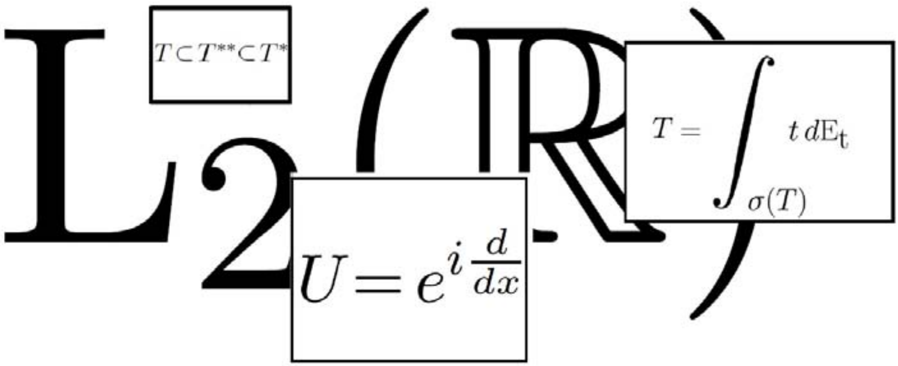
И. В. Подвигин

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра высшей математики

И. В. ПОДВИГИН

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Курс лекций

Новосибирск
2012

ББК
УДК 517.983.2+517.984.46
П440

Подвигин И. В. Дополнительные главы функционального анализа: Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. с.

Пособие соответствует программе курса лекций "Дополнительные главы функционального анализа", читаемого на третьем курсе физического факультета. Оно содержит основы теории неограниченных операторов, борелевское исчисление для самосопряженных операторов, включая спектральную теорему, а также примеры используемых понятий и конструкций на основе операторов импульса и координаты с различными областями определения. Также рассмотрены примеры других операторов, встречающихся в квантовой механике и теории динамических систем.

Предназначено для студентов и преподавателей физического факультета НГУ.

Курс лекций подготовлен в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Новосибирский государственный университет"* на 2009–2018 годы.

Список обозначений

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;
$\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел;
$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел (комплексная плоскость);
$\mathfrak{B}(\mathrm{H})$ – алгебра линейных ограниченных операторов гильбертова пространства;
$\mathfrak{L}(\mathrm{H})$ – множество линейных операторов гильбертова пространства;
$M_n(\mathbb{C})$ – алгебра квадратных матриц над полем комплексных чисел;
$C(K)$ – множество непрерывных на компакте функций;
$B(K)$ – множество борелевских на компакте функций;
$\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ – алгебра многочленов с комплексными коэффициентами;
$P_k[\mathbb{X}]$ – множество многочленов степени не выше k;
$\sigma(A)$ – спектр оператора (матрицы);
$\mathrm{dim} H$ – размерность пространства;
$\mathrm{deg} p(x)$ – степень многочлена;
$\mathrm{det} A$ – определитель матрицы;
$R_\lambda(A)$ – резольвента оператора;
$\mathrm{tr} A$ – след матрицы;
$\mu_A(x)$ – минимальный многочлен матрицы;
$\chi_A(x)$ – характеристический многочлен матрицы;
$\mathrm{ker} V$ – ядро линейного отображения;
$\mathrm{Dom} f$ – область определения отображения;
$\mathcal{A}(D)$ – множество аналитических в области D функций;
$\mathrm{Res}_{z=z_k} f(z)$ – вычет функции $f(z)$ в точке $z = z_k$;
$\overline{E} = \mathrm{cl} E$ – замыкание множества E;
$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$ – классическая производная функции $f(x)$;
$Df(x)$ – обобщенная производная функции $f(x)$;

Оглавление

Лекция № 1. Функции от матриц

1.1. Введение

Рассмотрим цепочку множеств $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Все они вам хорошо известны. При изучении каждого из них естественно возникали отображения, область определения или значения которых были их подмножествами. В курсе функционального анализа появились ещё два множества, которые в некотором смысле можно считать обобщениями предыдущих. А именно, множество $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$ линейных ограниченных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H, и множество $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$ линейных (не обязательно) ограниченных операторов. Тогда мы можем продолжить цепочку

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \sqsubset \mathfrak{B}(\mathrm{H}) \subset \mathfrak{L}(\mathrm{H}),$$

где знак $\sqsubset$ означает **вложение** комплексных чисел $\mathbb{C}$ в множество ограниченных операторов $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$, осуществляемое по правилу $\alpha \mapsto \alpha I$. Здесь $\alpha \in \mathbb{C}$, а I – тождественный оператор в $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$. Если H одномерно, то операторы не отличаются от комплексных чисел. Когда размерность увеличивается, то, конечно, какие-то свойства чисел (например, коммутативность) теряются, но многие другие сохраняются. В частности, мы можем определять функции от операторов, а также будем рассматривать операторнозначные функции. Этот раздел анализа называется **функциональным исчислением операторов**. И начнём мы изучение этого вопроса с рассмотрения операторов в конечномерном пространстве, т.е. квадратных матриц.

1.2. Алгебра квадратных матриц

Итак, наши объекты: H — комплексное гильбертово пространство размерности n, т.е. $\mathrm{H} \cong \mathbb{C}^n$, тогда $\mathfrak{B}(\mathrm{H}) \cong M_n(\mathbb{C})$. В дальнейшем мы будем использовать следующие определения.

Определение 1.1. **Комплексной алгеброй** называется векторное пространство A над полем $\mathbb{C}$, в котором определена операция **умножения** $\cdot$, сопоставляющая каждым двум элементам $x, y \in A$ элемент $x \cdot y \in A$ и удовлетворяющая условиям:

1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

2) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ и $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$;

3) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y) = x(\alpha \cdot y)$;
верным для всех $x, y, z \in A$ и $\alpha \in \mathbb{C}$.

Дальше мы будем опускать знак умножения $\cdot$ в случаях, когда это не приводит к путанице.

Определение 1.2. Комплексная алгебра A называется **банаховой алгеброй**, если A – банахово пространство по отношению к некоторой норме $\|\cdot\|$, удовлетворяющей **мультипликативному неравенству**
4) $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, $x, y \in A$;
кроме того, в A есть **единичный элемент**
5) $ex = xe = x$, $x \in A$ и $\|e\| = 1$.

Рассмотрим примеры банаховых алгебр.

Пример 1.1. Комплексное линейное пространство $C(K)$ непрерывных на непустом компакте K функций с поточечным умножением и нормой $\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$ является банаховой алгеброй. В частности, если K состоит из конечного числа точек $x_1, \ldots, x_m$, то получим $C(K) \cong \mathbb{C}^m$.

Пример 1.2. Множество $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ линейных ограниченных операторов, определённых на комплексном банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ с умножением – суперпозицией операторов и естественной операторной нормой. Это тоже банахова алгебра. Если $\dim\mathfrak{X} = n$, то получаем алгебру $n \times n$ матриц.

Что же такое функция от матрицы? Начнем отвечать на этот вопрос (а может и вспоминать) с рассмотрения самых простых функций – многочленов.

Пусть $p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k, c_k \in \mathbb{C}$, тогда для всякой матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$ определим

$$p(A) = \sum_{k=0}^{m} c_k A^k, \;\; A^0 = I. \tag{1.1}$$

Легко проверить, что соотношение (1.1) задаёт **гомоморфизм** ϕ алгебры $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ (см. упражнение 1.1.) в алгебру $M_n(\mathbb{C})$, действующий по правилу $\phi(p) = p(A)$.

Под гомоморфизмом мы будем понимать выполнение следующих свойств:
1) $\phi(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = \alpha_1\phi(p_1) + \alpha_2\phi(p_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$;
2) $\phi(p_1 p_2) = \phi(p_1)\phi(p_2)$.

Пример 1.3. Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ – матрица поворота на

90° и $p(x) = x^2 + 3x + 1$. Вычислим $p(A)$. Так как $A^2 = -I$, то $p(A) = -I + 3A + I = 3A$.

Естественным обобщением формулы (1.1) будет формула для `целых` функций f, т.е. аналитических во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (обозначаем $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$.) Такие функции представляются в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ в виде ряда Тейлора $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, который сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте в комплексной плоскости. Полагаем для всякой матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k. \tag{1.2}$$

Проверим, что ряд в правой части формулы (1.2) действительно существует. Ясно, что $f(\|A\|) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \|A\|^k$ – абсолютно сходящийся ряд. Здесь $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$, т.е. операторная норма в алгебре матриц. Тогда последовательность $s_m = \sum_{k=0}^{m} c_k A^k$ будет фундаментальной в банаховой алгебре $M_n(\mathbb{C})$, а следовательно сходящейся. Покажем фундаментальность:

$$\|s_{m_1} - s_{m_2}\| = \|\sum_{k=m_1+1}^{m_2} c_k A^k\| \le \sum_{k=m_1+1}^{m_2} |c_k| \|A^k\| \le \sum_{k=m_1+1}^{m_2} |c_k| \|A\|^k,$$

последнее стремится к нулю при $m_1, m_2 \to \infty$.

Исходя из известных разложений в ряд Тейлора, для всякой матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$ мы можем получить формулы:

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots; \\ \sin A &= A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{A^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots; \\ \cos A &= I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \ldots . \end{aligned} \tag{1.3}$$

Пример 1.4. Пусть опять $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ – матрица поворота на 90°. Вычислим $e^{tA}, t \in \mathbb{C}$. Используя первую формулу из (1.3) и равенство $A^2 = -I$ получим

$$e^{tA} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \ldots + \frac{(tA)^k}{k!} + \ldots = I + tA - \frac{t^2 I}{2!} - \frac{t^3 A}{3!} \ldots ,$$

записывая последнее равенство покомпонентно, получим $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$. В частности, при $t = \pi/2$ получим равенство $e^{\frac{\pi}{2}A} = A$.

1.3. Функции, определённые на спектре матрицы

Пусть $\lambda \in \sigma(A)$, тогда, как известно из линейной алгебры, подпространства

$$\mathfrak{R}_\lambda^h = \ker\left(A - \lambda I\right)^h = \left\{x | (A - \lambda I)^h x = 0\right\},$$

начиная с некоторого номера $h(\lambda) \le \dim H$ стабилизируются, т.е. $\mathfrak{R}_\lambda^h = \mathfrak{R}_\lambda^{h+1}$. Будем называть $h(\lambda)$ **индексом** значения λ.

Индекс можно определить, зная **минимальный многочлен** матрицы A, т.е. многочлен $\mu_A(x)$ минимальной степени, аннулирующий матрицу A. Известно, что

$$\mu_A(x) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (x - \lambda)^{h(\lambda)}. \tag{1.4}$$

Определение 1.3. Функция f **определена на спектре** матрицы A, если

1) $\sigma(A) \subset \mathrm{Dom} f$,

2) существуют конечные производные $f^{(j)}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$ и $0 \le j < h(\lambda)$.

Пусть $J = C^{-1}AC$ – **жорданова нормальная форма** матрицы A, т.е. $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_s$, где J_k – жорданова клетка (размера $n_k \times n_k$): $1 \le k \le s, \quad \lambda \in \sigma(A)$

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & & (0) \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_s \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Определение 1.4. Пусть функция f определена на спектре матрицы A, тогда полагаем

1) $f(A) = Cf(J)C^{-1}$;

2) $f(J) = f(J_1) \oplus f(J_2) \oplus \ldots \oplus f(J_s)$;

$$3)\ f(J_k) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n_k-1)}(\lambda)}{(n_k-1)!} \\ & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n_k-2)}(\lambda)}{(n_k-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ (0) & & & & f(\lambda) \end{bmatrix},$$

$1 \le k \le s, \quad \lambda \in \sigma(A)$.

Легко проверить, что для многочленов определение 1.4 даёт то же значение, что и по формуле (1.1). Покажем, что для функций определённых на спектре значение $f(A)$ не зависит ни от жордановой формы J, ни от матрицы перехода C.

Теорема 1.1 (функциональное исчисление для матриц). Пусть функция f определена на спектре матрицы A и пусть m – степень минимального многочлена

$$\mu_A(x) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (x-\lambda)^{h(\lambda)},$$

тогда

1) существует многочлен $p(x)$ степени $< m$ такой, что $f^{(j)}(\lambda) = p(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A),\ 0 \le j < h(\lambda)$,

2) $p(A) = f(A)$.

Такой многочлен $p(x)$ называется **многочленом Лагранжа-Сильвестра,** или просто, **многочленом Сильвестра.**

Доказательство теоремы 1.1.

Рассмотрим линейное отображение V, действующее из пространства $P_{m-1}[\mathbb{X}]$ многочленов степени, не превосходящей $m-1$, в пространство $\mathbb{C}^m$ по следующему правилу: всякому многочлену $p(x) \in P_{m-1}[\mathbb{X}]$ ставим в соответствие вектор длины m с координатами

$$p(\lambda), p'(\lambda), \dots, p^{(h(\lambda)-1)}(\lambda), \lambda \in \sigma(A).$$

Покажем, что отображение V – биекция. Так как $\dim P_{m-1}[\mathbb{X}] = \dim \mathbb{C}^m = m$, то V – **сюръективное** отображение, или отображение **"на"**. Пусть теперь многочлен $q(x)$ лежит в ядре V. Напомним, что ядро $\ker V = \{p \,|\, V(p) = 0\}$. Тогда $q^{(j)}(\lambda) = 0, \quad 0 \le j < h(\lambda)$ для всех точек $\lambda \in \sigma(A)$. Это означает, что каждое число $\lambda \in \sigma(A)$ является корнем q кратности $h(\lambda)$. Следовательно, мономы $(x-\lambda)^{h(\lambda)}$ делят q, значит и их произведение $\prod_{\lambda\in\sigma(A)}(x-\lambda)^{h(\lambda)} = \mu_A(x)$ делит q. Но так как $\deg \mu_A(x) = m > \deg q$, то $q = 0$. Итак, ядро отображения V нулевое, следовательно, оно **инъективно**, а значит и биективно.

Для вектора, составленного из значений $f^{(j)}(\lambda)$, $\lambda \in \sigma(A)$, $0 \le j < h(\lambda)$ найдётся многочлен p с таким же набором производных. На самом деле мы проинтерполировали функцию f многочленом p. Отсюда, из определения 1.4, следует, что $f(A) = p(A)$. $\square$

Следствие 1.1. Пусть f и g – функции, определённые на спектре матрицы A, тогда

$$(fg)(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

Стоит также отметить, что жордановы клетки, отвечающие собственному значению λ, размером не превышают $h(\lambda)$, поэтому значение функции от матрицы можно определить и не по всем значениям $f^{(j)}(\lambda)$, $\lambda \in \sigma(A)$, $0 \le j < h(\lambda)$.

Пример 1.5. Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$. Используя многочлен Сильвестра, вычислим $\sqrt{A}$.

Найдем характеристический многочлен матрицы:

$$\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}Ax + \det A = (x-4)^2.$$

Тогда минимальный многочлен $\mu_A(x)$ (который делит $\chi_A(x)$) равен также $(x-4)^2$. Итак, получили

$$\sigma(A) = \{4\} \subset \mathrm{dom}\sqrt{x},\ \ h(4) = 2.$$

Тогда многочлен Сильвестра $p(x) = ax + b$ ищется из условий

$$p(4) = 4a + b = \sqrt{4} = 2, \quad p'(4) = a = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Откуда получаем, $\sqrt{A} = p(A) = \frac{1}{4}(A + 4I)$.

Пример 1.6. Пусть $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$. Используя, упражнение 1.5, найдём A^{1000}.

Находим минимальный многочлен $\mu_A(x) = (x-1)^2$. Теперь нужно найти остаток $r(x)$ от деления x^{1000} на $\mu_A(x)$. Раскладывая x^{1000} в полином Тейлора в окрестности 1, получим

$$x^{1000} = 1 + 1000(x-1) + \frac{1000 \cdot 999 (x-1)^2}{2} + \ldots$$
$$\ldots + C_{1000}^{k}(x-1)^k + \ldots + (x-1)^{1000}.$$

Откуда получаем, что $r(x) = 1 + 1000(x-1) = 1000x - 999$ и, следовательно, $A^{1000} = 1000A - 999I = \begin{bmatrix} 5001 & -5000 \\ 5000 & -4999 \end{bmatrix}$.

1.4. Формула через резольвенту

Рассмотрим функцию $r_\lambda(x) = \frac{1}{x-\lambda}, \lambda \notin \sigma(A)$. Покажем, что $r_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda(A)$ – **резольвента** матрицы A. Но это легко вытекает из следствия 1.1 и равенства $r_\lambda(x)(x-\lambda) = 1$.

Из такого представления резольвенты $R_\lambda(A)$ следует, что покомпонентно она является рациональной функцией от λ с полюсами в спектре матрицы A. Вне полюсов мы можем разложить её в ряд Лорана. Сделаем это следующим образом. Разложим резольвенту $R_\lambda(A)$ в ряд Неймана вне круга $|\lambda| > \max\limits_{0 \le i \le n} \{|\lambda_i| \in \sigma(A)\} = r$:

$$R_\lambda(A) = -\frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{1}{\lambda}A + \frac{1}{\lambda^2}A^2 + \dots\right). \tag{1.5}$$

Формула (1.5) по-компонентно и есть разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечности, но тогда коэффициенты такого разложения находятся с помощью контурного интегрирования:

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)d\lambda = I; \\ -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=r} \lambda R_\lambda(A)d\lambda = A; \\ -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=r} \lambda^k R_\lambda(A)d\lambda = A^k, \quad k \ge 0, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где контур $|\lambda| = r$ проходится в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки) и, вообще говоря, он может быть заменён на любой контур $\gamma(A)$, содержащий внутри все собственные значения матрицы A.

Отсюда следует, что для любой аналитической на спектре матрицы A (точнее на некоторой области, содержащей спектр)$f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ справедлива формула:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma(A)} f(\lambda)R_\lambda(A)d\lambda = f(A). \tag{1.7}$$

Действительно, всякая $f \in \mathcal{A}(\sigma(A))$ раскладывается в ряд Тейлора $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, равномерно сходящегося на каждом компакте (в том числе и на компакте $\gamma(A)$). Тогда просуммировав все формулы (1.6), умноженные на c_k, получим формулу (1.7).

Заметим, что формула (1.7) – это обобщение на матрицы известной формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma(A)}\frac{f(\lambda)}{\lambda - x}d\lambda = f(x).$$

Пример 1.7. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $f(x) = \ln x$. Здесь мы выбираем нулевую ветвь логарифма, т.е. $\ln 1 = 0$. Найдём $\ln A$.

Находим спектр и резольвенту:

$$\sigma(A) = \{-i,\ i\},\quad R_\lambda(A) = \frac{1}{1+\lambda^2}\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix},\ \lambda \notin \sigma(A).$$

Резольвенту можем находить хоть обращая матрицу $A - \lambda I$, хоть взяв функцию $r_\lambda(A)$. Ясно, что $\ln x$ – аналитическая функция на спектре, поэтому можем воспользоваться формулой (1.7).

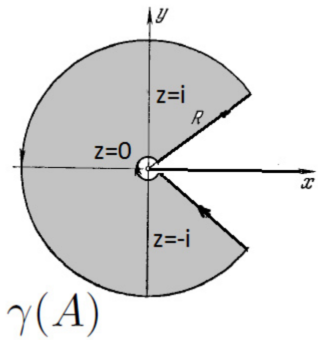


Рис. 1. Контур $\gamma(A)$, содержащий спектр A

Применяя теорему о вычетах, находим

$$\begin{aligned}\ln A &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma(A)}\ln\lambda R_\lambda(A)d\lambda = \\ &= -\mathrm{Res}_{\lambda=i}\ln\lambda R_\lambda(A) - \mathrm{Res}_{\lambda=-i}\ln\lambda R_\lambda(A) = \\ &= -\ln i\left[R_\lambda(A)\cdot(\lambda-i)\right]_{\lambda=i}(A) - \ln(-i)\left[R_\lambda(A)\cdot(\lambda+i)\right]_{\lambda=-i} = \\ &= -\frac{\pi}{4}\begin{bmatrix} 2-4i & -2 \\ 4 & -2-4i \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Упражнения

1.1. Проверьте, что множество $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ многочленов с комплексными коэффициентами образуют комплексную алгебру. Операция умножения определяется поточечно.

1.2. Показать, что умножение в банаховой алгебре – это непрерывная операция, т.е. если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $x_n y_n \to xy$.

1.3. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ найти $\sin A$ и $\cos A$ и проверить, верны ли соотношения

$$\sin^2 A + \cos^2 A = I, \quad e^{iA} = \cos A + i \sin A?$$

1.4. Вычислить корень из матриц Паули (выбирая для корня одну из ветвей).

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.5. Пусть A – матрица и f – многочлен. Показать, что многочлен Сильвестра для f и A является остатком от деления f на минимальный многочлен матрицы A, т.е. если $f(x) = \mu_A(x)g(x) + r(x)$, то $r(x)$ – многочлен Сильвестра.

1.6. Пусть A – матрица из примера 1.7. Вычислить $\ln A$ через многочлен Сильвестра.

Лекция № 2. Функции от ограниченных эрмитовых операторов

2.1. Сопряжение относительно скалярного произведения

Определение 2.1. Пусть A – комплексная алгебра, тогда отображение $x \mapsto x^*$ алгебры A в себя называется **инволюцией**, если для любых $x, y \in A$ и $\alpha \in \mathbb{C}$

1) $(x+y)^* = x^* + y^*$;
2) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$;
3) $(xy)^* = y^* x^*$;
4) $x^{**} = x$.

Пример 2.1. В алгебре матриц $M_n(\mathbb{C})$ инволюция вам известна: $A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}}$ для всякой матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Пример 2.2. В алгебре $C(K)$ инволюцией будет обычное комплексное сопряжение: $f^* = \overline{f}$ для всякой $f \in C(K)$.

Определение 2.2. Банахова алгебра A с инволюцией $*$, обладающей свойством

$$\|xx^*\| = \|x\|^2, \ x \in A$$

называется $\mathbf{B}^*$-алгеброй.

Пример 2.3. Банахова алгебра $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H будет $\mathbf{B}^*$-алгеброй с инволюцией, задаваемой равенством:

$$(Ax, y) = (x, A^* y), x, y \in H, A \in \mathfrak{B}(\mathrm{H}). \tag{2.1}$$

Существование и ограниченность оператора A^* следует из теоремы Рисса о представлении ограниченного линейного функционала в гильбертовом пространстве и, кроме того, $\|A\| = \|A^*\|$.

Так как $\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (x, AA^*x) \leq \|AA^*\|\|x\|^2$, то $\|A\|^2 \leq \|AA^*\|$. С другой стороны $\|AA^*\| \leq \|A\|\|A^*\| = \|A\|^2$. Тем самым мы проверили, что $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$ действительно $\mathbf{B}^*$-алгебра с инволюцией (2.1).

Пример 2.4. В алгебре $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$ можно определить, например, такую инволюцию $\#$. Пусть $Q \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ такой оператор, что $Q^* = Q$ и Q имеет ограниченный обратный, тогда полагаем

$$A^{\#} = Q^{-1}A^*Q, \ A \in \mathfrak{B}(\mathrm{H}).$$

В общем случае алгебра $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$ не является $\mathbf{B}^*$-алгеброй с такой инволюцией. Действительно, пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(1,2)$ и для всякой $f \in \mathrm{H}$ определим

$$Qf(x) = xf(x), \ Af(x) = x\int_1^2 f(y)\,dy,$$

т.е. Q – оператор умножения на x, а оператор A – интегральный с ядром $k(x,y) = xy$. Ясно, что Q – самосопряжен и обратим, и Q^{-1} – оператор умножения на x^{-1}. Тогда для всякой $f \in \mathrm{H}$

$$\begin{aligned} AA^{\#}f(x) &= AQ^{-1}A^*Qf(x) = AQ^{-1}A^*[xf(x)] \\ &= AQ^{-1}\left[x\int_1^2 yf(y)\,dy\right] = \left(\int_1^2 yf(y)\,dy\right)AQ^{-1}[x] \\ &= \left(\int_1^2 yf(y)\,dy\right)A1 = x\int_1^2 yf(y)\,dy = Af. \end{aligned}$$

Тогда получается, что $\|AA^{\#}\| = \|A\| \neq \|A\|^2$, так как $\|A\|^2 = \int_1^2\int_1^2 k^2(x,y)dxdy = \frac{49}{9} \neq 1$.

Вспомним теперь важнейшие подмножества ограниченных операторов, связанных с инволюцией $*$.

Определение 2.3. Оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ называется **нормальным**, если он перестановочен со своим сопряжённым, или иначе **коммутатор** $[A, A^*] := AA^* - A^*A = 0$.

Нормальными операторами будут, в частности **самосопряженные** операторы, т.е удовлетворяющие равенству $A = A^*$, а также **унитарные**, т.е. удовлетворяющие равенству $A^{-1} = A^*$. Самосопряжённые операторы часто называют **эрмитовыми** или **симметрическими**.

Хорошо известно, что всякий оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ можно представить в виде

$$A = \mathrm{Re}A + i\mathrm{Im}A,$$

где $\mathrm{Re}A = \frac{A+A^*}{2}$, $\mathrm{Im}A = \frac{A-A^*}{2i}$ являются эрмитовыми операторами. Легко проверить, что в терминах этих операторов нормальность, самосопряжённость и унитарность переписываются в виде:

A – нормален $\Leftrightarrow [\mathrm{Re}A, \mathrm{Im}A] = 0$;

A – симметричен $\Leftrightarrow A = \mathrm{Re}A, \ \mathrm{Im}A = 0$;

A – унитарен $\Leftrightarrow (\mathrm{Re}A)^2 + (\mathrm{Im}A)^2 = I$.

Здесь чётко прослеживается аналогия с комплексными числами, о которой мы говорили на первой лекции. Симметрические операторы – это обобщение вещественных чисел (поэтому математики называют их иногда **вещественными**), унитарные операторы соответствуют точкам комплексной плоскости, лежащим на единичной окружности с центром в нуле, а нормальные операторы – естественное обобщение самих комплексных чисел.

Пример 2.5. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(a, b)$. Примером самосопряжённого оператора может служить интегральный оператор с симметричным ядром:

$$Af(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy,\ \ f(x) \in \mathrm{H},$$

где $k(x,y) = \overline{k(y,x)} \in \mathrm{H} \times \mathrm{H}$.

Унитарным оператором будет оператор умножения вида:

$$Af(x) = e^{ig(x)}f(x),\ \ f(x) \in \mathrm{H},$$

где $g(x)$ – произвольная вещественная функция.

Другим примером унитарного оператора может служить преобразование Фурье – Планшереля $\mathfrak{F}_{\pm}$ в пространстве $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Для всех быстроубывающих функций $\mathfrak{J}(\mathbb{R})$ оно определяется известным вам образом:

$$\mathfrak{F}_{\pm}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mp ixy} f(y)\,dy, \quad f \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}).$$

Всякая произвольная $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ может быть представлена как предел в среднем квадратичном последовательности быстроубывающих функций f_n, тогда определяют

$$\mathfrak{F}_{\pm}[f](x) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{F}_{\pm}[f_n](x).$$

Все свойства преобразования Фурье сохраняются, из них и следует унитарность этого преобразования.

2.2. Теорема о перестановочности

Важность инволюции $*$ в алгебре $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$ подтверждается следующей **теоремой о перестановочности**.

Теорема 2.1 (Фуглид-Путнам-Розенблюм). Пусть $M, N, T \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$, причём M и N – нормальны. Тогда, если $MT = TN$, то и $M^*T = TN^*$.

Доказательство теоремы 2.1.

Сначала заметим, что многочлены и целые функции можно определить для любого ограниченного оператора, аналогично как мы определяли для матриц по формулам (1.1) и (1.2).

Пусть $S \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ и $V = S - S^*$. Покажем, что $Q = e^V$ – унитарный оператор. Действительно, так как

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n,$$

то

$$Q^* = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n \right)^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (V^n)^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (V^*)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-V)^n = e^{-V}.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью инволюции $*$ (упражнение 2.2), свойством 3) определения 2.1 и равенством $V^* = S^* - S = -V$. Тогда

$$QQ^* = e^V e^{-V} = e^{V-V} = e^0 = I.$$

Второе равенство справедливо благодаря тому, что операторы V и $-V$ коммутируют (см. упражнение 2.5). Таким образом мы проверили, что $Q^* = Q^{-1}$. Так как норма унитарного оператора равна единице, то мы получаем для всякого $S \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$

$$\|e^{S-S^*}\| = 1. \tag{2.2}$$

Теперь, так как $MT = TN$, то по индукции легко заключить, что $M^k T = TN^k, k = 1, 2, \ldots$ Следовательно, получаем равенство $e^M T = Te^N$, или иначе $T = e^{-M} T e^N$.

Пусть $U_1 = e^{M^* - M}$ и $U_2 = e^{N - N^*}$. Так как M и N – нормальны, то получаем

$$e^{M^*} T e^{-N^*} = e^{M^*} e^{-M} T e^N e^{-N^*} = e^{M^* - M} T e^{N - N^*} = U_1 T U_2.$$

По формуле (2.2) $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$, тогда

$$\|e^{M^*} T e^{-N^*}\| \le \|T\|.$$

Рассматривая вместо M и N операторы $\overline{\lambda} M$ и $\overline{\lambda} N$, $\lambda \in \mathbb{C}$, получим

$$\|e^{\lambda M^*} T e^{-\lambda N^*}\| \le \|T\|.$$

Зафиксируем произвольные $x, y \in \mathrm{H}$ и рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = (e^{\lambda M^*} T e^{-\lambda N^*} x, y).$$

Разлагая экспоненты в ряд, мы получим, что f – целая функция, удовлетворяющая неравенству

$$|f(\lambda)| \le \|e^{\lambda M^*} T e^{-\lambda N^*}\| \|x\| \|y\| \le \|T\| \|x\| \|y\|,$$

т.е. она ограничена. Тогда по теореме Лиувилля она константа. Откуда получаем

$$(e^{\lambda M^*} T e^{-\lambda N^*} x, y) = (Tx, y).$$

Положим $x = e^{\lambda N^*} y$ и разложим экспоненты в ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} ((M^*)^n T y, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (T(N^*)^n y, y).$$

Сравнивая коэффициенты при λ, заключаем, что для произвольного $y \in \mathrm{H}$ верно равенство $(M^* T y, y) = (T N^* y, y)$. Откуда легко следует утверждение теоремы. $\square$

Отметим, что для инволюции # из примера 2.4 теорема о перестановочности не справедлива (см. упражнение 2.4).

2.3. Исчисление эрмитовых операторов

Важность самосопряжённых операторов заключается в том, что в квантовой теории всякой наблюдаемой величине соответствует некоторый самосопряжённый оператор (это один из постулатов теории.) Тогда функциям от наблюдаемых будут соответствовать функции от операторов. Это является подоплекой для того, чтобы научиться считать функции от эрмитовых операторов.

Как мы уже отметили, многочлены и целые функции могут быть определены для любого ограниченного оператора по формулам, аналогичным (1.1) и (1.2). Это является решающим значением для остальной теории.

Теорема 2.2 (Функциональное исчисление для непрерывных функций). Пусть $A \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ и $A = A^*$. Тогда существует единственное линейное отображение $\phi : C(\sigma(A)) \to \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ со следующими свойствами:

a) ϕ – $*$-гомоморфизм, т. е.

$$\phi(fg) = \phi(f)\phi(g), \quad \phi(1) = I, \quad \phi(\overline{f}) = \phi(f)^*;$$

б) $\phi(x) = A$;
в) ϕ – непрерывно, более того $\|\phi(f)\| = \|f\|_\infty$;
г) если для некоторого $v \in \mathrm{H}$ $\;Av = \lambda v$, то $\phi(f)v = f(\lambda)v$;
д) $\sigma(\phi(f)) = \{f(\lambda)\,|\,\lambda \in \sigma(A)\}$;
е) если $f \geq 0$, то $\phi(f) \geq 0$;
ж) если $[A, B] = 0$, то $[\phi(f), B] = 0$.
В дальнейшем для большей ясности мы будем обозначать $\phi(f) = f(A)$.

Перед доказательством теоремы 2.2 рассмотрим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. Пусть $A \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ и задан многочлен $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ тогда

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda)\,|\,\lambda \in \sigma(A)\}.$$

Доказательство леммы 2.1.

Пусть $\lambda \in \sigma(A)$, тогда по теореме Безу найдётся многочлен $q(x)$ такой, что

$$p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)q(x).$$

Откуда следует, что $p(A) - p(\lambda)I = (A - \lambda I)q(A)$. Так как $\lambda \in \sigma(A)$, то обратный к $A - \lambda I$ либо не существует, либо определён не на всём пространстве, а значит то же самое можно сказать и про обратный к оператору $p(A) - p(\lambda)I$. Следовательно, по определению $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$.

Обратно, пусть $\mu \in \sigma(p(A))$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корни многочлена $p(x) - \mu$, т.е.

$$p(x) - \mu = a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_n).$$

Если все $\lambda_i, i = 1, ..., n$ не лежат в $\sigma(A)$, то существует оператор

$$(p(A) - \mu I)^{-1} = a^{-1}(A - \lambda_1 I)^{-1}(A - \lambda_2 I)^{-1}\ldots(A - \lambda_n I)^{-1},$$

чего не может быть. Значит найдётся $\lambda_k \in \sigma(A)$ и при этом $p(\lambda_k) = \mu$.
□

Лемма 2.2. Пусть $A \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ и $A = A^*$, тогда спектральный радиус $r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ будет совпадать с нормой $\|A\|$.

Доказательство леммы 2.2.

Хорошо известно, что для всякого $T \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ спектральный радиус можно вычислить по формуле

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Следовательно, нам нужно показать, что для $A = A^*$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \|A\|.$$

Так как $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$ – B^*-алгебра, то $\|A^2\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$. По индукции заключаем, что $\|A^{2k}\| = \|A\|^{2k}$. И тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\|A^{2k}\|} = \|A\|. \quad \square$$

Лемма 2.3. Пусть $A \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$, $A = A^*$ и $p(x)$ – многочлен, тогда

$$\|p(A)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p(\lambda)|.$$

Доказательство леммы 2.3.

$$\begin{aligned}\|p(A)\|^2 &= \|p(A)^*p(A)\| = \|\overline{p}(A)p(A)\| = \|\overline{p}p(A)\| = \\ &= \sup_{\lambda\in\sigma(p\overline{p}(A))} |\lambda| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p\overline{p}(\lambda)| = \\ &= \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p(\lambda)\overline{p}(\lambda)| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p(\lambda)|^2 = \left(\sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p(\lambda)|\right)^2.\end{aligned}$$

Четвертое равенство следует из леммы 2.2, а пятое – из леммы 2.1. $\square$

Перейдем непосредственно к доказательству самой теоремы.

Доказательство теоремы 2.2.

