A.5})$$

Здесь  $J_\nu(x)$  – функция Бесселя, а  $Y_\nu(x)$  – функция Неймана порядка  $\nu$  (например, в справочнике [14]). Определитель Вронского этих функций  $w_{1,2}(x)$  равен  $1/\pi$ :

$$D = w_1(x) \frac{dw_2}{dx} - \frac{dw_1}{dx} w_2(x) = \frac{1}{\pi}. \quad (\text{A.6})$$

Согласно формулам (A.4) и (A.5) вблизи начала координат значения функций  $w_{1,2}$  равны:

$$w_1(0) = 0, \quad w_1'(0) = 1, \quad (\text{A.7})$$

и

$$w_2(0) = -\frac{1}{\sqrt{q_1}\pi}, \quad w_2'(x \rightarrow 0) \simeq \frac{\sqrt{q_1}}{\pi} \ln(q_1 x). \quad (\text{A.8})$$

Подстановкой (A.1) в (8.18) находим, что функции  $A(x)$  и  $B(x)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} A'w_1 + B'w_2 &= 0, \\ A'w_1' + B'w_2' &= -q \frac{iR(x)}{\sqrt{x}}, \quad D = w_1w_2' - w_2w_1', \end{aligned}$$

или

$$A' = \frac{q}{D} \frac{iR(x)w_2(x)}{\sqrt{x}}, \quad B' = -\frac{q}{D} \frac{iR(x)w_1(x)}{\sqrt{x}}. \quad (\text{A.9})$$

Интегрируя обе части этих уравнений по  $x$  с граничными условиями

$$A(0) = 0, \quad B(0) = 0,$$

получаем

$$A(x) = \frac{q}{D} \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1)w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}}, \quad B(x) = -\frac{q}{D} \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}},$$

или

$$W(x) = \frac{q}{D} \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1) [w_1(x)w_2(x_1) - w_2(x)w_1(x_1)]}{\sqrt{x_1}}. \quad (\text{A.10})$$

## Приложение В

### Вычисление $w'_0$ .

Величина  $w'_0$  вычисляется подстановкой в формулу (8.19) значений функции  $X(x)$  из уравнений (8.13) – (8.18):

$$X(x) = iR(x) + \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}Q(x)}w(x). \quad (\text{B.1})$$

После этого пишем

$$w'_0 = \int_0^\infty dx \left( \zeta\sqrt{x} + \frac{q}{\sqrt{x}} \right) X(x_1) \quad (\text{B.2})$$

$$= \int_0^\infty dx (\zeta x + q) \frac{iR(x)}{\sqrt{x}} + \int_0^\infty dx (\zeta x + q) \frac{e^{-x}}{xQ(x)}w(x). \quad (\text{B.3})$$

Воспользовавшись здесь формулой (9.9), получаем

$$\begin{aligned} w'_0 &= \int_0^\infty dx (\zeta x + q) \frac{iR(x)}{\sqrt{x}} + w'_0 \int_0^\infty dx (\zeta x + q) \frac{e^{-x}}{xQ(x)}w_1(x) \\ &+ \int_0^\infty dx (\zeta x + q) \frac{e^{-x}}{xQ(x)} \frac{q}{D} w_1(x) \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1)w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} \\ &- \int_0^\infty dx (\zeta x + q) \frac{e^{-x}}{xQ(x)} \frac{q}{D} w_2(x) \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}}, \end{aligned}$$

или

$$\varepsilon w'_0 = \int_0^\infty dx (\zeta x + q) \frac{iR(x)}{\sqrt{x}} - A_1 + A_2. \quad (\text{B.4})$$

Здесь

$$\varepsilon = 1 - \int_0^\infty dx (\zeta x + q) \frac{e^{-x}}{xQ(x)}w_1(x), \quad (\text{B.5})$$

а

$$A_1 = -\frac{q}{D} \int_0^\infty dx \left( \zeta + \frac{q}{x} \right) \frac{e^{-x} w_1(x)}{Q(x)} \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1) w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}}, \quad (\text{B.6})$$

$$A_2 = -\frac{q}{D} \int_0^\infty dx \left( \zeta + \frac{q}{x} \right) \frac{e^{-x} w_2(x)}{Q(x)} \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1) w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}}. \quad (\text{B.7})$$

До вычисления интегралов в этих выражениях напомним, что согласно уравнению (9.1):

$$\frac{d^2 w_{1,2}}{dx^2} = -\frac{q e^{-x}}{x Q(x)} w_{1,2}(x), \quad (\text{B.8})$$

функции  $w_1(x)$  и  $w_2(x)$  линейно зависят от  $x$  в асимптотической области  $x \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что в силу уравнения

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dw_{1,2}}{dx} - w_{1,2} \right) = -q \frac{e^{-x}}{Q(x)} w_{1,2}(x), \quad (\text{B.9})$$

функции  $xw'_{1,2} - w_{1,2}(x)$  стремятся к постоянным значениям при  $x \rightarrow \infty$ . Таким образом, в асимптотической области мы можем записать

$$w_1 = ax + b, \quad w_2 = cx + d, \quad (\text{B.10})$$

где коэффициенты  $a, b, c, d$  удовлетворяют условию

$$D = w_1 w'_2 - w_2 w'_1 = cax - acx + cb - ad = -(ad - bc). \quad (\text{B.11})$$

Теперь, пишем

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{q}{D} \int_0^\infty dx (\zeta x + q) \frac{e^{-x}}{x Q(x)} w_1(x) \int_0^x dx_1 \frac{iR(x_1) w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} \\ &= -\frac{q}{D} \int_0^\infty dx_1 \frac{iR(x_1) w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} \int_{x_1}^\infty dx (\zeta x + q) \frac{e^{-x}}{x Q(x)} w_1(x). \end{aligned}$$

