

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра общей физики

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ
им. акад. С. А. Христиановича СО РАН

В. П. ЗАМУРАЕВ, А. П. КАЛИНИНА

ЗАДАЧИ ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Новосибирск
2012

УДК 536.7
ББК В36я73-1
З 266

Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи по молекулярной физике:
Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 184 с.

ISBN 978-5-4437-0106-6

В учебном пособии приведены задачи с ответами по курсу «Молекулярная физика» с добавлением необходимого для их решения теоретического материала. Пособие охватывает вопросы по статистической физике (распределения Максвелла, Больцмана, Максвелла – Больцмана, Гиббса; теория теплоемкости), физической кинетике (явления переноса в плотных и ультраразреженных идеальных газах) и термодинамике (1-е и 2-е начала термодинамики, энтропия, теория термодинамических потенциалов, процесс Джоуля – Томсона, фазовые превращения и др.). Содержание пособия соответствует программе практических занятий по дисциплине «Молекулярная физика», изучаемой на первом курсе физического факультета НГУ. Ряд задач взят из литературы, приведенной в конце сборника. Некоторые задачи являются оригинальными. Часть из них предложена С. С. Кацнельсоном, А. А. Киприяновым, А. Ф. Курбацким, А. М. Оришичем, В. А. Толкачевым и др.

Предназначено для преподавателей и студентов вузов.

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 гг.

Учебное пособие рекомендовано к изданию ученым советом ИТПМ СО РАН.

Рецензент

д-р физ.-мат. наук, проф. С. С. Кацнельсон

© Новосибирский государственный
университет, 2012

© В. П. Замураев, А. П. Калинина, 2012

ISBN 978-5-4437-0106-6

ЧАСТЬ 1

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Элементы теории вероятностей (теория)

Совокупность огромного числа молекул (в одном моле содержится $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ молекул) является системой, качественно отличной от систем из небольшого числа частиц. В ней проявляются закономерности, несвойственные простой механической системе. Движение отдельной молекулы, ее траектория, последовательное изменение состояния становятся несущественными и не влияют на характеристики системы как целого. Из опыта известно, что свойства газа в состоянии равновесия не зависят от предыстории (от того, каким образом был заполнен сосуд) и не изменяются с течением времени. Поведение системы из большого числа частиц подчиняется статистическим закономерностям. Изучение их основано на законах теории вероятности.

Вероятность данного события определяется относительной частотой его появления или, другими словами, как отношение числа благоприятных случаев к полному числу опытов (измерений). Вероятностные суждения являются тем более достоверными, чем к большему числу событий они относятся.

Если некоторая (произвольная) физическая система находится в различных состояниях, образующих дискретный ряд, и L – взаимно однозначная функция состояния (например энергия, объем системы и пр.), то вероятность i -го состояния системы или вероятность того, что величина L имеет значение L_i , определяется как предел отношения числа измерений, дающих значение $L = L_i$, к полному числу измерений, когда последнее неограниченно возрастает:

$$w_i = w_{L_i} = \lim_{N \rightarrow \infty} N_i / N$$

(предполагается, что измерения величины L проводятся через промежутки времени Δt). Из этого определения следует, что вероятность i -го состояния равна пределу отношения времени t_i , в течение которого система находится в этом состоянии, к полному времени наблюдения T при неограниченном возрастании последнего:

$$w_{L_i} = w_i = \lim_{T \rightarrow \infty} t_i / T.$$

Это определение вероятности остается в силе, если спектр состояний системы непрерывный. В этом случае вероятность вводится для интервала значений функции L : $L \div L + dL$.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность того, что система находится в одном из взаимоисключающих состояний i, j, k, \dots , равна

$$w_{i+j+k+\dots} = \sum_{l=i,j,k,\dots} w_l.$$

Важное следствие теоремы. Пусть состояние системы характеризуется двумя не зависящими друг от друга величинами L и M . Величина L может пробегать дискретный ряд значений L_1, L_2, \dots , а M – значения M_1, M_2, \dots . Пусть известна вероятность $w_{L_i M_j}$ того, что система находится в состоянии, в котором $L = L_i$ и $M = M_j$. Тогда вероятность w_{L_i} того, что система имеет значение L_i при любом значении величины M , равна

$$w_{L_i} = w_{L_i M_1} + w_{L_i M_2} + \dots = \sum_j w_{L_i M_j},$$

где суммирование ведется по всем значениям величины M .

Закон (теорема) умножения вероятностей. Пусть для двух совершенно независимых физических систем w_{L_i} и w_{M_j} – вероятности того, что первая система находится в состоянии,

характеризуемом величиной L_i , и вторая – в состоянии, характеризуемом M_j . Тогда вероятность одновременной реализации состояний с $L = L_i$ и $M = M_j$ равна

$$w_{L_i M_j} = w_{L_i} w_{M_j}.$$

Закон умножения вероятностей представляет строгое определение статистической независимости двух систем.

