МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики

АЮПОВА Н.Б., ТАУБЕР Н.М.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО КУРСУ

"ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

(Учебно-методическое пособие)

Новосибирск

2012

Аюпова Н.Б., Таубер Н.М. Задачи и упражнения по курсу "Векторный и тензорный анализ"/Новосиб.гос ун-т, Новосибирск, 2012. 53 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программе курса "Векторный и тензорный анализ", читаемого студентам 3-го курса физического и геолого-геофизического факультетов Новосибирского государственного университета. В пособии содержатся задачи и упражнения по всем разделам, изучаемым в данном курсе. Имеются теоретические введения и примеры решения типовых задач. Почти ко всем задачам даны ответы.

Рецензент к.ф-м.н., доцент каф.высшей математики ФФ А.И.Черных

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г. г.

1 Ортогональные тензоры

Пусть при переходе при неподвижном начале из одной ортогональной системы координат в другую ортогональную систему, векторы базиса преобразуется по закону $\mathbf{e}'_\mathbf{i} = S_{ij}\,\mathbf{e}_\mathbf{j}$, где (S_{ij}) — ортогональная матрица, т.е.

$$S_{js}S_{ks} = \delta_{jk}, \quad S_{sj}S_{sk} = \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Тогда координаты вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ преобразуются следующим образом

$$x'_k = S_{ki}x_i.$$

Координаты тензора ранга m преобразуются по закону

$$T'_{i_1\ldots i_m} = S_{i_i j_1}\ldots S_{i_m j_m}T_{j_1\ldots j_m}$$

Операции над тензорами

1. Сумма Пусть $A = (a_{i_1\ldots i_m})$ и $B = (b_{i_1\ldots i_m})$ — два тензора одинаковой валентности. Их суммой называется тензор $C = (c_{i_1\ldots i_m})$, компонентами которого являются

$$c_{i_1\ldots i_m} = a_{i_1\ldots i_m} + b_{i_1\ldots i_m}.$$

2. Тензорное произведение. Пусть $A = (a_{i_1\ldots i_k})$, $B = (b_{j_1\ldots i_m})$. Тогда их тензорным произведением называется

$$C = A \otimes B = (c_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_m}) = (a_{i_1\ldots i_k}b_{j_1\ldots i_m})$$

3. Свертка. Для свертывания отождествляем какую-либо пару индексов и производим суммирование. Например,

$$b_k = a_{kii}$$

4. Симметрирование. Фиксируем какие-либо индексы и образуем новый тензор по закону

$$b_{ijk} = a_{(ijk)} = \frac{1}{3!}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{ikj} + a_{jki} + a_{kji}).$$

Операция, приводящая к тензору b_{ijk} называется операцией симметрирования тензора a_{ijk} по индексам i, j, k.

5. Альтернирование. Эту операцию легко понять из следующего равенства

$$c_{ijk} = \frac{1}{3!}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} - a_{ikj} + a_{kji} - a_{jik})$$

В результате получается тензор, кососимметричный по индексам i, j, k.

Приведение симметричного тензора к главным осям.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ — тензор, $\mathbf{x}$ — вектор. $\mathbf{x}$ называется главным (собственным) направлением тензора A, если выполнено

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x},$$

λ — главное (собственное) значение тензора A.

Инварианты тензора A:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора.

Далее в условиях задач элементы в трехмерных матрицах n-го порядка расположены следующим образом. Зафиксировав какое-либо значение третьего индекса k, мы получаем двумерный слой или двумерное сечение трехмерной матрицы — квадратную матрицу. В ней компоненты данного тензора расположены так, что значение первого индекса равно номеру строки, второго — столбца. а третий номер фиксирован. Например, в случае $n = 2$ компоненты тензора a_{ijk} образуют “трехмерную матрицу второго порядка”

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array}\right)$$

Пример 1. Произвести свертку тензора по первым двум индексам

$$a_{ijk} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1959 & 5 \\ 2 & 2012 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Решение: Пусть $b_k = a_{iik}$. Тогда

$$b_1 = a_{ii1} = a_{111} + a_{221} = 1 + 2012 = 2013$$
$$b_2 = a_{ii2} = a_{112} + a_{222} = 1959 + 6 = 1965$$

Пример 2. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис для симметричного тензора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

Решение: 1) находим собственные значения матрицы A для этого составляем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ или

$$-\lambda^3 + 45\lambda^2 - 567\lambda + 2187 = 0$$

Корни данного уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 27$. 2) для определения собственных векторов решаем соответствующие однородные системы уравнений. Обозначим координаты собственного вектора x_1, x_2, x_3. Тогда для $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ система вырождается в одно уравнение

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

его решение неединственно, собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2$ соответствует плоскость, натянутая на два линейно независимых вектора, например $\mathbf{a_1} = (1, 1, 0)$ и $\mathbf{a_2} = (1, 0, -2)$. Для собственного значения $\lambda_3 = 27$ система уравнений имеет вид

$$-5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-4x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0$$

решением является собственный вектор $\mathbf{a_3} = (2, -2, 1)$.

2) вектор $\mathbf{a_3}$ ортогонален каждому из векторов $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$, поскольку они соответствуют различным собственным значениям. Для построения собственного ортогонального базиса применим процесс ортогонализации к векторам $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$. А именно пусть $\mathbf{b_1} = \mathbf{a_1} = (1, 1, 0)$, а вектор $\mathbf{b_2}$ построим следующим образом

$$\mathbf{b_2} = \mathbf{a_2} - \frac{(\mathbf{a_2}, \mathbf{b_1})}{(\mathbf{b_2}, \mathbf{b_2})}\,\mathbf{b_1} = (1, 0, -2) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2)$$

3) Итак, $\mathbf{b_1} = (1,1,0)$, $\mathbf{b_2} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2)$, $\mathbf{b_3} = (2,-2,1)$. Теперь осталось только нормировать базис.

$$\mathbf{e_1} = \frac{\mathbf{b_1}}{|\,\mathbf{b_1}\,|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$
$$\mathbf{e_2} = \frac{\mathbf{b_2}}{|\,\mathbf{b_2}\,|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$$
$$\mathbf{e_3} = \frac{\mathbf{b_3}}{|\,\mathbf{b_3}\,|} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

Ответ: канонический вид матрицы $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbf{e_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}, 0})$, $\mathbf{e_2} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{e_3} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Задачи

1.1. Доказать, что для трех неколлинеарных векторов равенства

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$

1.2. Доказать тождества

(a) $|\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}\,|^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{a}) & (\mathbf{a},\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) & (\mathbf{b},\mathbf{b}) \end{vmatrix}$

(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$

(c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{c}) & (\mathbf{a},\mathbf{d}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{c}) & (\mathbf{b},\mathbf{d}) \end{vmatrix}$

1.3. Показать, что если тензор P обладает тем свойством, что векторы

$$\mathbf{a}' = P \cdot \mathbf{a}, \qquad \mathbf{b}' = P \cdot \mathbf{b}, \qquad \mathbf{c}' = P \cdot \mathbf{c}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три фиксированных некомпланарных вектора, оказываются компланарными между собой, то все векторы $P \cdot \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — любой вектор, компланарны и найдется такой отличный от нуля вектор $\mathbf{v}$, что $P \cdot \mathbf{v} = 0$. Обратно из наличия такого вектора $\mathbf{v}$ следует компланарность всех $P \cdot \mathbf{u}$.

1.4. Показать, что если тензор P обладает тем свойством, что векторы

$$\mathbf{a}' = P \cdot \mathbf{a}, \qquad \mathbf{b}' = P \cdot \mathbf{b}, \qquad \mathbf{c}' = P \cdot \mathbf{c},$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три фиксированных некомпланарных вектора, оказываются коллинеарными между собой, то все векторы $P \cdot \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ - любой вектор, коллинеарны и найдутся два таких неколлинеарных вектора $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, что $P \cdot \mathbf{v} = 0$ и $P \cdot \mathbf{w} = 0$ Обратно из наличия двух такого векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ следует коллинеарность всех $P \cdot \mathbf{u}$.

1.5. Если для трёх некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ мы имеем

$$P \cdot \mathbf{a} = 0, \quad P \cdot \mathbf{b} = 0, \quad P \cdot \mathbf{c} = 0$$

то $P \cdot \mathbf{u} = 0$ для любого вектора $\mathbf{u}$.

1.6. Если P - тензор, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ - радиус-векторы, то преобразование $\mathbf{r}' = P \cdot \mathbf{r}$ можно рассматривать, как преобразование пространства. Выяснить, в чём состоит это преобразование для следующих тензоров P:

1) $P = \alpha\,\mathbf{I}$ (α - положительное число),

2) $P = \mathbf{I} + \mathbf{a}\,\mathbf{a}$,

3) $P = 2\,\mathbf{n}\,\mathbf{n} - \mathbf{I}$, где $\mathbf{n}$ - единичный вектор,

4) $P = \mathbf{I} + \mathbf{a}\,\mathbf{b}$, где вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}$,

5) $P = \mathbf{e}'_1\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\,\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ - две тройки взаимно перпендикулярных единичных векторов.

1.7. Пусть $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, тогда $\mathbf{u}\times$ можно рассматривать как тензор второго порядка, действие которого на любой вектор определено формулой

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{e_1}(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \mathbf{e_2}(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \mathbf{e_3}(u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Вычислить компоненты тензора $\mathbf{u}\times$

1.8. Пусть A произвольный кососимметрический трехмерный тензор. Найти вектор $\mathbf{u}$, такой, что $A\,\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ для произвольного вектора $\mathbf{v}$

1.9. Дан тензор P. Разложим его на симметричную и антисимметричную части и обозначим через $\boldsymbol{\omega}$ вектор, соответствующий антисимметричной части см. задачу 1.8. Доказать формулу

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (P \cdot \mathbf{u}) = -2\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}),$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ - любые векторы.

1.10. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и $T\,\mathbf{v} = (-2v_1 + 3v_3, -v_3, v_1 + 2v_2)$. Определить компоненты тензора T.

1.11. Вашингтон имеет координаты 39^o с.ш и 77^o з.д., Москва имеет координаты 56^o с.ш и 38^o в.д., а Вашингтон 39^o с.ш и 77^o з.д. Принимая радиус Земли за 6400 км, вычислить расстояние между Москвой и Вашингтоном по дуге большого круга.

Указание: Представьте векторы, направленные из центра Земли к городам и используйте скалярное произведение.

1.12. Дан тензор второго ранга T. Пусть тензор S имеет компоненты $S_{ij} = T_{ji}$. Доказать симметричность тензора TS.

1.13. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — данные трехмерные векторы, $\mathbf{x}$ — неизвестный вектор. Не расписывая покомпонентно, показать, что единственным решением линейного алгебраического уравнения

$$\mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} = vectb$$

является

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}}{1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

Указание Представить $\mathbf{x} = A\,\mathbf{a} + B\,\mathbf{b} + C\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и решить уравнение относительно A, B, C. Для того, чтобы доказать единственность, предположим, что $\mathbf{y}$ — другое решение уравнения, тогда

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0.$$

Какой вывод можно сделать из этого равенства.

1.14. Определить единичный вектор $\mathbf{c}$, взаимно перпендикулярный векторам $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ и $\mathbf{b} = (-1, 0, 1)$ используя и не используя векторное произведение, так, чтобы векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ составляли правую тройку векторов.

1.15. Дана линейная векторная функция

$$\mathbf{r}' = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) = P \cdot \mathbf{r}$$

При каких условиях тензор P будет симметричным?

1.16. Для того чтобы тензор P был антисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $\mathbf{a}$ выполнялось равенство

$$\mathbf{a} \cdot (P \cdot \mathbf{a}) = 0$$

Доказать это.