Для всякого многочлена $p(x)$ положим $\phi(p) = p(A)$. Ясно, что свойства а) и б) выполняются. Свойства в) и д) – это утверждения леммы 2.1 и леммы 2.3. Свойства г) и ж) проверяются без труда, исходя из определения $p(A)$. Свойство е) мы докажем для всякой непрерывной функции $f \in C(\sigma(A))$, так как оно следует из а).

Напомним, что $A \geq 0$ тогда и только тогда, когда $(Ax, x) \geq 0$. Для эрмитова оператора A последнее будет выполняться, когда $A = B^2$, где B – эрмитов. Пусть функция $f \geq 0$, тогда найдётся функция g такая, что $f = g^2$. Тогда $\phi(f) = \phi(g^2) = \phi(g)^2$. Кроме того, так как $g = \sqrt{f}$, то

$$\phi(g)^* = \phi(\sqrt{f})^* = \phi(\overline{\sqrt{f}}) = \phi(\sqrt{f}) = \phi(g).$$

Тем самым показали, что свойство е) выполняется.

Для многочленов отображение ϕ построено и оно удовлетворяет всем свойствам. По теореме Стоуна-Вейерштрасса множество многочленов плотно в $C(\sigma(A))$, следовательно, замыкая в $\mathfrak{B}(\mathrm{H})$ множество $\{\phi(p)\,|\,p \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]\}$, ввиду свойства в) получим значение $\phi(f)$ для всякой $f \in C(\sigma(A))$. Единственность ϕ следует из того, что оно единственно определятся на многочленах.

Ясно, что для всякой $f \in C(\sigma(A))$ выполняются свойства а) – ж). Все они верны благодаря непрерывности ϕ. Свойство е) уже проверили. Покажем, например, ещё ж).

Пусть многочлены $p_n(x)$ приближают функцию $f(x)$, тогда так как $[p_n(A), B] = 0$, то

$$0 = \|[p_n(A), B]\| \to \|[f(A), B]\|,$$

откуда $[f(A), B] = 0$. Все остальные доказываются аналогично (упражнение 2.7). □

Следствие 2.1 (Теорема Гельфанда-Наймарка). Множество

$$\mathrm{im}\phi = \{f(A) \,|\, f \in C(\sigma(A))\}$$

– это замкнутая коммутативная алгебра, инвариантная относительно сопряжения (C*-алгебра). Она является наименьшей замкнутой алгеброй, порождённой A.

Пример 2.6. Покажем, что если $A \geq 0$, то $|A| = A$. Действительно, пусть многочлены $p_n(x)$ равномерно приближают $|x|$ на спектре $\sigma(A)$. Так спектр вещественного оператора вещественный, то из положительности оператора A следует, что $\sigma(A) \subseteq [0, \infty)$. А на этом множестве $|x| = x$.

Теперь мы можем определять непрерывные функции от самосопряженных операторов, зная приближение этих функций многочленами на спектре этих операторов. Однако, можно рассмотреть более широкий класс функций.

Определение 2.4. Вещественная функция f называется **борелевой**, или **борелевской**, если для всякого отрезка $[a, b]$ множество $f^{-1}[a, b]$ является борелевым (борелевским) множеством, т.е. лежит в наименьшей σ-алгебре множеств, содержащей все возможные отрезки. Комплексная функция – борелевская, если её вещественная и мнимая части борелевские. Будем обозначать множество ограниченных борелевских функций через $B(K)$, где K – некоторый компакт.

Известно, что всякая борелевская функция может быть представлена как поточечный предел непрерывных функций. Это является важным моментом для доказательства следующей теоремы, для которой мы приведём лишь формулировку.

Теорема 2.3 (Функциональное исчисление для борелевских функций). Пусть $A \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ и $A = A^*$. Тогда существует единственное линейное отображение $\widehat{\phi} : B(\sigma(A)) \to \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ со следующими свойствами:

а) $\widehat{\phi}$ – $*$-гомоморфизм;.

б) $\widehat{\phi}(x) = A$;

в) $\widehat{\phi}$ – непрерывно, т.е. $\|\widehat{\phi}(f)\| \le \|f\|_\infty$;

г) если для некоторого $v \in \mathrm{H}$ $\;Av = \lambda v$, то $\widehat{\phi}(f)v = f(\lambda)v$;

д) если $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in \sigma(A)$ и $\sup_{x,n} |f_n(x)| \le C$, то для любого $v \in \mathrm{H}$ $\widehat{\phi}(f_n)v \to \widehat{\phi}(f)v$;

е) если $f \ge 0$, то $\widehat{\phi}(f) \ge 0$;

ж) если $[A, B] = 0$, то $[\widehat{\phi}(f), B] = 0$.

Отображение $\widehat{\phi}$ расширяет ϕ. В этом случае множество

$$\mathrm{im}\widehat{\phi} = \{f(A) \,|\, f \in B(\sigma(A))\}$$

– это слабо замкнутая коммутативная алгебра, инвариантная относительно сопряжения (W*-алгебра, или алгебра фон Неймана).

Пример 2.7. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0,1)$, $a(x)$ – вещественная ограниченная функция, тогда рассмотрим оператор

$$Af(x) = a(x)f(x), \quad f \in \mathrm{L}_2(0,1)$$

умножения на функцию $a(x)$. Хорошо известно, что $\sigma(A) = \mathrm{im}a$, тогда для любой ограниченной борелевской функции $G \in B(\sigma(A))$ оператор $G(A)$ есть оператор умножения на функцию $G(a(x))$:

$$G(A)f(x) = G(a(x))f(x), \quad f \in \mathrm{L}_2(0,1). \tag{2.3}$$

Это сразу следует из теоремы 2.3. В частности, по формуле (2.3) можно определить $\mathrm{sgn}A$ и $\theta(A)$ – "знак оператора"и "функция Хевисайда от оператора".

Упражнения

2.1. Показать, что в **B***-алгебре выполняется равенство $\|x\| = \|x^*\|$.

2.2. Показать, что в **B***-алгебре инволюция непрерывна, т.е. если $x_n \to x$, то $x_n^* \to x^*$.

2.3. Показать, что отображение $\# : \mathfrak{B}(\mathrm{H}) \to \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ из примера 2.4 действительно инволюция.

2.4. Пусть $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S = E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T = E_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. В алгебре матриц рассмотрим инволюцию $\#$, как предыдущем упражнении. Показать, что

$$[S,T] = 0,\ [S^\#, S] = 0,\ [T^\#, T] = 0, \quad \text{но} \quad [S, T^\#] \ne 0.$$

2.5. Пусть $A, B \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ такие, что $[A, B] = 0$. Показать, что $e^{A+B} = e^A e^B$.

2.6. Используя теорему о перестановочности, показать, что если $[A, A^*] = 0,\ [B, B^*] = 0$ и $[A, B] = 0$, то $[AB, (AB)^*] = 0$.

2.7. Проверить выполнение оставшихся свойств а) – д) теоремы 2.2.

Лекция № 3. Неограниченные операторы

3.1. Определение неограниченного оператора

Задать оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ – это значит выяснить, какова его область определения $\mathrm{Dom}A$ и правило по которому он действует. Отсюда следует, что если операторы задаются одинаковой формулой, но с разными областями определения, то это разные операторы.

Если не оговорено противное, то область определения линейного оператора будем считать линейным подпространством, всюду плотным в H. Напомним, что **ограниченным** оператором A мы считаем, определённый во всём H оператор, для которого

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in \mathrm{H}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \infty.$$

Определение 3.1. Оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ называется **неограниченным**, если

$$\sup_{0 \neq x \in \mathrm{Dom}A} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \infty. \tag{3.1}$$

Пример 3.1. Пусть $\mathrm{H}_1 = \mathrm{L}_2(0,1)$ и $\mathrm{H}_2 = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим **операторы координаты**

$$A_k : \mathrm{H}_k \to \mathrm{H}_k, \;\; k = 1, 2,$$

действующие по правилу

$$A_k f_k(x) = x f_k(x), \quad f_k(x) \in \mathrm{Dom}A_k, \;\; k = 1, 2,$$

где $\mathrm{Dom}A_1 = \mathrm{H}_1$, а $\mathrm{Dom}A_2 = \left\{ f_2 \in \mathrm{H}_2 \mid \int_{\mathbb{R}} x^2 |f_2(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$.

Ясно, что $A_1 \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ и $\|A_1\| = 1$. Покажем, что A_2 – неограниченный оператор. Отметим, что его область определения содержит финитные функции, поэтому всюду плотна в H_2. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \theta(n^2 - x^2)$, где θ – функция Хевисайда (равна нулю на отрицательных числах и единице на неотрицательных.) Ясно, что $f_n(x) \in \mathrm{Dom}A_2$:

$$\|A_2 f_n(x)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_n^2(x) \, dx = \int_{-n}^{n} x^2 \, dx = \frac{2n^3}{3},$$

тогда

$$\sup_{0 \neq f \in \mathrm{Dom}A_2} \frac{\|A_2 f\|}{\|f\|} \geq \lim_{n \to \infty} \frac{\|A_2 f_n\|}{\|f_n\|} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{2n^3}{3}}{2n} \right)^{1/2} = \infty.$$

Пример 3.2. Пусть $\mathrm{H}_1 = \mathrm{L}_2(0,1)$ и $\mathrm{H}_2 = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим операторы импульса

$$A_k : \mathrm{H}_k \to \mathrm{H}_k,\ k = 1, 2,$$

действующие по правилу

$$A_k f_k(x) = i\frac{d}{dx} f_k(x), \quad f_k(x) \in \mathrm{Dom}A_k,\ k = 1, 2,$$

где $\mathrm{Dom}A_1 = C^\infty(0,1)$, а

$$\mathrm{Dom}A_2 = \{f_2 \in \mathrm{H}_2 \ : \ f'(x) \text{ существует п.в. и } \quad f' \in \mathrm{H}_2\}.$$

Покажем, что оба оператора неограничены. Пусть $f_n(x) = x^n$, тогда

$$\sup_{0\neq f\in \mathrm{Dom}A_1} \frac{\|A_1 f\|}{\|f\|} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\|A_1 f_n\|}{\|f_n\|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n^2}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}}\right)^{1/2} = \infty.$$

Возьмём теперь $f(x) = x^n \theta(1 - x^2)$, тогда точно также

$$\sup_{0\neq f\in \mathrm{Dom}A_2} \frac{\|A_2 f\|}{\|f\|} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\|A_2 f_n\|}{\|f_n\|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n^2}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}}\right)^{1/2} = \infty.$$

Пример 3.3. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ и оператор

$$Af(x) = -f''(x) + x^2 f(x), \quad f \in \mathrm{Dom}A,$$

где $\mathrm{Dom}A = \mathfrak{J}(\mathbb{R})$ – быстроубывающие функции. Тогда этот оператор неограничен, так как у него есть собственные функции $\phi_n \in \mathfrak{J}(\mathbb{R})$ с собственными значениями $2n + 1$:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) \phi_n(x) = (2n + 1)\phi_n(x).$$

Они называются функциями Эрмита, или волновыми функциями гармонического осциллятора. Ясно, что этого достаточно, чтобы выполнялось соотношение (3.1)

3.2. Замыкание оператора

Определение 3.2. **График** $\Gamma(T)$ линейного оператора T – это множество пар

$$\{< f, Tf >, \ f \in \mathrm{Dom}T\}.$$

Ясно, что $\Gamma(T) \subset \mathrm{H} \times \mathrm{H}$, где $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ – прямое произведение гильбертовых пространств, которое также является гильбертовым пространством. Скалярное произведение в нём задаётся формулой (упражнение 3.1):

$$(< f_1, f_2 >, < g_1, g_2 >)_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}} = (f_1, g_1)_{\mathrm{H}} + (f_2, g_2)_{\mathrm{H}}. \tag{3.2}$$

В дальнейшем индексы у скалярных произведений мы будем опускать.

Определение 3.3. Оператор T называется **замкнутым**, если его график $\Gamma(T)$ – это замкнутое в $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ множество.

Замкнутость оператора в точности означает, что если последовательность $f_n \in \mathrm{Dom}T$ сходится к $f \in \mathrm{Dom}T$ и Tf_n также сходится, то она обязательно сходится к Tf.

Ввиду последней переформулировки, ясно, что из ограниченности оператора следует его замкнутость. Обратно, также верно: замкнутый всюду определённый оператор будет ограниченным. Это утверждение классической **теоремы о замкнутом графике**.

Определение 3.4. Пусть $T, T_1 \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$. Тогда оператор T_1 называется **расширением** оператора T, если $\Gamma(T_1) \supset \Gamma(T)$. В этом случае пишут $T_1 \supset T$.

Иначе, это можно записать следующим образом:

$$T_1 \supset T \Leftrightarrow \Gamma(T_1) \supset \Gamma(T) \Leftrightarrow \mathrm{Dom}T_1 \supset \mathrm{Dom}T \ \text{ и } \ T_1 f = Tf, \quad f \in \mathrm{Dom}T.$$

Определение 3.5. Пусть $T \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ имеет замкнутое расширение, тогда говорят, что он **замыкаем**, или **допускает замыкание**. Наименьшее (по включению) замкнутое расширение называется **замыканием** T и обозначается $\overline{T}$.

Ясно, что для замкнутого оператора $T = \overline{T}$. Неограниченный не замкнутый оператор может быть замыкаем, а может и не быть. Однако, если он замыкаем, то его замыкание обладает следующим свойством.

Теорема 3.1(О графике замыкания). Если $T \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ замыкаем, то $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $S \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ – какое-нибудь замкнутое расширение T. Тогда так как $\Gamma(S) \supset \Gamma(T)$, то $\Gamma(S) = \overline{\Gamma(S)} \supset \overline{\Gamma(T)}$.

Рассмотрим оператор R с областью определения

$$\mathrm{Dom}R = \left\{ g \mid < g, f > \in \overline{\Gamma(T)} \text{ для некоторого } \ f \right\}$$

и $Rg = f$, где f тот самый, для которого $< g, f > \in \overline{\Gamma(T)}$. Покажем, что $R = \overline{T}$. Для этого сначала заметим, что он корректно определён. Предположим, что найдутся две пары

$$< g, f_1 >, < g, f_2 > \in \overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S),$$

тогда ввиду линейности графика $< 0, f_1 - f_2 > \in \Gamma(S)$, т. е. $0 = S(0) = f_1 - f_2$, или $f_1 = f_2$.

Ясно, что $\Gamma(R) = \overline{\Gamma(T)}$ – замкнутое в $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ множество, т. е. R – замкнутый оператор. Кроме того R расширяет T, так как $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(R) \supset \Gamma(T)$. Более того, для любого другого замкнутого расширения S имеем $\Gamma(S) = \overline{\Gamma(S)} \supset \overline{\Gamma(T)} = \Gamma(R)$, т. е. R – наименьшее замкнутое расширение. $\square$

В теореме 3.1 показано, в частности, как строить замыкания для операторов, допускающих замыкания. Рассмотрим теперь примеры, в которых выясним введённые выше понятия.

Пример 3.4. Рассмотрим пример оператора, не допускающего замыкания. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0,1)$ и $Tf = f'$, где

$$\mathrm{Dom}T = \{f \in C[0,1] : \quad f' \text{ определена п.в. и непрерывна п.в.}\}.$$

Найдём две последовательности непрерывных функций f_n и g_n из области определения оператора T, которые сходятся к одному пределу, однако их производные будут сходится к разным пределам.

Для начала вспомним (или узнаем), что такое **функция, или лестница, Кантора**. Эта функция определена на отрезке $[0,1]$, и она строится следующим индуктивным образом. Мы делим отрезок $[0,1]$ на три равных отрезка $[0,1/3], [1/3,2/3], [2/3,1]$. На серединном отрезке $[1/3,2/3]$ полагаем значение функции равным $1/2$. С оставшимися двумя отрезками проделываем то же самое: делим их на три равных отрезка, берём середины, и на них определяем значение функции как $1/4$ и $3/4$ соответственно. Дальше проделываем то же самое по индукции.

По теореме Челиса функция Кантора $\mathfrak{K}$ определяется следующими условиями:

1) $\mathfrak{K}$ монотонно не убывающая на отрезке $[0,1]$ функция;
2) $\mathfrak{K}(0) = 0$;
3) $\mathfrak{K}(1-x) = 1 - \mathfrak{K}(x)$;
4) $\mathfrak{K}(x/3) = \mathfrak{K}(x)/2$.

Хорошо известно, что $\mathfrak{K}(x)$ почти всюду дифференцируема и её производная равна почти всюду нулю. Теперь построим последовательность $f_n(x)$. Разделим единичный квадрат $[0,1]^2$ на n^2 малых квадратов и в диагональные квадратики вставим графики сжатых в n раз функций Кантора (рис. 2). Тогда f_n также почти всюду дифференцируема и её производная почти всюду равна нулю. Покажем, что f_n сходится к x. Действительно, из графиков видно, что

$$\|f_n(x) - x\| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - x| < \frac{1}{n}.$$

Итак, если взять $g_n = x$, то получим, что f_n и g_n сходятся к одному пределу x, но $Tf_n = 0$, а $Tg_n = 1$.

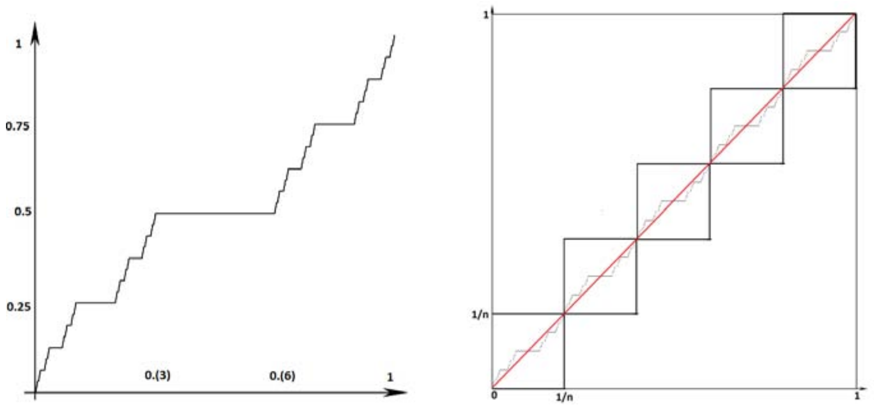


Рис. 2. Лестница Кантора и функция f_n для $n = 5$

Пример 3.5. Построим ещё один пример не замыкаемого оператора. Однако, теперь покажем, что замыкание его графика не будет графиком ни какого оператора.

Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(-\pi, \pi)$. В качестве области определения рассмотрим множество

$$\mathrm{Dom}T = \mathrm{lin}\left\{\mathrm{sgn}x, e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\right\},$$

т. е. множество конечных линейных комбинаций функций e^{inx} и $\mathrm{sgn}x$. Тогда оператор определим как

$$T\left(a_0\mathrm{sgn}x + \sum_{k=1}^{N} a_n e^{in_k x}\right) = a_0\mathrm{sgn}x.$$

Ясно, что это линейный оператор. Покажем, что в замыкании его графика лежит точка $< 0, \mathrm{sgn}x >$, чего нам будет достаточно (см. упражнение 3.3.).

Действительно, так как $\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ – гильбертов базис в H, то sgn$x$ раскладывается по этому базису (в ряд Фурье):

$$\mathrm{sgn}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}(\mathrm{sgn}x, e^{inx}) = \frac{i((-1)^{n+1}+1)}{n\pi}.$$

Тогда, ясно что пара $<\mathrm{sgn}x, \mathrm{sgn}x>\in \Gamma(T)$ и так как пары $<\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, 0>\in \Gamma(T)$, то $<\mathrm{sgn}x, 0>\in \overline{\Gamma(T)}$. Ну тогда и пара $<0, \mathrm{sgn}x>\in \overline{\Gamma(T)}$.

Пример 3.6. Рассмотрим пример оператора, который имеет замкнутые расширения.

Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Dom}T_1 = C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathrm{Dom}T_2 = C_0^1(\mathbb{R})$. Положим

$$T_k f = if', \quad f \in \mathrm{Dom}T_k, \quad k = 1, 2.$$

Ясно, что T_2 – расширение T_1, т. е. $\Gamma(T_2) \supset \Gamma(T_1)$. Покажем, что $\overline{\Gamma(T_1)} \supset \Gamma(T_2)$.

Пусть положительная функция $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такая, что

$$\mathrm{supp}\omega = [-1, 1] \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}} \omega(x)\, dx = 1.$$

Примером такой функции является хорошо известная "шапочка Соболева". Для всякого $\varepsilon > 0$ положим $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\omega(\frac{x}{\varepsilon})$. Покажем, что для всякой $\varphi \in \mathrm{Dom}T_2$ найдётся $\varphi_\varepsilon \in \mathrm{Dom}T_1$, такая, что

$$\varphi_\varepsilon \to \varphi, \quad \varphi'_\varepsilon \to \varphi' \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Пусть

$$\varphi_\varepsilon(x) = (\omega_\varepsilon * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(x-t)\varphi(t)\, dt,$$

тогда

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\varepsilon - \varphi\| &\le |\mathrm{supp}\varphi| \sup_{x\in\mathrm{supp}\varphi} |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x))| \\
&\le |\mathrm{supp}\varphi| \sup_{x\in\mathrm{supp}\varphi} \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(x-t)|\varphi(t) - \varphi(x)|\, dt \\
&\le |\mathrm{supp}\varphi| \sup_{x\in\mathrm{supp}\varphi} \sup_{|x-t|>\varepsilon} |\varphi(t) - \varphi(x)|.
\end{aligned}$$

Так как по теореме Кантора функция φ равномерно непрерывна на компакте suppφ, то последнее выражение стремится к нулю при ε, стремящемся к нулю. Аналогично доказывается сходимость производных. Таким образом, мы показали, что $<\varphi_\varepsilon, T_1\varphi_\varepsilon> \to <\varphi, T_2\varphi>$ при $\varepsilon \to 0$.

Позже мы узнаем, что оба оператора T_1 и T_2 замыкаемы, поэтому будет справедливы соотношения:

$$T_2 \supset T_1, \quad \overline{T_2} \supset \overline{T_1};$$

$$\overline{T_1} \supset T_2 \quad \overline{T_1} \supset \overline{T_2};$$

следовательно,

$$\overline{T_1} = \overline{T_2}.$$

Упражнения

3.1. Показать, что формула (3.2) задает скалярное произведение в $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$.

3.2. Показать, что оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ допускает замыкание тогда и только тогда, когда он обладает следующим свойством: если последовательности $u_n, v_n \in \mathrm{Dom}T$ сходятся к одному и тому же пределу, то, если Au_n и Av_n тоже сходятся, то они сходятся также к одному пределу.

3.3. Используя конструкцию доказательства теоремы 3.1, показать, что линейное подпространство V в $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ будет графиком некоторого оператора тогда и только тогда, когда пары вида $< 0, g > \notin V$ с $g \neq 0$.

3.4. Пусть $T, S \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$. Показать, что $T = S$ тогда и только тогда, когда $\Gamma(T) = \Gamma(S)$.

3.5. Пусть $T, S \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ – замкнутые операторы с общей областью определения. Верно ли, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ оператор $\alpha T + \beta S$ также замкнут?

Лекция № 4. Сопряжение для неограниченных операторов

4.1. Определение оператора, сопряженного к неограниченному

Определение 4.1. Пусть T – плотно определенный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Пусть $D(T^*)$ – множество таких $\varphi \in$ H, для которых существуют такие $\eta \in$ H, что

$$(T\psi, \varphi) = (\psi, \eta)$$

для всех $\psi \in \mathrm{Dom}T$. Тогда для каждого такого $\varphi \in D(T^*)$ положим $T^*\varphi = \eta$. Оператор T^* называется **сопряженным** к T.

Если оператор T будет не плотно определенным, то его сопряженный T^* не существует (точнее говоря, он определяется не однозначно). Действительно, пусть найдутся два элемента η_1 и η_2 таких, что:

$$(T\psi, \varphi) = (\psi, \eta_1), \ (T\psi, \varphi) = (\psi, \eta_2)$$

для всех $\psi \in \mathrm{Dom}T$. Тогда, вычитая одно равенство из другого, получаем:

$$(\psi, \eta_1 - \eta_2) = 0,$$

т. е. вектор $\eta_1 - \eta_2$ лежит в $(\mathrm{Dom}T)^\perp$.

Так как $\mathrm{Dom}T$ плотно в H и скалярное произведение непрерывно по левому аргументу, то для всякого $\xi \in$ H найдутся $\psi_n \in \mathrm{Dom}T$ такие, что

$$0 = (\psi_n, \eta_1 - \eta_2) \to (\xi, \eta_1 - \eta_2) = 0.$$

Взяв $\xi = \eta_1 - \eta_2$ получим, что $\eta_1 = \eta_2$.

Итак, чтобы сопряженный оператор существовал, нужна плотная определенность первоначального оператора. Поэтому, даже если сопряженный существует, то второй сопряженный $T^{**} = (T^*)^*$ может уже не существовать.

Пример 4.1. Пусть H $=$ L$_2(\mathbb{R})$ и f – ограниченная функция, не лежащая в L$_2(\mathbb{R})$, например, $f(x) = \sin x$. Определим оператор T следующим образом. Положим

$$\mathrm{Dom}T = \left\{\psi \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)\psi(x)|\, dx < \infty\right\}.$$

Ясно, что это множество содержит функции с компактным носителем (например, индикаторы отрезков), следовательно, оно плотно в $L_2(\mathbb{R})$. Для всякой $\psi \in \mathrm{Dom}T$ определим

$$T\psi = (\psi, f)\psi_0,$$

где ψ_0 – произвольная фиксированная функция из $L_2(\mathbb{R})$, например, $\psi_0(x) = e^{-x^2}$.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Dom}T^*$, тогда для всякой $\psi \in \mathrm{Dom}T$ получим равенства:

$$(\psi, T^*\varphi) = (T\psi, \varphi) = ((\psi, f)\psi_0, \varphi) = \\ = (\psi, f)(\psi_0, \varphi) = (\psi, \overline{(\psi_0, \varphi)}f) = (\psi, (\varphi, \psi_0)f).$$

Отсюда получаем, что $T^*\varphi = (\varphi, \psi_0)f$, но так как $f \notin L_2(\mathbb{R})$, то с необходимостью $(\varphi, \psi_0) = 0$. Таким образом, получаем, что $\mathrm{Dom}T^* = \psi_0^\perp$ – не плотное в H множество, следовательно, второй сопряженный T^{**} не определен, а $T^* = 0$ на своей области определения.

4.2. О связи сопряжения и замыкания

Рассмотрим теперь соотношения между замыканием оператора и его второго сопряженного, если они существуют.

Теорема 4.1(О связи сопряжения и замыкания). Пусть $T \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ и $\mathrm{Dom}T$ плотно в H, тогда

1) T^* замкнут;

2) T допускает замыкание тогда и только тогда, когда $\mathrm{Dom}T^*$ плотно H, причем, в этом случае $\overline{T} = T^{**}$;

3) если T допускает замыкание, то $\overline{T}^* = T^*$

Доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим унитарный оператор $V : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathrm{H} \times \mathrm{H}$, действующий по правилу

$$V < \varphi, \psi > = < -\psi, \varphi > .$$

Ясно, что $V^{-1} < \varphi, \psi > = < \psi, -\varphi > = V^*$:

$$\begin{aligned}(V < \varphi_1, \psi_1 >, < \varphi_2, \psi_2 >)_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}} &= (< -\psi_1, \varphi_1 >, < \varphi_2, \psi_2 >)_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}} \\ &= (-\psi_1, \varphi_2) + (\varphi_1, \psi_2) \\ &= (< \varphi_1, \psi_1 >, < \psi_2, -\varphi_2 >)_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}} \\ &= (< \varphi_1, \psi_1 >, V^* < \varphi_2, \psi_2 >)_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}.\end{aligned}$$

Рассмотрим, как оператор V преобразует график $\Gamma(T) \subset \mathrm{H} \times \mathrm{H}$. Из унитарности оператора V следует (см. упражнение 4.2), что $V(\Gamma(T)^{\perp}) = V(\Gamma(T))^{\perp}$. С другой стороны, возьмем $< \varphi, \psi > \in V(\Gamma(T))^{\perp}$, тогда $< \varphi, \psi > \perp < -T\phi, \phi >$ для любого $\phi \in \mathrm{Dom}T$, тогда

$$0 = (< \varphi, \psi >, < -T\phi, \phi >)_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}} = (\varphi, -T\phi) + (\psi, \phi).$$

Таким образом, для всякого $\phi \in \mathrm{Dom}T$

$$(\psi, \phi) = (\varphi, T\phi),$$

что эквивалентно утверждению

$$< \varphi, \psi > \in \Gamma(T).$$

Следовательно, график сопряженного оператора $\Gamma(T^*) = V(\Gamma(T))^{\perp} = V(\Gamma(T)^{\perp})$ и является замкнутым множеством, значит оператор T^* замкнут. Пункт 1) теоремы доказан.

Рассмотрим равенства:

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma(T)} &= (\Gamma(T)^{\perp})^{\perp} \ \ \text{(по свойству из упражнения 4.3)}\\
&= (V^2(\Gamma(T))^{\perp})^{\perp} \ \ \text{(так как } V^2 = -V \text{ и } \Gamma(T) \text{ – линейно)}\\
&= (V(V(\Gamma(T))^{\perp}))^{\perp} \ \ \text{(по свойству из упражнения 4.2)}\\
&= V(\Gamma(T^*))^{\perp} \ \ \text{(из доказанного в пункте 1)).}
\end{aligned}$$

Тогда если сопряженный оператор T^* плотно определен, то применив к нему доказанный пункт 1), получим $\Gamma(T^{**}) = V(\Gamma(T^*))^{\perp}$. Сравнивая это равенство с доказанным выше, получаем $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T^{**})$. По теореме о графике замыкания имеем также $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$. Откуда заключаем, что $T^{**} = \overline{T}$.

Предположим теперь, что $\mathrm{Dom}T^*$ – не плотное подмножество в H, тогда найдется не нулевой элемент $\psi \in \mathrm{Dom}T^*$. Покажем, что пара $< \psi, 0 >$ лежит в $(\Gamma(T^*))^{\perp}$. Для этого возьмем произвольное $\phi \in \mathrm{Dom}T^*$ и получим равенства:

$$(< \psi, 0 >, < \phi, T^*\phi >) = (\psi, \phi) + (0, T^*\phi) = (\psi, \phi) = 0.$$

Тогда $< 0, \psi > = V < \psi, 0 > \in V(\Gamma(T^*)^{\perp}) = V(\Gamma(T^*))^{\perp} = \overline{\Gamma(T)}$.

Так как точки вида $< 0, \psi >, \psi \neq 0$ не могут лежать в графике оператора (см. упражнение 3.3), то оператор T не замкнут. Пункт 2) теоремы доказан.

Предположим теперь, что оператор T допускает замыкание. Тогда по уже доказанному имеем: T^* – замкнутый и $T^{**} = \overline{T}$. Используя эти факты, получаем:

$$T^* = \overline{T^*} = (T^*)^{**} = (T^{**})^* = (\overline{T})^*.$$

Теорема полностью доказана. □

4.3. Симметрические, самосопряженные и существенно самосопряженные операторы

В случае ограниченных операторов понятия симметрического и самосопряженного операторов одинаковы. В неограниченном случае есть отличия, а в чем они заключаются, и предстоит нам выяснить в этом разделе.

Определение 4.2. Плотно определенный оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ называется `симметрическим (или эрмитовым)`, если сопряженный к нему является его расширением: $T \subset T^*$. Это равносильно выполнению равенства для всяких $\varphi, \psi \in \mathrm{Dom}T$

$$(T\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi).$$

Ясно, что всякий симметрический оператор замыкаем. Действительно, чтобы это понять, нужно показать, что $\mathrm{Dom}T^*$ плотно в H. Но это следует из включения $\mathrm{Dom}T \subset \mathrm{Dom}T^*$ и всюду плотности $\mathrm{Dom}T$.

Раз T замыкаем, то существует наименьшее замкнутое расширение $\overline{T} = T^{**}$, а так как T^* тоже замкнутое расширение T, то получаем включение, эквивалентное определению симметрического оператора:

$$T \subset T^{**} \subset T^*.$$

Для замкнутых симметрических операторов справедливо, следовательно, такое включение:

$$T = T^{**} \subset T^*.$$

Следующим шагом является рассмотрение операторов, для которых будут равенства между тремя операторами.

Определение 4.3. Плотно определенный оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ называется `самосопряженным`, если

$$T = T^{**} = T^*.$$

Самосопряженные операторы являются самыми важными среди всех определенных выше, однако, легче установить симметричность и замкнутость оператора. Выяснить наличие самосопряженности у замкнутого симметрического оператора можно с помощью установления симметричности сопряженного к нему. Действительно, имеем включения:

$$T = T^{**} \subset T^{*} \subset T^{**},$$

откуда получаем равенство $T^{*} = T^{**}$.

Определение 4.4. Плотно определенный оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ называется **существенно самосопряженным**, если его замыкание – самосопряженный оператор.

В терминах равенств и включений это определение эквивалентно записи:

$$T \subset T^{**} = T^{*}.$$

Действительно, имеем соотношения:

$$T \subset \overline{T},\ \overline{T} = T^{**},\ \overline{T} = (\overline{T})^{*},\ (\overline{T})^{*} = T^{*}.$$

Исключительность таких операторов заключается в том, что среди всех расширений они обладают единственным самосопряженным расширением.

Теорема 4.2 (О самосопряженном расширении существенно самосопряженного оператора). Пусть T – существенно самосопряженный оператор, тогда он имеет единственное самосопряженное расширение $S = T^{**}$.

Доказательство теоремы 4.2. Из определения существенной самосопряженности следует, что T^{**} самосопряженное расширение оператора T. Пусть S – какое-нибудь самосопряженное расширение T. Тогда S замкнут и из того, что S расширяет T получаем, что

$$\overline{S} = S \supset \overline{T} = T^{**}.$$

Откуда с помощью упражнения 4.5 получаем

$$S = S^{*} \subset (T^{**})^{*} = T^{**}.$$

Сравнивая включения, получаем $S = T^{**}$. $\square$

Перед рассмотрением примеров выпишем таблицу для запоминания операторов с той или иной степенью сопряжения.

Симметрический оператор	$T \subset T^{**} \subset T^*$
Замкнутый симметрический оператор	$T = T^{**} \subset T^*$
Самосопряженный оператор	$T = T^{**} = T^*$
Существенно самосопряженный оператор	$T \subset T^{**} = T^*$

Пример 4.2. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, и $Tf(x) = xf(x)$ для всякой $f \in \mathrm{Dom}T = C_0^\infty$.