Используя тождества:

$$\begin{aligned} -\int_{x_1}^\infty dx \frac{(\zeta x + q) e^{-x} w_1(x)}{x Q(x)} &= \int_{x_1}^\infty dx \left( \frac{\zeta}{q} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dw_1}{dx} - w_1 \right) + \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right) \\ &= \left[ \frac{\zeta}{q} \left( x \frac{dw_1}{dx} - w_1 \right) + \frac{dw_1}{dx} \right]_\infty - \left( \frac{\zeta}{q} \left( x_1 \frac{dw_1}{dx} - w_1(x_1) \right) + \frac{dw_1}{dx} \right), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{q}{D} \left[ \frac{\zeta}{q} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dw_1}{dx} - w_1 \right) + \frac{dw_1}{dx} \right]_\infty \int_0^\infty dx_1 \frac{iR(x_1) w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} \\ &\quad - \frac{q}{D} \int_0^\infty dx_1 \frac{iR(x_1) w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}} \left( \frac{\zeta}{q} \left( x_1 \frac{dw_1}{dx} - w_1(x_1) \right) + \frac{dw_1}{dx} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$



Аналогичные вычисления приводят к выражению

$$A_2 = \frac{q}{D} \left[ \frac{\zeta}{q} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dw_2}{dx} - w_2 \right) + \frac{dw_2}{dx} \right]_{\infty} \int_0^{\infty} dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}} \quad (\text{B.13})$$

$$- \frac{q}{D} \int_0^{\infty} dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}} \left( \frac{\zeta}{q} \left( x_1 \frac{dw_2}{dx_1} - w_2(x_1) \right) + \frac{dw_2}{dx_1} \right).$$

Подставляя формулы (B.12) и (B.13) в (B.4) и используя

$$D = w_1(x) \frac{dw_2}{dx} - \frac{dw_1}{dx} w_2(x),$$

находим

$$A_2 - A_1 = \frac{q}{D} \left[ \frac{\zeta}{q} \left( x \frac{dw_2}{dx} - w_2 \right) + \frac{dw_2}{dx} \right]_{\infty} \int_0^{\infty} dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}}$$

$$- \frac{q}{D} \left[ \frac{\zeta}{q} \left( x \frac{dw_1}{dx} - w_1 \right) + \frac{dw_1}{dx} \right]_{\infty} \int_0^{\infty} dx_1 \frac{iR(x_1)w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}}$$

$$- \int_0^{\infty} dx_1 (\zeta x_1 + q) \frac{iR(x_1)}{\sqrt{x_1}},$$

или

$$\varepsilon w'_0 = \frac{q}{D} \left[ \frac{\zeta}{q} \left( x \frac{dw_2}{dx} - w_2 \right) + \frac{dw_2}{dx} \right]_{\infty} \int_0^{\infty} dx_1 \frac{iR(x_1)w_1(x_1)}{\sqrt{x_1}} \quad (\text{B.14})$$

$$- \frac{q}{D} \left[ \frac{\zeta}{q} \left( x \frac{dw_1}{dx} - w_1 \right) + \frac{dw_1}{dx} \right]_{\infty} \int_0^{\infty} dx_1 \frac{iR(x_1)w_2(x_1)}{\sqrt{x_1}}.$$

Вспоминая здесь, что

$$\varepsilon(\omega) = \left[ \frac{\zeta}{q} \left( x \frac{dw_1}{dx} - w_1(x) \right) + \frac{dw_1}{dx} \right]_{\infty},$$

получаем формулу (9.10).

# Литература

- [1] Д. В. Пестриков. Лекции по когерентным колебаниям. Часть I и II. Учебное пособие. Новосибирск, 1996.
- [2] Диканский Н. С., Пестриков Д. В. Физика интенсивных пучков в накопителях. Новосибирск: Наука, 1989.
- [3] Dikansky N.S., Pestrikov D.V. Physics of Intense Beams and Storage Rings. N.Y.: AIP PRESS, 1994.
- [4] Д. В. Пестриков. Нелинейные эффекты в динамике циркулирующих пучков. Учебное пособие. Новосибирск, 2002.
- [5] Н. С. Диканский, Д. В. Пестриков. Когерентные колебания встречных пучков. Учебное пособие. Новосибирск, 2011.
- [6] D. Moehl and H. Schoenauer. Proceedings of the IX International Conference on High Energy Accelerators, Stanford, SLAC 1974 (AEC, Washington, D.C.), p. 380, 1974;
- [7] G. Merle, D. Möhl. CERN-ISR-300-GS-69-66, Geneva: CERN, 1969.
- [8] Angert N., Blasche K., Boine-Frankenheim O., Dikansky N., et al. Study for a High-Intensity Heavy Ion Synchrotron with Strong Bunch Compression (Part I), Budker INP 2000-93, Novosibirsk, 2000.
- [9] M. Blaskiewicz. Phys. Rev. ST Accel. Beams, **4**, 044202, (2001).
- [10] D. Pestrikov. Proceedings of the 18-th International Conference on High Energy Accelerators HEACC2001, Report P2oth14, March 26-30, 2001, Tsukuba, Japan, <http://conference.kek.jp/heacc2001>.
- [11] J. Borer, P. Bramham, et al. Proceedings of the IX International Conference on High Energy Accelerators, Stanford, SLAC 1974 (AEC, Washington, D.C.), p. 53, 1974.

- [12] Ю. Л. Климонтович. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. МГУ 1964.
- [13] D. V. Pestrikov. Nuclear Instr. and Meth. in Phys. Res., A 562/1 p. 65, 2006.
- [14] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.