1.17. Тензор A дан в ортонормированном базисе $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$,...,$\mathbf{e_n}$. Записать тензор в новом базисе $\mathbf{e_1'}$, $\mathbf{e_2'}$,..., $\mathbf{e_n'}$

(а) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{e_1'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e_1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e_2}, \quad \mathbf{e_2'} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e_1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e_2}$

(б) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{e_1'} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}\,\mathbf{e_1} - \dfrac{2}{\sqrt{13}}\,\mathbf{e_2}, \quad \mathbf{e_2'} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}\,\mathbf{e_1} + \dfrac{3}{\sqrt{13}}\,\mathbf{e_2}$

(в) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{e_1'} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{e_1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{e_2}, \quad \mathbf{e_2'} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{e_1} + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{e_2}$

(г) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_1'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{e_1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{e_2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{e_3}$,

$\mathbf{e_2'} = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{e_1} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{e_2} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{e_3'} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e_2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e_3}$

(д) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_1'} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{e_1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{e_3}$,

$\mathbf{e_2'} = -\dfrac{1}{3}\,\mathbf{e_1} + \dfrac{2}{3}\,\mathbf{e_2} - \dfrac{2}{3}\,\mathbf{e_3}, \quad \mathbf{e_3'} = \dfrac{2}{3\sqrt{5}}\,\mathbf{e_1} - \dfrac{5}{3\sqrt{5}}\,\mathbf{e_2} - \dfrac{4}{3\sqrt{5}}\,\mathbf{e_3}$

е $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_1'} = \frac{1}{\sqrt{10}}\,\mathbf{e_1} + \frac{1}{\sqrt{10}}\,\mathbf{e_2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{e_3}$,

$\mathbf{e_2'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{e_2}$, $\quad \mathbf{e_3'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\,\mathbf{e_1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\,\mathbf{e_2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{e_3}$

1.18. Тензор A дан в ортонормированном базисе $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$,...,$\mathbf{e_n}$. Записать тензор в новом ортонормированном базисе $\mathbf{e_1'}$, $\mathbf{e_2'}$,..., $\mathbf{e_n'}$, если известно, что орты $\mathbf{e_1'}$, $\mathbf{e_2'}$,..., $\mathbf{e_n'}$ сонаправлены векторам $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$,..., $\mathbf{a_n}$ соответственно

а $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_1} = \mathbf{e_1} - 3\,\mathbf{e_2}$,

$\mathbf{a_2} = 3\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$,

б $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_1} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}$,

$\mathbf{a_2} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} + 3\,\mathbf{e_3}$, $\quad \mathbf{a_3} = 5\,\mathbf{e_1} - 4\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$

в $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_1} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$,

$\mathbf{a_2} = -\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}$, $\quad \mathbf{a_3} = -\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$

г $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_1} = 2\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$,

$\mathbf{a_2} = -\,\mathbf{e_2} + 2\,\mathbf{e_3}$, $\quad \mathbf{a_3} = 5\,\mathbf{e_1} - 4\,\mathbf{e_2} - 2\,\mathbf{e_3}$

1.19. Тензор A дан в ортонормированном базисе $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$. Записать тензор в новом ортонормированном базисе $\mathbf{e_1'}$, $\mathbf{e_2'}$, $\mathbf{e_3'}$, если известно, что орты $\mathbf{e_1'}$, $\mathbf{e_2'}$ сонаправлены векторам $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ соответственно и базис ориентирован как указано ниже

(а) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_1} = \mathbf{e_1} + 3\,\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}$,

$\mathbf{a_2} = -2\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$, левый базис

(б) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_1} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$,

$\mathbf{a_2} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} - 3\,\mathbf{e_3}$, правый базис

(в) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_1} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}$,
$\mathbf{a_2} = -2\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + 3\,\mathbf{e_3}$, правый базис

(г) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_1} = 2\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}$,
$\mathbf{a_2} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_3}$, левый базис

1.20. Задан симметричный ортогональный тензор. Привести его к главным осям и выписать правый ортонормированный базис собственных направлений так, чтобы векторы образовывали ортонормированный правый базис.

(а) $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$

(б) $9x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_2^2$

(в) x_1x_2

(г) $2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

(д) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$

(е) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

(ж) $4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_1x_3$

1.21. Тензор a_{ijk} задан матрицей

(а) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

(б) $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right)$

(в) $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right)$

Найти компоненты тензоров $a_{(ij)k}$, $a_{i(jk)}$, $a_{(i|j|k)}$, $a_{[ij]k}$, $a_{i[jk]}$, $a_{[i|j|k]}$,

1.22. Значения компонент тензора напряжений в некоторой точке среды заданы матрицей а) $\begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 0 & 40 & 0 \\ 10 & 0 & 60 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

Вычислить шаровую часть и девиатор тензора.

1.23. Дан тензор второго ранга T. Выделить симметричную S и кососимметричную A части тензора T. Представить действие тензора как $T = S + \mathbf{u}\times$ где $\mathbf{u}$ — вектор, соответствующий кососимметрической части. Выписать шаровую часть и девиатор тензора S. а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1.24. В прямоугольной декартовой системе координат $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$ заданы тензор напряжений

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

и площадка с нормалью n, составляющей равные углы с осями координат, так что $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

1) определить значения $\mathrm{a}, b, \mathrm{c}$, при которых на указанной площадке напряжение равно нулю;

2) для тензора напряжений с этими значениями a, b, c найти главные напряжения и направления главных осей.

3) выписать разложение этого тензора напряжений на шаровую часть и девиатор.

1.25. Показать, что кинетическую энергию T твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, можно выразить формулой

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})$$

где $\mathbf{J}$ — тензор моментов инерции, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

Ответы

1.6. 1) Преобразование подобия; 2) Растяжение в направлении вектора $\mathbf{a}$; 3) Поворот около оси $\mathbf{n}$ на π; 4) Сдвиг плоскостей $\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} =$

const параллельно направлению вектора $\mathbf{a}$; 5) Поворот пространства, при котором оси $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ переходят в оси $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$, сопровождаемый зеркальным отражением пространства, если ориентация осей $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$ отлична от ориентации осей $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

1.10 $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.14 (-2,-4,-2)

1.15. При условии, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

1.17 а) $\begin{pmatrix} 9 & 5/2 \\ -16 & 9/2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3/13 & -11/13 \\ -11/13 & 153/13 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 49/5 & -33/5 \\ -23/5 & 16/5 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 8/3 & -5\sqrt{2}/3 & 0 \\ -2\sqrt{2}/3 & -13/6 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{2/3} & 1/(2\sqrt{3}) & -1/2 \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} 7/5 & \sqrt{5}/3 & -1/3 \\ 2/(3\sqrt{5}) & -13/9 & 32/(9\sqrt{5}) \\ 7/5 & 22/(9\sqrt{5}) & 23/45 \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5}(1+\sqrt{2}) & -\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{4}{5}-\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 4 & \frac{8}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{5}(1+\sqrt{2}) & \frac{8-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{1}{5}(19-2\sqrt{2}) \end{pmatrix}$

1.18 а) $\begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 \\ -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4/3 & -7/\sqrt{15} & -3\sqrt{10} \\ -7/\sqrt{15} & 27/7 & \sqrt{3/2} \\ -\sqrt{5/2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 19/5 & 3\sqrt{3/14} & -25/(3\sqrt{14}) \\ 4\sqrt{2/21} & 4/3 & 2/(2\sqrt{3}) \\ -8\sqrt{2}/(3\sqrt{7}) & -4\sqrt{3}/7 & 59/21 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 46/9 & 2/(3\sqrt{5}) & 22/\sqrt{5} \\ 13/(3\sqrt{5}) & 1 & 6 \\ 7/(9\sqrt{5}) & 1/3 & 10 \end{pmatrix}$

1.19 а) $\begin{pmatrix} 21/5 & 19/(2\sqrt{15}) & -5\sqrt{5}/(2\sqrt{33}) \\ 7/15 & 1 & -2/\sqrt{11} \\ -7/\sqrt{165} & 2/\sqrt{11} & 35/11 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 10/3 & \sqrt{6/7} & -\sqrt{2}/(3\sqrt{7}) \\ 3\sqrt{3/14} & 3/2 & \sqrt{3}/2 \\ 25/(3\sqrt{14}) & \sqrt{3}/2 & 7/6 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7/10} & -\sqrt{7/2} \\ -\sqrt{7/10} & 1 & -3/\sqrt{5} \\ \sqrt{7/2}) & 3/\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} -2/3 & 6/\sqrt{5} & -14/(3\sqrt{5}) \\ 8/(3\sqrt{5}) & -1/\sqrt{5} & -61/15 \\ 14/(3\sqrt{5}) & 3/5 & -17/15 \end{pmatrix}$

1.22 а) $\begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -20 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

1.23 а) $S = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $(-1, 2, 0)$;

б) $S = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $(1, 3, 2)$;

1.20 а) $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$; $(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$, $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$;
б) $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$; $(3/5, -4/5)$, $(4/5, 3/5)$;
в) $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = 1/2$; $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$;
г) $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $(1/(3\sqrt{2}), -4/(3\sqrt{2}), -1/(3\sqrt{2}))$, $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$; $(-2/3, -1/3, 2/3)$
д) $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 0$, $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$;
е) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = 1/2$,
$(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$;
ж) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -2$,
$(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$;

1.24 1) $a = b = c = -1/2$,

2) имеем два одинаковых главных напряжения $p_1 = p_2 = 3/2$ и одно, равное нулю . третья главная ось тензора напряжений совпала с нормалью $\mathbf{n}$ к площадке, где все компоненты напряжения равны нулю. Вся плоскость первых двух главных осей (плоскость, ортогональная вектору $\mathbf{n}$ является собственной плоско-

стью и любые два взаимно перпендикулярных направления в ней являются главными.)

3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Тензорная алгебра

Пусть при переходе от старой системы координат к новой базис меняется по закону

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\, \mathbf{e}_i,$$

и обратно

$$\mathbf{e}_i = B^{i'}_i\, \mathbf{e}_{i'}$$

Матрицы $A^i_{i'}$ и $B^{i'}_i$ связаны соотношениями

$$B^{j'}_k A^k_{i^1} = \delta^{j'}_{i'},$$

$$A^j_{k'} B^{k'}_i = \delta^i_j,$$

Будем говорить, что дан контравариантный одновалентный тензор, если при замене координат он меняется по закону

$$a^{i'} = B^{i'}_i\, a^i,$$

ковариантный вектор меняется следующим образом

$$a_{i'} = A^i_{i'} a_i,$$

Для $(p+q)$ валентный тензора, p раз контравариантного и q раз ковариантного закон преобразования выглядит так

$$a^{j'_1 \ldots j'_p}_{i'_1 \ldots i'_q} = B^{j'_1}_{j_1} B^{j'_2}_{j_2} \ldots B^{j'_p}_{j_p} A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \ldots A^{i_q}_{i'_q} a^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_q}$$

Метрический (фундаментальный) тензор

$$g_{ij} = \mathbf{e_i}\, \mathbf{e_j}$$

$$g^{ki} g_{ij} = \delta^k_j$$

Поднимание и опускание индекса

$$x_i = g_{ij}x^j$$

$$x^i = g^{ij}x_j$$

Сопряженный базис $\mathbf{e^i}$ определяется из условия

$$\mathbf{e^i}\,\mathbf{e_j} = \delta^i_j.$$

Далее в условиях задач в тех случаях, когда надо выписать компоненты какого-либо тензора, мы пользуемся матричной записью. Предварительно все индексы тензора упорядочим следующим образом: сначала все верхние индексы слева направо, потом нижние индексы слева направо. Упорядочив индексы, можно элементы записать в виде квадратной матрицы Зафиксировав какое-либо значение третьего индекса k, мы получаем двумерный слой или двумерное сечение трехмерной матрицы — квадратную матрицу. В ней компоненты данного тензора расположены так, что значение первого индекса равно номеру строки, второго — столбца. а третий номер фиксирован. Например, в случае $n = 2$ компоненты тензора a^i_{jk} образуют "трехмерную матрицу второго порядка"

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a^1_{11} & a^1_{21} & a^1_{12} & a^1_{22} \\ a^2_{11} & a^2_{21} & a^2_{12} & a^2_{22} \end{array}\right)$$

Компоненты четырехвалентного тензора образуют четырехмерную матрицу порядка n. Зафиксировав какие-либо значения k, l двух последних индексов, мы получаем квадратную матрицу A_{kl} порядка n — двумерное сечение четырехмерной матрицы. В матрице A_{kl} компоненты расположены так, что значение первого индекса компоненты совпадает с номером строки, значение второго — с номером столбца, а третий и четвертый индексы равны k и l. Теперь все компоненты можно выписать в виде плоской квадратной матрицы $A = (A_{kl})$ порядка n^2 образованной из элементов блоков A_{kl}. Например, при $n = 2$ тензору a_{ijkl} соответствует четырехмерная матрица второго порядка

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{1111} & a_{1211} & a_{1112} & a_{1212} \\ a_{2111} & a_{2211} & a_{2112} & a_{2212} \\ --- & --- & --- & --- \\ a_{1121} & a_{1221} & a_{1122} & a_{1222} \\ a_{2121} & a_{2221} & a_{2122} & a_{2222} \end{array}\right),$$

содержащая четыре двумерных слоя.