Найдем T^*. Его область определения $\mathrm{Dom}T^*$ состоит из таких $\varphi \in \mathrm{H}$, что для всякой $f \in \mathrm{Dom}T$ верно равенство:

$$(Tf, \varphi) = \int_\infty^\infty xf(x)\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_\infty^\infty f(x)\overline{T^*\varphi(x)}\,dx,$$

откуда получаем

$$\int_\infty^\infty f(x)(\overline{x\varphi(x) - T^*\varphi(x)}\,dx = 0.$$

Это равенство означает, что функция $x\varphi(x) - T^*\varphi(x)$ лежит в $(C_0^\infty)^\perp$. Так как это ортогональное дополнение состоит только из нуля, то $T^*\varphi(x) = x\varphi(x)$. И, кроме того, $\mathrm{Dom}T^* = \{f(x) \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) : xf(x) \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})\}$. Отсюда мы заключаем, что $T \subset T^*$, т. е. оператор T – симметрический.

Определим теперь второй сопряженный оператор T^{**} (напомним, что он определен, так как область определения $\mathrm{Dom}T^*$ всюду плотна). Для всякой $g \in \mathrm{Dom}T^{**}$ и $\varphi \in \mathrm{Dom}T^*$ должно выполняться равенство:

$$(T^*\varphi, g) - (\varphi, T^{**}g) = \int_\infty^\infty \varphi(x)(\overline{xg(x) - T^{**}g(x)}\,dx = 0.$$

Как и в предыдущем случае, это равенство означает, что функция $xg(x) - T^*g(x)$ лежит в $(\mathrm{Dom}T^*)^\perp$. Последнее равно нулю, так как

$$0 = (C_0^\infty)^\perp = (\mathrm{Dom}T)^\perp \supset (\mathrm{Dom}T^*)^\perp.$$

Таким образом, получаем, что $T^{**}g(x) = xg(x) = T^*g(x)$ для всякой $g \in \mathrm{Dom}T^{**} = \{g(x) \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) : xg(x) \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})\} = \mathrm{Dom}T^*$. В итоге, делаем заключение, что T – существенно самосопряженный оператор ввиду того, что $T \subset T^{**} = T^*$.

Заметим, что оператор T остался бы существенно самосопряженным, если бы мы увеличили его область определения до $C_0^k,\ k \in \mathbb{N}$.

Пример 4.3. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, и $Tf(x) = i\frac{d}{dx}f(x)$ для всякой $f \in \mathrm{Dom}T = C_0^\infty$.

Найдем T^* и его область определения, состоящую из таких функций $\varphi \in \mathrm{H}$, что для всякой $f \in \mathrm{Dom}T$ выполняется равенство:

$$(Tf, \varphi) = \int_{\infty}^{\infty} if'(x)\overline{\varphi}\, dx = -\int_{\infty}^{\infty} if(x)\overline{D\varphi}\, dx =$$
$$= \int_{\infty}^{\infty} f(x)\overline{iD\varphi}\, dx = \int_{\infty}^{\infty} f(x)\overline{T^*\varphi}\, dx = (f, T^*\varphi),$$

где $D\varphi(x)$ – обобщенная производная функции $\varphi(x)$. Откуда заключаем, что функция $iD\varphi(x) - T^*\varphi(x)$ лежит в $(C_0^\infty)^\perp$ и, следовательно, равна нулю.

Таким образом, получаем, что $T^*\varphi(x) = iD\varphi(x)$ для всякой $\varphi(x) \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, у которой обобщенная производная $D\varphi(x)$ также из $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Такое множество функций образует пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$ (если, конечно, ввести дополнительную структуру). Так как

$$C_0^\infty = \mathrm{Dom}T \subset \mathrm{Dom}T^* = W_2^1(\mathbb{R})$$

и для всякой $f \in C_0^\infty$ производные совпадают:$f'(x) = Df(x)$, то оператор T – симметрический. Из примера 3.6 следует, что этот оператор не замкнутый, поэтому он может быть только существенно самосопряженным (или не быть таковым). Дифференциальные существенно самосопряженные операторы мы обсудим на следующих лекциях.

Упражнения

4.1. Показать, что линейный оператор T из примера 4.1 неограничен.

4.2. Пусть V – унитарный оператор в гильбертовом пространстве H и $E \subseteq \mathrm{H}$. Показать, что $V(E^\perp) = V(E)^\perp$.

4.3. Пусть H – гильбертово пространство и $E \subseteq \mathrm{H}$. Показать, что $\mathrm{cl}\,\mathrm{lin}E = (E^\perp)^\perp$.

4.4. Пусть T – линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Верно ли, что $(T^{**})^* = (T^*)^{**}$?

4.5. Пусть T, S – плотно определенные линейные операторы в гильбертовом пространстве H, и $T \subset S$. Показать, что $T^* \supset S^*$.

4.6. Показать, что существенная самосопряженность оператора T равносильна каждому из условий: 1) T^* самосопряжен; 2) $\overline{T} = T^*$.

Лекция № 5. Самосопряженность дифференциальных операторов

5.1. Критерий самосопряженности симметрического оператора

Для выяснения самосопряжен ли (или существенно самосопряжен) дифференциальный оператор из примера 4.3 полезен следующий общий критерий.

Теорема 5.1 (О самосопряженности симметрического оператора). Пусть T – симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда самосопряженность этого оператора эквивалентна каждому из условий:

1) T замкнут и $\ker(T^* \pm iI) = \{0\}$;
2) $\mathrm{im}(T \pm iI) = \mathrm{H}$.

Существенная самосопряженность T равносильна каждому из условий:

3) $\ker(T^* \pm iI) = \{0\}$;
4) $\mathrm{im}(T \pm iI)$ плотно в H.

Доказательство теоремы 5.1. Пусть T самосопряжен, тогда он замкнут (так как $T = T^{**} = \overline{T}$). Если $x \in \ker(T^* \pm iI) = \ker(T \pm iI)$, то $Tx = \mp ix$. Отсюда получаем, что

$$(Tx, x) = (\mp ix, x) = \mp i\|x\|^2, \quad (x, Tx) = (x, \mp ix) = \pm i\|x\|^2.$$

И из самосопряженности T следует, что $\mp i\|x\|^2 = \pm i\|x\|^2$, а значит $x = 0$.

Далее, из равенства (упражнение 5.1)

$$\{0\} = \ker(T^* \pm iI) = (\mathrm{im}(T \mp iI))^{\perp}$$

следует, что $\mathrm{im}(T \mp iI)$ плотно в H. Для доказательства совпадения со всем H воспользуемся замкнутостью T.

Пусть y – произвольный элемент из H, тогда найдется последовательность $x_n \in \mathrm{Dom}(T \pm iI) = \mathrm{Dom}T$ такая, что $(T \pm iI)x_n \to y$ при $n \to \infty$.

Из фундаментальности $(T \pm iI)x_n$ и неравенства

$$\begin{aligned}\|(T \pm iI)(x_n - x_m)\|^2 &= ((T \pm iI)(x_n - x_m), (T \pm iI)(x_n - x_m)) \\ &= \|T(x_n - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 \geq \|x_n - x_m\|^2\end{aligned}$$

следует, что последовательность x_n также фундаментальна. Обозначим через x ее предел. Тогда

$$< x, y > \in \overline{\Gamma(T \pm iI)} = \Gamma(\overline{T \pm iI}) = \Gamma(T \pm iI),$$

значит $y \in \mathrm{im}(T \pm iI)$.

Итак, мы показали, что из самосопряженности оператора T следует справедливость пункта 1), а из пункта 1) следует 2). Покажем теперь, что утверждение пункта 2) влечет самосопряженность T. Так как T симметричен, то $\mathrm{Dom}T \subset \mathrm{Dom}T^*$, поэтому нужно лишь показать обратное включение $\mathrm{Dom}T^* \subset \mathrm{Dom}T$.

Пусть $y \in \mathrm{Dom}T^*$. Поскольку $\mathrm{im}(T \pm iI) = \mathrm{H}$, то существуют векторы $x_\pm \in \mathrm{Dom}T$ такие, что

$$(T \pm iI)x_\pm = (T^* \pm iI)y.$$

Так как на $\mathrm{Dom}T$ операторы T и T^* совпадают, то из последнего равенства получаем

$$(T^* \pm iI)(y - x_\pm) = 0.$$

Отсюда и из равенств

$$\ker(T^* \pm iI) = (\mathrm{im}(T \mp iI))^\perp = \mathrm{H}^\perp = \{0\}$$

следует, что $y = x_\pm$ и $y \in \mathrm{Dom}T$.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть T – существенно самосопряженный оператор, тогда T^* самосопряжен (упражнение 4.6), следовательно, по уже доказанной первой части теоремы выполняется пункт 3). Обратно, если выполнен пункт 3) и T симметричен, то

$$T \subset T^{**} \subset T^*.$$

Откуда получаем,

$$\ker(T^{**} \pm iI) \subset \ker(T^* \pm iI) = \{0\},$$

т. е. для оператора $\overline{T}$ выполнен пункт 1), а это означает, что $\overline{T}$ самосопряжен, что и требовалось доказать.

Эквивалентность пунктов 3) и 4) мы уже использовали при доказательстве первой части теоремы (см. упражнение 5.1). Теорема полностью доказана. □

Вернемся теперь к оператору импульса из примера 4.3.

Пример 5.1. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, и $Tf(x) = i\frac{d}{dx}f(x)$ для всякой $f \in \mathrm{Dom}T = C_0^\infty$.

Мы выяснили, что T симметричен и $\mathrm{Dom}T^* = W_2^1(\mathbb{R})$. Покажем теперь, что он существенно самосопряжен, для этого воспользуемся только что доказанным критерием. Выясним, из чего состоит ядро $\ker(T^* \pm iI)$.

Имеем

$$(T^* \pm iI)f = iDf(x) \pm if(x) = 0,$$

т. е. нужно решить дифференциальное уравнение в обобщенных функциях:

$$Df(x) = \pm f(x). \tag{5.1}$$

Ясно, что классическое решение такого дифференциального уравнения есть функция $f_0^{\pm}(x) = ce^{\pm x}$. Покажем, что решение в обобщенных функциях точно такое же. Действительно, пусть $f_{\pm}(x)$ – решение уравнения (5.1), тогда рассмотрим обобщенную функцию $g_{\pm}(x) = e^{\mp x} f_{\pm}(x)$ (ясно, что эта обобщенная функция определена, так как $e^{\mp x} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$) и покажем, что $Dg_{\pm}(x) = 0:$

$$\begin{aligned}
\langle Dg_{\pm}, \varphi\rangle &= -\langle g_{\pm}, \varphi'\rangle = -\langle e^{\mp x} f_{\pm}(x), \varphi'\rangle = -\langle f_{\pm}(x), e^{\mp x}\varphi'\rangle \\
&= -\langle f_{\pm}(x), (e^{\mp x}\varphi)' \pm e^{\mp x}\rangle = -\langle f_{\pm}(x), (e^{\mp x}\varphi)'\rangle \\
&\mp \langle f_{\pm}(x), e^{\mp x}\rangle = \langle Df_{\pm}(x), e^{\mp x}\varphi\rangle \mp \langle f_{\pm}(x), e^{\mp x}\rangle \\
&= \pm\langle f_{\pm}(x), e^{\mp x}\varphi\rangle \mp \langle f_{\pm}(x), e^{\mp x}\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Тогда, как известно из курса функционального анализа, $g_{\pm}$ есть постоянное регулярное распределение (обобщенная функция). Таким образом, $f_{\pm}(x) = f_0^{\pm}(x)$.

Нам нужно, чтобы это решение лежало в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, но это возможно только при $c = 0$. Следовательно, мы показали, что $\ker(T^* \pm iI) = \{0\}$ и T – существенно самосопряженный оператор.

Важно отметить, что в предложенном критерии самосопряженности симметрического оператора пункт 2) должен выполняться и для $+i$, и для $-i$, в противном случае оператор не только не будет самосопряженным, но и не будет иметь ни одного самосопряженного расширения. Действительно, пусть

$$\mathrm{im}(T + iI) = \mathrm{H}, \quad \mathrm{im}(T - iI) \neq \mathrm{H},$$

и S – его самосопряженное расширение. Тогда $T \subset S = S^* \subset T^*$. Покажем, что $T = S$. Возьмем $x \in \mathrm{Dom}S$, тогда найдется $y \in \mathrm{Dom}T$ такой, что

$$(T + iI)y = (S + iI)x.$$

Это следует из совпадения образов соответствующих операторов (= H). Однако, так как S расширяет T, то из последнего равенства следует, что

$$(S+iI)(x-y)=0.$$

По доказанному критерию самосопряженности, примененному к S, получаем, что $y=x\in \mathrm{Dom}T$. Тем самым показали, что $\mathrm{Dom}S\subset \mathrm{Dom}T$, а обратное включение следует по определению расширения. Итак, $T=S$, а значит T самосопряженный оператор, но по критерию должно быть равенство $\mathrm{im}(T-iI)=\mathrm{H}$, а его у нас нет.

5.2. Дифференциальные операторы с граничными условиями

В этом разделе мы рассмотрим несколько примеров дифференциальных операторов (а конкретней операторов импульса) с различными граничными условиями (эти условия будут накладывать ограничения на область определения операторов).

Пример 5.2. Пусть $a<b$ – вещественные числа, тогда положим $\mathrm{H}=\mathrm{L}_2(a,b)$. Рассмотрим операторы:

$$T_k f(x)=iDf(x),\quad k=0,1,\ T_\theta f(x)=iDf(x),\ \theta\in[0,2\pi),$$

с областями определения:

$$\mathrm{Dom}T_0=\{f\in\mathrm{H}:\ Df\in\mathrm{H}, f(a)=f(b)=0\}= \\ =W_2^1(a,b)\cap\{f(a)=f(b)=0\},$$

$$\mathrm{Dom}T_1=\{f\in\mathrm{H}:\ Df\in\mathrm{H}, f(a)=0\}=W_2^1(a,b)\cap\{f(a)=0\},$$

$$\mathrm{Dom}T_\theta=\left\{f\in\mathrm{H}:\ Df\in\mathrm{H}, f(a)=e^{i\theta}f(b)\right\}= \\ =W_2^1(a,b)\cap\left\{f(a)=e^{i\theta}f(b)\right\}.$$

Первыми вопросами, которыми мы зададимся, будет вопрос о плотности определения данных операторов и, что значит, что функция из $\mathrm{L}_2(a,b)$ принимает какое-то значение в точке (например в точке a)? Начнем со второго. Для этого нужно вспомнить из курса функционального анализа теорему вложения пространства Соболева в пространство непрерывных функций.

Теорема 5.2 (Соболев). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное выпуклое множество. Если $f \in W_p^l(U)$ и $lp > n$, то f – непрерывная функция, причем

$$\sup_{x\in U} |f(x)| \leq C\|f\|_{l,p}$$

для некоторой константы $C > 0$, не зависящей от функции f.

В наших случаях мы имеем: $U = (a, b)$ – выпуклое ограниченное множество в $\mathbb{R}^1$, $l = 1$, $p = 2$ и $2 \cdot 1 > 1$. Таким образом, все функции из области определения наших операторов являются непрерывными, а, следовательно, для них вполне ясно определяется значение в каждой точке интервала (a, b). Отсюда сразу же следует ответ и на первый вопрос: области определения плотны, так как множество непрерывных функций $C[a, b]$ (даже с ограничениями на концах отрезка) плотно в $\mathrm{L}_2(a, b)$.

С другой стороны можно сказать, что область определения состоит из абсолютно непрерывных функций[1], при этом можно заменить обобщенную производную в определении оператора обычной классической производной, существующей почти всюду и интегрируемой с квадратом. Давайте выясним, почему это действительно так.

Определение 5.1. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ называется **абсолютно непрерывной**, если для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует, такое $\delta > 0$, что

$$\sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(b_k)| < \varepsilon$$

для любого конечного набора непересекающихся интервалов $[a_k, b_k] \subset [a, b]$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta.$$

Из определения сразу же вытекает, что абсолютно непрерывная функция будет равномерно непрерывной, обратное неверно (упражнение 5.2). Абсолютно непрерывные функции обладают замечательным свойством, которое мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5.3 (Лебег). Если $f(x)$ – абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то $f(x)$ почти всюду дифференцируема, ее производная $f'(x) \in \mathrm{L}_1(a, b)$ и $f(x) = \int_a^x f'(t)\, dt$. Обратно, если $g(x) \in \mathrm{L}_1(a, b)$, то $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ – абсолютно непрерывная функция и $G'(x) = g(x)$ почти всюду.

[1]Концепция таких функций введена Витали и развита Тонелли в вариационном исчислении

Обозначим через $AC[a, b]$ абсолютно непрерывные на $[a, b]$ функции, а через $AC_2[a, b]$ абсолютно непрерывные на $[a, b]$ функции, чьи производные интегрируемы с квадратом.

Сформулируем и докажем теорему, дающую характеризацию пространству Соболева $W_2^1(a, b)$ через абсолютно непрерывные функции $AC_2[a, b]$.

Теорема 5.4 (О характеризации пространства Соболева). Справедливо равенство $W_2^1(a, b) = AC_2[a, b]$, и для таких функций обобщенная производная совпадает почти всюду с классической.

Доказательство теоремы 5.4. Сначала докажем, что для всякой $f \in W_2^1(a, b)$ и для любых $x, y \in [a, b]$ справедливо равенство:

$$f(y) - f(x) = \int_x^y Df(t)\, dt. \tag{5.2}$$

Напомним, что согласно теореме Соболева значение в точке определено. Для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty[a, b]$ такую, что $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon = [x, y]$ и $0 \le \varphi_\varepsilon(t) \le 1$, $\varphi_\varepsilon(t) = 1$ для всех $t \in [x + \varepsilon, y - \varepsilon]$, $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$ и на отрезках $[x, x + \varepsilon]$ и $[y - \varepsilon, y]$ она монотонна как на рис. 3.

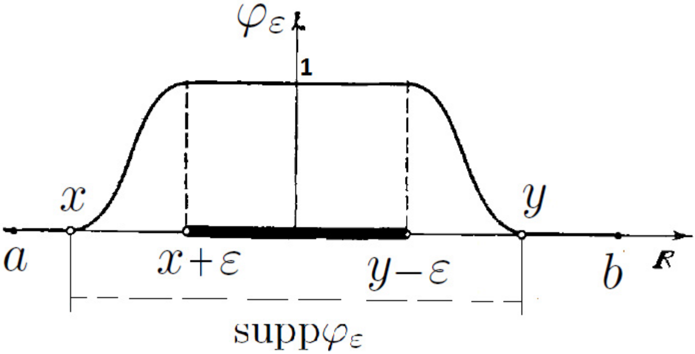


Рис. 3. Функция φ_ε

Такие функции легко строятся с помощью рассмотренной ранее "шапочки Соболева". Покажем, что $\varphi_\varepsilon \to I_{[x,y]}$ в $L_2(a, b)$ при $\varepsilon \to 0$. Это следует из неравенства

$$\|\varphi_\varepsilon - I_{[x,y]}\|_2^2 = \int_x^y |\varphi_\varepsilon(t) - 1|^2\,dt =$$
$$= \int_x^{x+\varepsilon} |\varphi_\varepsilon(t) - 1|^2\,dt + \int_{y-\varepsilon}^{y} |\varphi_\varepsilon(t) - 1|^2\,dt < 2\varepsilon.$$

Далее, по определению обобщенной производной, имеем

$$-\int_x^y \varphi_\varepsilon'(t) f(t)\,dt = \int_x^y \varphi_\varepsilon(t) Df(t)\,dt.$$

Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ правая и левая части этого равенства стремятся к соответственно правой и левой части равенства (5.2).

Это следует из следующих выкладок:

$$\left|\int_x^y \varphi_\varepsilon(t) Df(t)\,dt - \int_x^y Df(t)\,dt\right| \le \int_x^y \left|\varphi_\varepsilon(t) - I_{[x,y]}\right| |Df(t)|\,dt \le$$
$$\le \|\varphi_\varepsilon - I_{[x,y]}\|_2 \|Df\|_2 \le \sqrt{2\varepsilon}\|Df\|_2,$$

$$-\int_x^y \varphi_\varepsilon'(t) f(t)\,dt = -\int_x^{x+\varepsilon} \varphi_\varepsilon'(t) f(t)\,dt - \int_{y-\varepsilon}^{y} \varphi_\varepsilon'(t) f(t)\,dt =$$
$$= -f(\xi_\varepsilon)\int_x^{x+\varepsilon} \varphi_\varepsilon'(t)\,dt - f(\eta_\varepsilon)\int_{y-\varepsilon}^{y} \varphi_\varepsilon'(t)\,dt =$$
$$= -f(\xi_\varepsilon)(\varphi_\varepsilon(x+\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(x)) - f(\eta_\varepsilon)(\varphi_\varepsilon(y) - \varphi_\varepsilon(y-\varepsilon)) =$$
$$= f(\eta_\varepsilon) - f(\xi_\varepsilon).$$

В первой из них мы использовали неравенство Коши – Буняковского, а во втором теорему о среднем. Ее можно было применить, так как $\varphi_\varepsilon'(x)$ знакопостоянна на промежутках $[x, x+\varepsilon]$ и $[y-\varepsilon, y]$, и при $\varepsilon \to 0$ получается стремление $\xi_\varepsilon \to x$, а $\eta_\varepsilon \to y$.

Используя формулу (5.2) покажем совпадение производных. Пусть $f \in W_2^1(a,b)$ и $x \in [a,b]$, тогда для любого h по формуле (5.2) получаем равенство:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} Df(t)\,dt = \frac{G(x+h) - G(x)}{h}, \tag{5.3}$$

где $G(x) = \int_a^x Df(t)\,dt$. По теореме Лебега эта функция абсолютно непрерывна и почти всюду дифференцируема, причем $G'(x) = Df(x)$.

Переходя в равенстве (5.3) к пределу при $h \to 0$ мы получаем почти всюду равенство:
$$f'(x) = Df(x). \tag{5.4}$$

Покажем теперь, что $W_2^1(a,b) \subseteq AC_2[a,b]$. Это в точности следует из абсолютной непрерывности интеграла Лебега как функции множества: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, зависящее от ε и Df, что как только $\text{mes}E < \delta$, то $\int_E |Df(t)|\,dt < \varepsilon$.

Выбирая произвольные непересекающиеся интервалы $[a_k, b_k]$ суммарной длины (меры) меньше δ, используя (5.2), получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(b_k)| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |Df(t)|\,dt = \int_E |Df(t)|\,dt < \varepsilon,$$

где $E = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$.

Для доказательства обратного включения необходимо лишь показать, что для всякой абсолютно непрерывной функции f справедливо равенство (5.4). Пусть f – абсолютно непрерывная функция и $\varphi \in C_0^\infty[a,b]$, тогда применяя правило дифференцирования произведения (почти всюду) и теорему Лебега для производной абсолютно непрерывной функции $f\varphi$, (упражнение 5.4) получаем равенство:

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx &= \int_a^b (f(x)\varphi(x))'\,dx - \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= f(x)\varphi(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)\varphi'(x) = -\int_a^b f(x)\varphi'(x),\end{aligned}$$

откуда ввиду произвольности φ заключаем, что $f'(x) = Df(x)$. Теорема доказана. $\square$

Возвращаясь к примеру 5.2, мы можем переписать области определения наших операторов, заменяя обобщенную производную на классическую почти всюду.

$$\text{Dom}T_0 = \{f \in AC_2[a,b] : \ f(a) = f(b) = 0\},$$
$$\text{Dom}T_1 = \{f \in AC_2[a,b] : \ f(a) = 0\},$$
$$\text{Dom}T_\theta = \left\{f \in AC_2[a,b] : \ f(a) = e^{i\theta} f(b)\right\}.$$

Теперь для нахождения сопряженного оператора мы можем использовать как технику обобщенных функций, так и "классический" подход.

Начнем с оператора T_0, покажем что он симметрический. Для любых $f, g \in \mathrm{Dom} T_0$ имеем:

$$\begin{aligned}(T_0 f, g) &= \int_a^b i f'(x)\overline{g(x)}\,dx = i f(x)\overline{g(x)}\,\big|_a^b - i\int_a^b f(x)\overline{g'(x)}\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\overline{i g'(x)}\,dx = (f, T_0 g).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались обычной производной, существующей почти всюду для $f, g \in \mathrm{Dom} T_0$.

Найдем сопряженный и его область определения. $\mathrm{Dom} T_0^*$ состоит из таких g, что для любой $f \in \mathrm{Dom} T_0$:

$$(T_0 f, g) = (f, T_0^* g),$$

в частности для $\varphi \in C_0^\infty([a,b]) \subset \mathrm{Dom} T_0$

$$i(\varphi', g) = (\varphi, T_0^* g).$$

В терминах обобщенных функций это выглядит так:

$$i\langle \overline{g}, \varphi' \rangle = \langle \overline{T_0^* g}, \varphi \rangle,$$

переходя к обобщенной производной, получим

$$\langle \overline{iDg}, \varphi \rangle = \langle \overline{T_0^* g}, \varphi \rangle.$$

Это означает, что функции $T_0^* g = iDg$ как распределения, т. е. как элементы $\mathrm{L}_2(a,b)$. Таким образом, мы получили, что $T_0^* g = iDg$ для $g \in \mathrm{Dom} T^* = W_2^1(a,b)$. Отсюда ясно, что оператор T не является самосопряженным. Кроме того, он не является и существенно самосопряженным, так как по критерию ядро $\ker(T_0^* \pm iI) \neq \{0\}$, в нем лежит функция $e^{\mp x}$ (см. уравнение 5.1).

Рассмотрим теперь оператор T_1. Найдем его сопряженный T_1^*. Ясно, что $T_0 \subset T_1$, поэтому $T_1^* \subset T_0^*$, отсюда следует, что $T_1^* f = iDf$ и $\mathrm{Dom} T_1^* \subset \mathrm{Dom} T_0^* = AC_2[a,b]$. Тогда, для любой $f \in \mathrm{Dom} T_1$ и $g \in AC_2[a,b]$ получим равенство:

$$\begin{aligned}(T_1 f, g) &= \int_a^b i f'(x)\overline{g(x)}\,dx = i f(x)\overline{g(x)}\,\big|_a^b - i\int_a^b f(x)\overline{g'(x)}\,dx \\ &= i f(b)\overline{g(b)} + \int_a^b f(x)\overline{i g'(x)}\,dx = (f, T_1^* g) + i f(b)\overline{g(b)}.\end{aligned}$$

Сравнивая его с необходимым, заключаем, что $g(b)$ должно равняться нулю для всех $g \in \mathrm{Dom}T_1^*$. Таким образом, оператор T_1 не является даже симметричным, однако он замкнут, так как легко найти его второй сопряженный и сравнить его с T_1.

Рассмотрим теперь последнее семейство операторов T_θ. Покажем, что все они самосопряжены. Как и в предыдущем случае, замечаем, что $T_0 \subset T_\theta$, следовательно, $T_\theta^* f = iDf$ и $\mathrm{Dom}T_\theta^* \subset \mathrm{Dom}T_0^* = AC_2[a,b]$.

Тогда, для любой $f \in \mathrm{Dom}T_\theta$ и $g \in AC_2[a,b]$ получим равенство:

$$\begin{aligned}(T_\theta f, g) &= \int_a^b if'(x)\overline{g(x)}\,dx = if(x)\overline{g(x)}\,\big|_a^b - i\int_a^b f(x)\overline{g'(x)}\,dx \\ &= i\left(f(b)\overline{g(b)} - e^{i\theta}f(b)\overline{g(a)}\right) + \int_a^b f(x)\overline{ig'(x)}\,dx \\ &= (f, T_\theta^* g) + if(b)\left(\overline{g(b)} - e^{i\theta}\overline{g(a)}\right).\end{aligned}$$

Отсюда с необходимостью заключаем, что для всех $g \in \mathrm{Dom}T_\theta^*$ должно выполняться равенство $g(a) = e^{i\theta}g(b)$, а это означает, что $T_\theta^* = T_\theta$. Аналогично действуя, мы можем легко найти T_θ^{**} и убедиться, что он совпадает с T_θ.

Упражнения

5.1. Пусть T – плотно определенный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Показать, что $\ker T^* = (\mathrm{im}T)^\perp$.

5.2. Верно ли, что функция Кантора не является абсолютно непрерывной функцией?

5.3. Показать, что всякая липшицева функция на отрезке $[a,b]$ (это означает, что $|f(x)-f(y)| \le L|x-y|$ для всех $x, y \in [a,b]$) абсолютна непрерывна на $[a,b]$.

5.4. Показать, что произведение абсолютно непрерывной на (бесконечно) дифференцируемую снова будет абсолютно непрерывная функция.

5.5. Найти второй сопряженный T_0^{**} для оператора из примера 5.2 и показать, что T_0 замкнут.

Лекция № 6. Расширения симметрических операторов

6.1. Индекс дефекта

Мы уже встречались с примерами самосопряженных расширений для симметрических операторов. Таких расширений может быть одно, как у существенно самосопряженных операторов, может не быть вовсе, а может быть континуальное количество, как в примере 5.2 (все операторы $T_\theta \supset T_0$). Вопрос о самосопряженных расширениях очень важен в каждом конкретном случае, каждое расширение несет конкретную физическую реализацию.

Размерности ядер операторов $T^* + iI$ и $T^* - iI$ играют важную роль в теории расширений. Дадим им специальные названия.[2]

Определение 6.1. Пусть T – симметрический оператор и

$$\mathcal{K}_\pm = \ker(T^* \mp iI) = \operatorname{im}(T \pm iI)^\perp.$$

Множества $\mathcal{K}_\pm$ называются **дефектными подпространствами** оператора T, а числа $n\pm = \dim\mathcal{K}_\pm$ – **индексы дефекта**.

Пара чисел (n_+, n_-) может принимать любые неотрицательные целые значения, в том числе и бесконечность. Из критерия самосопряженности следует, что для (существенно) самосопряженного оператора индексы дефекта нулевые.

Пример 6.1. Найдем индексы дефекта у оператора T_0 из примера 5.2. Напомним, что $T_0 f(x) = iDf(x)$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}T_0 = W_2^1(a,b) \cap \{f(a) = f(b) = 0\}.$$

Сопряженный оператор $T_0^* = iDf(x)$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}T_0^* = W_2^1(a,b).$$

Ядра $\ker(T^* \pm iI) = \mathrm{lin}\{e^{\mp x}\}$, следовательно $(n_+, n_-) = (1, 1)$.

6.2. T-симметричность, T-замкнутость и T-ортогональность

[2]Теория расширений симметрических операторов построена Нейманом

Пусть T – замкнутый симметрический оператор, тогда на множестве $\mathrm{Dom}T^*$ определим две формы:

$$(\phi,\psi)_T = (\phi,\psi) + (T^*\phi, T^*\psi), \tag{6.1}$$

$$[\phi,\psi]_T = (T^*\phi,\psi) - (\phi, T^*\psi). \tag{6.2}$$

Легко проверить, что (6.1) задает скалярное произведение на $\mathrm{Dom}T^*$ (упражнение 6.1).

Определение 6.2. Подпространство $E \subset \mathrm{Dom}T^*$ называется T-**симметрическим**, если для любых $\phi,\psi \in E$ верно равенство $[\phi,\psi]_T = 0$; E – T-**замкнуто** (T-**ортогонально**), если оно замкнуто (ортогонально) относительно $(\cdot,\cdot)_T$.

В терминах T-замкнутости, ортогональности и симметричности можно дать удобную характеризацию областям определения замкнутых симметрических расширений оператора T.

Лемма 6.1. Пусть T – замкнутый симметрический оператор, тогда

1) Множества $\mathrm{Dom}T$, $\mathcal{K}_\pm$ есть T-замкнутые взаимно T-ортогональные подпространства из $\mathrm{Dom}T^*$ и при этом

$$\mathrm{Dom}T^* = \mathrm{Dom}T \oplus_T \mathcal{K}_+ \oplus_T \mathcal{K}_-; \tag{6.3}$$

2) Всякое замкнутое симметрическое расширение оператора T суть сужение оператора T^* на T-замкнутые T-симметрические подпространства из $\mathrm{Dom}T^*$;

3) Для любого T-замкнутого T-симметрического подпространства $E \subset \mathrm{Dom}T^*$, содержащего DomT, найдется T-замкнутое T-симметрическое подпространство $E_1 \subseteq \mathcal{K}_+ \oplus_T \mathcal{K}_-$ такое, что

$$E = \mathrm{Dom}T \oplus_T E_1.$$

Доказательство леммы 6.1. Начнем с пункта 1). Подпространства $\mathcal{K}_\pm$ – T-замкнуты, так как они уже замкнуты в более слабой топологии, порожденной исходным скалярным произведением. Действительно, пусть $\phi_n \in \mathcal{K}_\pm$ – сходящаяся относительно скалярного произведения, задаваемого (6.1), последовательность к элементу ϕ, тогда эта последовательность сходится к ϕ и относительно исходного скалярного произведения (упражнения 6.1). Ввиду замкнутости $\phi \in \mathcal{K}_\pm$.

$\mathrm{Dom}T$ – T-замкнуто, так как замкнут сам оператор T. Действительно, пусть $\phi_n \in \mathrm{Dom}T$ и $\phi_n \to_T \phi$, тогда

$$\phi_n \to \phi, \quad T\phi_n \to T^*\phi.$$

Это то же самое, что

$$<\phi_n, T\phi_n> \to <\phi, T^*\phi> \in \overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T}) = \Gamma(T).$$

Значит $\phi \in \mathrm{Dom}T$. Покажем теперь взаимную ортогональность. Пусть $\phi \in \mathrm{Dom}T$, $\phi_\pm \in \mathcal{K}_\pm$, тогда получим равенства:

$$\begin{aligned}(\phi, \phi_\pm)_T &= (\phi, \phi_\pm) + (T^*\phi, T^*\phi_\pm) = (\phi, \phi_\pm) + (T\phi, \pm i\phi_\pm)\\ &= (\phi, \phi_\pm) \mp i(T\phi, \phi_\pm) = (\phi, \phi_\pm) \mp i(\phi, T^*\phi_\pm)\\ &= (\phi, \phi_\pm) \mp i(\phi, \pm i\phi_\pm) = (\phi, \phi_\pm) - (\phi, \phi_\pm) = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\phi_+, \phi_-)_T &= (\phi_+, \phi_-) + (T^*\phi_+, T^*\phi_-) = (\phi_+, \phi_-) + (i\phi_+, -i\phi_-)\\ &= (\phi_+, \phi_-) - (\phi_+, \phi_-) = 0.\end{aligned}$$

Пусть теперь $\psi \in \mathrm{Dom}T^*$ и $\psi \perp_T \mathrm{Dom}T \oplus_T \mathcal{K}_+ \oplus_T \mathcal{K}_-$, тогда для любого $\phi \in \mathrm{Dom}T$ из условия $(\phi, \psi)_T = 0$ получим равенство:

$$(\phi, \psi) = -(T\phi, T^*\psi).$$

Откуда из определения области определения сопряженного оператора заключаем, что $T^*\psi \in \mathrm{Dom}T^*$ и

$$\psi = -T^*T^*\psi.$$

Далее, из равенства

$$(T^* + iI)(T^* - iI)\psi = (T^*T^* + I)\psi = 0$$

заключаем, что $(T^* - iI)\psi \in \mathcal{K}_-$. Для любого $\varphi \in \mathcal{K}_-$ получим

$$\begin{aligned}-i(\varphi, (T^* - iI)\psi) &= (\varphi, \psi) + (-i\phi, T^*\psi)\\ &= (\varphi, \psi) + (T^*\varphi, T^*\psi) = (\varphi, \psi)_T = 0.\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из ортогональности $\psi \perp_T \mathcal{K}_-$. Взяв $\varphi = (T^* - iI)\psi$, получим $(T^* - iI)\psi = 0$. Это означает, что $\psi \in \mathcal{K}_+$, но из T-ортогональности получаем, что $\psi = 0$. Пункт 1) доказан.