Статистическое среднее. Статистическим средним (математическим ожиданием) величины L называют предел отношения (предел среднего арифметического):

$$\bar{L} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum L_i N_i / N, \text{ или } \bar{L} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum L_i t_i / T = \sum L_i w_i.$$

Суммирование ведется по всем состояниям системы.

В случае систем, состояния которых изменяются непрерывно,

$$\bar{L} = \int L dw = \int L \rho(L) dL,$$

где $\rho(L)$ – плотность вероятности.

Средний квадрат разности

$$\overline{(\Delta L)^2} = \overline{(L - \bar{L})^2}$$

называется квадратичной флуктуацией (дисперсией распределения w_L). Она равна

$$\overline{\Delta L^2} = \overline{L^2} - \bar{L}^2.$$

Относительная флуктуация

$$\delta_L = \sqrt{(\overline{\Delta L^2})/\bar{L}}$$

дает возможность оценить относительную погрешность, которая возникает при замене L ее средним значением \bar{L} . Если $\delta_L \ll 1$, то такая замена не вносит сколько-нибудь заметной ошибки.

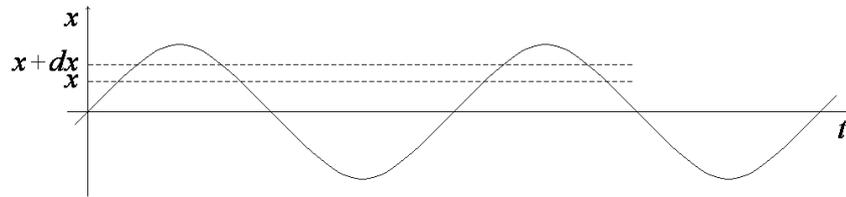
Теорема: если имеется система, состоящая из N независимых частей, то относительная флуктуация любой аддитивной функции состояния L системы обратно пропорциональна квадратному корню из числа N :

$$\delta_L \sim 1/\sqrt{N}.$$

Задачей теоретической физики является изучение свойств макроскопических систем, состоящих из огромного числа атомов или молекул. Из приведенной теоремы следует, что относительные флуктуации всех физических величин, значение которых для всей системы равно сумме значений их для всех частиц, обратно пропорционально квадратному корню из числа частиц. Поскольку число частиц в макроскопических системах выражается огромными числами (в одном моле число частиц $N_A = 6 \cdot 10^{23}$), относительная флуктуация любой аддитивной величины (например, энергии) оказывается практически равной нулю (для моля $\delta_l \sim 10^{-12}$). Это означает, что все аддитивные величины имеют значения, весьма близкие к средним. Поэтому замена истинных величин их средними значениями может быть произведена с очень большой точностью. Таким образом, вероятностные предсказания приобретают практически достоверный характер.

Элементы теории вероятностей (задачи)

1.1. Материальная точка колеблется по закону $x = \sin \omega t$. Найти вероятность того, что при случайном измерении ее положения она будет обнаружена в интервале $x, x + dx$.



Ответ: $dw = dx/(\pi(1 - x^2)^{1/2})$.

1.2. Найти среднее значение величины x , ее среднее квадратичное значение, среднюю квадратичную флуктуацию и относительную флуктуацию, если $dw = \text{const} \cdot \exp(-\alpha x)dx$, $\alpha > 0$.

Ответ: $\bar{x} = 1/\alpha$, $\sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{2}/\alpha$, $\overline{\Delta x^2} = 1/\alpha^2$, $\delta_x = 1$.

1.3. Показать, что для системы, состоящей из N независимых одинаковых частей, относительная флуктуация любой аддитивной функции состояния системы $A = \sum_{k=1}^N a_k$ равна

$$\delta_A = \sqrt{\overline{\Delta a^2}} / (N^{1/2} \bar{a}).$$

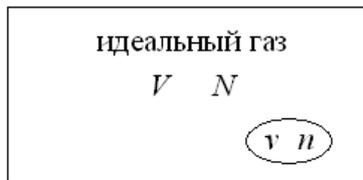
1.4. Распределение вероятностей для двух случайных величин имеет вид

$$dw(x, y) = \text{const} \cdot (x + y)^2 dx dy, 0 \leq x, y \leq 1.$$

Найти распределение вероятностей для величины x .

Ответ: $dw(x) = 6/7 \cdot (x^2 + x + 1/3)dx$.

1.5. Идеальный газ содержит N молекул, заключенных в объеме V . Найти вероятность того, что в выделенной мысленно части объема v содержится n молекул.



Чему равна относительная флуктуация? Рассмотреть предельные случаи:

а) $N \gg n$ (малый объем: $\nu \ll V$);

б) среднее число частиц в выделенном объеме велико (малый, но макроскопический объем): $\bar{n} \sim n \gg 1$, $|\Delta n| = |\bar{n} - n| \ll \bar{n}$.