Пример 1. Пусть векторы базиса имеют координаты $\mathbf{e_1} = (1, 4)$, $\mathbf{e_2} = (2, 4)$. Вычислить матрицу метрического тензора g_{ij}.

Решение.

По определению $g_{ij} = \mathbf{e_i}\,\mathbf{e_j}$. Поэтому $g_{11} = \mathbf{e_1}\,\mathbf{e_1} = 17$, $g_{12} = g_{21} = \mathbf{e_1}\,\mathbf{e_2} = 18$ $g_{22} = \mathbf{e_1}\,\mathbf{e_2} = 20$.

Пример 2.

Пусть $\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$ — базис и $\mathbf{e'_1} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e'_1} = -2\,\mathbf{e_1} + 3\,\mathbf{e_2}$— другой базис. Найти преобразование сопряженного базиса и координат ковектора $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{e^1} - \mathbf{e^2}$

Решение

$\mathbf{e_{i'}} = A^k_{i'}\,\mathbf{e_k}$, отсюда $A^1_{1'} = 1$, $A^1_{2'} = -2$, $A^2_{1'} = -1$, $A^2_{2'} = 3$. Вычислим обратную транспонированную матрицу $B^{1'}_1 = 3$, $B^{1'}_2 = -2$, $B^{2'}_1 = 1$, $B^{2'}_1 = 1$. Теперь можно записать закон преобразования сопряженного базиса $\mathbf{e^{1'}} = 3\,\mathbf{e^1} - 2\,\mathbf{e^2}$, $\mathbf{e^{2'}} = \mathbf{e^1} + \mathbf{e^2}$.

Ковектор преобразуется по закону $\xi_{i'} = A^i_{i'}\xi_i$. Т.е. $\xi_{1'} = A^1_{1'}\xi_1 + A^2_{1'}\xi_2 = 1 + 1 = 2$ $\xi_{2'} = A^1_{2'}\xi_1 + A^2_{2'}\xi_2 = -2 - 3 = -5$.

Задачи

2.1. Пусть в векторном пространстве своими координатами заданы векторы. Доказать, что даны базисы и найти координаты вектора в этом базисе

(а) $\mathbf{e_1} = (2, 1)$, $\mathbf{e_2} = (1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 1)$
$\mathbf{e'_1} = (-1, 3)$, $\mathbf{e'_2} = (3, 1)$, $\mathbf{w} = (3, -2)$

(б) $\mathbf{e_1} = (-1, 1)$, $\mathbf{e_2} = (-2, 3)$, $\mathbf{v} = (-1, 2)$
$\mathbf{e'_1} = (3, 2)$, $\mathbf{e'_2} = (4, 3)$, $\mathbf{w} = (-3, 2)$

(в) $\mathbf{e_1} = (-1, 3)$, $\mathbf{e_2} = (3, -8)$, $\mathbf{v} = (2, 1)$
$\mathbf{e'_1} = (1, 0)$, $\mathbf{e'_2} = (3, 1)$, $\mathbf{w} = (-2, 1)$

(г) $\mathbf{e_1} = (2, 5)$, $\mathbf{e_2} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, -2)$
$\mathbf{e'_1} = (7, 6)$, $\mathbf{e'_2} = (8, 7)$, $\mathbf{w} = (1, -1)$

2.2. Векторы $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$,...$\mathbf{e_n}$ и $\mathbf{v}$ заданы своими координатами в некотором базисе. показать, что векторы $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$,...$\mathbf{e_n}$ сами образуют базис и найти координаты вектора $\mathbf{v}$ в этом базисе

(а) $\mathbf{e_1} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{e_2} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{e_3} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (6, 9, 14)$;

(б) $\mathbf{e_1} = (2, 1, -3)$, $\mathbf{e_2} = (3, 2, -5)$, $\mathbf{e_3} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (6, 2, -7)$;

(в) $\mathbf{e_1} = (1, 2, -1, -2)$, $\mathbf{e_2} = (2, 3, 0, 1)$, $\mathbf{e_3} = (1, 2, 1, 3)$, $\mathbf{e_4} = (1, 3, -1, 0)$, $\mathbf{v} = (7, 14, -12)$;

2.3. Доказать, что каждая из двух следующих систем векторов является базисом и найти связь координат одного и того же вектора в этих базисах:

(а) $\mathbf{e_1} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{e_2} = (2, 3, 3)$, $\mathbf{e_3} = (3, 7, 1)$, $\mathbf{e_{1'}} = (3, 1, 4)$, $\mathbf{e_{2'}} = (5, 2, 1)$, $\mathbf{e_{3'}} = (1, 1, -6)$;

(б) $\mathbf{e_1} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e_2} = (1, 2, 1, 1)$, $\mathbf{e_3} = (1, 1, 2, 1)$, $\mathbf{e_4} = (1, 3, 2, 3)$, $\mathbf{e_{1'}} = (1, 0, 3, 3)$, $\mathbf{e_{2'}} = (-2, -3, -5, -4)$, $\mathbf{e_{3'}} = (2, 2, 5, 4)$, $\mathbf{e_{4'}} = (-2, -3, -4, -4)$.

2.4. Найти размерность и базис подпространств, натянутых на следующие системы векторов:

(а) $\mathbf{a_1} = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{a_2} = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a_3} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a_4} = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a_5} = (0, 1, 2, 3)$;

(б) $\mathbf{a_1} = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a_2} = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\mathbf{a_3} = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\mathbf{a_4} = (1, 1, 5, 5, 2)$, $\mathbf{a_5} = (1, -1, -1, 0, 0)$.

2.5. Пусть $\mathbf{v} = v^i\,\mathbf{e_i}$, где $\mathbf{e_i}$ — базис V^3. Будут ли следующие функции ковекторами:

(а) $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) = 2v^1 - v^2 + 3v^3$;

(б) $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) = v^1 + (v^2)^2$;

(в) $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) = -v^1 + 3v^2 - v^1 v^2$;

(г) $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) = v^1 + v^2 - v^3$;

(д) $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) = v^2 + \sin v^3$;

(е) $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) = v^1 v^2 - v^3 + 1$.

2.6. В векторном пространстве V^2 с базисом $\mathbf{e} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ заданы векторы $\mathbf{e_{1'}} = 2\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ и $\mathbf{e_{2'}} = \mathbf{e_1} + 3\,\mathbf{e_2}$. Найти формуду преобразования сопряжённого базиса сопряжённого к V^2 пространства $(V^2)^*$ и формулу преобразования координат ковекторов при переходе от $\mathbf{e}$ к $\mathbf{e}'$; б) В базисе $\mathbf{e}$ в V^2 задано подпространство уравнением $x^1 - x^2 = 0$. Найти уравнения этого подпространства в базисе $\mathbf{e}'$.

Сделать иллюстрирующий чертёж, выбирая в качестве базиса $\mathbf{e}$ ортонормированный базис на плоскости.

2.7. В векторном пространстве V^2 с базисом $\mathbf{e} = \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ заданы векторы $\mathbf{e_{1'}} = 3\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}$ и $\mathbf{e_{2'}} = -\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$.

Найти формулу преобразования сопряжённого базиса сопряжённого к V^2 пространства $(V^2)^*$ и формулу преобразования координат ковекторов при переходе от $\mathbf{e}$ к $\mathbf{e}'$;

б) В базисе $\mathbf{e}$ в V^2 задано линейное подпространство уравнением $x^1 + 2x^2 = 0$. Найти уравнения этого подпространства в базисе $\mathbf{e}'$. Сделать иллюстрирующий чертёж, выбирая в качестве базиса $\mathbf{e}$ ортонормированный базис на плоскости.

2.8. В векторном пространстве V^4 заданы две системы векторов $\mathbf{e} = \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}$ и $\mathbf{e}' = \mathbf{e_{1'}}, \mathbf{e_{2'}}, \mathbf{e_{3'}}, \mathbf{e_{4'}}$ своими координатами в некотором базисе:
$\mathbf{e_1} = (1, 1, 1, 1), \mathbf{e_2} = (1, 2, 1, 1), \mathbf{e_3} = (1, 1, 2, 1), \mathbf{e_4} = (1, 3, 2, 3)$,
$\mathbf{e_{1'}} = (1, 0, 3, 3), \mathbf{e_{2'}} = (-2, -3, -5, -4), \mathbf{e_{3'}} = (2, 2, 5, 4)$,
$\mathbf{e_{4'}} = (-2, -3, -4, -4)$.

Проверить, что $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ — базисы. Найти формулу преобразования координат вектора при переходе от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$;

2.9. Какие из следующих отображений $t : V^3 \times V^3 \to R$ являются тензорами? Если t - тензор, найти его координаты:

(а) $t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^1v^1 - 2u^2v^1 - 3u^1v^2 + u^1v^3$;

(б) $t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^1u^3 + u^2v^1 - v^1v^3$;

(в) $t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u^1 + u^2 + u^3)^2 - (v^1 + v^2 + v^3)^2$;

(г) $t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2u^1v^2 - 3u^2v^3 + u^3v^2$;

(д) $t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^1v^2 + u^2v^1 - u^1 + v^2$;

(е) $t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^1v^1 - u^2v^3 + u^3v^3$.

2.10. Доказать, что следующие функции есть тензоры. Какова их валентность?

(а) $\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ — смешанное произведение;

(б) $\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$;

(в) $t(\mathbf{u}, \xi) = \xi(A\,\mathbf{u})$, где $A : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ — линейный оператор;

(г) $g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}\,\mathbf{u}$ — скалярное произведение;

(д) $t(\mathbf{u},\mathbf{v},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}) & \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\xi}(v) & \boldsymbol{\eta}(v) \end{vmatrix}$.

2.11. Доказать, что совокупность чисел A_{ij}^{km}, определённых равенствами
$$A_{ij}^{km} = \begin{cases} 1, & i = k, \quad j = m, \\ 0, & i \neq k \quad \text{или} \quad j \neq m \end{cases}$$
является координатами тензора валентности (2.2).

2.12. Из координат векторов $\mathbf{u} = (u^i)$, $\mathbf{v} = (v^j)$ образованы числа $t^{ij} = u^i + v^j$. Являются ли они координатами тензора?

2.13. Найти разложение тензора $\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{v},\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ по базису $\{\mathbf{e^i}\otimes\mathbf{e^j}\otimes\mathbf{e_k}\}$, если:

(а) $\mathbf{e_1} = \mathbf{i}$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{j}$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{k}$, $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ — правый орторепер в евклидовом пространстве E^3;

(б) $\mathbf{e_1} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{e_2} = -\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{j}-\mathbf{k}$

(в) $\mathbf{e_1} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{k}$.

2.14. Пусть $\mathbf{v} = (2,1,0)$, $\boldsymbol{\xi} = (3,7,1)$,$t_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Вычислить координаты следующих тензоров:

(а) $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v})$;

(б) $\boldsymbol{\xi}\otimes\mathbf{v}$;

(в) $(\boldsymbol{\xi}\otimes\mathbf{v})_i^i$;

(г) $t\otimes\boldsymbol{\xi}$;

(д) $t\otimes\mathbf{v}$;

(е) $(t\otimes\mathbf{v})_{ij}^i$;

(ж) $(t\otimes\mathbf{v})_{ji}^i$;

(з) $(t\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})_{ij}^{ij}$.