Для доказательства пункта 2) заметим, что любое замкнутое симметрическое расширение S удовлетворяет соотношению

$$T \subset S \subset S^* \subset T^*.$$

Осталось показать, что $\mathrm{Dom}S$ – T-замкнуто (T-симметрично) тогда и только тогда, когда S замкнут (симметричен). Действительно, S симметричен тогда и только тогда, когда для любых $\phi, \psi \in \mathrm{Dom}S$

$$(S\phi, \psi) - (\phi, S\psi) = (T^*\phi, \psi) - (\phi, T^*\psi) = [\phi, \psi]_T = 0,$$

что означает T-симметричность Dom$S$. T-замкнутость Dom$S$ доказывается аналогично T-замкнутости Dom$T$, как мы делали ранее. Пункт 2) доказан.

Перейдем к пункту 3). Пусть $\mathrm{Dom}T \subset E \subset \mathrm{Dom}T^*$ – T-замкнутое T-симметричное подпространство, тогда положим $E_1 = E \cap (\mathcal{K}_+ \oplus_T \mathcal{K}_-)$. Ясно, что E_1 – также T-замкнутое T-симметричное множество. Пусть $\phi \in E$ тогда $\phi = \phi_0 + \phi_1$, где $\phi_0 \in \mathrm{Dom}T$ и $\phi_1 \in (\mathcal{K}_+ \oplus_T \mathcal{K}_-)$. Ясно, что $\phi_0 \in E$, откуда $\phi_1 = \phi - \phi_0$ также лежит в E. Следовательно, $\phi_1 \in E \cap (\mathcal{K}_+ \oplus_T \mathcal{K}_-) = E_1$. Отсюда заключаем, что $E = \mathrm{Dom}T \oplus_T E_1$. Лемма доказана. $\square$

6.3. Теорема о симметрических расширениях

Перейдем к теореме о расширениях, но перед этим напомним одно определение.

Определение 6.3. Пусть H и H_1 – гильбертовы пространства. Отображение $U : \mathrm{H} \to \mathrm{H}_1$ называется **изометрией**, если для любых $x, y \in \mathrm{H}$ верно равенство

$$(x, y)_{\mathrm{H}} = (Ux, Uy)_{\mathrm{H}_1}. \tag{6.4}$$

Для **частичной изометрии** равенство (6.4) выполняется для всех $x, y \in (\mathrm{ker}U)^{\perp}$.

Теорема 6.1 (О замкнутых симметрических расширениях замкнутого симметрического оператора). Пусть T – замкнутый симметрический оператор. Замкнутые симметрические расширения оператора T находятся во взаимооднозначном соответствии с частичными изометриями (относительно исходного скалярного произведения) пространства $\mathcal{K}_+$ в $\mathcal{K}_-$. Если U одна из таких изометрий, то соответствующее замкнутое симметрическое расширение T_U задано на области

$$\mathrm{Dom}T_U = \left\{\varphi + \psi + U\psi : \ \varphi \in \mathrm{Dom}T, \quad \psi \in (\mathrm{ker}U)^{\perp}\right\}$$

и действует по правилу

$$T_U(\varphi + \psi + U\psi) = T\varphi + i\psi - iU\psi.$$

Если $\dim[(\mathrm{ker}U)^{\perp}] < \infty$, то индексы дефекта T_U равны

$$n_{\pm}(T_U) = n_{\pm}(T) - \dim[(\mathrm{ker}U)^{\perp}].$$

Доказательство теоремы 6.1. Пусть T_1 – замкнутое симметрическое расширение оператора T, тогда по лемме 6.1

$\mathrm{Dom}T_1 = \mathrm{Dom}T \oplus_T E_1$, где E_1 – T-замкнутое T-симметрическое подпространство в $\mathcal{K}_+ \oplus_T \mathcal{K}_-$. Если $\phi \in E_1$, то имеет место однозначное разложение $\phi = \psi + \psi_-$, где $\psi \in \mathcal{K}_+$ и $\psi_- \in \mathcal{K}_-$. Из T-симметричности E_1 следует, что

$$\begin{aligned}
0 = [\phi,\phi]_T &= (T^*\phi,\phi) - (\phi, T^*\phi)\\
&= (i\psi - i\psi_-, \psi + \psi_-) - (\psi + \psi_-, i\psi - i\psi_-)\\
&= i(\psi,\psi) - i(\psi_-,\psi) + i(\psi,\psi_-) - i(\psi_-,\psi_-)\\
&+ i(\psi,\psi) + i(\psi_-,\psi) - i(\psi,\psi_-) - i(\psi_-,\psi_-)\\
&= 2i\|\psi\|^2 - 2i\|\psi_-\|^2,
\end{aligned}$$

откуда

$$\|\psi\| = \|\psi_-\|.$$

Это равенство показывает, что отображение $U : \psi \mapsto \psi_-$ с начальным пространством $(\mathrm{ker}U)^\perp = E_1 \cap \mathcal{K}_+$ задает частичную изометрию подпространства $\mathcal{K}_+$ в $\mathcal{K}_-$. Тогда

$$\mathrm{Dom}T_1 = \left\{\varphi + \psi + U\psi :\ \varphi \in \mathrm{Dom}T,\quad \psi \in (\mathrm{ker}U)^\perp\right\} \tag{6.5}$$

и

$$T_1(\varphi + \psi + U\psi) = T_1^*(\varphi + \psi + U\psi) = T\psi + i\psi - iU\psi. \tag{6.6}$$

Обратно, пусть U – изометрия подпространства $\mathcal{K}_+$ в $\mathcal{K}_-$. Определим $\mathrm{Dom}T_1$ и T_1 формулами (6.5) и (6.6). Тогда $\mathrm{Dom}T_1$ – T-замкнутое T-симметрическое подпространство в $\mathrm{Dom}T^*$ (упражнение 6.2), что в силу леммы 6.1 означает, что T_1 – замкнутое симметрическое расширение оператора T.

Перейдем к доказательству формулы для индексов дефекта. Пусть $\phi_\pm \in \mathrm{im}(T_U \pm iI)$, тогда найдутся такие $\varphi_\pm \in \mathrm{Dom}T$ и $\psi_\pm \in (\mathrm{ker}U)^\perp$, что

$$\begin{aligned}
\phi_\pm &= (T_U \pm iI)(\varphi_\pm + \psi_\pm + U\psi_\pm)\\
&= T\varphi_\pm + i\psi_\pm - iU\psi_\pm \pm i(\varphi_\pm + \psi_\pm + U\psi_\pm),
\end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$\phi_+ = T\varphi_+ + i\varphi_+ + 2i\psi_+,\quad \phi_- = T\varphi_- - i\varphi_- - 2iU\psi_-. \tag{6.7}$$

Так как $\mathrm{im}(T \pm iI) \perp \mathcal{K}_\pm$ и $U : \mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_-$, то формулы (6.7) означают, что справедливо разложение:

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(T_U + iI) &= \mathrm{im}(T + iI) \oplus (\mathrm{ker}U)^\perp,\\
\mathrm{im}(T_U - iI) &= \mathrm{im}(T - iI) \oplus \mathrm{im}U.
\end{aligned}$$

Отсюда, используя равенство $\dim((\ker U)^\perp) = \dim(\operatorname{im} U)$ и упражнение 6.3 получим требуемые формулы для индекса дефекта. $\square$

Следствие 6.1 (О самосопряженных расширениях замкнутого симметрического оператора). T обладает самосопряженными расширениями тогда и только тогда, когда $n_+ = n_-$. Все самосопряженные расширения оператора T находятся во взаимооднозначном соответствии с унитарными отображениями $\mathcal{K}_+$ на $\mathcal{K}_-$.

Доказательство следствия 6.1. Пусть T имеет самосопряженное расширение T_1 (откуда $n_\pm(T_1) = 0$), тогда по доказанной теореме найдется изометрия U такая, что $T_1 = T_U$ и

$$n_\pm(T) = n_\pm(T_1) + \dim((\ker U)^\perp) = \dim((\ker U)^\perp).$$

Обратно, пусть $n_+(T) = n_-(T)$, тогда подпространства $\mathcal{K}_+$ и $\mathcal{K}_-$ унитарно эквивалентны, т. е. существует унитарное отображение U, переводящее $\mathcal{K}_+$ на $\mathcal{K}_-$. Тогда по формулам индекса дефекта $n_\pm(T_U) = 0$.

Здесь мы без ограничения общности везде считали, что $\dim((\ker U)^\perp) < \infty$. $\square$

Следствие 6.2 (О самосопряженных расширениях в терминах коммутирования с "сопряжением"). Пусть T – симметрический оператор, и пусть существует отображение ("сопряжение") $C : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ такое, что

1) $C(\alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}C(\varphi) + \overline{\beta}C(\psi)$;
2) $C : \operatorname{Dom}T \to \operatorname{Dom}T$
3) $C^2 = I$ и $\|C\varphi\| = \|\varphi\|$;
4) $TC = CT$.

Тогда T имеет равные индексы дефекта и, следовательно, самосопряженные расширения.

Доказательство следствия 6.2. Так как $C^2 = I$ и $C\operatorname{Dom}T \subseteq \operatorname{Dom}T$, то $C\operatorname{Dom}T = \operatorname{Dom}T$. Пусть $\psi \in \operatorname{Dom}T$ и $\varphi_+ \in \mathcal{K}_+$, тогда с помощью упражнения 6.4 получим равенство

$$0 = \overline{(\varphi_+, (T + iI)\psi)} = (C\varphi_+, C(T + iI)\psi) = (C\varphi_+, (T - iI)C\psi),$$

которое утверждает, что так как $C\psi \in \operatorname{Dom}T$, то $C\varphi_+ \in \mathcal{K}_-$. Аналогично, для всякой $\varphi_\in\mathcal{K}_-$ следует, что $C\varphi_+ \in \mathcal{K}_+$. Поскольку отображение C сохраняет норму, то оно взаимооднозначно и, следовательно,

$$\dim[\mathcal{K}_+] = \dim[\mathcal{K}_-]. \quad \square$$

6.4. Самосопряженные расширения оператора импульса на отрезке с нулевыми граничными условиями

В качестве примера используемой техники рассмотрим уже встречавшийся нам оператор импульса T_0 и найдем все его самосопряженные расширения.

Пример 6.2. Напомним, что $T_0 f(x) = iDf(x)$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}T_0 = W_2^1(a,b) \cap \{f(a) = f(b) = 0\}.$$

Сопряженный оператор $T_0^* = iDf(x)$ с областью определения

$$\mathrm{Dom}T_0^* = W_2^1(a,b).$$

Из примера 6.1 мы знаем, что $n_\pm(T_0) = 1$, поэтому по следствию 6.1 T_0 обладает самосопряженными расширениями. Найдем их непосредственно и с использованием унитарных отображений $\mathcal{K}_+$ на $\mathcal{K}_-$.

Пусть S – замкнутое симметрическое расширение оператора T, тогда (как уже много раз отмечалось) $T_0 \subset S \subset S^* \subset T_0^*$. Отсюда мы делаем вывод, что $\mathrm{Dom}S^* \subset AC_2[a,b]$ и $S^* = iD$. Из интегрирования по частям для любых $\varphi \in \mathrm{Dom}S$ и $\psi \in \mathrm{Dom}S^*$ получаем равенство:

$$(S\varphi,\psi) - (\varphi, S^*\psi) = i(\varphi(b)\overline{\psi(b)} - \varphi(a)\overline{\psi(a)}) = 0. \tag{6.8}$$

Для нахождения самосопряженных S нам нужно найти такие одинаковые условия на функции φ и ψ, чтобы выполнялось указанное равенство (6.8).

Возьмем $\varphi \in \mathrm{Dom}S \setminus \mathrm{Dom}T_0$, тогда равенство (6.8) утверждает, что $|\varphi(b)| = |\varphi(a)|$. Так как $\varphi(a) \neq 0$, то найдется θ с $|\theta| = 1$, что $\varphi(b) - \theta\varphi(a) = 0$. Пусть ψ другая функция из $\mathrm{Dom}S$, тогда равенство (6.8) дает $\psi(b) = \theta_1\psi(a)$. Подставляя φ и ψ в равенство (6.8) получим

$$(\theta\overline{\theta_1} - 1)\varphi(a)\overline{\psi(a)} = 0.$$

Откуда заключаем, что $\theta = \theta_1$. В итоге получаем, что оператор $S = T_\theta$ для некоторого $|\theta| = 1$. Все такие операторы, как мы знаем, самосопряжены.

Прийдем теперь к этому же результату через построение операторов T_U для унитарных U.

Нам уже известно, что

$$\mathcal{K}_+ = \mathrm{lin}\{e^x\}, \quad \mathcal{K}_- = \mathrm{lin}\{e^{-x}\}.$$

Пусть

$$\phi_+ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2b}-e^{2a}}}e^x, \quad \phi_- = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^{-2a}-e^{-2b}}}e^{-x}$$

есть нормированные векторы из $\mathcal{K}_\pm$. Тогда частичными изометриями будут только отображения $U_\gamma : c\phi_+ \mapsto c\gamma\phi_-$, где $|\gamma| = 1$. Легко проверить, что такие U_γ унитарные отображения, следовательно, все замкнутые симметрические расширения на самом деле самосопряжены и они выглядят следующим образом: $T_\gamma = iD$ и

$$\mathrm{Dom}T_\gamma = \{\varphi + c\phi_+ + c\gamma\phi_- : \ \varphi \in \mathrm{Dom}T_0, \ c \in \mathbb{C}\}.$$

Проверим, что T_θ и T_γ – одинаковое семейство операторов. Для этого достаточно показать совпадение областей определения для подходящих θ и γ.

Пусть $\psi \in \mathrm{Dom}T_\gamma$, тогда

$$\begin{aligned}\psi(b) &= \varphi(b) + c\phi_+(b) + c\gamma\phi_-(b)\\ &= \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2b}-e^{2a}}}e^b + \frac{c\gamma\sqrt{2}}{\sqrt{e^{-2a}-e^{-2b}}}e^{-b}\\ &= \frac{c\sqrt{2}e^{b-a}}{\sqrt{e^{2b-2a}-1}} + \frac{c\gamma\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2b-2a}-1}} = \frac{c\sqrt{2}(e^{b-a}+\gamma)}{\sqrt{e^{2b-2a}-1}}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\psi(a) &= \varphi(a) + c\phi_+(a) + c\gamma\phi_-(a)\\ &= \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2b}-e^{2a}}}e^a + \frac{c\gamma\sqrt{2}}{\sqrt{e^{-2a}-e^{-2b}}}e^{-a}\\ &= \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2b-2a}-1}} + \frac{c\gamma\sqrt{2}e^{b-a}}{\sqrt{e^{2b-2a}-1}} = \frac{c\sqrt{2}(1+\gamma e^{b-a})}{\sqrt{e^{2b-2a}-1}}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\psi(b) = \theta\psi(a)$, где

$$\theta = \frac{\gamma + e^{b-a}}{1+\gamma e^{b-a}} \quad \text{и} \quad |\theta| = 1.$$

Обратно, если $\psi(b) = \theta\psi(a)$, то ее можно записать в виде

$$\psi = \varphi + c\phi_+ + c\gamma\phi_-$$

для некоторой $\varphi \in \mathrm{Dom}T_0, \ c \in \mathbb{C}$ и $\gamma = \frac{\theta - e^{b-a}}{1-\theta e^{b-a}}$. Следовательно, $T_\theta = T_\gamma$.

Упражнения

6.1. Показать, что полуторалинейная форма (6.1) задает скалярное произведение на DomT^*. Доказать, что если $\phi_n \to_T \phi$, то обязательно $\phi_n \to \phi$.

6.2. Показать, что множество, задаваемое формулой (6.5) является T-замкнутым T-симметричным множеством.

6.3. Пусть E_1, E_2 – взаимонортогональные линейные подпространства гильбертова пространства H. Показать, что справедливо равенство

$$(E_1 \oplus E_2)^\perp = E_1^\perp \ominus E_2 = E_2^\perp \ominus E_1.$$

6.4. Пусть C – сохраняющее норму отображение гильбертова пространства H такое, что $C(\alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}C(\varphi) + \overline{\beta}C(\psi)$. Показать, что $(C\varphi, C\psi) = \overline{(\varphi, \psi)}$.

6.5. Пусть T – замкнутый симметрический оператор такой, что $n_+ = 0 \neq n_-$ (или, наоборот, $n_- = 0 \neq n_+$). Показать, что T не имеет не тривиальных симметрических расширений (такие операторы называются `максимальными симметрическими`).

6.6. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0, \infty)$ и $Tf(x) = -\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ для всех $f \in \mathrm{Dom}T = C_0^\infty(0, \infty)$. Используя следствие 6.2 для отображения $Cf(x) = \overline{f(x)}$, показать, что T обладает самосопряженными расширениями. Найти эти расширения.

Лекция № 7. Спектр и резольвента для неограниченных операторов

7.1. Определение спектра

Спектр для неограниченных плотно определенных операторов определяется аналогично ограниченным. Напомним его определение.

Определение 7.1. Пусть T – линейный оператор гильбертова пространства H. **Обратным** оператором называется такой оператор T^{-1} : $\mathrm{im}T \to \mathrm{Dom}T$, что $TT^{-1} = I_{\mathrm{im}T}$, $\;T^{-1}T = I_{\mathrm{Dom}T}$.

Он существует тогда и только тогда когда $\ker T = \{0\}$.

Определение 7.2. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется **регулярным значением** оператора T, если оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ – ограничен и определен на всюду плотном в H множестве. Множество регулярных значений обозначается как $\rho(T)$ и называется **регулярным (резольвентным) множеством** оператора T. Оператор $R_\lambda(T) = (T-\lambda I)^{-1}$ – **резольвента** оператора T.

Множество $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ называется **спектром** оператора T. Спектр делится на следующие подмножества:

1) **точечный спектр (собственные значения)** $\sigma_p(T)$ состоит из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $T - \lambda I$ не имеет обратного;

2) **непрерывный спектр** $\sigma_c(T)$ состоит из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $T-\lambda I$ обратим и обратный плотно определен, но неограничен;

3) **остаточный спектр** $\sigma_r(T)$ состоит из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $T - \lambda I$ обратим и обратный не плотно определен.

Ясно, что

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

и

$$\sigma_p(T) \cap \sigma_c(T) = \emptyset,\; \sigma_p(T) \cap \sigma_r(T) = \emptyset,\; \sigma_r(T) \cap \sigma_c(T) = \emptyset.$$

Спектральный анализ очень важен для математической физике. В квантовой механике, например, гамильтониан – это неограниченный самосопряженный оператор, точечный спектр которого соответствует уровням энергии связанных состояний, а непрерывный играет важную роль в теории рассеяния в квантовой системе.

Рассмотрим примеры неограниченных операторов и их спектры.

Пример 7.1. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, рассмотрим оператор координаты $Tf(x) = xf(x)$ с его естественной областью определения $\mathrm{Dom}T = \{f \in \mathrm{H} : \; xf \in \mathrm{H}\}$.

Легко проверить, что T – самосопряжен. Покажем, что его спектр $\sigma(T) = \sigma_c(T) = \mathbb{R}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, тогда $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ и уравнение $Tf - \lambda f = g$ имеет единственное решение $g(x) = \frac{f(x)}{x-\lambda}$, причем $g \in \mathrm{H}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|^2\,dx}{|x-\lambda|^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|^2\,dx}{x^2 - 2x\mathrm{Re}\lambda + |\lambda|^2}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|^2\,dx}{(x-\mathrm{Re}\lambda)^2 + (\mathrm{Im}\lambda)^2} \leq \frac{\|f\|^2}{(\mathrm{Im}\lambda)^2} < \infty.$$

Отсюда заключаем, что обратный оператор

$$(T - \lambda I)^{-1} f(x) = \frac{1}{x-\lambda} f(x),$$

и он ограничен:

$$\|R_\lambda(T)\| \leq |\mathrm{Im}\lambda|^{-1}.$$

Следовательно, верно включение $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \rho(T)$. Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда уравнение $Tf - \lambda f = g$ разрешимо для всех $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ таких, что $\lambda \notin \mathrm{supp} g$ (см. рис. 4).

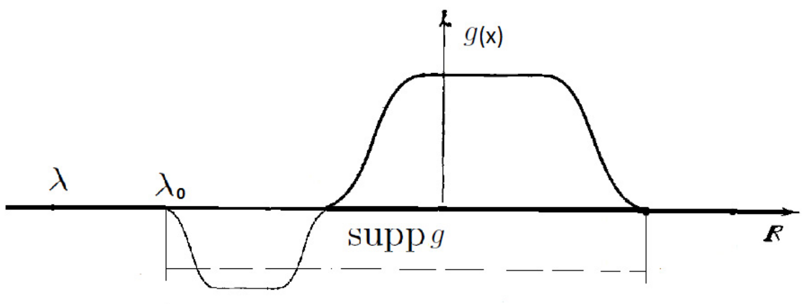


Рис. 4. Функция $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $\lambda \notin \mathrm{supp} g$

Пусть $\lambda_0 \in \mathrm{supp} g$ такая, что $|\lambda - \lambda_0| = \inf\limits_{x \in \mathrm{supp} g} |\lambda - x|$, тогда

$$\|g\|^2 = \int_{\mathrm{supp} g} \frac{|f(x)|^2\,dx}{(x-\lambda)^2} \leq \frac{\|f\|^2}{(\lambda - \lambda_0)^2} < \infty.$$

Множество таких g всюду плотно в H, поэтому $\mathbb{R} \subseteq \sigma_c(T)$. Сравнивая это включение с $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \rho(T)$ приходим к требуемому равенству $\sigma(T) = \sigma_c(T) = \mathbb{R}$.

Пример 7.2. Пусть $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{C})$. Рассмотрим операторы A – уничтожения частиц и A^* – рождения частиц,[3] действующие по правилу

$$A\xi = (x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{3}x_3, \ldots),$$
$$A^*\xi = (0, x_0, \sqrt{2}x_1, \sqrt{3}x_2, \ldots)$$

на множестве

$$\mathrm{Dom}A = \mathrm{Dom}A^* = \left\{\xi = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2(\mathbb{C}) : \sum_{n=0}^{\infty} n|x_n|^2 < \infty\right\}.$$

Физическая интерпретация состоит в том, что вектор

$$e_n = (0, \ldots, x_n = 1, 0, \ldots)$$

представляет состояние физической системы из n частиц, в частности вектор e_0 представляет вакуум. Действие операторов A и A^* на векторы e_n объясняет их название:

$$Ae_n = \sqrt{n}e_{n-1}, \quad A^*e_n = \sqrt{n+1}e_{n+1}.$$

Легко проверить, что A^* является сопряженным к A. Покажем, что

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \mathbb{C}, \quad \sigma(A^*) = \sigma_r(A^*) = \mathbb{C}. \tag{7.1}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, найдем такое $\xi_\lambda \in \mathrm{Dom}A$, что $A\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda$. Последнее уравнение по координатам выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda x_0 \\ \sqrt{2}x_2 & = & \lambda x_1 \\ \sqrt{3}x_3 & = & \lambda x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Из этой системы все координаты можно выразить через x_0 :

$$x_n = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}x_0.$$

Откуда легко следует, что $\xi_\lambda \in \mathrm{Dom}A$ и $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \mathbb{C}$. Решая аналогичным образом уравнение $A^*\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda$, прийдем к выводу, что решение нулевое для любого λ. Отсюда следует, что так как

$$0 \neq \ker(A - \lambda I) = \mathrm{im}(A^* - \overline{\lambda}I)^\perp,$$

то для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ множество $\mathrm{Dom}(A^* - \lambda I)^{-1} = \mathrm{im}(A^* - \lambda I)$ не плотно в H. Формулы (7.1) доказаны.

[3] В пространстве $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ этим операторам соответствуют операторы $\frac{1}{\sqrt{2}}(x + i\frac{d}{dx})$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(x - i\frac{d}{dx})$.

7.2. Спектр симметрического и самосопряженного операторов

Следующая теорема является перенесением соответствующей теоремы на неограниченный случай.

Теорема 7.1 (О спектре самосопряженного оператора). Пусть T – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, $\sigma_r(T) = \emptyset$ и $\rho(T)$ содержит верхнюю и нижнюю полуплоскости. Кроме того, для всякого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ верна оценка $\|R_\lambda\| \leq |\mathrm{Im}\lambda|^{-1}$.

Доказательство теоремы 7.1. Предположим сначала, что T – только симметрический оператор. Тогда для любых $\phi, \psi \in \mathrm{Dom}T$ верно равенство $(T\phi, \psi) = (\phi, T\psi)$, откуда следует, что $(T\phi, \phi) \in \mathbb{R}$. Для распознавания спектральных точек комплексной плоскости рассмотрим уравнение

$$T\phi - \lambda\phi = \psi, \;\; \lambda \in \mathbb{C}, \;\; \psi \in \mathrm{H}.$$

Умножим его скалярно на ϕ и навесим мнимую часть:

$$\mathrm{Im}(\psi, \phi) = \mathrm{Im}(T\phi, \phi) - \mathrm{Im}(\lambda(\phi, \phi)) = -\|\phi\|^2 \mathrm{Im}\lambda. \tag{7.2}$$

Из этого соотношения можно уже делать некоторые выводы. Пусть $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ (это справедливо в точности для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и только них), тогда предположив $\psi = 0$, тут же заключаем, что и $\phi = 0$. Это в свою очередь означает, что все такие λ не являются собственными значениями оператора T, т. е. $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, и обратный к $T - \lambda$ определен.

Применим к неравенству (7.2) неравенство Коши – Буняковского (– Шварца):

$$\|\phi\|^2 \, |\mathrm{Im}\lambda| = |\mathrm{Im}(\psi, \phi)| \leq |(\psi, \phi)| \leq \|\phi\| \|\psi\|,$$

откуда, вспоминая, что $\phi = (T - \lambda I)^{-1}\psi$, получим

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\psi\| \leq \frac{\|\psi\|}{|\mathrm{Im}\lambda|}.$$

Из этой оценки следует, что либо $\lambda \in \rho(T)$, либо $\lambda \in \sigma_r(T)$.

Вспомним теперь, что T самосопряжен, это в частности означает, что

$$\mathrm{cl}(\mathrm{im}(T - \lambda I)) = (\ker(T^* - \overline{\lambda} I))^\perp = (\ker(T - \overline{\lambda} I))^\perp.$$

Мы выяснили, что для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ядро $\ker(T - \overline{\lambda} I) = \{0\}$, поэтому

$$\mathrm{cl}(\mathrm{Dom}(T - \lambda I)^{-1}) = \mathrm{cl}(\mathrm{im}(T - \lambda I)) = \mathrm{H},$$

т. е. все такие λ суть регулярные значения.

Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ определен; покажем, что он замкнут. Рассмотрим его график:

$$\begin{aligned}\Gamma((T - \lambda I)^{-1}) &= \{< \psi, (T - \lambda I)^{-1}\psi >:\ \psi \in \operatorname{im}(T - \lambda I)\}\\ &= \{< (T - \lambda I)\phi, \phi >:\ \phi \in \mathrm{Dom}T\}\\ &= \{< -(\lambda I - T)\phi, \phi >:\ \phi \in \mathrm{Dom}T\}\\ &= \{V < \phi, (\lambda I - T)\phi >:\ \phi \in \mathrm{Dom}T\}\\ &= V[\Gamma((\lambda I - T))],\end{aligned}$$

где $V < \phi, \psi > = < -\psi, \phi >$ – унитарный оператор, уже известный нам по лекции №4. Так как оператор T замкнут, то и $\lambda I - T$ тоже замкнут, а, следовательно, и $\Gamma((\lambda I - T)$ – замкнутое множество. Поскольку унитарный оператор переводит замкнутые множества в замкнутые, то выведенное равенство свидетельствует о замкнутости $\Gamma((T - \lambda I)^{-1})$ и, следовательно, оператора $(T - \lambda I)^{-1}$. Так как у обратных замкнутых операторов область определения плотна (упражнение 7.2), то $\sigma_r(T) = \emptyset$. Теорема доказана. $\square$

Пример 7.3. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ и $T = i\frac{d}{dx}$, определенный на множестве $\mathrm{Dom}T = W_2^1(\mathbb{R}) = AC_2(\mathbb{R})$.

Легко проверить, как в примере 5.2, что оператор T самосопряжен. Единственное, что для этого нужно сделать, так это показать, что всякая $f \in W_2^1(\mathbb{R})$ стремится к нулю на бесконечности. Действительно, по неравенству Шварца имеем:

$$\left|\int_a^b f(x)f'(x)\,dx\right|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |f'(x)|^2\,dx.$$

Так как f и f' лежат в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, то правая часть последнего неравенства стремиться к нулю при одновременном (и независимом друг от друга) стремлении $a, b \to +\infty$. Левая часть легко вычисляется и равна $\left|\frac{(f^2(b) - f^2(a))^2}{4}\right|$. Отсюда получаем, что существует предел $\lim\limits_{a\to+\infty} f^2(a)$, из того, что $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ с необходимостью должно следовать, что этот предел равен нулю. Аналогичные рассуждения верны для $-\infty$.

Покажем теперь, что $\sigma(T) = \sigma_c(T) = \mathbb{R}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, рассмотрим уравнение

$$if' - \lambda f = g, \quad g \in W_2^1(\mathbb{R}). \tag{7.3}$$

Решим его классический вариант (т. е. считаем, что производная определена всюду). Это можно делать, так из условия, что f и g непрерывны (аналог теоремы Соболева), то и f' непрерывна, а значит производная существует в каждой точке.

Легко проверить, что решение этого уравнения задается формулой:

$$f(x) = -ie^{-i\lambda x} \int_{-\infty}^{x} e^{i\lambda y} g(y)\, dy.$$

Однако не легко понять для каких функций g функция f, задаваемая этой формулой будет лежать в нашей области определения $W_2^1(\mathbb{R})$.

Запишем решение этого уравнения с помощью преобразования Фурье (пример 2.5). Навесим на уравнение (7.3) обратное преобразование Фурье $\mathfrak{F}_-$ и воспользуемся свойством: $\mathfrak{F}_\pm[f'](x) = \pm ix\mathfrak{F}_\pm[f](x)$. Получим цепочку равенств:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{F}_-[if'](x) - \lambda\mathfrak{F}_-[f](x) & = & \mathfrak{F}_-[g](x) \\
\mathfrak{F}_-[f](x)(x-\lambda) & = & \mathfrak{F}_-[g](x) \\
\mathfrak{F}_-[f](x) & = & \mathfrak{F}_-[g](x)(x-\lambda)^{-1} \\
f(y) & = & \mathfrak{F}_+[\mathfrak{F}_-[g](x)(x-\lambda)^{-1}](y)
\end{array}$$

Так как преобразование Фурье сохраняет норму, то для того, чтобы $f \in W_2^1(\mathbb{R})$ достаточно требовать, чтобы $\mathfrak{F}_-[g](x)(x-\lambda)^{-1}$ лежала в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Для этого достаточно взять функцию g такой, что $G(x) = \mathfrak{F}_-[g](x)$ имела бы компактный носитель, не содержащий точку λ. Множество таких функций G плотно в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, а поскольку унитарный оператор сохраняет всюду плотность множества, то и множество функций $g(x) = \mathfrak{F}_+[G](x)$ также всюду плотно в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Ясно, что не для всех g функция $f \in W_2^1(\mathbb{R})$. Таким образом, мы показали, что вещественные числа суть точки непрерывного спектра оператора T.

7.3. Поведение спектра при расширении оператора

Пусть T – линейный оператор и T_1 – его расширение. Рассмотрим вопрос об изменении спектра при таком расширении.

Ясно, что:

1) Точечный спектр не может уменьшиться, а может только увеличиться, так как собственные вектора оператора T_1 могут не лежать в области определения $\mathrm{Dom}T$ оператора T;

2) Остаточный спектр не может увеличиться, поскольку

$$\mathrm{Dom}(T-\lambda I)^{-1} = \mathrm{im}(T-\lambda I) \subset \mathrm{im}(T_1-\lambda I) = \mathrm{Dom}(T_1-\lambda I)^{-1}$$

и не плотность крайнего правого множества влечет не плотность крайнего левого.

3) Точки резольвентного множества при расширении не могут стать точками остаточного спектра расширения, так как опять же всюду плотность крайнего левого множества из пункта 2) влечет всюду плотность крайнего правого. Однако регулярные точки могут перейти в точечный спектр, поскольку ядро расширения не уменьшается, а также в непрерывный спектр, так как из увеличения области определения оператор может стать неограниченным.

4) Точки непрерывного спектра не могут стать точками остаточного для расширения. Рассуждения такие же как в пункте 3). И не могут стать точками резольвенты, так как неограниченный оператор не может стать ограниченным.

Все возможные изменения спектра при переходе к расширению указаны на рис. 5. Рассмотрим реализацию некоторых переходов на примере.

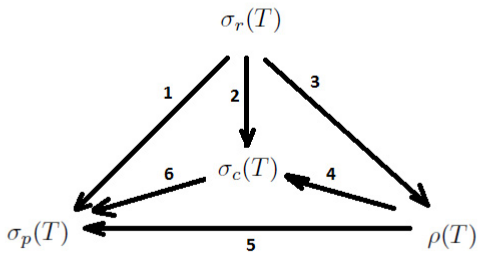


Рис. 5. Изменение спектра при расширении оператора

Пример 7.4. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0,\infty)$ и $T = i\frac{d}{dr}$ – оператор радиального импульса, определенный на множестве $\mathrm{Dom}T = W_2^1(0,\infty) \cap \{f(0) = 0\}$.

В качестве его расширения T_1 возьмем его сопряженный T^*. Легко проверить (как в примере 5.2), что $T^*f(r) = i\frac{d}{dr}f(r)$ и $\mathrm{Dom}T^* = W_2^1(0,\infty)$. Кроме того, также легко находится $T^{**} = T$. Таким образом, T – замкнутый симметрический оператор. Найдем его спектр и спектр его сопряженного.