2.15. Найти координаты тензоров в базисе $\{\mathbf{e_i}\otimes\mathbf{e_j}\}$:

(а) $t = (\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})\otimes(\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2})$;

(b) $t = (\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}) \otimes (e_3 + e_4) - (e_3 - 2e_4) \otimes (\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2})$;

(c) $t = \mathbf{e_1} \otimes (\mathbf{e_1} - 3\,\mathbf{e_2} + e_3) + e_4 \otimes \mathbf{e_2}$.

2.16. Найти разложение тензора смешанного произведения $\varepsilon(u,v,w) = (u,v,w)$ по базису $e^i \otimes e^j \otimes e_k$, если объём параллелепипеда, построенного на правой тройке векторов e_1, e_2, e_3, равен

а) 1; б) 3.

2.17. Тензоры a_{ij}, b^k_l, c_{ij}, x^i, y^k, ξ_j имеют такие координаты:

$$\|a_{ij}\| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \|b^k_l\| = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \|c_{ij}\| = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix};$$

$$x^i = (1,-2); \quad y^k = (1,1); \quad \xi_j = (2,-1).$$

Вычислить:

а) $a_{ij} b^j_k$;

б) $c_{ij} x^i x^j$; в) $a_{ij} b^j_k + c_{ki}$;

г) $c_{kj} b^j_l x^k y^l$; д) $a_{ij} b^j_k b^j_l$; е) $b^j_k x^k \xi_j$.

2.18. Тензоры a_{ij}, b^{kl}, c^i_j, x^i, y^k, ξ_i, η_j имеют координаты:

$$\|a_{ij}\| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \|b^{kl}\| = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \|c^i_j\| = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$x^i = (1,0)$; $y^k = (2,1)$; $\xi_j = (1,1)$; $\eta_j = (2,-1)$.

Вычислить:

а) $a_{ij} b^{jk} + 2c^k_j$; б) $a_{ij} b^{jk} - a_{ij} b^{kj}$;

в) $c^i_j b^{jl}$; г) $c^j_i b^{ik} \xi_j \xi_k$;

д) $x^i y^j + b^{ij}$; е) $b^{kl} \xi_k \eta_l$;

ж) $y^k \eta_k$.

2.19. Вычислить $\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, если

а) $\xi = \mathbf{e^1} - \mathbf{e^2} + 3\,\mathbf{e^3}$, $u = \mathbf{e_1} - 2\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$,

$\eta = \mathbf{e^1} + 2\,\mathbf{e^2} - \mathbf{e^3}$, $v = -\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$;

б) $\xi = \mathbf{e^1} + 2\,\mathbf{e^2} - \mathbf{e^3}$, $u = 2\,\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}$,

$\eta = \mathbf{e^1} - \mathbf{e^2} + \mathbf{e^3}$, $v = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}$.

2.20. Вычислить $\mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta},\mathbf{v})$, если

а) $\mathbf{u}=\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}+2\,\mathbf{e_3}, \quad \eta=\mathbf{e^2}+3\,\mathbf{e^3},$

$\xi=\mathbf{e^1}+\mathbf{e^2}+\mathbf{e^3}, \quad v=\mathbf{e_1}-3\,\mathbf{e_2}+2\,\mathbf{e_3};$

б) $\mathbf{u}=2\,\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}-\mathbf{e_3}, \quad \eta=\mathbf{e^1}+\mathbf{e^2}-\mathbf{e^3},$

$\xi=2\,\mathbf{e^1}+\mathbf{e^2}-\mathbf{e^3}, \quad v=2\,\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+3\,\mathbf{e_3}\,.$

2.21. Вычислить $\mathbf{u}\otimes v(\xi,\eta)$, если

а) $\mathbf{u}=\mathbf{e_1}+2\,\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}, \quad \xi=\mathbf{e^1}+\mathbf{e^2}-\mathbf{e^3},$

$v=-\,\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}-\mathbf{e_3}, \quad \eta=2\,\mathbf{e^1}-\mathbf{e^2}+\mathbf{e^3};$

б) $\mathbf{u}=-\,\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}-\mathbf{e_3}, \quad \xi=\mathbf{e^1}+\mathbf{e^2}-2\,\mathbf{e^3},$

$v=2\,\mathbf{e_1}-2\,\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}, \quad \eta=2\,\mathbf{e^1}-\mathbf{e^2}+\mathbf{e^3}\,.$

2.22. Найти значение тензора $t = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}-\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$ от аргументов $(\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_5})$, если

$\mathbf{a}=\mathbf{e^1}\otimes\mathbf{e^1}+\mathbf{e^2}\otimes\mathbf{e^3}+\mathbf{e^2}\otimes\mathbf{e^2}, \quad \mathbf{b}=\mathbf{e^1}\otimes\mathbf{e^1}\otimes(\mathbf{e^1}-\mathbf{e^3}),$

$\mathbf{v_1}=\mathbf{e_1},\ \mathbf{v_2}=\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2},\ \mathbf{v_3}=\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3},\ \mathbf{v_4}=\mathbf{e_2},\ \mathbf{v_5}=\mathbf{e_2}\,.$

2.23. Пусть $t = \mathbf{e^1}\otimes\mathbf{e^2}\otimes(\mathbf{e^1}+\mathbf{e^2})$. Найти координаты t в базисе $\mathbf{e_{1'}},\mathbf{e_{2'}}$, где

а) $\mathbf{e_{1'}}=\mathbf{e_1}+2\,\mathbf{e_2}, \quad l_{2'}=2\,\mathbf{e_1}+5\,\mathbf{e_2};$

б) $\mathbf{e_{1'}}=2\,\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}, \quad l_{2'}=-\,\mathbf{e_1}+2\,\mathbf{e_2};$

в) $l_{1'}=3\,\mathbf{e_1}-2\,\mathbf{e_2}, \quad l_{2'}=\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\,.$

2.24. На $\mathbb{V}^2$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\}$ тензоры a, b и c.

$$\|a_{ij}\|=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}; \quad \|b^{kl}\|=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}; \quad \|c^i_j\|=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}.$$

Найти координаты этих тензоров в базисе $\{e_{1'},\mathbf{e_{2'}}\}$:

$e_{1'}=2\,\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}, \quad l_{2'}=-\,\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\,.$

2.25. На $\mathbb{V}^2$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\}$ следующие тензоры:

$$\|a_{ij}\|=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}; \quad \|b^k_l\|=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-3\end{bmatrix}; \quad \|c^i_j\|=\begin{bmatrix}1&-3\\1&-5\end{bmatrix};$$

Найти координаты этих тензоров в базисе
$vecte_{1'}, \mathbf{e_{2'}}\}$:

$\mathbf{e_{1'}} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2}, \quad \mathbf{e_{2'}} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$.

2.26. Тензор t в базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ имеет матрицу координат

$$\|t_i^j\| = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Найти координаты этого тензора в базисе

$$\mathbf{e_{1'}} = 2\,\mathbf{e_1} + 3\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3},$$

$$\mathbf{e_{2'}} = 3\,\mathbf{e_1} + 4\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3},$$

$$\mathbf{e_{3'}} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} + 2\,\mathbf{e_3},$$

2.27. Найти сумму тензоров в $\mathbb{V}^2$, компоненты которых заданы матрицами:

$$\text{а)} \quad \|A_{ij}\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \|B_{ij}\| = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \|A_i^j\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \|B_i^j\| = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

2.28. Верно ли, что:

а) $\xi \otimes \eta = \eta \otimes \xi$, $\xi, \eta \in \mathbb{V}^*$;

б) $v \otimes w = w \otimes v, \quad v, w \in \mathbb{V}$;

в) $\xi \otimes (\eta \otimes \varphi) = (\xi \otimes \eta) \otimes \varphi, \quad \xi, \eta, \varphi \in \mathbb{V}^*$;

г) $v \otimes (w \otimes u) = (v \otimes w) \otimes u, \quad v, w, u \in \mathbb{V}$;

д) $(\xi + \eta) \otimes \varphi = \xi \otimes \varphi + \eta \otimes \varphi, \quad \xi, \eta, \varphi \in \mathbb{V}^*$;

е) $\boldsymbol{\xi} \otimes (\eta + \varphi) = \xi \otimes \eta + \xi \otimes \varphi, \quad \xi, \eta, \varphi \in \mathbb{V}^*$;

ж) $(\mathbf{v} + w) \otimes u = v \otimes u + w \otimes u, \quad v, w, u \in \mathbb{V}$;

з) $v \otimes (w + u) = v \otimes w + v \otimes u, \quad v, w, u \in \mathbb{V}$;

и) $\xi \otimes \eta(u, v) = u \otimes v(\xi, \eta) = u \otimes \eta(\xi, v), \quad u, v \in \mathbb{V}, \eta, \xi \in \mathbb{V}^*$

к) $\xi \otimes u = u \otimes \xi, \quad \xi \in \mathbb{V}^*, u \in \mathbb{V}$.

2.29. В $\mathbb{V}^2$ дан тензор t_{ij}^k с координатами

$$\text{а)}\quad \|t_{ij}^1\| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \|t_{ij}^2\| = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix};$$

Вычислить координаты ковекторов $\xi_i = t_{ik}^k, \quad \eta_i = t_{ki}^k$.

2.30. Найти полную свёртку тензоров

(а) $t = (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}) \otimes (\mathbf{e^1} - \mathbf{e^2} + \mathbf{e^3}) - (\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}) \otimes (\mathbf{e^1} + \mathbf{e^3})$;

(б) $t = (2\,\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) \otimes (\mathbf{e^1} + \mathbf{e^2} + 3\,\mathbf{e^3})$
$+ (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) \otimes (\mathbf{e^1} - \mathbf{e^2} - \mathbf{e^3})$.

2.31. $^{(*)}$ Дана функция $L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, где $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$. $L_k = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}$. Доказать, что L_k — ковектор.

2.32. Описать все инвариантные тензоры рангов 0, 1, 2, 3, 4. Здесь тензор называется инвариантным, если его компоненты не меняются ни при каких заменах координат.

2.33. Дан двумерный тензор второго порядка $T\,\mathbf{v} = (v_1 - v_2, v_1)$, где $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

(а) Определить его симметричную и кососимметричную части, S и A.

(б) Если $\mathbf{e_1} = (1, 0)$ и $\mathbf{e_2} = (1, 1)$ — векторы базиса, вычислить матрицы $[T^{j}_{\cdot i}]$, $[T_{i}^{\cdot j}]$, $[S^{j}_{\cdot i}]$ и $[S_{j}^{\cdot i}]$. Являются ли последние две матрицы симметричными?

2.34. Тензор a^{ij} задан матрицей

(а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Найти компоненты тензоров $a^{(ij)}$, $a^{[ij]}$.

2.35. Тензор a^{ij}_{kl} задан матрицей

$$
\textbf{(а)}\ \left(\begin{array}{cc|cc}
1 & 2 & 3 & 4 \\
-4 & -3 & -2 & -1 \\
--- & --- & --- & --- \\
-4 & -3 & -2 & -1 \\
5 & 6 & 7 & 8
\end{array}\right)
$$

$$
\textbf{(б)}\ \left(\begin{array}{cc|cc}
3 & 5 & 6 & 10 \\
5 & 9 & 10 & 18 \\
--- & --- & --- & --- \\
9 & 15 & 12 & 20 \\
15 & 27 & 20 & 36
\end{array}\right)
$$

Найти компоненты тензоров $a^{(ij)}_{kl}$, $a^{ij}_{(kl)}$, $a^{(ij)}_{(kl)}$

2.36. Тензор a_{ijk} задан матрицей

$$
\textbf{(а)}\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\
9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\textbf{(б)}\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 & 6 & 8 & 4 \\
6 & 2 & 8 & 2 & 6 & 4 & 4 & 6 & 2 \\
4 & 6 & 2 & 8 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6
\end{array}\right)
$$

Найти компоненты тензоров $a_{[ijk]}$, $a_{(ijk)}$

2.37. Тензор a^i_j задан матрицей

(а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ (б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Вычислить инварианты a^i_i $a_{[i}a^k_{k]}$, $a_{[i}a^j_j a^k_{k]}$.

2.38. Метрический тензор и тензор a_{ij} заданы соответственно матрицами

(а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

(б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(в) $\begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Найти матрицы тензоров $a_{i\cdot}^{\cdot j}, a^{ij}$.

2.39. Метрический тензор и тензор a_j^i заданы соответственно матрицами

(а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Найти матрицы тензоров $a_{ij}, a_{i\cdot}^{\cdot j}$.

2.40. Метрический тензор и тензор a_{jk}^{i} заданы соответственно матрицами

(а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

(б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right)$

(в) $\begin{pmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Найти матрицы тензоров $a_{i\cdot}^{\cdot j}, a^{ij}$.

2.41. Метрический тензор и тензор a_{kl}^{ij} заданы соответственно матрицами

(а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

(б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ --- & --- & --- & --- \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right)$

Найти матрицы тензоров $a_{i\cdot}^{\cdot j}$,a^{ij}.

2.42. Упростить выражения

(а) $(a_{ij}g^{jk} + \delta_i^j a_{lj} g^{lk})g_{ks}$;

(б) $\delta_j^i \delta_k^j g^{kl} a_{lj}$;

(в) $a_{ij} g^{jk} g_{kl} g^{ls}$

2.43. На $\mathbb{V}^2$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ тензоры a, b и c

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b_{kl}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c_j^i) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты этих тензоров в базисе $\{\mathbf{e_{1'}}, \mathbf{e_{2'}}\}$: $\mathbf{e_{1'}} = 2\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_{2'}} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$.

2.44. Тензор t в базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ имеет матрицу координат
$(t_i^j) = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

Найти координаты этого тензора в базисе $\{\mathbf{e_{1'}}, \mathbf{e_{2'}}, \mathbf{e_{3'}}\}$: $\mathbf{e_{1'}} = 2\,\mathbf{e_1} + 3\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_{2'}} = 3\,\mathbf{e_1} + 4\,\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_{1'}} = \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} + 2\,\mathbf{e_3}$.

2.45. Найти тензорные произведения следующих тензоров

(а) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $x^k = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(б) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $(B_{km}) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(в) $(A_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(B_m^k) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.46. Векторы $\mathbf{a}$, и $\mathbf{b}$ пространства $\mathbb{V}^3$ и ковекторы $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ сопряженного пространства имеют координаты: $\mathbf{a} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, 0)$, $\boldsymbol{\xi} = (5, 0, 1)$, $\boldsymbol{\eta} = (1, 1, -2)$. Найти координаты следующих тензоров а) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$; б) $\mathbf{a} \otimes \boldsymbol{\eta} + \mathbf{b} \otimes \boldsymbol{\xi}$; в) $\mathbf{a} \otimes \boldsymbol{\xi}$; г) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$;
д) $\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\xi}$

2.47. В $\mathbb{V}^3$ задан симметричный (0,2)-тензор с матрицей

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

а) Проверить, что пространство $E^3 = (\mathbb{V}^3, g)$ евклидово; б) найти взаимную метрику g^{ij} в) найти ковариантные координаты вектора $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$ и контравариантные координаты ковектора $\boldsymbol{\xi} = (2, -1, 3)$.

2.48. В базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ матрица метрического тензора g_{ij} евклидова пространства имеет вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Дано преобразование базиса

$$\begin{aligned} \mathbf{e_{1'}} &= \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} \\ \mathbf{e_{2'}} &= \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + 2\,\mathbf{e_3} \\ \mathbf{e_{3'}} &= \mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} + 3\,\mathbf{e_3} \end{aligned}$$

Найти а) $g_{i'j'}$; б) g^{ij}; в) $g^{i'j'}$; г) ковариантные (v_i) и $(v_{i'})$ координаты вектора $(6, 9, 14)$.

2.49. В базисе $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ матрица метрического тензора g_{ij} евклидова пространства имеет вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Дано преобразование базиса

$$\begin{aligned} \mathbf{e_{1'}} &= 2\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - 3\,\mathbf{e_3} \\ \mathbf{e_{2'}} &= 3\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} - 3\,\mathbf{e_3} \\ \mathbf{e_{3'}} &= \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} \end{aligned}$$

Найти а) $g_{i'j'}$; б) g^{ij}; в) $g^{i'j'}$; г) ковариантные (v_i) и $(v_{i'})$ координаты вектора $\mathbf{v} = 6\,\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_2} - 7\,\mathbf{e_3}$. д) ковариантные координаты (v_i) и (w_i) векторов $\mathbf{v} = (1, 1-1)$ и $\mathbf{w} = (3, -1, 1)$

Ответы

2.1 а) $\mathbf{v} = (0{,}9; 1{,}3)$, $\mathbf{w} = (-6{,}8; 4{,}6)$; б) $\mathbf{v} = (-29, 19)$, $\mathbf{w} = (3, -1)$; в) $\mathbf{v} = (7, -2)$, $\mathbf{w} = (11, 4)$; г)$\mathbf{v} = (-8, 7)$, $\mathbf{w} = (1, -3)$.

2.2 а) (1,2,3); б) (1,1,1); в) (0,2,1,2).

2.3 а) $v^1 = -27v^{1'} - 71v^{2'} - 41v^{3'}$, $v^2 = 9v^{1'} + 20v^{2'} + 9v^{3'}$, $v^3 = 4v^{1'} + 12v^{2'} + 8v^{3'}$; б) $v^1 = 2v^{1'} + v^{3'} - v^{4'}$, $v^2 = -3v^{1'} + v^{2'} - 2v^{3'} + v^{4'}$, $v^3 = v^{1'} - 2v^{2'} + 2v^{3'} - v^{4'}$, $v^4 = v^{1'} - v^{2'} + 2v^{3'} - v^{4'}$.

2.4 а) Размерность равна 3. Базис образуют, например, векторы $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_4}$. б) Размерность равна 3. Базис образуют, например, векторы $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_5}$.

2.5 а) да; б) нет; в) нет; г) да д) нет; е)нет.

2.6 $\mathbf{e^{1'}} = 3/5\,\mathbf{e^1} - 1/5\,\mathbf{e^2}$, $\mathbf{e^{2'}} = -1/5\,\mathbf{e^1} + 2/5\,\mathbf{e^2}$, $u_{1'} = 2u_1 + u_2$, $u_{2'} = u_1 + 3u_2$

2.8 $x^1 = 2x^{1'} + x^{3'} - x^{4'}$, $x^2 = -3x^{1'} + x^{2'} - 2x^{3'} + x^{4'}$, $x^3 = x^{1'} - 2x^{2'} + 2x^{3'} - x^{4'}$, $x^4 = x^{1'} - x^{2'} + x^{3'} - x^{4'}$

2.9 а) да, ненулевые координаты $t_{11} = t_{13} = 1$, $t_{12} = -3$,$t_{21} = -2$; б) нет в) нет г) да, ненулевые координаты $t_{12} = 2$, $t_{13} = t_{32} = 1$, $t_{23} = -3$ д) нет е) да, ненулевые координаты $t_{11} = t_{33} = 1$, $t_{23} = -1$.

2.10 а) (0,3) б) (1,2) в) (1,1) г) (0,2) д) (2,2)

2.11 $A_{ij}^{km} = \delta_i^k \delta_j^m$, поэтому данные числа суть координаты тензора $\delta \otimes \delta$, где координатами δ — символ Кронекера.

2.13 а) $\mathbf{e^1}$ б) в)

2.14 а) 13; б) $\begin{pmatrix} 6 & 14 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) 13; г) (2,4,1); д) ненулевые координаты тензора $a = t \otimes \mathbf{v}$ $a_{11}^1 = a_{23}^1 = a_{32}^1 = 2$, $a_{11}^2 = a_{23}^2 = a_{32}^2 = 1$, $a_{13}^1 = a_{21}^1 = 4$, $a_{13}^2 = a_{21}^2 = 2$; е) 1 ж) (17,1,13) з) ненулевые координаты тензора

2.15 а) $t_{11} = t_{21} = 1$, $t_{12} = t_{22} = -1$ б) ненулевые координаты $t_{13} = 1$, $t_{23} = 2$, $t_{14} = 1$; в) ненулевые координаты $t_{13} = 1$, $t_{23} = 2$, $t_{14} = 1$.

2.17 а) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 6 & -14 \end{pmatrix}$ж б) -15; в) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -7 & -15 \end{pmatrix}$ г) -7; д) $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ -12 & 28 \end{pmatrix}$; е) -14.

2.19 а) 6; б) -6.

2.20 а) 0; б) 12.

2.21 а) -2; б) 14.

2.22 -1.

2.23 Координаты тензора t в новом базисе имеют вид а) $t_{1'1'}^{1'} = 6$, $t_{1'2'}^{1'} = 15$, $t_{2'1'}^{1'} = 12$, $t_{2'2'}^{1'} = 30$, $t_{1'1'}^{2'} = -2$, $t_{1'2'}^{2'} = -5$, $t_{2'1'}^{2'} = -4$, $t_{2'2'}^{2'} = -10$; б) $t_{1'1'}^{1'} = -4$, $t_{1'2'}^{1'} = 4$, $t_{2'1'}^{1'} = 2$, $t_{2'2'}^{1'} = -2$, $t_{1'1'}^{2'} = -6$, $t_{1'2'}^{2'} = 6$, $t_{2'1'}^{2'} = 3$, $t_{2'2'}^{2'} = -3$; в) $t_{1'1'}^{1'} = -12$, $t_{1'2'}^{1'} = -6$, $t_{2'1'}^{1'} = -4$, $t_{2'2'}^{1'} = -2$, $t_{1'1'}^{2'} = 30$, $t_{1'2'}^{2'} = 15$, $t_{2'1'}^{2'} = 10$, $t_{2'2'}^{2'} = 5$.

2.26 а) Нет; б) нет; в) да; г) да; д) да; е) да; ж) да; з) да; и) да; к) да.

2.27 а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.30 а) -2; б) 3.

2.34 1. а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; 2. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ -1 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$

2.36 а) $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 10/3 & 19/3 & 10/3 & 3 & 19/3 & 19/3 & 19/3 & 19/3 \\ 10/3 & 3 & 19/3 & 3 & 5 & 7 & 19/3 & 7 & 4 \\ 19/3 & 19/3 & 19/3 & 19/3 & 7 & 4 & 19/3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

б) $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 14/3 & 16/3 & 14/3 & 10/3 & 6 & 16/3 & 6 & 8/3 \\ 14/3 & 10/3 & 6 & 10/3 & 4 & 14/3 & 6 & 14/3 & 10/3 \\ 16/3 & 6 & 8/3 & 6 & 14/3 & 10/3 & 8/3 & 10/3 & 6 \end{array}\right)$

2.38 а) $\begin{pmatrix} 60 & -34 \\ -37 & 21 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 60 & -37 \\ -341 & 21 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 402 & -248 \\ -248 & 153 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 19 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -56 & 22 \\ 23 & -9 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 19 & 25 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 6 & 9 & 19 \\ 13 & 17 & 25 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 14 & 17 & 51 \\ 8 & 9 & 71 \\ 53 & 67 & 37 \end{pmatrix}$

2.39 а) $\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 42 & 16 \\ -113 & -45 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 10 & 17 & 24 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -16 & 33 & 18 \\ 43 & -21 & -9 \end{pmatrix}$

2.40 а) $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$,

$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 41 & 17 & 17 & 7 \\ 41 & 17 & 17 & 7 \end{array}\right)$

б) $\left(\begin{array}{cc|cc} -7 & -10 & 0 & -1 \\ 19 & 27 & 1 & 5 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|cc} -23 & 10 & 20 & 9 \\ 39 & 17 & 11 & 5 \end{array}\right)$,
$\left(\begin{array}{cc|cc} 19 & 30 & 8 & 13 \\ 17 & 41 & 11 & 17 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc|cc} 155 & 68 & 66 & 29 \\ 167 & 75 & 89 & 39 \end{array}\right)$,