Так как T – симметрический, то по теореме 7.1 $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$. Пусть теперь $\mathrm{Im}\lambda < 0$, тогда оно есть собственное значение оператора T^*. Действительно, решая в $W_2^1(0,\infty)$ уравнение $i\frac{d}{dr}f(r) = \lambda f(r)$, получаем функцию

$$f(r) = ce^{-i\lambda x} = ce^{-i\mathrm{Re}\lambda x}e^{\mathrm{Im}\lambda x} \in W_2^1(0,\infty).$$

Таким образом, получаем, что $\{\mathrm{Im}\lambda < 0\} \subset \sigma_p(T^*)$. С другой стороны $\{\mathrm{Im}\lambda < 0\| \subset \rho(T)$. Действительно, решением уравнения $if' - \lambda f = g,\ g \in W_2^1(0,\infty)$ будет функция

$$f(x) = -i\int_0^x e^{i\lambda(y-x)}g(y)\,dy = -\int_0^x e^{\mathrm{Im}\lambda(y-x)}e^{-i\mathrm{Re}\lambda(y-x)}g(y)\,dy,$$

которая для всех финитных g будет лежать в пространстве $W_2^1(0,\infty)\cap\{f(0)=0\}$. Тогда из теоремы 7.1 будет следовать, что оператор $(T-\lambda I)^{-1}$ ограничен, а мы только что показали, что плотно определен – значит это резольвента.

Эти рассуждения показывают реализацию стрелки 5 на диаграмме из рис. 5.

Среди расширений важным является замыкание оператора, если оно существует. В этом случае не все стрелки диаграммы реализуются. Стрелки 2, 3, 4 и 5 отсутствуют. Действительно, 2 отсутствует, так как замыкание не плотной области определения не может стать всюду плотной, а 3, 4 и 5 – так как резольвентное множество остается неизменным, т. е. $\rho(T) = \rho(\overline{T})$ (упражнение 7.4).

Упражнения

7.1. Пусть A и A^* операторы уничтожения и рождения частиц из примера 7.2. Найти множество $D \subset \mathrm{Dom}A$ такое, что для всех $\xi \in D$ верно равенство $A^*A - AA^* = -I$. Найти точечный спектр оператора числа частиц $N = A^*A$, определенного на D.

7.2. Пусть T – плотно определенный линейный оператор гильбертова пространства H, и T^{-1} замкнут. Показать, что $\mathrm{im}T$ плотно в H.

7.3. Найти оставшиеся части спектра операторов T и T^* из примера 7.4.

7.4. Пусть T – замыкаемый линейный оператор. Показать, что $\rho(T) = \rho(\overline{T})$.

Лекция № 8. Спектральная теорема в геометрической форме

8.1. Унитарная эквивалентность

В этой лекции мы покажем, что всякий самосопряженный (и ограниченный нормальный) оператор в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию – это утверждение называется спектральной теоремой в геометрической форме. А для начала необходимо изучить терминологию.

Определение 8.1. Пусть H_1 и H_2 – гильбертовы пространства. Операторы $T_1 \in \mathfrak{L}(\mathrm{H}_1)$ и $T_2 \in \mathfrak{L}(\mathrm{H}_2)$ называются **унитарно эквивалентными**, если существует унитарный оператор[4] $U : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ такой, что

$$T_1 = U^* T_2 U.$$

Или, как говорят, диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dom}T_1 & \xrightarrow{U} & \mathrm{Dom}T_2 \\ \big\downarrow{\scriptstyle T_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle T_2} \\ \mathrm{H}_1 & \xrightarrow{U} & \mathrm{H}_1 \end{array}$$

Пример 8.1. Пусть $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим операторы координаты и импульса с их естественными областями определения:

$$T_1 f(x) = x f(x), \ \mathrm{Dom}T_1 = \{f \in \mathrm{H} : x f(x) \in \mathrm{H}\},$$

$$T_2 f(x) = iDf(x), \ \mathrm{Dom}T_2 = W_2^1(\mathbb{R}).$$

Далее, пусть $U = \mathfrak{F}_+$ – преобразование Фурье – Планшереля. Покажем, что оно осуществляет унитарную эквивалентность между операторами T_1 и T_2. Действительно,

$$UT_1 f(x) = \mathfrak{F}_+[y f(y)](x) = iD\mathfrak{F}_+[f(y)](x),$$

что эквивалентно

$$T_1 f(x) = U^{-1} T_2 U f(x) = U^* T_2 U f(x).$$

[4]$U^{-1} = U^*$ и U^* определяется стандартным образом: для любых $x \in \mathrm{H}_1$ и $y \in \mathrm{H}_2$ верно равенство $(Ux, y)_{\mathrm{H}_2} = (x, U^* y)_{\mathrm{H}_1}$

Однако для коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Dom}T_1 \arrow[r, "\mathfrak{F}_+"] \arrow[d, "T_1"] & \mathrm{Dom}T_2 \arrow[d, "T_2"] \\ \mathrm{H}_1 & \mathrm{H}_2 \arrow[l, "\mathfrak{F}_-"'] \end{tikzcd}$$

необходимо убедиться, что преобразование Фурье – Планшереля переводило $\mathrm{Dom}T_1$ на $\mathrm{Dom}T_2$ (упражнение 8.1.). Это станет тем более очевидным, если мы сузим области определения обоих операторов до множества быстроубывающих функций $\mathfrak{I}(\mathbb{R})$.

Важным свойством унитарной эквивалентности является сохранение всех частей спектра эквивалентных операторов.

Теорема 8.1 (О сохранении спектра при унитарной эквивалентности). Пусть H_1 и H_2 – гильбертовы пространства и операторы $T_1 \in \mathfrak{L}(\mathrm{H}_1)$ и $T_2 \in \mathfrak{L}(\mathrm{H}_2)$ унитарно эквивалентны. Тогда все части спектра обоих операторов совпадают:

$$\begin{array}{ll} \sigma_p(T_1) = \sigma_p(T_2), & \sigma_c(T_1) = \sigma_c(T_2), \\ \sigma_r(T_1) = \sigma_r(T_2), & \rho(T_1) = \rho(T_2). \end{array}$$

Доказательство теоремы 8.1. Ввиду равноправия операторов достаточно доказать лишь односторонние включения указанных множеств.

Пусть $\lambda \in \sigma_p(T_1)$, тогда существует $x \in \mathrm{Dom}T_1, x \neq 0$ и $y \in \mathrm{Dom}T_2$ такие, что $Ux = y \neq 0$ и

$$\begin{array}{rcl} T_1 x & = & \lambda x, \\ T_1 U^{-1} y & = & \lambda U^{-1} y, \\ T_1 U^{-1} y & = & \lambda U^{-1} y, \\ U T_1 U^{-1} y & = & \lambda y, \\ T_2 y & = & \lambda y. \end{array}$$

Таким образом $\lambda \in \sigma_p(T_2)$.

Остальные включения следуют из равенства

$$(T_1 - \lambda I)^{-1} = (U^{-1} T_2 U - \lambda U^{-1} U)^{-1} = \\ = (U^{-1}(T_2 - \lambda I)U)^{-1} = U^{-1}(T_2 - \lambda I)^{-1} U. \quad \square$$

По сути мы уже пользовались этой теоремой в примере 7.3.

8.2. Спектральная мера, ассоциированная с циклическим вектором

Для формулировки теоремы нужно еще одно определение.

Определение 8.2. Измеримое пространство, или пространство с мерой – это тройка $(X, \mathcal{F}, \mu)$, состоящая из непустого множества X, σ-алгебры его подмножеств $\mathcal{F}$ и меры μ, определенной на всех множествах из $\mathcal{F}$.

Это означает следующее:

1) $\mathcal{F}$ – σ-алгебра: $X \in \mathcal{F}$; если A и B из $\mathcal{F}$, то $A \cup B$ и $A \cap B$ также лежат в $\mathcal{F}$; если последовательность множеств $A_n \in \mathcal{F}$, то $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$.

2) μ – мера: $\mu \geq 0$; $\mu(\emptyset) = 0$; и если $A = \sqcup A_n$, $A_n \in \mathcal{F}$, то $\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$.

Пример 8.2. Важным примером измеримого пространства является борелевская σ-алгебра на вещественной прямой (или ее подмножестве) с мерой Лебега: $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), dx)$.

Теорема 8.2 (Спектральная теорема в геометрической форме). Пусть T – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Существуют такое пространство X с мерой μ, такая измеримая функция $a(x)$, $x \in X$ и такой унитарный оператор $U : \mathrm{H} \to \mathrm{L}_2(X, \mu)$, что оператор T унитарно (относительно U) эквивалентен оператору M_a умножения на функцию a, т. е. коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dom} T & \xrightarrow{U} & \mathrm{Dom} M_a \\ \big\downarrow{\scriptstyle T} & & \big\downarrow{\scriptstyle M_a} \\ \mathrm{H} & \xleftarrow{U^{-1}} & \mathrm{L}_2(X, \mu), \end{array}$$

где $\mathrm{Dom} M_a = \{f \in \mathrm{L}_2(X, \mu) : a(x)f(x) \in \mathrm{L}_2(X, \mu)\}$.

Мы будем доказывать эту теорему в несколько этапов, начиная с простых случаев. И начнем с ограниченных операторов.

Пусть $A = A^*$ – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H и $\psi \in \mathrm{H}$, тогда отображение $F : C(\sigma(A)) \to \mathbb{R}$, действующее по правилу[5]

$$F(f) = (f(A)\psi, \psi)$$

будет положительным линейным функционалом.

[5] Напомним, что функции от ограниченных эрмитовых операторов мы умеем определять (см. Лекцию 2).

По теореме Рисса – Маркова существует единственная мера μ_ψ на борелевских подмножествах компакта $\sigma(A)$ такая, что

$$F(f) = (f(A)\psi, \psi) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_\psi(\lambda). \tag{8.1}$$

Определение 8.3. Мера μ_ψ, определяемая равенством (8.1) называется **спектральной мерой, ассоциированной с вектором** ψ.

Определение 8.4. Вектор $\psi \in \mathrm{H}$ называется **циклическим** для ограниченного оператора A, если

$$\mathrm{cl}(\mathrm{lin}\,\{A^n\psi, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}) = \mathrm{H}.$$

В этом случае оператор A называется **оператором с простым спектром**. Это название связано с тем, что в конечномерном пространстве такие операторы имеют собственные числа кратности один (упражнение 8.3).

Лемма 8.1 (Спектральная теорема для операторов с простым спектром). Пусть $A = A^* \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ и ψ – циклический вектор для A. Тогда существует унитарный оператор $U : \mathrm{H} \to \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_\psi)$, осуществляющий унитарную эквивалентность оператора A и оператора M_λ умножения на функцию $f(\lambda) = \lambda$. При этом $U\psi = 1$.

Ясно, что это утверждение, есть частный случай теоремы 8.2.

Доказательство леммы 8.1. Пусть $f \in \sigma(A)$ (напомним, что $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$), тогда на линейном пространстве $\mathfrak{L} = \{f(A)\psi :\ f \in C(\sigma(A))\}$ определим оператор U, действующий в $\mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_\psi)$ формулой

$$Uf(A)\psi = f.$$

Отсюда ясно, что $U\psi = 1$.

Покажем, что он корректно определен и изометричен. Рассмотрим равенство:

$$\begin{aligned}\|f(A)\psi\|^2 &= (f(A)\psi, f(A)\psi) = ((f(A))^* f(A)\psi, \psi) \\ &= (\overline{f}(A) f(A)\psi, \psi) = (|f|^2(A)\psi, \psi) \\ &= \int_{\sigma(A)} |f(\lambda)|^2\, d\mu_\psi = \|Uf(A)\psi\|^2.\end{aligned}$$

Из него видно, что если $f(\lambda) = g(\lambda)$ для μ_ψ-почти всех точек $\lambda \in \sigma(A)$, то $f(A)\psi = g(A)\psi$, следовательно, U корректно определен и к тому же сохраняет норму.

Так как ψ циклический для A, то (см. упражнение 8.2)

$$\mathrm{cl}\mathfrak{L} = \mathrm{cl}(\mathrm{lin}\,\{f(A)\psi :\ f \in C(\sigma(A))\}) = \mathrm{H}.$$

По непрерывности продолжаем оператор U на все H. Поскольку $C(\sigma(A))$ всюду плотно в $\mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_\psi)$, то

$$\begin{aligned}\mathrm{im}U &= \mathrm{cl}(U\mathfrak{L}) = \mathrm{cl}C(\sigma(A)) = \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_\psi)\\ \mathrm{im}U &= \mathrm{cl}(U\mathfrak{L}) = U(\mathrm{cl}\mathfrak{L}) = U\mathrm{H}.\end{aligned}$$

Таким образом U унитарен (так изометричен и образ есть все пространство), кроме того для любой $f \in C(\sigma(A))$ верно равенство:

$$\begin{aligned}(UAU^{-1}f)(\lambda) &= (UAf(A)\psi)(\lambda) = (U(xf)(A)\psi)(\lambda)\\ &= \lambda f(\lambda),\end{aligned}$$

которое по непрерывности продолжается на все $\mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_\psi)$. Лемма доказана. □

8.3. Спектральная теорема для ограниченного самосопряженного оператора

В дальнейшем, чтобы не прибегать к трансфинитной индукции мы будем предполагать гильбертово пространство H сепарабельным. Это автоматически гарантирует счетный базис и разложение пространства в прямую сумму максимум счетного числа взаимноортогональных подпространств.

Лемма 8.2 (О циклических подпространствах симметрического оператора). Пусть $A = A^* \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$. Тогда существует разложение в ортогональную прямую сумму

$$\mathrm{H} = \oplus_{n=1}^{k} \mathrm{H}_n, \ k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

такую, что $A\mathrm{H}_n \subseteq \mathrm{H}_n$ и существует $\psi_n \in \mathrm{H}_n$ такой, что $\mathrm{H}_n = \mathrm{cl}(\mathrm{lin}\,\{f(A)\psi_n :\ f \in C(\sigma(A))\})$, т. е. ψ_n – циклический вектор для оператора $A|_{\mathrm{H}_n}$.

Будем называть подпространства H_n **циклическими**.

Доказательство леммы 8.2.

Пусть $\psi_1 \in \mathrm{H}$. Рассмотрим замкнутое линейное подпространство

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{cl}(\mathrm{lin}\,\{A^n\psi_1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}).$$

Ясно, что $A\mathrm{H}_1 \subseteq \mathrm{H}_1$. Положим $\mathrm{H}^1 = \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_1$, т. е. $\mathrm{H}^1 = \mathrm{H}_1^\perp$. Возьмем $\psi_2 \in \mathrm{H}^1$ и рассмотрим подпространство

$$\mathrm{H}_2 = \mathrm{cl}(\mathrm{lin}\,\{A^n\psi_2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}).$$

Ясно, что $\mathrm{H}_2 \perp \mathrm{H}_1$.

Продолжая таким образом, получим цепочку вложенных линейных подпространств

$$\mathrm{H} \supset \mathrm{H}^1 \supset \mathrm{H}^2 \supset \ldots \supset \mathrm{H}^k.$$

По лемме Цорна у этой цепочки есть "максимальный" элемент $\mathrm{H}^k = \mathrm{H}_k$, где ввиду сепарабельности $k \leq \infty$.

Отсюда получаем требуемое равенство $\mathrm{H} = \oplus_{n=1}^k \mathrm{H}_n$ и для каждого n вектор ψ_n – циклический для оператора $A|_{\mathrm{H}_n}$. $\square$

Лемма 8.3 (Спектральная теорема для ограниченного симметрического оператора: вариант с прямой суммой). Пусть $A = A^* \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$, тогда существуют меры $\{\mu_n\}_{n=1}^k$, $k \leq \infty$, определенные на борелевских подмножествах $\sigma(A)$, и унитарный оператор

$$U : \mathrm{H} \to \bigoplus_{n=1}^k \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_n)$$

такой, что для любой $f(\lambda) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots) \in \bigoplus_{n=1}^k \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_n)$

$$(UAU^{-1}f)_n(\lambda) = \lambda f_n(\lambda).$$

Доказательство леммы 8.3. По лемме 8.2 имеем (аддитивное) разложение $\mathrm{H} = \oplus_{n=1}^k \mathrm{H}_n$, по лемме 8.1 каждый из операторов $A|_{\mathrm{H}_n}$ унитарно эквивалентен (с помощью унитарного оператора $U_n : \mathrm{H}_n \to \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_{\psi_n})$) умножению на λ. Тогда остается положить

$$U|_{\mathrm{H}_n} = U_n, \quad \mu_n = \mu_{\psi_n} \quad \square$$

Перейдем теперь к основному утверждению для ограниченных операторов. Оно дословно повторяет утверждение теоремы 8.2 с некоторыми уточнениями, которые мы специально выделим.

Теорема 8.3 (Спектральная теорема для ограниченного симметрического оператора: основной вариант). Пусть T – *ограниченный* самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Существуют такое пространство X с *конечной* мерой μ, такая *вещественная* измеримая *ограниченная* функция $a(x)$, $x \in X$ и такой унитарный оператор $V : \mathrm{H} \to \mathrm{L}_2(X, \mu)$, что оператор T унитарно (относительно V) эквивалентен *ограниченному* оператору M_a умножения на функцию a.

Доказательство теоремы 8.3. Для доказательства нам нужно каким-то образом "превратить" пространство $\bigoplus_{n=1}^k \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_n)$

в некоторое $L_2(X, \mu)$. Сделаем это следующим образом. Так как спектр $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$, то можно считать, что меры μ_n определены на всем $\mathbb{R}$, зануляясь вне "своего" $\sigma(A)$. Это означает следующее. Возьмем на числовой прямой и размести все отрезки длины $2\|A\|$ рядом друг за другом, и на каждом из них поместим свою меру μ_n, а над каждым отрезком свою "сдвинутую" функцию $a_n(x) = x - 2\|A\|n$ (см. рис. 6).

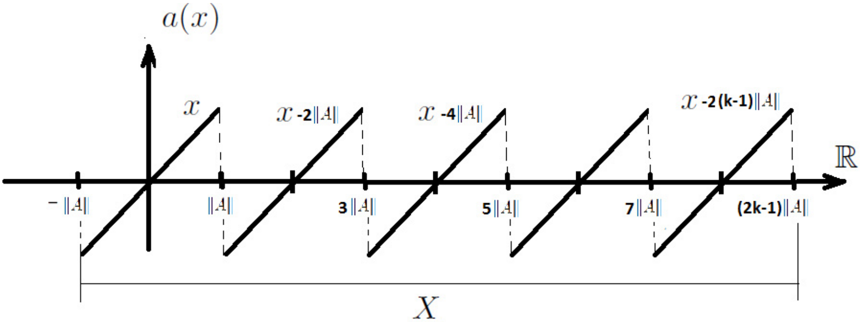


Рис. 6. Пространство X и функция $a(x)$ на нем

Перейдем к формальному определению. Положим

$$X = \bigcup_{n=0}^{k-1} [(2n-1)\|A\|, (2n+1)\|A\|], \ k \leq \infty.$$

Нормируем вектора ψ_n из леммы 8.3 так, что $\|\psi_n\| = 1/2^n$. Определим меру μ следующим образом (напомним, что меры μ_n имеют носителем спектр $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$):

$$\mu = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \mu_{n+1}, \ k \leq \infty,$$

где сдвинутые меры $a_n\mu_{n+1}$ определяются следующим образом: для всякого борелевского множества $E \subseteq [(2n-1)\|A\|, (2n+1)\|A\|]$ имеем $a_n\mu_{n+1}(E) = \mu_{n+1}(a_n(E))$.

Сразу покажем, что мера конечна. Действительно,

$$\mu(X) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \mu_{n+1}(X) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \mu_{n+1}([(2n-1)\|A\|, (2n+1)\|A\|])$$

$$
= \sum_{n=0}^{k-1} \mu_{n+1}([-\|A\|, \|A\|]) = \sum_{n=0}^{k-1} \int_{\sigma(A)} 1\, d\mu_{n+1} = \sum_{n=1}^{k} \|U_n \psi_n\|^2
$$

$$
= \sum_{n=1}^{k} \|\psi_n\|^2 \le \sum_{n=1}^{k} 1/4^n < \infty.
$$

Следующим шагом докажем изоморфность пространств $\bigoplus_{n=1}^{k} \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_n)$ и $\mathrm{L}_2(X, \mu)$, т. е. построим взаимно-однозначное отображение J, сохраняющее скалярное произведение. Для всякой $f(\lambda) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots) \in \bigoplus_{n=1}^{k} \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_n)$ положим

$$
(Jf)(x) = \sum_{n=0}^{k-1} I_{[(2n-1)\|A\|, (2n+1)\|A\|]} f_{n+1}(a_n x),
$$

где функции f_n мы считаем зануляющимися вне $\sigma(A)$.

Достаточно показать сохранение скалярного произведения:

$$
(Jf, Jg) = \int_X (Jf)(x) \overline{(Jg)(x)}\, d\mu(x) =
$$

$$
= \sum_{n=0}^{k-1} \int\limits_{(2n-1)\|A\|}^{(2n+1)\|A\|} (Jf)(x) \overline{(Jg)(x)}\, d a_n \mu_{n+1}(x) =
$$

$$
= \sum_{n=0}^{k-1} \int\limits_{(2n-1)\|A\|}^{(2n+1)\|A\|} f_{n+1}(a_n x) \overline{g_{n+1}(a_n x)}\, d\mu_{n+1}(a_n x) =
$$

$$
= \sum_{n=1}^{k} \int\limits_{-\|A\|}^{\|A\|} f_n(y) \overline{g_n(y)}\, d\mu_n(y) = (f, g).
$$

Обратное отображение J^{-1} также легко найти. Для всякого $\phi \in \mathrm{L}_2(X, \mu)$ имеем:

$$
(J^{-1}\phi)(\lambda) = (\ldots, (I_{[(2n-1)\|A\|, (2n+1)\|A\|]} \phi)(a_n^{-1} \lambda), \ldots).
$$

Отсюда и из сохранении нормы следует, что J унитарен. Положим теперь (см. рис. 6)

$$
a(x) = \sum_{n=0}^{k-1} I_{[(2n-1)\|A\|, (2n+1)\|A\|]} a_n(x), x \in X.
$$

Ясно, что $a(x)$ ограниченная функция. Наконец, покажем, что A унитарно эквивалентен (ограниченному) оператору M_a умножения на функцию a, где унитарный оператор есть $V = JU$, т. е. нужно доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H} & \xrightarrow[U]{} & \bigoplus_{n=1}^k \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_n) & \xrightarrow[J]{} & \mathrm{L}_2(X, \mu) \\ \downarrow{\scriptstyle A} & & \downarrow{\scriptstyle L_\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle M_a} \\ \mathrm{H} & \xrightarrow[U]{} & \bigoplus_{n=1}^k \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_n) & \xrightarrow[J]{} & \mathrm{L}_2(X, \mu) \end{array} \tag{8.2}$$

Для всякой функции $\phi \in \mathrm{L}_2(X, \mu)$ имеем

$$(VAV^{-1}\phi)(x) = JUAU^{-1}J^{-1}\phi = JL_\lambda J^{-1}\phi = M_a\phi = a(x)\phi(x),$$

где оператор $L_\lambda : \bigoplus_{n=1}^k \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_n) \to \bigoplus_{n=1}^k \mathrm{L}_2(\sigma(A), \mu_n)$ действующий по правилу

$$L_\lambda(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots)) = (\lambda f_1(\lambda), \lambda f_2(\lambda), \ldots)),$$

унитарно эквивалентен (относительно J) оператору M_a (упражнение 8.4). Утверждение теоремы полностью доказано. $\square$

Из доказательства легко понять, что реализация пространства $\mathrm{L}_2(X, \mu)$ не единственна, но все такие пространства изоморфны. Оператор L_λ называют **спектральной картиной** оператора T. Ясно, что таких реализаций множества, но есть среди них такие, по которым можно полностью восстановить оператор T. Об этом мы поговорим в дальнейшем.

Пример 8.3. Рассмотрим операторы правого и левого сдвига:

$$(Ra)_n = a_{n-1}, \quad (La)_n = a_{n+1},$$

определенные на пространстве

$$\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{C}) = \left\{ a = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) : \sum_n |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Положим $A = R + L$. Ясно, что $A^* = R^* + L^* = L + R = A$. Отобразим пространство H в $\mathrm{L}_2([0,1], dx)$ с помощью унитарного преобразования

$$U(\{a_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x},$$

переводящее коэффициенты Фурье в ряд Фурье интегрируемой с квадратом функции.

Тогда можно проверить, что ULU^{-1} есть умножение на функцию $e^{-2\pi ix}$, а URU^{-1} – умножение на $e^{2\pi ix}$. Тогда UAU^{-1} равен умножению на функцию $2\cos 2\pi x$.

8.4. Спектральная теорема для ограниченного нормального оператора

Напомним, что для ограниченного нормального оператора T справедливо разложение $T = \mathrm{Re}T + i\mathrm{ImT}$ с $[\mathrm{Re}T, \mathrm{Im}T] = 0$, где $\mathrm{Re}T$ и $\mathrm{Im}T$ самосопряженные операторы. Сформулируем геометрическую форму спектральной теоремы для таких операторов как следствие теоремы из предыдущего раздела.

Теорема 8.4 (Спектральная теорема для ограниченного нормального оператора). Пусть A – ограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве H. Существуют такое пространство X с *конечной* мерой μ, такая *комплексная* измеримая *ограниченная* функция $a(x)$, $x \in X$ и такой унитарный оператор $V : \mathrm{H} \to \mathrm{L}_2(X, \mu)$, что оператор T унитарно (относительно V) эквивалентен *ограниченному* оператору M_a умножения на функцию a. В частности, если A – унитарен, то $|a| = 1$.

Доказательство теоремы 8.4. По теореме 8.3 существуют такие пространства X_1 и X_2, с мерами ν_1 и ν_2, вещественные ограниченные функции a_1 и a_2 и унитарные операторы $V_n : \mathrm{H} \to \mathrm{L}_2(X_n, \nu_n), n = 1, 2$ такие, что

$$V_1 \mathrm{Re}T V_1^{-1} = M_{a_1}, \quad V_2 \mathrm{Im}T V_2^{-1} = M_{a_2}.$$

Ввиду условия $[\mathrm{Re}T, \mathrm{Im}T] = 0$ можно считать, что

$$V_1 = V_2 \text{ и } \mathrm{L}_2(X_1, \nu_1) = \mathrm{L}_2(X_2, \nu_2).$$

Объясним, почему это, действительно, так. Обозначим для простоты $A = \mathrm{Re}T$ и $B = \mathrm{Im}T$. Будем следовать схеме доказательства для самосопряженного оператора.

Во-первых, вместо пространства $C(\sigma(A))$, нужно рассмотреть пространство непрерывных функций $C(K)$, где компакт $K = [-\|T\|, \|T\|]^2 \subset \mathbb{R}^2$. На этом пространстве рассмотрим положительный линейный функционал F, который по теореме Рисса –

Маркова будет представляться как

$$F(f) = (f(A,B)\psi,\psi) = \int_K f(x,y)\,d\mu_\psi(x,y)$$

Заметим, что значение функции $f(A,B)$ корректно определено, так как определены значения от степенных функций $x^n y^m$: $A^n B^m = B^m A^n$, а такие функции плотны в $C(K)$ и по непрерывности получаем значение $f(A,B)$.

Во-вторых, вместо циклических векторов, будем рассматривать их обобщение – **допустимые** вектора для A и B, т. е. такие ψ, что подпространство $\mathfrak{L} = \mathrm{lin}\{A^n B^m \psi, n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ всюду плотно в H. Тогда унитарный оператор определятся аналогичным образом на $\mathfrak{L}$:

$$Uf(A,B)\psi = f(x,y).$$

Также как в лемме 8.1, проверятся, что он корректно определен и изометричен и продолжается до унитарного оператора, действующего из H в $\mathrm{L}_2(K,\mu_\psi)$.

И справедливо представление для любой $f \in C(K)$ и $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$(UA^nB^mU^{-1}f)(x,y) = (UA^nB^mf(A,B)\psi)(x,y) = \\ = (U(x^ny^mf)(A,B))(x,y) = x^ny^mf(x,y).$$

Отсюда, полагая $n = 1, m = 0$ и, наоборот, $n = 0, m = 1$ получим представления

$$(UAU^{-1}f)(x,y) = xf(x,y), \quad (UBU^{-1}f)(x,y) = yf(x,y),$$

которые продолжаются по непрерывности на $\mathrm{L}_2(K,\mu_\psi)$.

Дальше уже можно действовать по схемам доказательства лемм 8.2 и 8.3.

В итоге имеем

$$V\mathrm{Re}TV^{-1} = M_{a_1}, \quad V\mathrm{Im}TV^{-1} = M_{a_2},$$

где V : H $\to \mathrm{L}_2(X)$, а X – есть дизъюнктное объединение копий компакта K.

Отсюда получаем

$$VTV^{-1} = V(\mathrm{Re}T + i\mathrm{Im}T)V^{-1} = M_{a_1} + iM_{a_2} = M_{a_1+ia_2} = M_a.$$

и

$$VT^*V^{-1} = V(\mathrm{Re}T - i\mathrm{Im}T)V^{-1} = M_{a_1} - iM_{a_2} = M_{a_1-ia_2} = M_{\overline{a}}.$$

Теперь, если T – унитарный, то $TT^* = I$, откуда

$$I = VTT^*V^{-1} = VTV^{-1}VT^*V^{-1} = M_a M_{\overline{a}} = M_{|a|^2},$$

и $|a| = 1$.

Теорема доказана. $\square$

8.5. Преобразование Кэли и спектральная теорема для неограниченного самосопряженного оператора

Для того, чтобы доказать спектральную теорему в геометрической форме для неограниченных самосопряженных операторов, используя уже доказанную для нормальных, изучим отображение Кэли.

Определение 8.5. Пусть T – линейный оператор в гильбертовом пространстве H. **Преобразованием Кэли** V оператора T называется линейный оператор

$$V = (T - iI)(T + iI)^{-1},$$

отображающий $\mathrm{im}(T + iI)$ в $\mathrm{im}(T - iI)$.

Важное свойство преобразования Кэли выражено в следующей лемме.

Лемма 8.4 (О преобразовании Кэли). Преобразование Кэли устанавливает взаимнооднозначное соответствие между симметрическими операторами T и множеством изометрических операторов V без неподвижных точек. Справедливы равенства

$$\mathrm{Dom}T = \mathrm{im}(V - I) \text{ и } T = -i(V + I)(V - I)^{-1}. \tag{8.3}$$

В частности, T самосопряжен тогда и только тогда, когда V – унитарный оператор.

Доказательство леммы 8.4. Пусть T симметрический оператор. Из определения преобразования Кэли видно, что для всякого $\phi \in \mathrm{Dom}T$ верно равенство

$$V(T + iI)\phi = (T - iI)\phi,$$

откуда видно, что равенство $(T + iI)\phi = (T - iI)\phi$ не может быть выполнено для не нулевых ϕ, т. е. у V нет не подвижных точек. Так как T – симметрический, то (вспоминая, доказательство теоремы 5.1) $\ker(T + iI) = \{0\}$ и V корректно определен. И, наконец, равенство $\|(T + iI)x\| = \|(T - iI)x\|$ легко проверяется.

Покажем, что справедливы соотношения (8.3). Пусть $\phi \in \mathrm{Dom}T$ и $\psi = (T + iI)\phi$. Тогда

$$(V - I)\psi = V\psi - \psi = (T - iI)\phi - (T + iI)\phi = -2i\phi.$$

Откуда следует, что $\mathrm{Dom}T = \mathrm{im}(V - I) = \mathrm{Dom}(V - I)^{-1}$.

Кроме того, имеем

$$(V + I)\psi = V\psi + \psi = (T - iI)\phi + (T + iI)\phi = 2T\phi,$$

откуда

$$T\phi = \frac{1}{2}(V + I)\psi = \frac{-2i}{2}(V + I)(V - I)^{-1}\phi = -i(V + I)(V - I)^{-1}\phi.$$

Пусть теперь T – оператор, задаваемый равенством (8.3), где V – некоторый изометрический оператор без неподвижных точек. Тогда, действительно, T – корректно определен.

Пусть $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Dom}T$ и $\phi_n = (V - I)\psi_n$, $n = 1, 2$. Тогда, используя изометричность V, получаем

$$\begin{aligned}(T\phi_1, \phi_2) &= (-i(V + I)\psi_1, (V - I)\psi_2) = \\ &= -i(V\psi_1, V\psi_2) + i(V\psi_1, \psi_2) - i(\psi_1, V\psi_2) + i(\psi_1, \psi_2) = \\ &= i(V\psi_1, \psi_2) - i(\psi_1, V\psi_2).\end{aligned}$$

Меняя ϕ_1 и ϕ_2 местами, получим равенство

$$(T\phi_1, \phi_2) = \overline{(T\phi_2, \phi_1)},$$

а это означает, что T – симметрический. Осталось проверить, что V, действительно, преобразование Кэли для оператора T. (упражнение 8.5). Лемма доказана. $\square$

Сформулируем теперь спектральную теорему для неограниченного оператора.

Теорема 8.5 (Спектральная теорема для неограниченного самосопряженного оператора). Пусть T – неограниченный самосопряженного оператор в гильбертовом пространстве H. Существуют такое пространство X с *конечной* мерой μ, такая *вещественная* измеримая *неограниченная* функция $a(x)$, $x \in X$ и такой унитарный оператор $U : \mathrm{H} \to \mathrm{L}_2(X, \mu)$, что оператор T унитарно (относительно U) эквивалентен *неограниченному* оператору M_a умножения на функцию a.

Доказательство теоремы 8.5. Пусть T – самосопряженный оператор. Обозначим через V его преобразование Кэли, тогда из леммы 8.4

следует, что V – унитарный оператор, а значит для него справедлива спектральная теорема.

Таким образом, существует унитарный оператор U, отображающий H на некоторое $\mathrm{L}_2(X, \mu)$ и функция $|v| = 1$ такие, что

$$UVU^{-1} = M_v.$$

Функция v не может равняться 1 для почти всех относительно меры μ точек. Действительно, если это не так, то из равенства $UVU^{-1}f = f$ следует, что $VU^{-1}f = U^{-1}f$, т. е. оператор V имеет неподвижные точки, чего не может быть.