в) $\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -6 & -25 & 31 & 12 & 50 & -62 & -6 & -25 & 31 \\ 3 & 12 & -15 & -6 & 24 & 30 & 3 & 12 & -15 \\ 1 & 5 & -6 & -2 & 10 & 12 & 1 & 5 & -6 \end{array}\right)$,
$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & -7 & 7 & 4 & 14 & -14 & -2 & -7 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & -2 & 8 & 10 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & -6 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$,
$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 3 & -3 & 0 & 10 & -10 & 0 & -9 & 9 \\ -3 & 0 & 3 & -10 & 0 & 10 & 9 & 0 & -9 \\ 3 & -3 & 0 & 10 & -10 & 0 & -9 & 9 & 0 \end{array}\right)$,
$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 6 & 21 & -21 & 20 & 70 & -70 & -18 & -63 & 63 \\ -3 & -12 & 15 & -10 & -40 & 50 & 9 & 36 & -45 \\ -3 & -9 & 6 & -10 & -30 & 20 & 9 & 27 & -18 \end{array}\right)$

2.41 1. а) $\left(\begin{array}{cc|cc} 39 & 101 & 39 & 101 \\ 100 & 259 & 100 & 259 \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ 39 & 101 & 78 & 202 \\ 100 & 259 & 200 & 518 \end{array}\right)$;

б) $\left(\begin{array}{cc|cc} 89 & 89 & -33 & -33 \\ 0 & 89 & 0 & -33 \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ -34 & -34 & 13 & 13 \\ 0 & -34 & 0 & 13 \end{array}\right)$

2. а) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 4 & 7 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ 3 & 7 & 12 & 19 \\ 15 & 24 & 27 & 42 \end{array}\right)$;

б) $\left(\begin{array}{cc|cc} 49 & 5 & 2 & 2 \\ -15 & 18 & 2 & 2 \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ -5 & -5 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right)$

2.42 $2a_{(is)}$, $a_i^i\ a_i^s$

2.43 Матрица преобразования базиса имеет вид $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ обратная матрица имеет вид $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Тогда

$$(a_{i'j'}) = \begin{pmatrix} 18 & -13 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}, \quad (b^{k'l'}) = \begin{pmatrix} -38 & -4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad (c^{i'}_{j'}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.44 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.45 а) Координаты тензора $A \otimes x$

$$\begin{array}{llll} t^1_{11} = 20, & t^1_{12} = 0, & t^1_{21} = 6, & t^1_{22} = 8, \\ t^2_{11} = 1, & t^2_{12} = 0, & t^2_{21} = 3, & t^2_{22} = 4; \end{array}$$

б) координаты тензора $A \otimes B$

$$\begin{array}{llll} t_{1111} = 0, & t_{1112} = 5, & t_{1121} = -3, & t_{1122} = 1, \\ t_{1211} = 0, & t_{1212} = 0, & t_{1221} = 0, & t_{1222} = 0, \\ t_{2111} = 0, & t_{2112} = 15, & t_{2121} = -9, & t_{2122} = 3, \\ t_{2211} = 0, & t_{2212} = 20, & t_{2221} = -12, & t_{2222} = 4, \end{array}$$

в) ненулевые координаты тензора $t = A \otimes B$ $t^{21}_{21} = 5$, $t^{22}_{21} = 1$, $t^{22}_{22} = -1$.

2.46 а) Обозначая $t = a \otimes b$ получаем $t^{ij} = a^i b^j$, откуда $(t^{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ б) обозначая $S = a \otimes \xi$ получаем $S^i_j = a^i \xi_j$, откуда
$(S^i_j) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 2 \\ -15 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2.47 а) По признаку Сильвестра главные миноры $1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0$. Следовательно, заданная метрика положительно определенная; б)$g^{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ в)$v_1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 4$, $\xi^1 = 23$, $\xi^2 = -21$, $\xi^3 = 9$.

2.48 а) $(g_{i'j'}) = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 16 \\ 10 & 17 & 27 \\ 16 & 27 & 45 \end{pmatrix}$ б) $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -1/2 \\ 3/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/26 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ в) $(g^{i'j'}) = \begin{pmatrix} 9 & -9/2 & -1/2 \\ -9/2 & 7/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ г) $v_1 = -6$, $v_2 = 29$, $v_3 = 51$ $v_{1'} = 74$, $v_{2'} = 125$, $v_{3'} = 205$.

3 Тензорные поля. Ковариантная производная.

Ковариантная производная вектора,

$$\nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_i \Gamma^i_{\alpha\beta},$$

ковариантная производная ковектора

$$\nabla_\beta A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + A^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\beta}.$$

Символы Кристоффеля определяются формулами

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

— символы Кристоффеля первого рода

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma_{ij,r} g^{kr}$$

— символы Кристоффеля второго рода.

Ковариантные составляющие градиента в любой системе координат являются

$$\nabla_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

Контравариантными составляющими будут служить величины

$$\nabla^\alpha f = g^{\alpha\lambda} \nabla_\lambda f = g^{\alpha\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

Физические компоненты проекции $\operatorname{grad} f$ на оси координат

$$(\operatorname{grad} f)_{x_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

H_i — коэффициенты Ламе.

Дивергенция

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla_i a^i = \nabla_k (g^{ik} a_i).$$

в криволинейной ортогональной системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(H_2 H_3 a_{x^1})}{\partial x^1} + \frac{\partial(H_3 H_1 a_{x^2})}{\partial x^2} + \frac{\partial(H_1 H_2 a_{x^3})}{\partial x^3}\right]$$

Лапласиан

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} g^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)$$

в криволинейной ортогональной системе координат

$$\triangle f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\right\}$$

Ротор

$$r^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right)$$
$$r^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right)$$
$$r^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right)$$

$$r_i = g_{i\alpha} r^\alpha$$

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{g_{i1}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right) + g_{i2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right) + g_{i3}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right)\right\}$$

В физических составляющих для случая ортогональных координат получим

$$(\operatorname{rot} a)_{x^1} = \frac{1}{H_2 H_3}\left\{\frac{\partial(H_3 a_{x^3})}{\partial x^2} - \frac{\partial(H_2 a_{x^2})}{\partial x^2}\right\}$$

и две аналогичные формулы для остальных осей.

Пример 1.

В декартовой системе координат вектор $\mathbf{v}$ имеет координаты $\mathbf{v} = (1, 1)$. Вычислить его координаты в полярной системе координат.

Решение.

Декартова и полярная система координат связаны соотношениями: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ и обратно $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. В новой системе координаты вектора будут вычисляться по формулам $v^{i'} = v^i \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$. В данном случае $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^{1'} = \rho$, $x^{2'} = \varphi$.

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Тогда

$$v^\rho = v^1\frac{\partial \rho}{\partial x} + v^2\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi + \sin\varphi$$
$$v^\varphi = v^1\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v^2\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\rho}$$

Пример 2.

Пусть в области, определенной неравенствами $-\infty < u < \infty$, $0 \le v \le 2\pi$, задан метрический тензор $g_{11} = g_{22} = 1/v^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$. Вычислить символы Кристоффеля первого и второго рода и найти геодезические.

Решение.

1) Находим элементы g^{ij}

$$g = \begin{vmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{v^4}, \quad g^{11} = g^{22} = v^2, \quad g^{12} = g^{21} = 0.$$

2) Находим символы Кристоффеля первого рода

$$\Gamma_{11,1} = 0, \quad \Gamma_{21,1} = \Gamma_{12,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = -\frac{1}{v^3}, \quad \Gamma_{22,1} = 0,$$

$$\Gamma_{11,2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = \frac{1}{v^3}, \quad \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = 0 \quad \Gamma_{22,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial v} = -\frac{1}{v^3},$$

3) Теперь находим символы Кристоффеля второго рода

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = v^2\Gamma_{12,1} = -\frac{1}{v}, \quad \Gamma^1_{22} = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = v^2\Gamma_{12,2} = \frac{1}{v}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = v^2\Gamma_{22,2} = -\frac{1}{v}$$

4) Напишем уравнения геодезических линий

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + 2\Gamma^1_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{d^2u}{dt^2} + \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \Gamma^2_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Поставив сюда выражения для Γ^1_{12}, Γ^2_{12} и Γ^2_{22}, получим

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} - 2\dfrac{1}{v}\dfrac{du}{dt}\dfrac{dv}{dt} = 0 \\ \dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 - \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Прежде всего заметим, что данная система имеет решения $u = \mathrm{const}$, $v = \varphi(t)$. В самом деле, если $u = \mathrm{const}, \dfrac{du}{dt} = \dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$ то первое уравнение системы (1) становится тождеством, а второе принимает вид $\dfrac{d^2v}{dt^2} - \dfrac{dv}{dt} = 0$, из которого следует, что $v = \varphi(t)$ где $\varphi(t)$ решение этого уравнения. Полагая $\tau = \varphi(t)$, мы получаем уравнения геодезических $u = \mathrm{const}$, $v = \tau$ откуда видим, что геодезические линии суть прямые, параллельные оси v. Проверить, что $\varphi(t) = C_2e^{c_1}t$ Пусть теперь $\dfrac{du}{dt} \neq 0$ Тогда существует функция $t = t(u)$ и мы можем считать $v = v(t(u))$ функцией от u Найдем формулы, связывающие производные от u по t и производные от v

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dt} \tag{2}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^2v}{du^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{dv}{du}\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^2v}{du^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{dv}{du}\left(\frac{2}{v}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right) = \tag{3}$$
$$= \left(\frac{du}{dt}\right)^2\left[\frac{d^2v}{du^2} + \frac{2}{v}\frac{dv}{du}\right]$$

выражения для $\frac{dv}{dt}$ из (2) и для $\frac{d^2v}{dt^2}$ из (3) подставим во второе уравнение системы (1). Получим

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \left[\frac{d^2v}{du^2} + \frac{1}{v}\frac{dv}{du} + \frac{1}{v}\right] = 0 \tag{4}$$

Из (4) следует, что

$$\frac{d^2v}{du^2} + \frac{1}{v}\frac{dv}{du} + \frac{1}{v} = 0, \quad \text{так как } \frac{du}{dt} \neq 0 \tag{5}$$

Проинтегрируем (5).

Сделаем замену $\frac{dv}{du} = p(v)$, тогда $\frac{d^2v}{du^2} = pp'$ Подставим полученные выражения в (5) Получим

$$pp' + \frac{1}{v}p^2 + \frac{1}{v} = 0$$

или

$$\frac{pp'}{p^2+1} = -\frac{1}{v}$$

Интегрируя, получаем

$$\ln(p^2+1) = -2\ln v + C_1$$

$$p = \frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{C_1 - v^2}{v^2}}$$

$$\frac{vdv}{\sqrt{C_1 - v^2}} = du$$

$$\sqrt{C_1 - v^2} = -u + C_2$$

$$C_1 - v^2 = (u - C_2)^2$$

$$v^2 + (u - C_2)^2 = C_1$$

Таким образом, мы получили, что геодезические линиями в заданной метрике являются прямые, параллельные оси и окружности с центром в любой точке оси и любого радиуса

Задачи.

3.1. Докажите а) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$,

б) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

3.2. Уравнения Максвелла имеют вид

1) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$,

2) $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$,

3) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$,

4) $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \dfrac{\mathbf{B}}{\varepsilon_0}$.

Закон сохранения заряда можно записать в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

а) Покажите, что уравнения 3 и 2 совместны.

б) Покажите, что уравнение 5 можно получить, взяв дивергенцию от левой и правой частей уравнения 4 (т. е. убедитесь, что уравнения Максвелла справедливы лишь при выполнении закона сохранения заряда).

в) Покажите, что в пустоте ($\mathbf{j} = 0, \rho = 0$) поле $\mathbf{E}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

г) Покажите, что в пустоте поле $\mathbf{B}$ удовлетворяет такому же волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

д) Покажите, что согласно уравнению 2, поле $\mathbf{E}$ можно представить в виде $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - (\partial \mathbf{A} / \partial t)$, где $\mathbf{A}$ - векторный потенциал магнитного поля $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Почему вектор $\mathbf{B}$ может быть представлен в таком виде?