На множестве $\{v \neq 1\}$ не нулевой меры определим функцию a равенством

$$a(x) = -i\frac{v+1}{v-1},$$

а всех остальных точках полагаем ее равной бесконечности. Поскольку $A = -i(V+I)(V-I)^{-1}$, то $UAU^{-1} = M_a$. Действительно,

$$\begin{aligned} UAU^{-1} &= -iU(V+I)(V-I)^{-1}U^{-1} = \\ &= -i(UV+U)U^{-1}U(U(V-I))^{-1} = \\ &= -i(UVU^{-1}+I)(UVU^{-1}-I)^{-1} = \\ &= -i(M_v+I)(M_v-I)^{-1} = \\ &= -iM_{v+1}M_{v-1}^{-1} = -iM_{v+1}M_{(v-1)^{-1}} = \\ &= M_{-i\frac{v+1}{v-1}} = M_a. \end{aligned}$$

Осталось проверить, что a вещественна. Это следует из равенства

$$a = -i\frac{(v+1)(\overline{v}-1)}{|v-1|^2} = \frac{-\mathrm{Im} v}{(1-\mathrm{Re} v)}. \quad \square$$

Упражнения

8.1. Показать, что преобразование Фурье – Планшереля действует взаимно-однозначно на естественных областях определения операторов из примера 8.1.

8.2. Пусть A – ограниченный эрмитов оператор. Доказать справедливость равенства $\mathrm{cl}(\mathrm{lin}\,\{A^n\psi, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}) = \mathrm{cl}(\mathrm{lin}\,\{f(A)\psi :\ f \in C(\sigma(A))\})$.

8.3. Доказать, что самосопряженный оператор в конечномерном пространстве имеет циклический вектор тогда и только тогда, когда у него нет повторяющихся собственных значений.

8.4. Доказать коммутативность правой части диаграммы (8.2).

8.5. Показать, что преобразование Кэли симметрического оператора, задаваемого соотношением (8.3), совпадает с изометрией V.

Лекция № 9. Спектральная теорема в аналитической форме

9.1. Проекционные меры

Определение 9.1. Пусть X – непустое множество и $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств множества X. Пусть H – гильбертово пространство. Тогда отображение $\nu : \mathcal{F} \to \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ называется **проекционной,** или **проекторнозначной мерой**, (иногда говорят **разбиение единицы**) если

1) $\nu(E) = (\nu(E))^*$ для любого $E \in \mathcal{F}$;

2) $\nu(E_1 \cap E_2) = \nu(E_1)\nu(E_2)$ для любых $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$;

3) $\nu(E_1 \cup E_2) = \nu(E_1) + \nu(E_2)$ для любых $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ таких, что $E_1 \cap E_2 = \emptyset$;

4) Если $E_n \in \mathcal{F}$ – семейство попарно непересекающихся множеств, то для всякого $\phi \in \mathrm{H}$

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(E_n)\phi \to \nu(E)\phi \text{ при } N \to \infty,$$

где $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ и сходимость понимается в пространстве H.

На самом деле условие 4) вытекает из предыдущих. Однако его полезно приводить, чтобы видеть аналогии с обычными мерами.

Пример 9.1. Пусть $(X, \mathcal{F}, \mu)$ – некоторое измеримое пространство и $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(X, \mu)$. Тогда на $\mathcal{F}$ можно определить проекционную меру ν формулой

$$\nu(E) = M_{\chi_E},$$

где M_{χ_E} – оператор умножения на характеристическую функцию χ_E множества $E \in \mathcal{F}$ (или иногда называют индикатор множества E.) Свойства 1–3 проверяются легко (упражнение 9.1). Подробно рассмотрим свойство 4:

$$\begin{aligned}\|\nu(\sqcup_{n=1}^{N} E_n)\phi - \nu(E)\phi\|^2 &= \int_X \left| M_{\chi_{\sqcup_{n=1}^{N} E_n}} - M_{\chi_E} \right|^2 |\phi|^2 \, d\mu = \\ &= \int_X \left| M_{\chi_{\sqcup_{n=N+1}^{\infty} E_n}} \right|^2 |\phi|^2 \, d\mu = \\ &= \int_{\sqcup_{n=N+1}^{\infty} E_n} |\phi|^2 \, d\mu \to 0\end{aligned}$$

при $N \to \infty$, поскольку $\mu(\sqcup_{n=N+1}^{\infty} E_n) \to 0$.

Этот же пример показывает, что свойство 4) вообще говоря нельзя заменить на более сильное условие сходимости по операторной норме. Действительно,

$$\|M_{\chi_{\sqcup_{n=1}^N E_n}} - M_{\chi_E}\| = \|M_{\chi_{\sqcup_{n=N+1}^\infty E_n}}\| = \sup_{x\in X} |\chi_{\sqcup_{n=N+1}^\infty E_n}| = 1 \nrightarrow 0.$$

Рассмотрим простейшие свойства проекционных мер. Из условия 2) следует, что все операторы $\nu(E),\ E \in \mathcal{F}$ перестановочны друг с другом:

$$\nu(E_1)\nu(E_2) = \nu(E_1 \cap E_2) = \nu(E_2 \cap E_1) = \nu(E_2)\nu(E_1).$$

Условия 1) и 2) вместе гарантируют, что $\nu(E)$ – ортогональный проектор, так как он самосопряжен $\nu(E) = (\nu(E))^*$ и идемпотентен:

$$(\nu(E))^2 = \nu(E)\nu(E) = \nu(E \cap E) = \nu(E).$$

Из проекционной меры ν можно построить целое семейство обычных (положительных и вещественных) мер и зарядов (отрицательных или комплексных мер). Покажем как они конструируются. Пусть $\xi, \eta \in \mathrm{H}$, тогда отображение

$$\nu_{\xi,\eta}(E) = (\nu(E)\xi, \eta) : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$$

есть комплекснозначная мера (заряд) (упражнение 9.2). А $\nu_{\xi,\xi}$ – обычная мера.

9.2. Интеграл по проекционной мере от ограниченной вещественной функции

Используя проекторнозначную меру по аналогии с интегралом Лебега – Стилтьеса можно построить интеграл по этой мере. Пусть f – $\mathcal{F}$-измеримая ограниченная функция, тогда можно определить оператор $A_f \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$ формулой

$$A_f = \int_X f(x)\, d\nu(x), \tag{9.1}$$

который будет пониматься следующим образом: для любых $\xi, \eta \in \mathrm{H}$

$$(A_f\xi, \eta) = \int_X f(x)\, d\nu_{\xi,\eta}.$$

Последний интеграл уже обычный интеграл Лебега, который ввиду ограниченности f конечен:

$$\left|\int_X f(x)\,d\nu_{\xi,\eta}\right| \le \sup_{x\in X}|f(x)||\nu_{\xi,\eta}(X)| =$$
$$= \sup_{x\in X}|f(x)||(\nu(X)\xi,\eta)| \le \sup_{x\in X}|f(x)|\|\xi\|\|\eta\| < \infty.$$

Лемма 9.1 (Об однозначности определения интеграла по проекционной мере). Оператор A_f, заданный формулой (9.1) однозначно определен.

Доказательство леммы 9.1. Ограниченный оператор A однозначно определятся всеми своим скалярными произведениями (Ax,y). $\square$

Итак, пусть f – ограниченная функция, покажем, что, действительно, $A_f \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$:

$$\|A_f\|^2 = \sup_{\xi\ne 0}\frac{\|A_f\xi\|^2}{\|\xi\|^2} = \sup_{\xi\ne 0}\frac{(A_f\xi, A_f\xi)}{\|\xi\|^2} =$$
$$= \sup_{\xi\ne 0}\frac{\int_X f(x)\,d\nu_{\xi,A_f\xi}(x)}{\|\xi\|^2} = \sup_{\xi\ne 0}\frac{\int_X f(x)\overline{f(x)}\,d\nu_{\xi,\xi}(x)}{\|\xi\|^2} \le$$
$$\le \sup_{\xi\ne 0}\frac{\sup_{x\in X}|f(x)|^2\nu_{\xi,\xi}(X)}{\|\xi\|^2} = \sup_{x\in X}|f(x)|^2 < \infty.$$

В приведенной цепочке равенств и неравенств остается понять справедливость предпоследнего равенства. Посмотрим на меру $\nu_{\xi,A_f\xi}$:

$$\nu_{\xi,A_f\xi}(E) = (\nu(E)\xi, A_f\xi) = \overline{(A_f\xi,\nu(E)\xi)} = \overline{\int_X f(x)\,d\nu_{\xi,\nu(E)\xi}(x)} =$$
$$= \overline{\int_X f(x)\,d(\nu(x)\xi,\nu(E)\xi)} = \overline{\int_X f(x)\,d(\nu(x)\nu(E)\xi,\xi)} =$$
$$= \overline{\int_X f(x)\,d(\nu(E\cap x)\xi,\xi)} = \overline{\int_E f(x)\,d(\nu(x)\xi,\xi)} =$$
$$= \int_E \overline{f(x)}\,d\nu_{\xi,\xi}(x).$$

Таким образом, мера $\nu_{\xi,A_f\xi}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\nu_{\xi,\xi}$ с плотностью $\overline{f(x)}$. Следовательно,

$$d\nu_{\xi,A_f\xi} = \overline{f(x)}d\nu_{\xi,\xi}. \tag{9.2}$$

Перейдем теперь к основному свойству: отображение A_f переводит множество ограниченных вещественных функций в ограниченные симметрические операторы.

Лемма 9.2 (О симметричности оператора A_f). Пусть f – ограниченная вещественная функция, тогда оператор A_f, заданный формулой (9.1) симметричен.

Доказательство леммы 9.2. Покажем сначала, что для любых $\xi, \eta \in \mathrm{H}$ верно равенство $\nu_{\xi,\eta} = \overline{\nu_{\eta,\xi}}$. Действительно, для всякого $E \in \mathcal{F}$ имеем

$$\nu_{\xi,\eta}(E) = (\nu(E)\xi, \eta) = (\xi, \nu(E)\eta) = \overline{(\nu(E)\eta, \xi)} = \overline{\nu_{\eta,\xi}}(E).$$

Используя это, получим

$$(A_f\xi, \eta) = \int_X f(x)\, d\nu_{\xi,\eta} = \overline{\int_X f(x)\, d\nu_{\eta,\xi}} = \overline{(A_f\eta, \xi)} = (\xi, A_f\eta). \quad \square$$

9.3. Интеграл по проекционной мере от неограниченной вещественной функции

Аналогично ограниченным функциям определяется интеграл от неограниченных функций f той же формулой (9.1). Однако область определения построенного оператора нужно уточнить

$$\mathrm{Dom} A_f = \{\xi \in \mathrm{H} : \int_X |f(x)|^2\, d\nu_{\xi,\xi} < \infty\} \tag{9.3}$$

и равенство (9.1) понимается так: для всякого $\xi \in \mathrm{Dom} A_f$ и $\eta \in \mathrm{H}$

$$(A_f\xi, \eta) = \int_X f(x)\, d\nu_{\xi,\eta}.$$

Конечность последнего интеграла следует из следующих выкладок. Для всякого $E \in \mathcal{F}$ верно неравенство

$$|\nu_{\xi,\eta}(E)|^2 = |(\nu(E)\xi, \eta)|^2 = |(\nu(E)\xi, \nu(E)\eta)|^2 \le \|\nu(E)\xi\|^2 \|\nu(E)\eta\|^2 = \\ = \nu_{\xi,\xi}(E)\nu_{\eta,\eta}(E).$$

Отсюда, используя это неравенство, а также определение интеграла

Лебега и его свойства и неравенство Коши –Буняковского, получаем

$$\left|\int_X f(x)\,d\nu_{\xi,\eta}\right|^2 \le \left(\int_X |f(x)|\,d|\nu_{\xi,\eta}|\right)^2 = \left(\sup_{0\le h\le|f|}\int_X h(x)\,d|\nu_{\xi,\eta}|\right)^2 =$$

$$= \left(\sup_{0\le h\le|f|}\sum_n c_n|\nu_{\xi,\eta}(E_n)|\right)^2 = \sup_{0\le h\le|f|}\left(\sum_n c_n|\nu_{\xi,\eta}(E_n)|\right)^2 \le$$

$$\le \sup_{0\le h\le|f|}\left(\sum_n c_n\sqrt{|\nu_{\xi,\xi}(E_n)|}\sqrt{|\nu_{\eta,\eta}(E_n)|}\right)^2 \le$$

$$\le \sup_{0\le h\le|f|}\sum_n c_n^2|\nu_{\xi,\xi}(E_n)|\sum_n|\nu_{\eta,\eta}(E_n)| =$$

$$= \sup_{0\le h^2\le|f|^2}\sum_n c_n^2\nu_{\xi,\xi}(E_n)\nu_{\eta,\eta}(X) = \|\eta\|^2\int_X |f(x)|^2\,d\nu_{\xi,\xi} < \infty.$$

Здесь $h(x)=\sum_n c_n I_{E_n}$ –ступенчатая функция, приближающая $f(x)$.

Покажем теперь, что $\mathrm{Dom}A_f$ линейное подпространство плотное в H. Линейность следует из разложения:

$$\int_X |f(x)|^2\,d\nu_{a\xi+b\eta,a\xi+b\eta} = |a|^2\int_X |f(x)|^2\,d\nu_{\xi,\xi} + |b|^2\int_X |f(x)|^2\,d\nu_{\eta,\eta} +$$

$$+ a\bar{b}\int_X |f(x)|^2\,d\nu_{\xi,\eta} + b\bar{a}\int_X |f(x)|^2\,d\nu_{\eta,\xi},$$

где конечность первых двух интегралов в правой части равенства следуют из того, что $\xi,\eta\in\mathrm{Dom}A_f$, а конечность вторых двух (достаточно даже одного) доказывается аналогично доказательству конечности интеграла $\int_X f(x)\,d\nu_{\xi,\eta}$.

Докажем теперь плотность определения оператора A_f. Пусть $E_n=\{n\le|f(x)|\le n+1\}$, $n\ge 0$. Ясно, что $X=\sqcup_{n=0}^\infty E_n$, и так как $\nu(E_n)$ – ортогональный проектор, то $H=\bigoplus_{n=0}^\infty \nu(E_n)H$. Покажем, что для всякого $N\in\mathbb{N}$

$$\bigoplus_{n=0}^N \nu(E_n)H \subset \mathrm{Dom}A_f. \tag{9.4}$$

Достаточно доказать это включение для произвольного $\nu(E_n)H$. Пусть $\xi=\nu(E_n)\eta$, тогда

$$\int_X |f(x)|^2\,d\nu_{\xi,\xi}(x) = \int_X |f(x)|^2\,d(\nu(x)\nu(E_n)\eta,\nu(E_n)\eta) =$$

$$= \int_X |f(x)|^2\,d(\nu(x\cap E_n)\eta,\eta) = \int_{E_n}|f(x)|^2\,d\nu_{\eta,\eta} \le$$

$$\leq (n+1)^2 \nu_\eta(E_n) < \infty.$$

Поскольку линейная оболочка элементов из левой части включения (9.4) всюду плотна в H, то плотна и область определения $\mathrm{Dom} A_f$.

Формула для определения оператора A_f через скалярные произведения, равные интегралу по некоторой мере, похожи на представления положительных линейных функционалов, построенных по самосопряженным операторам из теоремы Рисса – Маркова. На самом деле это не простая аналогия как мы увидим в дальнейшем. Покажем, что оператор A_f самосопряжен.

Лемма 9.3 (О самосопряженности оператора A_f). Пусть f – неограниченная вещественная функция, тогда оператор A_f, заданный формулой (9.1) с областью определения (9.3) самосопряжен.

Доказательство леммы 9.3. Симметричность оператора A_f доказана в лемме 9.2. Воспользуемся критерием самосопряженности. Для этого достаточно доказать, что $\mathrm{im}(T \pm iI) = \mathrm{H}$. Рассмотрим функцию $g(x) = (f(x) \pm i)^{-1}$. Так как f вещественная, то g – ограниченная. Следовательно, всюду в H определен оператор A_g. Покажем, что $A_g = (A_f \pm iI)^{-1}$, откуда и будет следовать требуемое утверждение. Итак, нужно показать, что для любых $\xi, \eta \in \mathrm{H}$ верно равенство

$$((A_f \pm iI)A_g\xi, \eta) = (\xi, \eta). \tag{9.5}$$

Заметим, что $A_f \pm iI = A_{f\pm i}$. Действительно,

$$((A_f \pm iI)\xi, \eta) = (A_f\xi, \eta) \pm i(\xi, \eta) = \int_X f(x)\, d\nu_{\xi,\eta} \pm i \int_X d\nu_{\xi,\eta} =$$
$$= \int_X (f(x) \pm i)\, d\nu_{\xi,\eta} = (A_{f\pm i}\xi, \eta).$$

Используя это замечание и равенство (9.2), получим

$$((A_f \pm iI)A_g\xi, \eta) = (A_{f\pm i}A_g\xi, \eta) = \int_X (f(x) \pm i)\, d\nu_{A_g\xi,\eta} =$$
$$= \int_X (f(x) \pm i)g(x)\, d\nu_{\xi,\eta} = \int_X d\nu_{\xi,\eta} = (\xi, \eta).$$

Равенство (9.5) как и лемма доказаны. □

Мы показали, что всякой проекционной мере и вещественной функции соответствует самосопряженный оператор. На самом деле верно и обратное. Это и есть утверждение замечательной теоремы Гильберта о спектральном разложении.

9.4. Спектральное разложение для ограниченного самосопряженного оператора

Теорема 9.1 (О спектральном представлении ограниченного самосопряженного оператора). Пусть $A = A^* \in \mathfrak{B}(\mathrm{H})$. Существует единственная борелевская проекционная мера $\mathbf{E}$, такая, что для любой борелевской ограниченной на $\sigma(A)$ функции f верно равенство

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(t)\, d\mathbf{E}_t, \tag{9.6}$$

в частности,

$$A = \int_{\sigma(A)} t\, d\mathbf{E}_t. \tag{9.7}$$

Определение 9.2. Проекционная мера $\mathbf{E}$ называется **спектральной**, или **стохастической** мерой оператора A. Для каждого $\Omega \in \mathfrak{B}(\sigma(A))$ оператор $\mathbf{E_\Omega}$ называется **спектральным** проектором. Формулы (9.6) и (9.7) – спектральное **представление (разложение)** оператора A.

Доказательство теоремы 9.2. Воспользуемся борелевским исчислением для эрмитовых операторов и определим для каждого $\Omega \in \mathfrak{B}(\sigma(A))$ оператор $\mathbf{E_\Omega}$ равенством

$$\mathbf{E_\Omega} = \chi_\Omega(A).$$

Проверим, что это, действительно, проекционная мера.
1) $(\mathbf{E_\Omega})^* = (\chi_\Omega(A))^* = \overline{\chi}_\Omega(A) = \chi_\Omega(A) = \mathbf{E_\Omega}$;
2) $\mathbf{E_{\Omega_1\cap\Omega_2}} = \chi_{\Omega_1\cap\Omega_2}(A) = \chi_{\Omega_1}(A)\chi_{\Omega_2}(A) = \mathbf{E_{\Omega_1}}\mathbf{E_{\Omega_2}}$;
3) $\mathbf{E_{\Omega_1\sqcup\Omega_2}} = \chi_{\Omega_1\sqcup\Omega_2}(A) = \chi_{\Omega_1}(A) + \chi_{\Omega_2}(A) = \mathbf{E_{\Omega_1}} + \mathbf{E_{\Omega_2}}$.

Построим по этой проекционной мере и ограниченной борелевской функции f оператор $A_f = \int_{\sigma(A)} f(t)\, d\mathrm{E}_t$. Покажем, что $A_f = f(A)$. Для этого (вспоминая о поляризационном тождестве для скалярного произведения) достаточно для всякого $\xi \in \mathrm{H}$ доказать, равенство

$$(f(A)\xi, \xi) = (A_f\xi, \xi).$$

Вспомним, что для всякой $f \in C(\sigma(A))$ левая часть последнего равенства представляется как

$$(f(A)\xi, \xi) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_\xi(\lambda),$$

где μ_ξ – спектральная мера оператора A, ассоциированная с вектором ξ. Эта формула может быть продолжена и на ограниченные борелевские функции. Так как такие функции могут быть приближены равномерно ограниченной последовательностью f_n непрерывных функций, для которых верна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}(f_n(A)\xi,\xi) & = & \int_{\sigma(A)} f_n(\lambda)\,d\mu_\xi(\lambda) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ (f(A)\xi,\xi) & = & \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\,d\mu_\xi(\lambda),\end{array}$$

где справедливость левой части подтверждается теоремой о борелевском исчислении эрмитовых операторов, а правая часть теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Исходя из этого замечания, нам нужно доказать для всякой ограниченной борелевской функции f равенство

$$\int_{\sigma(A)} f(x)\,d\mu_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,d(\mathbf{E}_t\xi,\xi).$$

Это равенство верно, так как меры одинаковы. Действительно,

$$(\mathbf{E}_{\boldsymbol{\Omega}}\xi,\xi) = (\chi_\Omega(A)\xi,\xi) = \int_{\sigma(A)} \chi_\Omega\,d\mu_\xi = \mu_\xi(\Omega).$$

Итак, спектральное разложение (9.6) и (9.7) доказано. Единственность спектральной меры следует из (9.6) для $f(x) = \chi_\Omega(x)$:

$$\chi_\Omega(A) = \int_{\sigma(A)} \chi_\Omega(t)\,d\mathbf{E}_t = \int_\Omega d\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\Omega}}. \quad \Box$$

Упражнения

9.1. Проверить свойства 1–3 для проекционной меры $\nu(E) = M_{\chi_E}$ из примера 9.1.

9.2. Пусть ν – проекционная мера, показать, что для любых $\xi, \eta \in \mathrm{H}$ функции $\nu_{\xi,\eta}(E) = (\nu(E)\xi, \eta)$ есть комплекснозначная мера.

9.2. Пусть ν – проекционная мера, показать, что $\nu(\emptyset) = 0$ и $\nu(X) = I$.

9.3. Пусть ν – проекционная мера на пространстве $(X, \mathcal{F})$. Показать, что для любых $\xi, \eta \in \mathrm{H}$ верна формула

$$\nu_{\xi,\eta} = \frac{1}{4}(\nu_{\xi+\eta,\xi+\eta} - \nu_{\xi-\eta,\xi-\eta} + i\nu_{\xi-i\eta,\xi-i\eta} - i\nu_{\xi+i\eta,\xi+i\eta}).$$

Лекция № 10. Спектральные проекторы для неограниченного самосопряженного оператора

10.1. Борелевское исчисление неограниченных самосопряженных операторов

Для того, чтобы доказать теорему о спектральном разложении неограниченного самосопряженного оператора нам необходимо определять (как минимум) характеристические функции от такого оператора. Для ограниченных операторов мы умеем проделывать такую процедуру, аналитический вид которой представлен интегралом (9.6).

Теорема 10.1 (Борелевское исчисление неограниченных самосопряженных операторов). Пусть T – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Существует единственный гомоморфизм φ алгебры ограниченных борелевских функций $B(\mathbb{R})$ в алгебру линейных операторов $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$ такой, что

1) $\varphi(1) = I$;
2) $\varphi\left(\frac{t+i}{t-i}\right) = (T+iI)(T-iI)^{-1}$;
3) $\varphi(f)^* = \varphi(\overline{f})$;
4) $\|\varphi(f)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$;
5) если $|f_n(t)| \leq C,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ $f_n(t) \to f(t)$, то $\varphi(f_n)\xi$ сходится к $\varphi(f)\xi$ для любого $\xi \in \mathrm{H}$.

Доказательство теоремы 10.1. По спектральной теореме оператор T представляется как оператор умножения на вещественную функцию в некотором пространстве $\mathrm{L}_2(X,\mu)$:

$$T = U^{-1}M_aU.$$

Тогда определим гомоморфизм φ как

$$\varphi(f) = U^{-1}f(M_a)U = U^{-1}M_{f(a)}U. \tag{10.1}$$

Ясно, что это гомоморфизм (упражнение 10.1). Проверим свойства 1)–5):

$$\varphi(1) = U^{-1}M_1U = U^{-1}U = I;$$

$$\varphi\left(\frac{t+i}{t-i}\right) = U^{-1}M_{\frac{a+i}{a-i}}U = U^{-1}(M_a+iI)U(U(M_a-iI)U^{-1})^{-1} =$$
$$= (T+iI)(T-iI)^{-1};$$

$$\varphi(f)^* = (U^{-1}M_{f(a)}U)^* = U^{-1}M^*_{f(a)}U = U^{-1}M_{\overline{f}(a)}U = \varphi(\overline{f});$$
$$\|\varphi(f)\| = \|U^{-1}M_{f(a)}U\| \le \|M_{f(a)}\| = \sup_{x\in X}|f(a(x))| \le \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|;$$

$$\|\varphi(f_n)\xi - \varphi(f)\xi\|^2 = \|U^{-1}M_{f_n(a)-f(a)}U\xi\|^2 \le \|M_{f_n(a)-f(a)}U\xi\|^2 =$$
$$= \int_X |f_n(a(x)) - f(a(x))|^2|U\xi|^2\,d\mu(x) \to 0.$$

Стремление к нулю происходит по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

Докажем теперь единственность. Из условия 2) следует, что

$$\varphi\left(\frac{t-i}{t+i}\right) = \varphi\left(\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{-1}\right) = V^{-1} = V^*,$$

где $V = \varphi\left(\frac{t+i}{t-i}\right) = (T+iI)(T-iI)^{-1}$. Отсюда получаем, что

$$\varphi\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = \varphi\left(\frac{t-i}{2(t+i)} + \frac{t+i}{2(t-i)}\right) = \frac{V+V^*}{2} = \mathrm{Re}V$$

и

$$\varphi\left(\frac{2t}{t^2+1}\right) = \varphi\left(\frac{t+i}{2i(t-i)} - \frac{t-i}{2i(t+i)}\right) = \frac{V-V^*}{2i} = \mathrm{Im}V.$$

Значит φ однозначно определен на всех рациональных функциях вида $p\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$, где $p(x,y)$ – многочлен от двух переменных. Покажем, что такие функции равномерно на $\mathbb{R}$ приближают непрерывные функции с одинаковыми пределами на $\pm\infty$.

Рассмотрим отображение $\mathcal{E} : p\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right) \mapsto p(\cos\theta, \sin\theta)$, где $\cos\theta = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, а $\sin\theta = \frac{2t}{t^2+1}$. Ясно, что $p(\cos\theta,\sin\theta)$ – многочлен на окружности S^1. По теореме Вейерштрасса всякая непрерывная на компакте (а S^1 – это компакт) функция $f(z)$ равномерно приближается многочленами $p_n(z) = p_n(\cos\theta,\sin\theta)$, $z = e^{i\theta}$. Тогда

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|p_n\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right) - (\mathcal{E}^{-1}f)(t)\right| = \sup_{z\in S^1}|p_n(z) - f(z)| \to 0.$$

При этом $(\mathcal{E}^{-1}f)(\pm\infty) = f(1)$. Таким образом φ по свойству 5) однозначно определен на таких функциях.

Далее, непрерывные на $\mathbb{R}$ функции с одинаковыми пределами на $\pm\infty$ поточечно аппроксимируют произвольную ограниченную непрерывную функцию. Действительно, пусть f непрерывная ограниченная функция на вещественной прямой. Тогда ее приближает, например, последовательность непрерывных функций

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq n, \\ 0, & |x| > n+1, \\ \text{линейна}, & n < |x| \leq n+1. \end{cases}$$

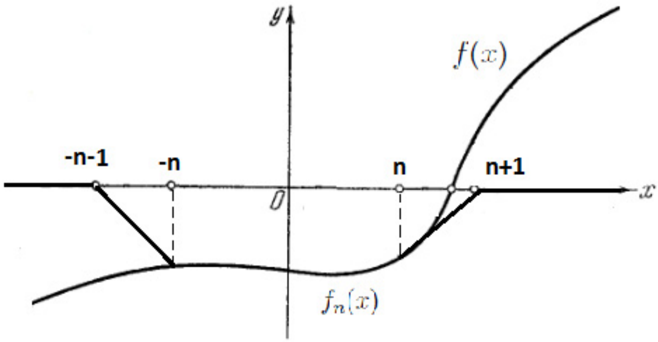


Рис. 7. Функции $f_n(x)$ и $f(x)$

Значит φ однозначно определен и на таких функциях. Поскольку ограниченные непрерывные функции поточечно приближают ограниченные борелевские функции, то φ определен и на них. Теорема доказана. $\square$

Пример 10.1. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим оператор импульса $Tf(x) = xf(x)$ на его естественной области определения $\mathrm{Dom}T = \{f \in \mathrm{H} : \; xf \in \mathrm{H}\}$. Тогда для всякой ограниченной борелевской функции G на $\mathbb{R}$ находим

$$G(T) = M_G.$$

Следствие 10.1. Построенное борелевское исчисление обладает еще одним свойством: если f_n – ограниченные борелевские функции на $\mathbb{R}$ такие, что $f_n(x) \to x$ для каждого x и $|f_n(x)| \leq |x|$ для всех x и n, то для любого $\xi \in \mathrm{Dom}T$ верно, что $\varphi(f_n)\xi \to T\xi$.

Доказательство следствия 10.1. Пусть $\xi \in \mathrm{Dom}T$ тогда

$$\begin{aligned}\|\varphi(f_n)\xi - T\xi\|^2 &= \|U^{-1}M_{f_n(a)}U\xi - U^{-1}M_aU\xi\|^2 \leq \\ &\leq \|(M_{f(a)} - M_a)U\xi\| = \\ &= \int_X |f_n(a(x)) - a(x)|^2 |U\xi|^2 \, d\mu \to 0,\end{aligned}$$

где стремление к нулю происходит опять по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. □

10.2. Спектральное разложение для неограниченного самосопряженного оператора

Теперь мы готовы сформулировать и доказать теорему о спектральном разложении для неограниченного самосопряженного оператора.

Теорема 10.2 (О спектральном представлении неограниченного самосопряженного оператора). Пусть T – неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Существует единственная борелевская проекционная мера $\mathbf{E}$, такая, что для любой борелевской ограниченной на $\mathbb{R}$ функции f верно равенство

$$f(T) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, d\mathbf{E}_t. \tag{10.2}$$

Кроме того,

$$A = \int_{\mathbb{R}} t \, d\mathbf{E}_t. \tag{10.3}$$

Заметим, что формула (10.3) уже не является частным случаем формулы (10.2), поскольку $f(t) = t$ – неограниченная функция. Поэтому ее нужно доказывать отдельно.

Доказательство теоремы 10.2. Положим как и в теореме для ограниченных операторов

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\Omega}} = \chi_\Omega(T).$$

Теперь мы знаем, что $\chi_\Omega(T)$ корректно определен. Также проверяется, что это проекционная мера. Следовательно, мы можем построить интегралы

$$A_f = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, d\mathbf{E}_t \text{ и } A_x = \int_{\mathbb{R}} t \, d\mathbf{E}_t.$$

Первый из которых будет ограниченным оператором, а второй неограниченным с областью определения

$$\mathrm{Dom}A_x = \{\xi \in \mathrm{T} : \int_{\mathbb{R}} t\, d(\mathrm{E}_t\xi, \xi) < \infty\}.$$

Нужно показать, что $A_f = f(T)$ и $T = A_x$. Единственность доказывается также как и в ограниченном случае. Доказательство первой формулы аналогично доказательству из ограниченного случая. Там тоже можно использовать спектральные меры, ассоциированный с вектором. Докажем вторую формулу. Пусть $f_n(x)$ – последовательность ограниченных борелевских функций, сходящихся к x в каждой точке и $|f_n(x)| \le |x|$, тогда для всякого $\xi \in \mathrm{Dom}T$ имеем

$$\begin{array}{ccc}
(f_n(T)\xi, \xi) & = & \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\, d(\mathbf{E}_t\xi, \xi) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\
(T\xi, \xi) & = & \int_{\mathbb{R}} t\, d(\mathbf{E}_t\xi, \xi).
\end{array}$$

Левая часть диаграммы справедлива по следствию 10.1 теоремы о борелевском исчислении неограниченного самосопряженного оператора, правая – по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

Отсюда следует, в частности, что $A_x \supset T$. Так как T и A_x оба самосопряженные операторы, то $T = A_x$. $\square$

Формулу (10.2) можно использовать для построения исчисления для борелевских неограниченных функций, но мы не будем на этом останавливать внимание.

Пример 10.2. В качестве примера, найдем спектральные проекторы операторов координаты и импульса с их естественными областями определения. Для $T_1 = M_x$, используя пример 10.1, имеем

$$\mathbf{E}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{\Omega}} = \chi_\Omega(M_x) = M_{\chi_\Omega(x)}.$$

С такой проекционной мерой мы уже встречались в примере 9.1. Оказывается это спектральная мера оператора координаты. Для оператора импульса $T_2 = i\frac{d}{dx}$ воспользуемся унитарной эквивалентностью с оператором координаты (пример 8.1) и построенным борелевским исчислением

$$\mathbf{E}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{\Omega}} = \chi_\Omega(i\frac{d}{dx}) = \chi_\Omega(\mathfrak{F}_+ M_x \mathfrak{F}_-) = \mathfrak{F}_+ M_{\chi_\Omega(x)} \mathfrak{F}_-.$$

10.3. Спектральное проекторы и резольвента

10.3.1. Спектральные проекторы для эрмитовой матрицы

Выясним связь спектральных проекторов самосопряженного оператора с резольвентой этого оператора. Для начала рассмотрим случай эрмитовых матриц. Напомним, что для всякой голоморфной на спектре произвольной матрицы A функции f матрица $f(A)$ определяется через интеграл Коши:

$$f(A) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_C f(\lambda)\, R_\lambda d\lambda,$$

где контур C обхватывает все собственные значения в положительном направлении.

Если $A = A^*$, то контур $C = \cup_j C_j$ есть объединение непересекающихся окружностей с центрами в собственных значениях матрицы A (см. рис. 8).