3.3. Пусть $\mathbf{v}(x, y, z)$ - поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг своей оси. Покажите, что

а) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$,

б) $\nabla \times \mathbf{v} = 2\,\omega$,

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

3.4. Покажите прямым вычислением, что если $\mathbf{A}$ - постоянный вектор, а $\mathbf{R}$ - радиус-вектор, то

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = 2\,\mathbf{A}\,.$$

Если, однако, в хорошо известную формулу

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\,\mathbf{C}$$

вместо векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ формально подставить ∇ и $\mathbf{R}$, то получится неверный результат

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{R}) - (\nabla \cdot \mathbf{A})\,\mathbf{R} = 3\,\mathbf{A}\,.$$

В чём тут дело?

3.5. Даны координаты векторного поля в декартовой системе координат. а) $\mathbf{v} = (1, 0)$; б) $\mathbf{v} = (-y, x)$; в) $\mathbf{v} = (\cos\varphi, \frac{1}{\rho}\sin\varphi)$. Вычислить его компоненты в полярной системе.

3.6. В полярной системе координат дано векторное поле $\mathbf{v} = (\cos\varphi, -\frac{1}{\rho}\sin\varphi)$. Найти его модуль и ковариантные компоненты.

3.7. Найти полярные координаты следующих тензоров, заданных своими прямоугольными координатами:

а) $(t^i_j) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & xy \\ xy & -(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$, б)$(t_{ij}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & xy \\ xy & 0 \end{pmatrix}$

3.8. В прямоугольных координатах в евклидовом пространстве в точке $x = (1, 1, \sqrt{2})$ задан вектор $\mathbf{v} = (0, 1, 1/\sqrt{2})$. Найти координаты вектора в сферической системе координат (ρ, θ, φ).

3.9. Вычислить контравариантные компоненты вектора $(x^2 + y^2, z, -2)$ в сферической системе координат

3.10. Дифференцируя обе части равенства $\mathbf{e^i}\,\mathbf{e_j} = \delta^i_j$, показать, что $\mathbf{e^i_{,j}} = -\Gamma^i_{jk}\,\mathbf{e^k}$

3.11. Класс трехмерных цилиндрических координат определяется преобразованием вида

$$x + \mathrm{i}y = f(u + \mathrm{i}v)$$

$$z = w$$

где f аналитическая функция. Вспоминая, что

$$f'(u + \mathrm{i}v) = x_{,u} + \mathrm{i}y_{,u} = y_{,v} - \mathrm{i}x_{,v}$$

показать

(а) $\mathbf{e}_u - \mathrm{i}\,\mathbf{e}_v = (\mathbf{e}_x - \mathrm{i}\,\mathbf{e}_y)f'$

(б) координатная система ортогональна

(в) $J = |f'|^2$

(г) $\mathbf{e}_{u,u} - \mathrm{i}\,\mathbf{e}_{v,u} = (\mathbf{e}_u - \mathrm{i}\,\mathbf{e}_v)f''/f'$, $\mathbf{e}_{u,v} - \mathrm{i}\,\mathbf{e}_{v,v} = (\mathbf{e}_v + \mathrm{i}\,\mathbf{e}_v)f''/f'$

(д) $\Gamma^u_{uu} = \Gamma^v_{uv} = -\Gamma^u_{vv} = \mathrm{Re}(f''/f')$,
$\Gamma^v_{uu} = -\Gamma^u_{uv} = -\Gamma^v_{vv} = \mathrm{Im}(f''/f')$,

Вычислить символы Кристоффеля и нарисовать координатные линии в плоскости $z = 0$ для

(е) параболических цилиндрических координат

$$f = \frac{1}{2}(u + \mathrm{i}v)^2, \quad -\infty < u < \infty, 0 \le v$$

(ж) эллиптическо-цилиндрических координат

$$f = \mathrm{ch}(u + \mathrm{i}v), \quad 0 \le u, 0 \le v < 2\pi$$

(з) биполярных цилиндрических координат

$$f = \mathrm{cth}(u + \mathrm{i}v), \quad -\infty < u < \infty, 0 < v < \pi$$

3.12. Доказать следующие свойства ковариантной производной

(а) $\nabla_{\mathbf{w}}(u^i + v^i) = \nabla_{\mathbf{w}}u^i + \nabla_{\mathbf{w}}v^i$

(б) $\nabla_{\mathbf{w_1}+\mathbf{w_2}} u^i = \nabla_{\mathbf{w_1}} u^i + \nabla_{\mathbf{w_2}} v^i$
(в) $\nabla_{\varphi\,\mathbf{w}} u^i = \varphi \nabla_{\mathbf{w}} u^i$
(г) $\varphi \nabla_{\varphi\,\mathbf{w}} u^i = \varphi \nabla_{\mathbf{w}} u^i + \mathbf{w}(\varphi) u^i$

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — векторные поля, φ — гладкая функция.

3.13. Найти ковариантную производную следующих векторных полей, заданных в полярной системе $\mathbf{v} = (v^i) = (\cos\varphi, \dfrac{1}{\rho}\sin\varphi)$, $\mathbf{v} = (v^i) = (0, 1)$, $\mathbf{v} = (v^i) = (\rho, 1)$,

3.14. Вычислить ковариантную производную ковекторного поля $\boldsymbol{\xi} = (1 + \operatorname{sh} u, \operatorname{ch} v)$ в эллиптических координата в точке $x = (0, \pi/2)$.

3.15. Найти ковариантную производную тензорного поля, которое в параболических координатах имеет компоненты $(t^i_j) = \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & v \end{pmatrix}$

3.16. Найти ковариантную производную тензорного поля, которое в полярных координатах имеет ненулевые компоненты $t^1_{12} = \rho$, $t^1_{21} = 1$ $t^2_{11} = \cos\varphi$.

3.17. Тензорное поле в полярно-сферических координатах имеет компоненты

а) $(t^i_j) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix}$, б) $(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2\sin^2\varphi \end{pmatrix}$

Найти его ковариантную производную

3.18. Найти ковариантную производную тензорного поля, которое в полярно-цилиндрических координатах имеет компоненты

а) $(t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $(t^i_j) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.19. Тензор T имеет компоненты $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & x^1 + x^2 \\ 2x^2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти его ковариантную производную, если известны символы Кристоффеля

$$\Gamma^1_{11} = (x^1)^2, \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = x^1 x^2, \qquad \Gamma^1_{22} = (x^2)^2,$$
$$\Gamma^2_{11} = 0, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = x^1/x^2, \qquad \Gamma^1_{22} = 0.$$

3.20. Заданы символы Кристоффеля.

$$\Gamma^1_{11} = x^2, \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = xy, \qquad \Gamma^1_{22} = y^2,$$
$$\Gamma^2_{11} = 0, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = x/y, \qquad \Gamma^2_{22} = 0.$$

Найти ковариантную производную тензора с компонентами

$$t^1_{11} = 0, \qquad t^1_{12} = x + y, \qquad t^1_{21} = 2y, \qquad t^1_{22} = 1,$$
$$t^2_{11} = 2x, \qquad t^2_{12} = x - y, \qquad t^2_{21} = xy, \qquad t^2_{22} = 0.$$

3.21. Дано преобразование координат $x = u - v^2$, $y = u + v$, $-\infty < u < \infty$, $-\frac{1}{2} < v$ вычислить

(а) векторы базиса $\mathbf{e_u}$, $\mathbf{e_v}$

(б) векторы сопряженного базиса $\mathbf{e^u}$, $\mathbf{e^v}$

(в) символы Кристоффеля;

(г) контравариантные компоненты вектора ускорения;

(д) физические компоненты вектора ускорения;

(е) для $\mathbf{f} = uv\,\mathbf{e_v}$; записать закон Ньютона в системе координат u, v

3.22. Дано преобразование координат $x = u + w$, $y = v^2 - w$, $z = u^2 + v$ вычислить

(а) векторы базиса $\mathbf{e_u}$, $\mathbf{e_v}$, $\mathbf{e_w}$

(б) векторы сопряженного базиса $\mathbf{e^u}$, $\mathbf{e^v}$ в точке $u = -1$, $v = 1$, $w = -1$

(в) символы Кристоффеля;

(г) контравариантные компоненты вектора ускорения;

(д) физические компоненты вектора ускорения $u = -1$, $v = 1$, $w = -1$;

3.23. Для функции $f = xy + yz + zx$ вычислить ковариантные компоненты $\operatorname{grad} f$ в (а) сферической системе координат; (б) аффинной системе координат $x = u + w$, $y = v - w$, $z = u + v + w$

3.24. Записать закон Ньютона покомпонентно в эллиптической цилиндрической системе координат

3.25. Вычислить градиенты следующих скалярных полей в цилиндрических координатах

(а) $u = z + \rho\varphi$

(б) $u = z\rho\varphi$

(в) $u = z\sin\varphi + \rho$

(г) $u = z\cos\varphi + \rho^2$

(д) $u = z\sin^2\varphi + \rho^3$

3.26. Вычислить градиенты следующих скалярных полей в сферических координатах

(а) $u = \rho\varphi$

(б) $u = \rho\theta\varphi$

(в) $u = \theta\cos\varphi + \rho$

(г) $u = \rho\theta$

(д) $u = \varphi\sin\theta + \rho$

3.27. Доказать, что если a_{ij} — ротор ковариантного вектора, то $a_{ij,k} + a_{jk,i} + a_{ki,j} = 0$

3.28. Нарисовать какой-нибудь треугольник на сфере.

3.29. Найти геодезические на правильном конусе.

3.30. Найти геодезические линии прямого геликоида

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin uz = au$$

3.31. Найти геодезические линии псевдосферы

$$x = a\sin u\cos vy = a\sin u\sin vz = a(\ln\operatorname{tg} u/2 + \cos u)$$

ответы

3.1 Компоненты ротора вектора A равны

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$
$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Дивергенция ротора, по определению, равна величине

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla \times \mathbf{A})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \mathbf{A})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \mathbf{A})_z.$$

Подставляя в это выражение компоненты ротора $\mathbf{A}$ и учитывая тот факт, что порядок вычисления смешанных производных произволен, т.е. что, например, $\partial^2 A_x/\partial z \partial y = \partial^2 A_x/\partial y \partial z$, легко убеждаемся в равенстве нулю дивергенции ротора произвольного вектора $\mathbf{A}$.

б) Доказательство удобно провести для каждой компоненты в отдельности. Покажем, например, что

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x = \nabla_x(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 A_x. \qquad (6)$$

Согласно определению, левая часть этого соотношения может быть записана в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \mathbf{A})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \mathbf{A})_y =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right).$$

Прибавляя и вычитая в правой части последнего соотношения величину $\partial^2 A_x/\partial x^2$ и учитывая, что $\partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y + \partial A_z/\partial z = \nabla\,\mathbf{A}$, убеждаемся в справедливости соотношения (6). Аналогично доказывается это соотношение для компонент y и z.

3.5 а) $\mathbf{v} = (\cos\varphi, -\sin\varphi/\rho)$; б) $\mathbf{v} = (0, 1)$; в) $\mathbf{v} = (\rho, 1)$

3.6 $\mathbf{v} = 1$, $(v_i) = (\cos\varphi, -\rho\sin\varphi)$.

3.7 а) $t^1_1 = -t^2_2 = \rho^2(1-2\sin^4\varphi)$, $t^2_1 = 1/\rho^2$, $t^1_2 = -\rho\sin\varphi\cos\varphi(2+\sin^2\varphi)$ б) $t_{11} = \rho^2\cos^2\varphi(1+2\sin^2\varphi)$, $t_{22} = \rho^4\sin^2\varphi(2\sin^2\varphi-1)$, $t_{12} = t_{21} = -2\rho^3\cos^3\varphi\sin^3\varphi$

3.8 $\mathbf{v} = (1, 0, 1/\sqrt{2})$

3.13 а) $(\nabla_j v^i) = 0$, б) $(\nabla_j v^i) = \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{pmatrix}$ в) $(\nabla_j v^i) = \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ \frac{1}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$.

3.14 $(\nabla_j \xi_i)_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$.