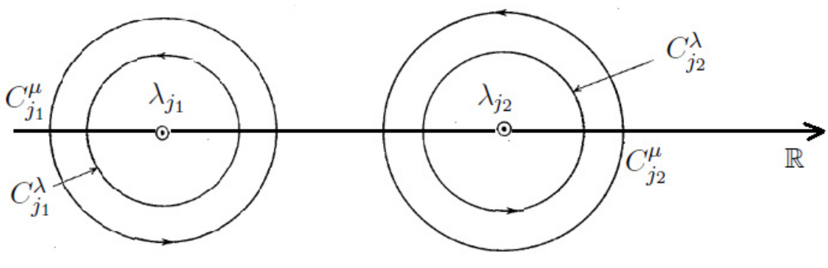


Рис. 8. Контуры C^{μ}_j и C^{λ}_j

Пусть матрицы $P_j = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_j} R_\lambda\, d\lambda$. Из формул (1.6) следует, что

$$I = \sum_j P_j.$$

Покажем, что P_j это ортогональные матрицы (ортопроекторы). А для начала докажем, что $P_j^2 = P_j$. Действительно,

$$
\begin{aligned}
P_j^2 &= \left(\frac{-1}{2\pi i}\oint_{C_j} R_\lambda\, d\lambda\right)\left(\frac{-1}{2\pi i}\oint_{C_j} R_\mu\, d\mu\right) = \\
&= \frac{-1}{4\pi^2}\oint_{C_j^\lambda}\oint_{C_j^\mu} R_\lambda R_\mu\, d\lambda d\mu = \frac{-1}{4\pi^2}\oint_{C_j^\lambda}\oint_{C_j^\mu} \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda-\mu}\, d\lambda d\mu = \\
&= \frac{-1}{4\pi^2}\oint_{C_j^\mu}\oint_{C_j^\lambda} \frac{R_\lambda}{\lambda-\mu}\, d\lambda d\mu - \frac{-1}{4\pi^2}\oint_{C_j^\lambda}\oint_{C_j^\mu} \frac{R_\mu}{\lambda-\mu}\, d\lambda d\mu = \\
&= -\frac{-1}{4\pi^2}\oint_{C_j^\lambda}\oint_{C_j^\mu} \frac{R_\mu}{\lambda-\mu}\, d\mu d\lambda = -\frac{-1}{4\pi^2}\oint_{C_j^\lambda}(-2\pi i)R_\lambda\, d\lambda = P_j.
\end{aligned}
$$

Здесь мы выбрали контуры интегрирования C_j^μ и C_j^λ так, чтобы первый обхватывал второй. Тогда легко следуют равенства, которыми мы воспользовались при выводе этой формулы:

$$
\oint_{C_j^\lambda} \frac{R_\lambda}{\lambda-\mu}\, d\lambda = 0,\ \oint_{C_j^\mu} \frac{R_\mu}{\lambda-\mu}\, d\mu = (-2\pi i)R_\lambda.
$$

Кроме того, мы воспользовались тождеством Гильберта

$$
R_\lambda R_\mu(\lambda-\mu) = R\lambda - R\mu,
$$

верным для резольвент любого ограниченного оператора.

Аналогичными рассуждениями можно показать (упражнение 10.2), что

$$
P_j P_k = P_k P_j = \delta_{kj} Pj.
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_j \oint_{C_j} \lambda R_\lambda\, d\lambda = \sum_j \oint_{C_j} \lambda_j R_\lambda\, d\lambda + \sum_j \oint_{C_j} (\lambda-\lambda_j) R_\lambda\, d\lambda = \\
&= \sum_j \lambda_j P_j + D_j = \sum_j \lambda_j P_j.
\end{aligned}
$$

Матрицы $D_j = \oint_{C_j}(\lambda-\lambda_j)R_\lambda\, d\lambda = 0$, поскольку ввиду симметричности резольвента R_λ имеет простой полюс в точках λ_j, а следовательно функция $(\lambda-\lambda_j)R_\lambda$ аналитична и имеет устранимую особую точку в λ_j.

Таким образом, мы получили спектральное разложение:

$$
A = \sum_j \lambda_j P_j = \int_{\sigma(A)} \lambda\, d\mathbf{E}_\lambda,
$$

где $\mathbf{E}_{\{\lambda_j\}} = P_j$.

Аналог формулы, связывающей спектральный проектор и резольвенту есть и в бесконечномерном случае.

10.3.2. Связь спектральных проекторов и резольвенты в бесконечномерном случае

Для каждого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left(\frac{1}{x-\lambda-i\varepsilon} - \frac{1}{x-\lambda+i\varepsilon}\right) d\lambda.$$

Непосредственным вычислением находим, что при $\varepsilon \to 0$

$$f_\varepsilon(x) \to \left[\begin{array}{cc} 0, & x \notin [a,b], \\ 1/2, & x = a,\ x = b, \\ 1, & x \in (a,b), \end{array}\right. = \frac{1}{2}\left(\chi_{[a,b]} + \chi_{(a,b)}\right). \qquad (10.4)$$

Более того, $|f_\varepsilon(x)| \le 2$. Тогда, применяя борелевское исчисление для ограниченного самосопряженного оператора A (подставляя A в формулу (10.4)), получим формулу (Стоуна):

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^b R_{\lambda+i\varepsilon} - R_{\lambda-i\varepsilon}\, d\lambda = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} + \mathbf{E}_{(\mathbf{a},\mathbf{b})}\right).$$

10.4. Спектральные проекторы и спектр

В этом разделе мы узнаем как по свойствам спектральных проекторов можно классифицировать точки спектра, на котором эти проекторы определены.

Лемма 10.1. Пусть A самосопряженный оператор и $\mathbf{E}$ – его спектральная мера. Тогда $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ спектральный проектор $\mathbf{E}_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}$ не нулевой.

Доказательство леммы 10.1. Предположим, что для некоторого λ существует такое $\varepsilon > 0$, что спектральный проектор $\mathbf{E}_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} = 0$. Тогда по свойствам проекционной меры все проекторы $\mathbf{E}_{(\lambda-\varepsilon',\lambda+\varepsilon')} = 0$, $\varepsilon' < \varepsilon$. В том числе и $\mathbf{E}_{\{\lambda\}} = 0$. Тогда интеграл от произвольной ограниченной борелевской функции определяется как

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}\setminus(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} f(t)\, d\mathbf{E}_\mathbf{t}.$$

Взяв ограниченную на подинтегральном множестве функцию $f(t) = (t-\lambda)^{-1}$, получим резольвенту R_λ. Следовательно, такое $\lambda \in \rho(A)$. $\square$

Лемма 10.2. Пусть A самосопряженный оператор и $\mathbf{E}$ – его спектральная мера. Тогда $\lambda \in \sigma_p(A)$ тогда и только тогда, когда спектральный проектор $\mathbf{E}_{\{\lambda\}}$ не нулевой.

Доказательство леммы 10.2. Пусть $\mathbf{E}_{\{\lambda\}} \neq 0$, тогда найдется ненулевой вектор $v \in \mathrm{im}\mathbf{E}_{\{\lambda\}}$, т. е. $\mathbf{E}_{\{\lambda\}}v = v$. Тогда для любого u мера $(\mathbf{E}_{\mathbf{\Omega}}v, u)$ сосредоточена в точке λ :

$$(\mathbf{E}_{\mathbf{\Omega}}v, u) = (\mathbf{E}_{\mathbf{\Omega}}\mathbf{E}_{\{\lambda\}}v, u) = (\mathbf{E}_{\mathbf{\Omega}\cap\lambda}v, u) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & \lambda \notin \Omega \\ (v,u), & \lambda \in \Omega \end{array} \right. .$$

Тогда для любого u

$$(Av, u) = \int_{\mathbb{R}} t\, d(\mathbf{E}_t v, u) = \lambda(\mathbf{E}_{\{\lambda\}}v, u) = \lambda(v, u),$$

откуда получаем равенство $Av = \lambda v$, следовательно, $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Обратно, пусть существует такой ненулевой вектор $v \in \mathrm{Dom}A$, что $Av = \lambda v$. Тогда

$$0 = \|Av - \lambda v\|^2 = \int_{\mathbb{R}} (t-\lambda)^2\, d(\mathbf{E}_t v, v).$$

Так как функция $(t-\lambda)^2 > 0$ всюду, кроме $t = \lambda$, то предыдущее равенство означает, что мера $(\mathbf{E}_{\mathbf{\Omega}}v, v)$ сосредоточена в точке λ, а на дополнительных к ней множествах она нулевая. Откуда получаем, что $\mathbf{E}_{\{\lambda\}} \neq 0$.
$\square$

Упражнения

10.1. Показать, что отображение $\varphi : B(\mathbb{R}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{H})$, задаваемое формулой (10.1) есть гомоморфизм.

10.2 Показать, что для операторов P_j верны соотношения $P_jP_k = P_kP_j = \delta_{kj}Pj$.

10.3 Проверить справедливость формулы (10.4).

Лекция № 11. Коммутационные соотношения

11.1. Унитарная группа

Борелевское исчисление для самосопряженного оператора A дает нам право рассмотреть оператор $U(t) = e^{itA}$ для всякого $t \in \mathbb{R}$. Изучим его свойства и обсудим его важность среди прочих операторов вида $f(A)$.

Теорема 11.1.(О свойствах $U(t)$). Пусть A – самосопряженный оператор гильбертова пространства H. Тогда для операторов $U(t) = e^{itA}$, $t \in \mathbb{R}$ справедливы следующие свойства:

1) для всякого $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t)$ унитарен, и $U(t+s) = U(t)U(s)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$;

2) для любого $\phi \in$ H при $t \to t_0$ есть сходимость $U(t)\phi$ к $U(t)\phi$;

3) для всякого $\phi \in \mathrm{Dom}A$ при $t \to 0$ есть сходимость $\frac{U(t)\phi-\phi}{t}$ к $iA\phi$;

4) если предел $\lim_{t\to 0} \frac{U(t)\phi-\phi}{t}$ существует, то $\phi \in \mathrm{Dom}A$.

Свойство 1) говорит о том, что $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ есть **однопараметрическая унитарная группа**, свойство 2) – эта группа **непрерывная**, 3) – группа обладает **производной**, а 4) говорит, о том, что эта производная есть наш самосопряженный оператор, умноженный на i.

Определение 11.1. Отображение $U : \mathbb{R} \to$ H, обладающее свойствами 1) и 2) называется **унитарной сильно непрерывной** однопараметрической группой.

Доказательство теоремы 11.1. 1). Так как $e^{itx}e^{isx} = e^{i(t+s)x}$, то из борелевского исчисления следует аналогичное равенство для операторов $U(t)$ и $U(s)$. Аналогично доказывается унитарность.

2). Для всякого $\phi \in$ H, используя спектральное разложение, получим

$$\|e^{itA}\phi - \phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{its} - 1|^2 \, d(\mathbf{E}_s\phi, \phi).$$

Поскольку $|e^{its} - 1| \le 2$ и $e^{its} \to 1$ при $t \to 0$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости правая часть этого равенства стремится к нулю. Это доказывает свойство 2) для $t_0 = 0$. Для произвольного $t_0 \in \mathbb{R}$ утверждение следует из неравенства

$$\|U(t)\phi - U(t_0)\phi\| = \|U(t_0)U(t-t_0)\phi - U(t_0)\phi\| \le \|U(t-t_0)\phi - \phi\|.$$

3). Для всякого $\phi \in \mathrm{Dom}A$ имеем равенство

$$\left\|\frac{U(t)\phi-\phi}{t}-iA\phi\right\|^2=\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{e^{its}-1}{t}-is\right|^2\,d(\mathbf{E}_s\phi,\phi).$$

Рассмотрим подинтегральное выражение:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{its}-1-its}{t}=\lim_{t\to 0}ise^{its}-is=0$$

и

$$\left|\frac{e^{its}-1-its}{t}\right|^2\leq Cs^2,$$

где C некоторая положительная константа. Так как функция s^2 интегрируема по мере $\mathbf{E}_{\mathbf{\Omega}}\phi,\phi$ ($\int_{\mathbb{R}} s^2\,d(\mathbf{E}_s\phi,\phi)=\|A\phi\|^2<\infty$), то мы применяем опять теорему Лебега о мажорируемой сходимости и получаем требуемое утверждение.

4). На множестве $D=\left\{\phi\in \mathrm{H}:\ \lim_{t\to 0}\frac{U(t)\phi-\phi}{t}\ \text{существует}\right\}$ определим оператор B формулой

$$B\phi=-i\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\phi-\phi}{t}.$$

Покажем, что $B=A$. По свойству 3) оператор B расширяет оператор A, кроме того он симметрический:

$$\begin{aligned}(B\phi,\psi)&=(iB\phi,i\psi)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{U(t)\phi-\phi}{t},i\psi\right)=\\&=\lim_{t\to 0}\left(\frac{(U(t)\phi,i\psi)}{t}-\frac{(\phi,i\psi)}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((\phi,iU^*(t)\psi-i\psi)\right)=\\&=\lim_{t\to 0}\left(\phi,\frac{iU(-t)\psi-i\psi}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\phi,-i\frac{U(t)\psi-\psi}{t}\right)=\\&=(\phi,B\psi).\end{aligned}$$

Так как у самосопряженного оператора нет не тривиальных симметрических расширений, то $A=B$. □

11.2. Теорема Стоуна

Важность функции e^{its} заключается в том, что только такие функции от самосопряженных операторов порождают унитарные группы. Сформулируем это утверждение более точно.

Теорема 11.2 (Стоун). Пусть U – сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа, действующая в гильбертовом пространстве H. Тогда существует самосопряженный оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathrm{H})$ такой, что $U(t) = e^{itA}$.

Доказательство теоремы 11.2. Предыдущая теорема 11.1 подсказывает нам, что искать самосопряженный оператор A нужно дифференцируя группу $U(t)$. Оформим эту мысль математическим языком с точным доказательством.

Для всякой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\phi \in \mathrm{H}$ рассмотрим вектор

$$\phi_f = \int_{\mathbb{R}} f(t)U(t)\phi\, dt.$$

Поясним, в каком смысле мы понимаем здесь интеграл. Для всякой непрерывной векторнозначной функции можно определить абстрактный интеграл Римана по аналогии с обычным интегралом Римана как предел интегральных сумм. Этот интеграл называется интегралом Бохнера. Многие свойства интеграла Римана переносятся на этот интеграл, в частности аналогом неравенства с модулями является следующее неравенство для норм

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} h(t)\, dt \right\| \leq \int_{\mathbb{R}} \|h(t)\|\, dt.$$

Также справедливы и теоремы о предельном переходе при равномерной сходимости подынтегральных выражений.

В нашем случае H-значная функция $f(t)U(t)\phi$ непрерывна (поскольку $U(t)$ сильно непрерывна), значит интегрируема по Бохнеру.

Пусть D – множество конечных линейных комбинаций всех таких ϕ_f для различных $\phi \in \mathrm{H}$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Покажем, что D всюду плотно в H.

Пусть $\phi \in \mathrm{H}$ и $\omega_\varepsilon(x)$ – шапочка Соболева (см. пример 3.6), тогда

$$\|\phi_{\omega_\varepsilon} - \phi\| = \left\| \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(t)U(t)\phi\, dt - \phi \right\| = \left\| \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(t)(U(t)\phi - \phi)\, dt \right\| \leq$$
$$\leq \sup_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \|U(t)\phi - \phi)\| \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(t)\, dt = \sup_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \|U(t)\phi - \phi)\|.$$

Последнее стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ ввиду сильной непрерывности $U(t)$.

Все операторы $U(t)$ переводят множество D в себя. Это достаточно проверить для элементов вида ϕ_f :

$$U(s)\phi_f = U(s)\int_{\mathbb{R}} f(t)U(t)\phi\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)U(t+s)\phi\,dt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(t-s)U(t)\phi\,dt = \phi_{f_s},$$

где $f_s(t) = f(t-s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Покажем теперь, что $\frac{U(t)-I}{t}\phi_f$ сходится к $\phi_{-f'}$ при $t \to 0$. Действительно, рассмотрим равенство

$$\frac{U(s)-I}{s}\phi_f = \frac{U(s)-I}{s}\int_{\mathbb{R}} f(t)U(t)\phi\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{U(s)-I}{s}U(t)\phi\,dt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{U(s+t)-U(t)}{s}\phi\,dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t-s)-f(t)}{s}U(t)\phi\,dt,$$

где в последнем переходе мы сделали замену переменных, а второе равенство справедливо, поскольку верно уже для интегральных сумм.

Так как $\frac{f(t-s)-f(t)}{s} \to -f'(t)$ равномерно на $\mathbb{R}$ при $s \to 0$, то

$$\frac{U(s)-I}{s}\phi_f \to -\int_{\mathbb{R}} f'(t)U(t)\,dt = \phi_{-f'}.$$

Для всех $\phi_f \in D$ определим оператор

$$B\phi_f = -i\phi_{-f'}.$$

Для всех остальных элементов из D оператор B определяется по линейности. Ясно, что $B : D \to D$. Кроме того, оператор B коммутирует с каждым $U(t)$:

$$UB\phi_f = U(-i\phi_{f'}) = \lim_{s\to 0} U(t)\frac{U(s)-I}{s}\phi_f =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{U(s)-I}{s}U(t)\phi_f = BU\phi_f.$$

Рассмотрев соответствующие скалярные произведения, легко проверить (упражнение 11.1), что B – симметрический оператор. Используя критерий, докажем, что он существенно самосопряжен. Предположим, что существует ненулевой вектор $\psi \in \ker(B^* - iI)$, т. е. $B^*\psi = i\psi$. Тогда для любого $\phi \in D$

$$\frac{d}{dt}(U(t)\phi, \psi) = \lim_{s\to t}\frac{(U(s)\phi,\psi) - (U(t)\phi,\psi)}{s} = (iBU(t)\phi,\psi) =$$
$$= i(U(t)\phi, B^*\psi) = i(U(t)\phi, i\psi) = -(U(t)\phi,\psi).$$

Таким образом, комплекснозначная функция $g(t) = (U(t)\phi, \psi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $g' = -g$, откуда $g(t) = g(0)e^{-t}$. Но $g(t)$ ограниченная функция:

$$|g(t)| = |(U(t)\phi, \psi)| \leq \|U(t)\|\|\phi\|\|\psi\| = \|\phi\|\|\psi\| < \infty,$$

поэтому $g(0) = (U(0)\phi, \psi) = (\phi, \psi) = 0$. Поскольку множество D плотно в H и скалярное произведение непрерывно по левому аргументу, то $\psi \perp$ H, а значит нулевой. Аналогично показывается, что $\ker(B^* + iI) = \{0\}$.

Таким образом, заключаем, что B существенно самосопряжен, а оператор $A = \overline{B}$ самосопряжен. Осталось показать, что $U(t) = e^{itA}$. Положим $V(t) = e^{itA}$. Обозначим через $\mathcal{D}$ производную в пространстве H, т. е. это означает, к примеру, что

$$\mathcal{D}(V(t)\phi) = \lim_{s \to t} \frac{V(s)\phi - V(t)\phi}{s},$$

где предел естественно понимается в пространстве H.

Тогда по теореме 10.1 для всякого $\phi \in D \subset \mathrm{Dom} A$ следует, что $\mathcal{D}(V(t)\phi) = iAV(t)\phi$.

Пусть $W(t) = U(t)\phi - V(t)\phi,\ \phi \in D$. Тогда

$$\mathcal{D}W(t) = \mathcal{D}(U(t)\phi) - \mathcal{D}(V(t)\phi) = iBU(t)\phi - iAV(t)\phi = AW(t),$$

где последнее равенство следует из того, что $A = \overline{B}$ и $U(t)D \subset D \subset \mathrm{Dom} A$.

Далее, рассмотрим равенство

$$\frac{d}{dt}\|W(t)\|^2 = (\mathcal{D}W(t), W(t)) + (W(t), \mathcal{D}W(t)) = \\ = i(AW(t), W(t)) - i(W(t), AW(t)) = 0.$$

Поскольку $W(0) = 0$, то $W(t) = 0$. Следовательно, для всех $\phi \in D$ верно равенство $U(t)\phi = V(t)\phi$. Ввиду ограниченности операторов и всюду плотности D равенство справедливо на всем H. Теорема Стоуна полностью нами доказана. □

Определение 11.2. Пусть U – сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа, тогда самосопряженный оператор A из ее представления $U(t) = e^{iAt}$ называется `инфинитезимальным генератором` группы $U(t)$.

Пример 11.1. Пусть $\mathrm{H} = \mathbb{R}^2$ и $U(t)$ – это поворот пространства вокруг оси OX на угол t против часовой стрелки. Найдем генератор этой унитарной группы. Итак, имеем

$$U(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Тогда ввиду конечномерности пространства

$$Av = -i\lim_{t\to 0}\frac{U(t)v-v}{t} = -i\lim_{t\to 0}\begin{bmatrix} \frac{(\cos t-1)v_1}{t} & \frac{-v_2\sin t}{t} \\ \frac{v_1\sin t}{t} & \frac{(\cos t-1)v_2}{t} \end{bmatrix} =$$

$$= -i\begin{bmatrix} -v_1\sin 0 & -v_2 \\ v_1 & -v_2\sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} v.$$

Откуда получаем, что

$$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} = e^{it\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}} = e^{t\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}.$$

Сравните этот результат с результатом из примера 1.4.

Пример 11.2. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ и группа $U(t)f(x) = f(x-t)$ – группа сдвигов (трансляционная унитарная группа). Найдем ее инфинитезимальный генератор. Найдем для начала предел

$$Bf(x) = -i\lim_{t\to 0}\frac{U(t)f(x)-f(x)}{t} = -i\lim_{t\to 0}\frac{f(x-t)-f(x)}{t}.$$

Для всех $f \in C^1(\mathbb{R})$ этот предел равен $i\frac{d}{dx}f$. Таким образом A – это замыкание оператора $i\frac{d}{dx}$, т. е. $A = iD$ с естественной областью определения. Таким образом, для всякой $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$f(x-t) = e^{itiD}f(x) = e^{-tD}f(x).$$

Пример 11.3. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ и группа $U(t) = M_{e^{itx}}$ – группа умножения на функцию e^{itx}. Для нахождение ее генератора снова ищем предел

$$Bf(x) = -i\lim_{t\to 0}\frac{U(t)f(x)-f(x)}{t} = -i\lim_{t\to 0}\frac{e^{itx}f(x)-f(x)}{t}.$$

Для финитных f этот предел равен $xf(x)$. Тогда замыкание оператора B есть оператор умножения на x с его естественной областью определения. Таким образом, имеет место формула

$$M_{e^{itx}} = e^{itM_x} = e^{M_{itx}}.$$

Забавное передвижение символов!

11.3. Канонические коммутационные соотношения

Определение 11.3. Говорят, что пара самосопряженных операторов P, Q удовлетворяет **канонически коммутационным соотношениям**, если

$$[P, Q] = PQ - QP = iI. \tag{11.1}$$

Заметим, что операторы P и Q не могут быть одновременно ограниченными. Докажем сначала формулу:

$$[P, Q^n] = inQ^{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Действительно, используя индукцию, получаем

$$\begin{aligned}
[P, Q^n] &= PQ^n - Q^nP = PQ^{n-1}Q - Q^nP = \\
&= (i(n-1)Q^{n-2} + Q^{n-1}P)Q - Q^nP = \\
&= i(n-1)Q^{n-1} + Q^{n-1}PQ - Q^nP = \\
&= inQ^{n-1} - iQ^{n-1} + Q^{n-1}(iI + QP) - Q^nP = \\
&= inQ^{n-1}.
\end{aligned}$$

Предполагая, что оба оператора ограничены, используем полученную формулу для оценки нормы:

$$n\|Q\|^{n-1} = n\|Q^{n-1}\| \leq 2\|P\|\|Q\|^n,$$

откуда получаем, что

$$2\|P\|\|Q\| \geq n.$$

Получили противоречие.

В связи с этим заметим, что для выполнения канонического коммутационного соотношения нужно предполагать, что оно выполнено на пересечении областей определения операторов P и Q.

Теперь займемся вопросом о существовании таких операторов. В представлении Шредингера в качестве гильбертова пространства H берем $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ и $P = i\frac{d}{dx}$, а $Q = M_x$, определенные на своих естественных областях определения, которые содержат множество быстроубывающих функций $\mathfrak{J}(\mathbb{R})$. Проверим для них соотношение (11.1).

Для всякой $\varphi \in \mathfrak{J}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
[P, Q]\varphi &= i\frac{d}{dx}(x\varphi(x)) - ix\frac{d}{dx}\varphi(x) = \\
&= i\varphi(x) + ix\frac{d}{dx}\varphi(x) - ix\frac{d}{dx}\varphi(x) = iI\varphi.
\end{aligned}$$

В представлении Гейзенберга в качестве гильбертова пространства H берем ℓ_2 и P, Q – бесконечномерные матрицы:

$$P = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & & & \\ & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & & \\ & & -\sqrt{3} & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & \end{bmatrix},$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & \end{bmatrix}.$$

Также на их общей области определения проверяется соотношение (11.1) (упражнение 11.3).

11.4. Коммутационные соотношения в форме Вейля

Рассмотрим представление Шредингера для операторов P и Q и выясним, что унитарные группы, порожденные этими операторами как инфинитезимальным генераторами, удовлетворяют коммутационному соотношению в форме Вейля.

Определение 11.4. Пусть $U(t)$ и $V(t)$ – сильно непрерывные унитарные группы. Если выполнено равенство

$$U(t)V(s) = e^{-its}V(s)U(t), \ t, s \in \mathbb{R},$$

то говорят, что они удовлетворяют **коммутационному соотношению в форме Вейля.**

В примерах 11.2 и 11.3 мы выяснили, что для всякой $\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$

$$U(t)\varphi(x) = e^{itP}\varphi(x) = \varphi(x-t),$$

$$V(t)\varphi(x) = e^{itQ}\varphi(x) = M_{e^{itx}}\varphi(x) = e^{itx}\varphi(x).$$

Подставляя эти операторы в соотношение Вейля, получим верное тождество:

$$\begin{aligned} U(t)V(s)\varphi(x) &= U(t)e^{isx}\varphi(x) = e^{is(x-t)}\varphi(x-t) = \\ &= e^{-ist}e^{isx}\varphi(x-t) = e^{-ist}e^{isx}U(t)\varphi(x) = \\ &= e^{-its}V(s)U(t)\varphi(x). \end{aligned}$$

Следующее утверждение говорит о том, что в некотором смысле соотношение Вейля имеет единственное решение. Приведем его без доказательства.

Теорема 11.3 (Об унитарных группах, удовлетворяющих соотношению Вейля). Пусть $U(t)$ и $V(t)$ – сильно непрерывные однопараметрические унитарные группы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H и удовлетворяющие соотношению Вейля. Тогда существуют замкнутые подпространства H_j такие, что

1) H разлагается в прямую сумму $\mathrm{H} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathrm{H}_j$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;

2) $U(t), V(t) : \mathrm{H}_j \to \mathrm{H}_j$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

3) для каждого j существует унитарный оператор $T_j : \mathrm{H}_j \to \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ такой, что для любой $\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$

$$T_jU(t)T_j^{-1}\varphi(x) = \varphi(x-t),\ T_jV(t)T_j^{-1}\varphi(x) = e^{itx}\varphi(x).$$

Следствие 11.1. Пусть $U(t)$ и $V(t)$ – сильно непрерывные однопараметрические унитарные группы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H и удовлетворяющие соотношению Вейля. Пусть P и Q их генераторы. Тогда существует всюду плотное подпространство $D \subset \mathrm{H}$ такое, что

1) $P, Q : D \to D$;

2) $[P, Q] = iI$ на D и

3) $P|_D$, $Q|_D$ – существенно самосопряжены.

Т.е. для генераторов унитарных групп, удовлетворяющих соотношению Вейля, справедливо каноническое коммутационное соотношение на некотором D. Обратное утверждение не верно, что показывает следующий пример.

Пример 11.4 (Нельсон). Пусть M – риманова поверхность двузначной комплексной функции $w(z) = \sqrt{z}$, которая представляет из себя пару склеенных по разрезу $[0, \infty)$ комплексных плоскостей. Положим $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(M, dxdy)$, где $dxdy$ – обычная мера Лебега в $\mathbb{R}^2$, перенесенная на M. Рассмотрим операторы

$$P = i\frac{\partial}{\partial x}, \quad Q = M_x + i\frac{\partial}{\partial y} = x + i\frac{\partial}{\partial y},$$

определенные на множестве

$$D = \mathrm{Dom}P = \mathrm{Dom}Q = \{\phi \in C_0^\infty(M) :\ 0 \notin \mathrm{supp}\phi\}.$$

1). Ясно, что $P, Q : D \to D$.

2). Для всякой $\phi \in D$ верно каноническое коммутационное соотношение (упражнение 11.4).

3). Операторы P, Q – симметричные. Действительно, для любых $\phi, \varphi \in D$

$$\begin{aligned}\int_M P\phi\overline{\varphi}\, dxdy &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} i\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)\overline{\varphi(x,y)}\, dxdy = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left[i\phi(x,y)\psi(x,y)|_{x=-\infty}^{x=\infty} - i\int_{\mathbb{R}}\phi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\overline{\varphi(x,y)}\right]dy = \\ &= \int_M \phi\overline{P\varphi}\, dxdy.\end{aligned}$$

Аналогично для оператора Q. Для доказательства существенной самосопряженности P и Q мы воспользуемся теоремой 11.1. Но сначала построим унитарные группы $U(t)$ и $V(t)$. Пусть D_x есть множество финитных функций, носители которых не содержат оси OX ни на каком из листов поверхности M. Это множество плотно в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. На D_x определим изометричные отображения

$$U(t)\phi(x,y) = \phi(x-t,y), \quad V(t)\phi = e^{itx}\phi(x,y-t).$$

Ясно, что образы этих отображений плотны в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Следовательно, мы можем продлить $U(t)$ и $V(t)$ до унитарных отображений. Кроме того, эти группы будут сильно непрерывными. Вычислим на D_x их производные, умноженные на $-i$:

$$\begin{aligned}-i\mathcal{D}(U(t)\phi)|_{t=0} &= -i\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\phi - \phi}{t} = \\ &= -i\lim_{t\to 0}\frac{\phi(x-t,y) - \phi(x,y)}{t} = i\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) = P\phi.\end{aligned}$$

Аналогично показывается (упражнение 11.5), что $-i\mathcal{D}(V(t)\phi)|_{t=0} = Q\phi$. Тогда по теореме 11.2 операторы P и Q существенно самосопряжены и их замыкания суть генераторы групп $U(t)$ и $V(t)$. Проверим теперь выполняется ли соотношение Вейля для этих групп. Для $\phi \in D_x,\ t = s = 1, (x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_2$ рассмотрим соотношение Вейля:

$$\begin{array}{ccccc}\phi\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_2\right) & \xrightarrow{V(1)} & e^{i\frac{1}{2}}\phi\left(\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)_2\right) & \xrightarrow{U(1)} & e^{-i\frac{1}{2}}\phi\left(\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)_2\right) \\ \| & & & & \nparallel \\ \phi\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_2\right) & \xrightarrow{U(1)} & \phi\left(\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_1\right) & \xrightarrow{e^{-i}V(1)} & e^{-i\frac{1}{2}}\phi\left(\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)_1\right)\end{array}$$

Направление действий групп указано на рис. 9.

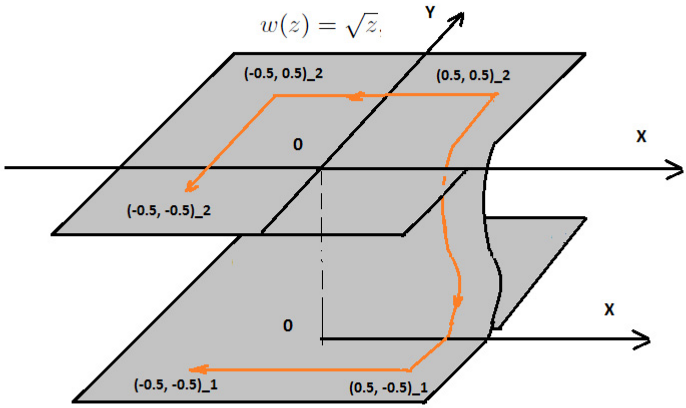


Рис. 9. Риманова поверхность функции $w(z) = \sqrt{z}$ и действие унитарной группы на ней

Упражнения

11.1. Показать, что оператор B, построенный в теореме Стоуна симметрический.

11.2. Пусть $U(t)$ – сильно непрерывная унитарная группа. Показать, что $U(0) = I$.

11.3. Проверить каноническое коммутационное соотношение для операторов P и Q из представления Гейзенберга.

11.4. Показать, что операторы P и Q из примера Нельсона удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению на своей области определения.

11.5. Показать, что $-i\mathcal{D}(V(t)\phi)|_{t=0} = Q\phi$, где $V(t)$ и Q из примера Нельсона.

Лекция № 12. Операторы квантовой механики

12.1. Одномерный оператор Шредингера

Обозначим через $\mathcal{H}$ – оператор энергии квантовой системы. Этот оператор определяет закон эволюции системы следующим образом. Пусть в момент времени $t = 0$ состояние системы (в шредиренгеровском представлении) есть Ψ_0. Тогда в момент t это уже состояние $\Psi(t) = U(t)\Psi_0$, где $U(t)$ операторы эволюции системы. Для всякого состояния $\Psi \in \mathrm{Dom}\mathcal{H}$ справедливо уравнение Шредингера:

$$ih\mathcal{D}(\mathcal{H}\Psi)(t) = \mathcal{H}\Psi(t).$$

Здесь h – постоянная Планка. Подставляя в это уравнение выражение для Ψ, получаем уравнение

$$ih\mathcal{D}(U(t)\Psi_0) = \mathcal{H}U(t)\Psi_0.$$

Из теоремы Стоуна мы заключаем, что замыкание оператора $\frac{-1}{h}\mathcal{H}$ есть генератор эволюционной группы $U(t)$. Откуда

$$U(t) = e^{\frac{-it}{h}\overline{\mathcal{H}}}.$$

Рассмотрим простые случаи оператора энергии $\mathcal{H}$ в пространстве $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, заданного формулой

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + M_v(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x),$$

где вещественная локально ограниченная функция $v(x)$ называется потенциалом (соответствует потенциальной энергии системы). Обозначим через $\mathcal{H}_0$ сужение $\mathcal{H}$ на множество $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Свойства оператора $\mathcal{H}_0$ естественно зависят от потенциала v. Нас будут интересовать те условия, которые гарантируют для $\mathcal{H}_0$ какую-нибудь степень самосопряженности.

Теорема 12.1 (Сирс). Пусть потенциал $v(x) \geq -Q(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, где Q – положительная, четная, неубывающая при $x \geq 0$ непрерывная функция такая, что $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}}$ расходится. Тогда оператор $\mathcal{H}_0$ существенно самосопряжен.

Рассмотрим примеры потенциалов, удовлетворяющих условиям теоремы Сирса.

Пример 12.1. Пусть $v(x) = a(1+|x|)^\alpha$. Выясним при каких вещественных a и α оператор Шредингера $\mathcal{H}_0$ существенно самосопряжен.

Ясно, что при $a \geq 0$ и любом α в качестве функции $Q(x)$ можно взять единицу. Следовательно, по теореме Сирса есть существенная самосопряженность.

При $a < 0$ и $\alpha \leq 0$ берем $Q(x) = -a$. Если же $0 < \alpha \leq 2$, то $Q(x) = |v|$. Во всех остальных случаях теорема Сирса не применима.

Помимо самосопряженности нас будет интересовать спектр оператора энергии. Из теории расширений мы знаем, что спектр и его части существенно самосопряженного оператора и его замыкания совпадают. Важным случаем являются системы с чисто точечным спектром. Выясним при каких достаточных условиях на потенциал v возникает такая ситуация.

Теорема 12.2 (О спектре одномерного оператора Шредингера с неограниченным на бесконечности потенциалом). Пусть потенциал v есть вещественная локально ограниченная функция, удовлетворяющая условию

$$v(x) \to +\infty \text{ при } |x| \to +\infty.$$

Тогда $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{H}_0) = \sigma_p(\mathcal{H}_0)$.

Доказательство теоремы 12.2. Заметим, что условия на v гарантируют существенную самосопряженность. Чтобы это понять построим функцию $Q(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы Сирса.

Для некоторого фиксированного $M > 0$ найдется такие $R > 0, C > 0$ что $v(x) > M$ для всех $|x| > R$ и $\sup_{|x|\leq R}|v(x)| \leq C$. Тогда берем функцию $Q(x) = C$.

Можно считать, что потенциал $v(x) \geq 1$. Если это не так, то мы можем рассмотреть новый оператор $\widetilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}_0 + M$, у которого потенциал уже будет больше единицы. Решив задачу отыскания собственных чисел $\widetilde{\lambda}_n$ для этого оператора, мы решим ее и для старого, поскольку $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n + M$.

Идея отыскания спектра у оператора энергии заключается в сведении этой задачи к уже известной нам задаче о спектре компактного самосопряженного оператора. А именно, покажем, что $\mathcal{H}_0$ обратим и его обратный компактен. Этого будет достаточно.

Итак, имеет место неравенство

$$(\mathcal{H}_0\phi,\phi) = \int_{\mathbb{R}} -\phi''(x)\overline{\phi(x)}\,dx + \int_{\mathbb{R}} v(x)|\phi|^2(x)\,dx =$$

$$= -\phi(x)\phi'(x)|_{-\infty}^{\infty} + \|\phi'\|^2 + \int_{\mathbb{R}} v(x)|\phi|^2(x)\,dx =$$

$$= \|\phi'\|^2 + \int_{\mathbb{R}} v(x)|\phi|^2(x)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}} |\phi|^2(x)\,dx = (\phi,\phi).$$

Отсюда следует (упражнение 12.1), что $\mathcal{H}_0$ обратим и имеет ограниченный обратный.

$\mathcal{H}_0^{-1}$ компактен тогда и только тогда когда $\mathcal{H}_0^{-1/2} = \sqrt{\mathcal{H}_0^{-1}}$ компактен. Корень для ограниченного самосопряженного оператора $\mathcal{H}_0^{-1}$ определен, поскольку его спектр $\sigma(\mathcal{H}_0) \subseteq [1,\infty)$. Это следует из того, что для всех $\lambda \in (-\infty, 1)$ верно неравенство $((\mathcal{H}_0 - \lambda I)\phi,\phi) > (1-\lambda)(\phi,\phi)$.

Компактность оператора $\mathcal{H}_0^{-1/2}$ эквивалентна предкомпактности (замыкание компактно) множества

$$M = \{\mathcal{H}_0^{-1/2}\phi : (\phi,\phi) \leq 1\} = \{\psi : (\mathcal{H}_0^{1/2}\psi, \mathcal{H}_0^{1/2}\psi) \leq 1\} = \\ = \{\psi \in \mathrm{Dom}\mathcal{H}_0 : (\mathcal{H}_0\psi,\psi) \leq 1\}.$$

Чтобы доказать предкомпактность M, введем в рассмотрение еще одно множество

$$M_N = \{\psi \in M : \mathrm{supp}\psi \in [-N,N]\}.$$

Пусть $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $0 \leq \xi \leq 1$, при $|x| \leq 1/2$ значение $\xi(x) = 1$, а при $|x| \geq 1$ – значение $\xi(x) = 0$, и $|\xi'| \leq B$.

Пусть $N > 2B$, тогда для всякой $\phi \in M$ функция $\psi_N = \xi(x/N)\phi(x) \in 2M_N$:

$$(\mathcal{H}_0\psi_N,\psi_N) = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\xi'(x/N)\phi(x)}{N} + \xi(x/N)\phi'(x)\right|^2 + v(x)|\psi_N(x)|^2\,dx = \\ = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{(\xi'(x/N))^2|\phi(x)|^2}{N^2} + \xi^2(x/N)|\phi'(x)|^2 + \right. \\ \left. + \frac{2\xi(x/N)\xi'(x/N)\mathrm{Re}(\phi(x)\phi'(x))}{N} + v(x)|\psi_N(x)|^2\right)dx.$$

Теперь оценим все слагаемые.

$$\frac{(\xi'(x/N))^2|\phi(x)|^2}{N^2} \leq \frac{B^2|\phi(x)|^2}{N^2} \leq \frac{|\phi(x)|^2}{4} \leq \frac{v(x)|\phi(x)|^2}{4},$$

$$\xi^2(x/N)|\phi'(x)|^2 \leq |\phi'(x)|^2,$$

$$\frac{2\xi(x/N)\xi'(x/N)\mathrm{Re}(\phi(x)\phi'(x))}{N} \leq \frac{2B\mathrm{Re}(\phi(x)\phi'(x))}{N} \leq \\ \leq \frac{B}{N}(|\phi(x)|^2 + |\phi'(x)|^2) \leq \frac{v(x)|\phi(x)|^2 + |\phi'(x)|^2}{2},$$

$$v(x)|\psi_N(x)|^2 \le v(x)|\phi(x)|^2.$$

Подставляя эти оценки в интеграл, получим

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_0\psi_N, \psi_N) \le \int_{\mathbb{R}} \Bigg(& \frac{v(x)|\phi(x)|^2}{4} + |\phi'(x)|^2 + \\ & + \frac{v(x)|\phi(x)|^2 + |\phi'(x)|^2}{2} + v(x)|\phi(x)|^2 \Bigg)\, dx = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{7v(x)|\phi(x)|^2}{4} + \frac{3|\phi'(x)|^2}{2}\, dx \le \\ & \le 2\int_{\mathbb{R}} v(x)|\phi(x)|^2 + |\phi'(x)|^2\, dx = 2(\mathcal{H}_0\phi, \phi) \le 2.\end{aligned}$$

Покажем теперь, что $\phi \in M$ приближается функциями ψ_N :

$$\begin{aligned}\|\phi - \psi_N\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x) - \xi(x/N)\phi(x)|^2\, dx \le \int_{|x|>N/2} |\phi(x)|^2 dx \le \\ \le (\min_{|x|>N/2} v(x))^{-1} \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство следует из оценки:

$$\min_{|x|>N/2} v(x) \int_{|x|>N/2} |\phi(x)|^2 dx \le \int_{|x|>N/2} |v(x)\phi(x)|^2 dx \le (\mathcal{H}_0\phi, \phi) \le 1,$$

а последнее неравенство – ввиду условия неограниченности потенциала.

Итак, множество M лежит в ε-окрестности множества $2M_N$, поэтому, если мы докажем компактность M_N (в пространстве непрерывных функций), то из этого будет следовать предкомпактность M.

По теореме Арцела – Асколи достаточно проверить равностепенную непрерывность и равномерную ограниченность множества M_N.

Равностепенная непрерывность следует из неравенства:

$$\begin{aligned}|\phi(x_1) - \phi(x_2)| = \left|\int_{x_2}^{x_2} \phi'(x)\, dx\right| \le \sqrt{|x_1 - x_2|} \left(\int_{x_2}^{x_2} |\phi'(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \le \\ \le \sqrt{|x_1 - x_2|} \left(\int_{\mathbb{R}} v(x)|\phi(x)|^2 + |\phi'(x)|^2\, dx\right)^{1/2} = \\ = \sqrt{|x_1 - x_2|}\sqrt{(\mathcal{H}_0\phi, \phi)} \le \sqrt{2|x_1 - x_2|}.\end{aligned}$$

Равномерная ограниченность следует из предыдущей оценки:

$$2N|\phi(x)| = \int_{-N}^{N} |\phi(x)|\, dy \leq \int_{-N}^{N} (|\phi(y)| + \sqrt{4N})\, dy = 4N^{3/2} +$$

$$+ \int_{-N}^{N} |\phi(y)|\, dy \leq 4N^{3/2} + \sqrt{2N} \left(\int_{-N}^{N} |\phi(y)|^2\, dy \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 4N^{3/2} + \sqrt{2N}\sqrt{2},$$

откуда

$$\sup_{x\in[-N,N]} |\phi(x)| \leq 2N^{1/2} + N^{-1/2}. \quad \square$$

Пример 12.2. Рассмотрим оператор $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx} + x^2$. По доказанной теореме у него только точечный спектр. Для его нахождения нужно решить дифференциальное уравнение:

$$-y''(x) + x^2 y(x) = \lambda y(x).$$

Решением этого уравнения являются функции Эрмита ϕ_n с собственными значениями $2n+1$.

12.2. Оператор рассеяния

Теория рассеяния описывает результат взаимодействия квантовой частицы с потенциальным полем, в качестве которого может быть и потенциалы других квантовых частиц. Рассмотрим одномерную ситуацию с одной квантовой частицей, взаимодействующей с полем.

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_0$ – самосопряженные операторы (в $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$) энергии, где $\mathcal{H}_0$ – оператор энергии свободного состояния, а $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ – оператор энергии состояния, возмущенного потенциалом V. При этом будем предполагать, что это оператор умножения на ограниченную функцию $v(x)$ убывающую на бесконечности.

Рассмотрим два линейных подпространства $\mathfrak{D}_\pm \subseteq \mathrm{H}$, состоящие из таких векторов $\psi\pm$, для которых найдется вектор $\psi \in \mathrm{H}$, что

$$e^{-\frac{it\mathcal{H}}{h}}\psi = e^{-\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}\psi_\pm + \xi_\pm(t), \tag{12.1}$$

где H-значные функции $\xi_\pm(t)$ такие, что $\lim_{t\to\pm} \|\xi_\pm(t)\| = 0$.

Напомним, что унитарная группа $e^{-\frac{it\mathcal{H}}{h}}$ суть эволюционная группа возмущенного состояния, а $e^{-\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}$ – оператор эволюции свободной частицы. Тогда условие (12.1) означает, что свободная частица находящаяся в состоянии $\psi\pm$ асимптотически приходит к тому же состоянию, что и возмущенная частица из состояния ψ.

Определим операторы $W_\pm : \mathfrak{D}_\pm \to \mathrm{H}$, равенством

$$W_\pm \psi_\pm = \psi,$$

где ψ – вектор, соответствующий векторам $\psi_\pm$ из определения подпространств $\mathfrak{D}_\pm$. Используя (12.1) получим

$$W_\pm \psi_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}} e^{-\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} \psi_\pm. \tag{12.2}$$

Операторы $W\psi_\pm$ называются **волновыми** операторами. Ясно, что они являются изометричными операторами, так как они есть сильные пределы унитарного оператора $e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}} e^{-\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}$ при $t \to \pm\infty$.

Оператор $S = W_+^{-1} W_-$, переводящий вектор ψ_- в ψ_+ называется **оператором рассеяния**. Он изометричен и определен на множестве

$$D_S = \mathrm{Dom} S = \{\psi_- \in \mathfrak{D}_- : \ W_-\psi_- \in W_+\mathfrak{D}_+\}.$$

Применение оператора S для изучения эволюции взаимодействия частицы с полем происходит следующим способом: рассматриваем движение свободной частицы на промежутке времени $(-\infty, 0]$, потом применяем к получившемуся состоянию оператор S, и снова считаем частицу свободной. Момент времени $t = 0$ ничем не выделен, его можно заменить на любой другой, что обусловлено коммутативностью операторов S и $\mathcal{H}_0$:

$$[S, \mathcal{H}_0] = S\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_0 S = 0.$$

Этот факт мы и будем доказывать при некоторых предположениях.

Лемма 12.1. Справедливы операторные равенства:

$$W_+ e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} = e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}} W_+, \quad W_- e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} = e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}} W_-$$

и

$$S e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} = e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} S$$

для любого $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство леммы 12.1. Докажем сначала, что

$$e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} \mathfrak{D}_\pm \subset \mathfrak{D}_\pm.$$

Пусть $\psi_\pm \in \mathfrak{D}_\pm$ и ψ и $\xi_\pm$ соответствующие им вектора, удовлетворяющие (12.1), тогда векторам $e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}\psi_\pm$ соответствуют

$$\psi' = e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}} e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} e^{-\frac{it\mathcal{H}}{h}}\psi, \quad \xi'(t) = e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}\xi(t).$$

Действительно, подставляя указанные вектора в равенство (12.1), получим

$$e^{-\frac{it\mathcal{H}}{h}}(e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}} e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} e^{-\frac{it\mathcal{H}}{h}}\psi) = e^{-\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}(e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}\psi_\pm) + e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}\xi(t),$$

что ввиду равенства $e^{-\frac{it\mathcal{H}}{h}} e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}} = e^{-it\frac{\mathcal{H}-\mathcal{H}}{h}} = I$ (и аналогичного для $\mathcal{H}_0$) при умножении слева на $e^{-\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}$ эквивалентно равенству (12.1) для $\psi_\pm$. Остается только заметить, что $\|\xi_\pm(t)\| = \|\xi'_\pm(t)\|$.

Перейдем к доказательству равенств. Пусть $\phi_\pm \in \mathfrak{D}_\pm$, тогда используя (12.2) и полагая $\tau_1 = \tau - t$, получим

$$\begin{aligned} W_\pm e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}\psi_\pm &= \lim_{\tau\to\pm\infty} e^{\frac{i\tau\mathcal{H}}{h}} e^{-\frac{i\tau\mathcal{H}_0}{h}} e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}\psi_\pm = \lim_{\tau\to\pm\infty} e^{\frac{i\tau\mathcal{H}}{h}} e^{-\frac{i(\tau-t)\mathcal{H}_0}{h}}\psi_\pm = \\ &= \lim_{\tau_1\to\pm\infty} e^{\frac{i(\tau_1+t)\mathcal{H}}{h}} e^{-\frac{i\tau_1\mathcal{H}_0}{h}}\psi_\pm = e^{\frac{i(t)\mathcal{H}}{h}} \lim_{\tau_1\to\pm\infty} e^{\frac{i\tau_1\mathcal{H}}{h}} e^{-\frac{i\tau_1\mathcal{H}_0}{h}}\psi_\pm = \\ &= e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}} W_\pm\psi_\pm. \end{aligned}$$

Далее из первого доказанного равенства следует, что

$$e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} W_+^{-1} = W_+^{-1} e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}}.$$

Умножая его на второе доказанное равенство, получим

$$Se^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} = W_+^{-1} W_- e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} = W_+^{-1} e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}} W_- = e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}} W_+^{-1} W_- = e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}} S.$$

Лемма доказана. □

Как мы уже отмечали, оператор рассеяния изометричен, и легко видеть, что он будет унитарным если и только если $\mathfrak{D}_- = \mathfrak{D}_+ = \mathrm{H}$ и $W_+\mathfrak{D}_+ = W_-\mathfrak{D}_-$. Используя различные методы (схема Энсса, теорема Кука) можно показать, что такая ситуация возникает, например, если $\mathcal{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ и потенциал v удовлетворяет неравенству

$$|v(x)| \le C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}, \ C > 0, \ \varepsilon > 0.$$

Покажем, что в этом случае оператор рассеяния коммутирует с оператором свободной энергии.

Теорема 12.2.(О коммутаторе операторов рассеяния и свободной энергии) Пусть S унитарен, тогда $[S, \mathcal{H}_0] = 0$.

Доказательство теоремы 12.2. Докажем сначала равенства:

$$W_{\pm}\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}W_{\pm}.$$

По теореме 11.1 мы знаем, что $\phi \in \mathrm{Dom}\mathcal{H}_0$ тогда и только тогда, когда

$$-ih\mathcal{D}(e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}\phi)|_{t=0} = \mathcal{H}_0\phi.$$

Аналогично, $W_{\pm}\phi \in \mathrm{Dom}\mathcal{H}$ если и только если

$$-ih\mathcal{D}(e^{\frac{it\mathcal{H}}{h}}W_{\pm}\phi)|_{t=0} = \mathcal{H}W_{\pm}\phi.$$

По лемме 12.1 для всякого $\phi \in \mathfrak{D}_{\pm} = \mathrm{H}$ имеет место равенство

$$W_{\pm}e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}\phi = e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}W_{\pm}\phi.$$

Продифференцируем (формально) по t это равенство:

$$\mathcal{D}(W_{\pm}e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}\phi)|_{t=0} = \mathcal{D}(e^{\frac{it\mathcal{H}_0}{h}}W_{\pm}\phi)|_{t=0},$$

$$W_{\pm}\frac{i\mathcal{H}_0\phi}{h} = \frac{i\mathcal{H}W_{\pm}\phi}{h}.$$

Отсюда замечаем, что

$$\phi \in \mathrm{Dom}\mathcal{H}_0 \Leftrightarrow W_{\pm}\phi \in \mathrm{Dom}\mathcal{H}$$

и

$$W_{\pm}\mathcal{H}_0\phi = \mathcal{H}W_{\pm}\phi.$$

Вспоминая определение оператора S, для любого $\phi \in \mathrm{Dom}\mathcal{H}_0$ получаем равенство

$$S\mathcal{H}_0\phi = W_+^{-1}W_-\mathcal{H}_0\phi = W_+^{-1}\mathcal{H}W_-\phi = \mathcal{H}_0W_+^{-1}W_-\phi = \mathcal{H}_0S\phi.$$

Теорема доказана. $\square$

Упражнения

12.1. Пусть линейный оператор $\mathcal{H}_0$ на своей области определения удовлетворяет условию $(\mathcal{H}_0\phi, \phi) \geq C(\phi, \phi)$ для некоторой константы $C > 0$. Показать, что $\mathcal{H}_0^{-1}$ существует и ограничен.

12.2. В каком месте доказательства теоремы 12.2 мы использовали унитарность оператора рассеяния?

Лекция № 13. Введение в эргодическую теорию. Спектральные задачи

13.1. Теоремы Неймана и Биркгофа

Эргодическая теория имеет дело с измеримыми пространствами и движениями в этом пространстве, которые сохраняют меру.

Определение 13.1. Пусть $(X, \mathcal{F}, \mu)$ – пространство с конечной мерой, и на нем задано отображение $\tau : X \to X$ (семейство отображений $\tau_t : X \to X$). Если выполнены условия:

1) для всякого $E \in \mathcal{F}$ множество $\tau^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ и $\mu(E) = \mu(\tau^{-1}(E))$, то τ называется **эндоморфизмом пространства с мерой**;

2) τ взаимнооднозначно и для всякого $E \in \mathcal{F}$ множества $\tau(E), \tau^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ и $\mu(E) = \mu(\tau^{-1}(E)) = \mu(\tau(E))$, то τ называется **автоморфизмом пространства с мерой**;

3) для всех $t \in \mathbb{R}^+$ отображение τ_t – эндоморфизм пространства с мерой и $\tau_t(\tau_s x) = \tau_{t+s}x$; для любой $\mathcal{F}$-измеримой функции f функция $f(\tau_t)$ измерима на прямом произведении $X \times \mathbb{R}^+$, то τ_t называется **полупотоком**;

4) τ_t – полупоток и для всех $t \in \mathbb{R}$ отображение τ_t – автоморфизм пространства с мерой, то τ_t называется **потоком**.

Четверку $(X, \mathcal{F}, \mu; \tau)$ или $(X, \mathcal{F}, \mu; \tau_t)$ будем называть **динамической системой**, а меру μ – **τ-инвариантной** (соответственно τ_t-инвариантной). Обычно считают меру μ нормированной, т. е. $\mu(X) = 1$.

Определение 13.2. Функция f называется **τ-инвариантной μ-почти всюду** (или просто τ-инвариантной), если почти всюду относительно меры μ выполнено равенство $f(\tau x) = f(x)$. Множество E – **τ-инвариантно**, если его характеристическая функция χ_E будет τ-инвариантна. Аналогичное определение инвариантности относительно потоков и полупотоков.

Определение 13.3. Динамическая система (мера) называется **эргодической**, если все τ-инвариантные (τ_t-инвариантные для всех t) множества имеют меру нуль или единица.

Лемма 13.1. Пусть динамическая система эргодична, тогда все τ-инвариантные (соответственно τ_t-инвариантные) функции суть константы.

Доказательство леммы 13.1. Пусть $g : X \to \mathbb{R}$ есть инвариантная относительно τ функция, тогда для всякого $a \in \mathbb{R}$ множество

$E_a = \{x \in X : g(x) \le a\}$ есть инвариантное множество. Действительно,

$$\chi_{E_a}(\tau x) = \chi_{\tau^{-1}(E_a)}(x) = \chi_{\{\tau^{-1}x \in X : g(x) \le a\}} = \chi_{\{y \in X : g(\tau y) \le a\}} = \\ = \chi_{\{y \in X : g(y) \le a\}} = \chi_{E_a}(x).$$

Раз система эргодична, то $\mu(E_a)$ равна нулю или единице для всех $a \in \mathbb{R}$. Пусть $a_0 = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(E_a) = 1\}$ и $a^0 = \sup\{a \in \mathbb{R} : \mu(E_a) = 0\}$. Тогда это означает, что почти всюду относительно меры μ верно неравенство

$$a^0 \le g(x) \le a_0.$$

Но $a_0 = a^0$, поскольку в противном случае $0 = \mu_{E_{\frac{a^0+a_0}{2}}} = 1$. Таким образом $g(x) = a_0 = a^0$.

Для комплекснозначных инвариантных функций достаточно показать, что их вещественные и мнимые части инвариантны (упражнение 13.2). Для полупотоков и потоков доказательство аналогично. $\square$

Всякой динамической системе можно поставить в соответствие изометрический оператор $U : \mathrm{L}_2(X, \mu) \to \mathrm{L}_2(X, \mu)$, действующий по правилу

$$Uf(x) = f(\tau x).$$

Такой оператор называется **оператором Купмана**. Аналогичное определение операторов Купмана U_t для полупотоков и потоков.

Ясно, что инвариантные функции являются неподвижными точками оператора Купмана. Переформулируем лемму 13.1 в терминах этого оператора как критерий эргодичности.

Лемма 13.2. Динамическая система эргодична тогда и только тогда, когда неподвижные точки оператора Купмана суть константы.

Доказательство леммы 13.2. Если система эргодична, то все инвариантные функции (а не только из $\mathrm{L}_2(X, \mu)$) константы, т. е. неподвижные точки оператора Купмана – константы.

Если же система не эргодична, то найдется инвариантное множество E с мерой $0 < \mu(E) < 1$, тогда $\chi_E \in \mathrm{L}_2(X, \mu)$ есть неподвижная точка U, и она не константа. $\square$

Пример 13.1. Пусть $X = S^1$ – окружность единичного радиуса, τ – поворот окружности на угол α и мера μ – обычная мера Лебега на S^1 (длина дуги). Тогда легко видеть, что τ – автоморфизм. Более того, если $\alpha = \frac{m\pi}{n}$, для $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то мера не эргодична. В противном случае эргодична.

Действительно, в первом случае видно, что τ^{2n} есть тождественное отображение. Тогда для любого $E \in \mathcal{F}$ такого, что $0 < \mu(E) < 1$ множество $E' = \tau^{2n-1}(E)$ будет инвариантным, а его мера $\mu(E') = \mu(E)$ не ноль и не единица.

Во втором случае заметим, что полная ортогональная система функций $e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$ суть собственные функции оператора U :

$$Ue^{inx} = e^{in(x+\alpha)} = e^{in\alpha}e^{inx}.$$

Тогда инвариантную функцию f можно разложить в ряд Фурье по этой системе:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e^{inx},$$

где $\lambda_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\,dx$.

Тогда

$$Uf(x) = U\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n e^{in\alpha}e^{inx}$$

и из равенства $Uf = f$ следует равенство соответствующих коэффициентов $\lambda_n = \lambda_n e^{in\alpha},\ n \in \mathbb{Z}$. Откуда заключаем, что все $\lambda_n = 0$ для $n \neq 0$. Таким образом инвариантная функция $f = \lambda_0$, тогда по критерию система эргодична.

Пример 13.2. Пусть $X = [0,1)$, отображение $\tau(x) = 2x(\mathrm{mod} 1)$ и мера μ – обычная мера Лебега на отрезке. Тогда также легко видеть, что τ – эндоморфизм. Мера μ будет эргодической (упражнение 13.3).

В обоих примерах $\mathcal{F}$ – борелевская σ–алгебра на соответствующих множествах.

Первые утверждения эргодической теории касаются асимптотического поведения средних вида:

$$A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} Uf(x), \quad \mathcal{A}_t f(x) = \frac{1}{t}\int_0^t U_s f(x)\,ds,\ f \in \mathrm{L}_2(X,\mu). \quad (13.1)$$

Если для каждой точки $x \in X$ рассматривать множество $\{\tau^n(x)\}$ (соответственно $\tau_t(x)$) как траекторию движения точки x, то средние (13.1) есть среднее значение наблюдаемой величины f вдоль траектории.

Ниже формулируемые теоремы утверждают существование для почти всех траекторий предела средних (13.1), а в терминах оператора Купмана этот предел является его неподвижной точкой. Сформулируем эти утверждения только для непрерывного случая.

Теорема 13.1 (Биркгоф). Пусть $(X, \mathcal{F}, \mu; \tau_t)$ – динамическая система. Тогда для любой наблюдаемой $f \in \mathrm{L}_1(X, \mu)$ и для μ-почти всех точек $x \in X$ существует предел

$$f^* = \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}_t f(x),$$

который будет τ_t-инвариантным и, кроме того,

$$\int_X f^*(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x).$$

Если к тому же μ – эргодическая мера, то $f^* = \int_X f(x)\, d\mu(x)$.

Теорема 13.2 (Нейман). Пусть $(X, \mathcal{F}, \mu; \tau_t)$ – динамическая система и U_t – соответствующие операторы Купмана. Пусть P – проектор на подпространство неподвижных точек всех операторов U_t, тогда для любой наблюдаемой $f \in \mathrm{L}_2(X, \mu)$ существует предел по норме пространства $\mathrm{L}_2(X, \mu)$

$$f^* = \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}_t f(x),$$

и $f^* = Pf$.

Первая теорема с точки зрения статистических свойств утверждает, что в эргодических динамических системах средние по времени можно заменять на среднее по пространству.

13.2. Динамические системы механики

Пусть X – m-мерное замкнутое ориентируемое многообразие класса C^∞ и u – векторное поле класса C^∞. В локальной системе координат $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ векторы поля u имеют вид:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (u_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)),$$

где $u_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in C^\infty(X),\ 1 \le j \le m$.

Рассмотрим на X систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = u_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_m}{dt} = u_m(x_1, x_2, \ldots, x_m). \end{cases} \tag{13.2}$$

Эта система определяет поток τ_t, состоящий из диффеоморфизмов класса C^∞, действующих как сдвиг на время t каждой точки x вдоль интегральной линии системы (13.2) , через нее проходящей.

Рассмотрим вопрос о том, когда такая система обладает инвариантной мерой (тогда это, действительно, будет поток). Пусть дифференциал меры μ в локальных координатах задается равенством:

$$d\mu(x) = p(x)\,dx_1\ldots\,dx_m.$$

Теорема 13.3 (Лиувилль). Для того, чтобы мера μ (конечная или σ-конечная) была τ_t-инвариантной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{div}(pu) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}(pu_j) = 0. \tag{13.3}$$

Доказательство теоремы 13.3. Возьмем произвольную функцию $f \in C^\infty(X)$ с носителем $\operatorname{supp} f$, лежащим в какой-нибудь координатной окрестности U. Тогда ввиду того, что τ_t – диффеоморфизм, найдется t_0, что для всех $|t| < t_0$ функция $f(\tau_t(x))$ тоже будет сосредоточена в этой же координатной окрестности U. Тогда для инвариантности меры μ необходимо и достаточно, чтобы для всех таких f имело место равенство (упражнение 13.4)

$$\int_X f(x)p(x)\,dx_1\ldots\,dx_m = \int_X f(\tau_t(x))p(x)\,dx_1\ldots\,dx_m$$

при $|t| < t_0$. Ввиду дифференцируемости подынтегрального выражения в правой части это соотношение эквивалентно

$$\int_X \frac{d}{dt} f(\tau_t(x))p(x)\,dx_1\ldots\,dx_m = 0$$

для всех $|t| < t_0$.

Используя это замечание, получаем

$$0 = \int_X \frac{d}{dt} f(\tau_t(x))p(x)\,dx_1\ldots dx_m = \int_U \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\tau_t(x)) \frac{dx_j}{dt} p(x)\,dx_1\ldots dx_m =$$

$$= \int_U \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\tau_t(x)) u_j p\,dx_1\ldots dx_m = \int_U \operatorname{div}\left(f(\tau_t(x))up\right)\,dx_1\ldots dx_m -$$

$$- \int_U \sum_{j=1}^{m} f(\tau_t(x)) \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j p)\,dx_1\ldots dx_m = \int_{\partial U} f(\tau_t(x))(u,n)p\,d\sigma -$$

$$- \int_U \sum_{j=1}^{m} f(\tau_t(x)) \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j p)\,dx_1\ldots dx_m = -\int_X f(\tau_t(x))\operatorname{div}(pu)\,dx_1\ldots dx_m.$$

Поскольку это равенство выполнено для произвольной f с указанными выше условиями, то необходимо и достаточно соотношение (13.3). $\square$

Рассмотрим несколько примеров таких систем.

Пример 13.3. Движение частицы с массой m и зарядом q в трехмерном электромагнитном поле, не зависящим от времени, с электрической напряженностью $E(x)$ и магнитной напряженностью $B(x)$ задается уравнением Лоренца

$$m\frac{dv}{dt} = q(E + v \times B).$$

Прибавляя сюда стандартное уравнение для скорости $\frac{dx}{dt} = v$, в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6$ получим динамическую систему, задаваемую уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = v_j, \\ \frac{dv_j}{dt} = \frac{q}{m}(E_j + (v \times B)_j), \ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Тогда мера $d\mu(x, v) = dx_1 dx_2 dx_3 dv_1 dv_2 dv_3$ инвариантна (однако, она σ-конечна, но не конечна). Действительно, по теореме Лиувилля достаточно проверить равенство нулю дивергенции правой части этой системы:

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\frac{q}{m}(E_j + (v \times B)_j) \right) = \frac{q}{m} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (v \times B)_j}{\partial v_j} =$$

$$= \frac{q}{m} \left(\frac{\partial (v_2 B_3 - v_3 B_2)}{\partial v_1} + \frac{\partial (v_3 B_1 - v_1 B_3)}{\partial v_2} + \frac{\partial (v_1 B_2 - v_2 B_1)}{\partial v_3} \right) = 0.$$

Пример 13.4. Пусть X – m-мерное замкнутое ориентируемое многообразие класса C^∞ и TX – его касательное расслоение, т. е. $TX = \{(x, v) : x \in X, v \in T_x\}$, где $T_x X$ – касательное (m-мерное) подпространство к многообразию X в точке x. Обычно стандартные координаты на TM обозначают как $(p_1, \ldots, p_m) \in X$ и $(q_1, \ldots, q_m) \in T_x$. Пусть $H(p, q)$ – гладкая функция, определенная на TX. Тогда следующая система уравнений на TX задает `гамильтонову` динамическую систему:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \ j = 1, \ldots, m.$$

Теорема Лиувилля утверждает, что σ-конечная мера $\prod_j dp_j \prod_j dq_j$ является инвариантной относительно гамильтонова потока:

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j} = 0.$$

Во многих случаях линии уровня функции H являются компактными множествами и сужение инвариантной меры на такие множества будет уже конечной мерой, следовательно, можно применять эргодическую теорему.

Давайте теперь выясним, каков генератор унитарной группы U_t операторов Купмана будет у гамильтоновой системы. Но чтобы применить теорему Стоуна, сначала нужно понять, что эта группа сильно непрерывна. Сильную непрерывность можно установить с помощью следующего утверждения.

Теорема 13.4 (О сильной непрерывности унитарной группы). Пусть $U(t)$ – однопараметрическая группа унитарных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве H. Предположим, что для всех $\psi, \phi \in$ H функция $U_{\psi,\phi}(t) = (U(t)\phi, \psi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ измерима, т. е. для всякого борелевского подмножества $E \subset \mathbb{C}$ множество $U^{-1}_{\psi,\phi}(E)$ будет борелевским на $\mathbb{R}$. Тогда группа $U(t)$ сильно непрерывна.

Используя эту теорему, покажем, что унитарные группы порожденные потоками сильно непрерывны. Действительно, из определения потока следует, что для всякой $f \in \mathrm{L}_2(X, \mu)$ функция $f(\tau_t(x))$ измерима на $\mathbb{R} \times X$. Тогда и для любой $g \in \mathrm{L}_2(X, \mu)$ функция $f(\tau_t(x))\overline{g(x)}$ будет также измерима на $\mathbb{R} \times X$. Тогда по теореме Фубини функция действительного переменного t

$$(U_t f, g) = \int_X f(\tau_t(x))\overline{g(x)}\, d\mu(x)$$

будет измеримой на $\mathbb{R}$. Что и требовалось установить.

Перейдем непосредственно к вычислению генератора группы, порожденной гамильтоновым потоком. Пусть f – гладкая функция на расслоении TX, положим

$$\begin{aligned} Bf &= -i \lim_{t\to 0} \frac{U_t f(x) - f(x)}{t} = -i \lim_{t\to 0} \frac{f(\tau_t(x)) - f(x)}{t} = \\ &= -i \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} - i \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt} = -i \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} + i \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} = \\ &= -i\{H, f\}, \end{aligned}$$

где

$$\{H, f\} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

есть скобка Пуассона функций H и f.

Замыкание оператора B и есть генератор A нашей группы. Он называется оператором Лиувилля.

Упражнения

13.1. Проверить, что оператор Купмана, действительно, изометричен, а в случае автоморфизма – унитарен.
13.2. Пусть $g : X \to \mathbb{C}$ – τ-инвариантная функция. Показать, что $\mathrm{Re}g$ и $\mathrm{Im}g$ также τ-инвариантны.
13.3. Пусть $\tau : S^1 \to S^1$ по правилу $\tau(e^{ix}) = e^{2ix}$. Используя разложение функции в ряд Фурье по системе e^{inx} доказать эргодичность меры Лебега для этого отображения.
13.4. Доказать, что мера μ инвариантна относительно τ_t тогда и только тогда, когда для любой функции f из всюду плотного подмножества в $\mathrm{L}_1(X, \mu)$ верно равенство

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f(\tau_t(x))\, d\mu(x).$$

Список литературы

[1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

[2] Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шредингера. М.: МГУ, 1983.

[3] Богачев В. И. Основы теории меры. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" , 2003. Т. 1.

[4] Буттацо Дж., Джаквинта М., Гильдебрандт С. Одномерные вариационные задачи: Введение. пер. с англ. Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002. Университетская серия, Т. 11.

[5] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.

[6] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.

[7] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.

[8] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

[9] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[10] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

[11] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: ЛГУ, 1985.

[12] Пирковский А. Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. М.: МЦНМО, 2010.

[13] Рид М. Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

[14] Рид М. Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.

[15] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.

[16] Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.

[17] Petz D. An Invitation to the algebra of canonical commutation relations. Leuven: Leuven University Press, 1989.