3.15 . $(\Gamma^i_{1j}) = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$ Тогда

$$(\nabla_1 t^i_j) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{v}{u^2+v^2} & \dfrac{v(v-u)}{u^2+v^2} \\ \dfrac{v(v-u)}{u^2+v^2} & \dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

аналогично вычисляется $\nabla_1 t^i_j$.

3.17 а)

$$(\nabla_1 t^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\nabla_2 t^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & \rho^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$(\nabla_3 t^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho\sin\theta(\rho-\sin\theta) \\ 0 & 0 & -\sin^2\theta\cos\theta \\ 1-\sin\theta/\rho & -\cos\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

б) $\nabla_k t_{ij} = 0$.

3.18 а) $\nabla_k t_{ij} = 0$,
б)

$$(\nabla_1 t^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\nabla_2 t^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & \rho^2-1 & 0 \\ 1-\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$(\nabla_3 t^i_j) = 0$

3.19 $(\nabla_1 t_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1-(x^1+x^2)(x^1)^2 - \dfrac{x^1}{x^2} \\ -2x^1(1+x^1x^2) & -\frac{2x^1}{x^2} - (x^1+3x^2)x^1x^2 \end{pmatrix}$

$(\nabla_2 t_{ij}) = \begin{pmatrix} -(x^1+3x^2)\dfrac{x^1}{x^2} & 1-(x^1+x^2)(x^1)^2 - \dfrac{x^1}{x^2} \\ 2(1-x^1x^2)^2 - \dfrac{x^1}{x^2} & -(x^1+3x^2)(x^2)^2 \end{pmatrix}$

3.25 а) $\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e_z}$ б) $z\varphi\,\mathbf{e}_\rho + z\,\mathbf{e}_\varphi + \rho\varphi\,\mathbf{e_z}$ в) $\mathbf{e}_\rho + \frac{z\cos\varphi}{\rho}\,\mathbf{e}_\varphi + \sin\varphi\,\mathbf{e_z}$ г) $2\rho\,\mathbf{e}_\rho - \frac{z\sin\varphi}{\rho}\,\mathbf{e}_\varphi + \cos\varphi\,\mathbf{e_z}$ д) $3\rho^2\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \frac{z\sin 2\varphi}{\rho}\,\mathbf{e}_\varphi + \sin^2\varphi\,\mathbf{e_z}$

3.26 а) $\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\sin\theta}\,\mathbf{e}_\varphi$ б) $\theta\,\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\theta + \rho\varphi\,\mathbf{e_z}$ в) $\theta\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \varphi\,\mathbf{e_{theta}} + \frac{\theta}{\sin\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$ г) $\mathbf{e}_\rho + \frac{\varphi\cos\theta}{\rho}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$ д) $\mathbf{e}_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}\,\mathbf{e}_\theta - \frac{\theta}{\rho}\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$

3.28 В обычной геометрии граница треугольника образована отрезками прямых. Аналогично, в криволинейном пространстве треугольник получается из отрезков геодезических, ибо геодезическая это аналог прямой.

Геодезические на сфере - дуги больших окружностей.

3.29 По смыслу геодезический путь между двумя точками - локально кратчайший путь между ними. Мы можем развернуть конус, чтобы он лёг на плоскость и провести прямую через эти точки (прямая-кратчайшая на плоскости). Это правомерно, так как любой другой нарисованный на конусе путь будет более длинным, в чём мы убедимся, развернув конус.

4 Основы теории поверхностей

Длина дуги плоской кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, заданной уравнением

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$
$$y = y(x),$$
$$r = r(\varphi)$$

вычисляется по формулам

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$$
$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}dx$$
$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}dt$$

Пусть в некоторой системе координат (u, v) поверхность задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Выражение

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \text{где}$$
$$E(u,v) = \frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial u}, \quad F(u,v) = \frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial v}, \quad G(u,v) = \frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial\,\mathbf{r}}{\partial v}$$

называется первой основной квадратичной формой поверхности. Кроме того, её называют еще для краткости просто линейным элементом поверхности, подчеркивая этим, что знание её является основой для вычисления длин дуг.

Кривизна $k_1 = |\,\mathbf{r}''(s)|$ вычисляется по формулам

$$k_1 = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$
$$k_1 = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$
$$k_1 = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

Кручение Для пространственной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$

$$|k_2| = \frac{|(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')|}{k_1^2}$$

Единичный вектор нормали $\mathbf{n} = \mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v} /|\,\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}\,|$.

Форма $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ называется второй квадратичной формой поверхности, где

$$L = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad M = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad N = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

$K = k_{01} \cdot k_{02}$ — гауссова кривизна, где k_{01}, k_{02}, главные кривизны, являются корнями уравнения

$$(EG - F^2)k^2 - (EN + GL - 2FM)k + LN - M^2 = 0$$

$H = \frac{1}{2}(k_{01} + k_{02})$ — средняя кривизна

Геодезической линией на поверхности называют линию, в каждой точке которой выполняется одно из условий:

а) кривизна линии равна нулю;

б) нормаль к поверхности является главной нормалью линии.

Через каждую точку поверхности в заданном направлении проходит единственная геодезическая линия.

Геодезической кривизной линии на поверхности в данной точке называется длина проекции вектора кривизны линии на касательную плоскость к поверхности в этой точке.

Пример

Найти главные кривизны цилиндра радиуса R.

Решение

Главные кривизны являются экстремальными значениями кривизны. Очевидно, что есть сечения с кривизной 0. Она самая наименьшая. Известно, что главные направления ортогональны. Поэтому значение кривизны будет наибольшим у сечения ортогонального к первому нормальному сечению. В сечении получается окружность, кривизна которой, как известно, равна $1/R$. Итак, $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$.

Задачи.

4.1. Даны как функции кривизна и кручение некоей пространственной кривой. Сколько можно восстановить таких кривых?

4.2. Если вектор перенести параллельно вдоль некоторой замкнутой кривой, он повернётся на некоторый угол по сравнению со своим начальным положением. Обычная плоскость довольно однородна и этот угол будет одинаков для всех кривых. Чему он равен?

4.3. Найти длину дуги гиперболической винтовой линии $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = at$, заключенную между точками 0 и t.

4.4. Найти выражение для длины дуги циклоиды $x = at - a\sin t$, $y = a - a\cos t$ и найти длину дуги одного периода этой кривой.

4.5. Найти длину дуги логарифмической спирали $\rho = a\exp^{m\varphi}$

4.6. Найти длину дуги кривой, заданной внутренним уравнением $v = u$, на поверхности с линейным элементом $ds^2 = du^2 + \mathrm{sh}^2 u\ dv^2$.

4.7. Найти линейный элемент плоскости $r = r_0 + au + bv$ в декартовых координатах.

4.8. Найти линейный элемент цилиндра $x = R\cos u, y = R\sin u, z = v$ $u \in [0, 2\pi)$.

4.9. Найти линейный элемент конуса $x = v\cos u, y = v\sin u, z = v$, $u \in [0, 2\pi)$, $v > 0$

4.10. Найдите кривизну следующих кривых а) $y = \sin x$; б) $y = a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$; в) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; г) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$; д) $\rho = a\varphi$; е) $\rho = a(1 + cos\varphi)$.

4.11. Найдите кривизну и кручение следующих кривых а) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$; б) $x = a\mathrm{ch}t$, $y = a\mathrm{sh}t$, $z = at$; в) $x = \mathrm{e}^t$, $y = \mathrm{e}^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$

4.12. Напишите уравнение нормали к следующим поверхностям в указанных точках

(а) $z = x^2 + y^2$, в точке $M(1, 2, 9)$;

(б) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точке $M(3, 4, 12)$;

(в) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точке $M(3, 1, -1)$;

(г) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

4.13. Вычислить вторую квадратичную форму следующих поверхностей:

1. $r = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$ (сфера)
2. $r = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u)$ (эллипсоид вращения)
3. $r = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$ (тор)
4. $r = (a\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a}\cos v, a\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a}\sin v, u)$ (катеноид)

5. $r = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a(\ln\tan\frac{u}{2} + \cos u))$

6. $r = (u\cos v;, u\sin v;, av)$ (прямой геликоид),

7. $xyz = a^3$

4.14. На поверхности расположена прямая линия. Будет ли она являться геодезической?

4.15. 1. Докажите, что геодезическими линиями плоскости являются прямые и только они.

2. Докажите, что геодезическими линиями цилиндрической поверхности являются прямолинейные образу- образующие и обобщенные винтовые линии и только они.

3. Докажите, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.

4. Докажите, что параллель поверхности вращения будет геодезической тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в ее точках параллельна оси вращения.

5. Найдите геодезические линии на сфере.

Ответы

4.1 Ответ одну является неверным. На самом деле таких кривых много, но все они могут быть преобразованы друг в друга движением пространства как целого. Поэтому правильный ответ : единственна, с точностью до движения пространства.

4.2 Выберем простейшую кривую - окружность и будем переносить вектор параллельно ей (по определению параллельного переноса вдоль кривой). В результате он примет исходное положение. То есть искомый угол равен нулю.

Это обстоятельство можно объяснить следующим образом: плоскость не является кривым пространством (кривизна всюду 0), а эффект поворота вектора в действительности обусловлен именно наличием кривизны. Теория параллельного переноса вдоль кривой возникла из желания иметь возможности, привычные нам в евклидовой геометрии.

4.3 $s = a\sqrt{2}\mathrm{sh}t$

4.4 $s = 4\text{a}(1-\cos(t/2))$ при $t_1 = 0$, Длина дуги одного периода $s = 8a$.

4.5 $s = \dfrac{a}{m}\sqrt{m^2+1}(\exp^{m\varphi} - 1)$

4.6 $s = \operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1$.

4.7 $dr = adu + bdv$ $ds^2 = a^2du^2 - 2(a,b)dudv + b^2dv^2$

4.8 $ds^2 = a^2du^2 + dv^2$.

4.9 $ds^2 = dv^2 + v^2\cos^2(\alpha)\ du^2$.

4.10 а) $k = |\sin|/(1+\cos^2 x)^{3/2}$; б) $k = a/y^2$;
в) $k = \dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$; г) $k = \dfrac{ab}{(a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}$;
д) $k = (2+\varphi^2)/a(1+\varphi^2)^{3/2}$;
е) $k = \dfrac{3}{4a|\cos(\varphi/2)|}$;

4.11 а) $k_1 = a/(a^2+b^2)$, $k_2 = b/(a^2+b^2)$; б) $k_1 = k_2 = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$;
в) $k_1 = -k_2 = \frac{\sqrt{2}}{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}$.

4.12 а) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{12} = \dfrac{z-9}{-1}$; б) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-12}{12}$;
в) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{12} = \dfrac{z-9}{-1}$;
г) $x = x_0\left(1\dfrac{t}{a^2}\right)$, $y = y_0\left(1\dfrac{t}{b^2}\right)$, $z = z_0\left(1\dfrac{t}{c^2}\right)$.

4.13 1. $Rdu^2 + R\cos^2 u\ dv^2$; 2. $\dfrac{ac(du^2 + \cos^2 u\ dv^2)}{\sqrt{c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u}}$;
3. $bdu^2 + (a + b\cos u)\cos u\ dv^2$; 4. $-\dfrac{1}{a}du^2 + adv^2$;
5. $-a\cot u\ du^2 + a\cos u\sin u\ dv^2$; 6. $-\dfrac{2a\ du\ dv}{\sqrt{u^2+a^2}}$;
7. $\dfrac{2a^3}{\sqrt{x^4y^4 + a^6x^2 + a^6y^2}}(\dfrac{y}{x}dx^2 + dx\ dy + \dfrac{x}{y}dy^2)$

Список литературы

[1] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Наука, 1987.

[2] Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями М., Мир, 1969.

[3] Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во Академии наук СССР, 1961

[4] Simmonds J.G A Brief on Tensor Analysis. Springer. 1994

[5] Задачи по тензорному анализу и римановой геометрии. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1993.

[6] Сборник задач по дифференциальной геометрии. Под ред. А.С.Феденко М., Наука, 1979

[7] Топоногов В.А. Тензорная алгебра и тензорный анализ. Новосибирск, изд-во НГУ, 1995