Ответ: $w_N(n) = N!/(n!(N-n)! \cdot (\nu/V)^n (1-\nu/V)^{N-n}$ – биномиальный закон, $\delta_n = ((V/\nu - 1)/N)^{1/2}$;

а) $w_N(n) = \bar{n}^n \cdot \exp(-\bar{n})/n!$, $\bar{n} = N\nu/V$ – формула Пуассона;

б) $w_N(n) = (2\pi\bar{n})^{-1/2} \cdot \exp(-(n - \bar{n})^2/2\bar{n})$ – распределение Гаусса.

Распределение Максвелла (теория)

Модель идеального газа. Особенно значительные успехи в применении статистического подхода были достигнуты при изучении газов. Более того, успех в изучении других сред часто был связан с возможностью сведения их к модели газа. Например, твердое тело успешно моделируют двумя газами – электронным и фононным.

Очень простой, но играющей большую роль в исследованиях является модель идеального газа. Она хорошо описывает разреженные газы. При низком давлении расстояние между молекулами газа велико по сравнению с их размерами, а силы межмолекулярного взаимодействия быстро убывают с расстоянием. По этой причине мал промежуток времени, в течение которого взаимодействие молекул значительно. При столкновении их можно

считать недеформируемыми. Большую часть времени они движутся свободно (прямолинейно и равномерно).

Статистическую систему, частицы которой взаимодействуют друг с другом настолько слабо, что этим можно пренебречь, называют идеальным газом.

Гипотеза молекулярного хаоса. Возможность применения статистического подхода связана с громадным числом молекул, из которых состоит рассматриваемая система. Любая ее характеристика с течением времени флуктуирует около своего среднего значения. Однако эти флуктуации весьма малы, а сколь угодно значительные отклонения маловероятны. Измеренные значения характеристик практически не отличаются от средних статистических. Поэтому в дальнейшем под давлением газа, его внутренней энергией и другими параметрами будут подразумеваться средние величины.

Для вычисления параметров газа необходимо знать распределение молекул в пространстве и по скоростям. Оно определяется гипотезой о молекулярном хаосе. В отсутствие внешних массовых сил газ в сосуде равномерно распределяется по всему объему. Это подтверждается опытом.

Молекулы газа движутся с различными скоростями. По указанной гипотезе все направления движения равноправны. Это предположение также соответствует опытным данным. Если бы существовало направление преимущественного движения молекул, то в замкнутом сосуде возник бы стационарный поток газа. Установление молекулярного хаоса обусловлено существованием взаимодействия между молекулами. При столкновении молекул друг с другом изменяются направления их движения и величины скоростей; суммарные импульс и энергия сохраняются. В газе, заключенном в сосуд и предоставленном самому себе, устанавливается стационарное распределение молекул по скоростям. Для идеального газа оно было получено Максвеллом в 1859 г. и названо его именем.

Распределение Максвелла. Из предположения о хаотическом характере молекулярного движения следует, что возможно появление молекул с любой скоростью и искомое распределение будет характеризоваться непрерывной функцией. В связи с этим имеет смысл говорить не о числе молекул со строго заданной

скоростью, а о числе молекул $dn(\vec{v})$, имеющих скорость в некотором элементе объема пространства скоростей:

$$v_x \div v_x + dv_x, \quad v_y \div v_y + dv_y, \quad v_z \div v_z + dv_z,$$

и о распределении вероятностей $dw(\vec{v})$ с плотностью $g(\vec{v})$, так что

$$dw(\vec{v}) = g(\vec{v})d\vec{v},$$

где $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$ – элемент объема пространства скоростей в декартовых координатах. Из принципа равноправности направлений движения следует, что плотность вероятности не зависит от угловых переменных, указывающих направление вектора скорости, а должна быть лишь функцией его модуля:

$$g(\vec{v}) \equiv g(v).$$

Аналогично можно ввести вероятность того, что молекула имеет компоненту скорости v_ξ в дифференциально малом интервале $v_\xi \div v_\xi + dv_\xi$:

$$dw(v_\xi) = dn(v_\xi)/n = f(v_\xi)dv_\xi, \quad \xi = x, y, z,$$

где в силу хаотичности молекулярного движения каждая из плотностей вероятностей зависит только от «своей» компоненты скорости и не зависит от других; больше того, вид этих функций распределения один и тот же независимо от выбора аргумента v_x , v_y или v_z .

По теореме умножения вероятностей для независимых событий имеем:

$$dw(\vec{v}) = dw(v_x)dw(v_y)dw(v_z).$$

В результате можно получить искомые вероятности:

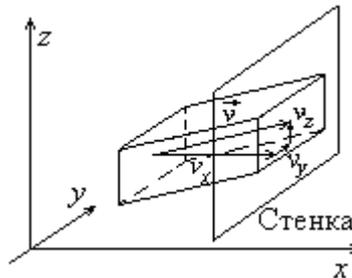
$$dw(v_\xi) = \sqrt{\alpha/\pi} \exp(-\alpha v_\xi^2) dv_\xi, \quad \xi = x, y, z;$$

$$dw(\vec{v}) = (\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha v^2) d\vec{v},$$

где α – положительный параметр. Его можно найти, если рассчитать давление газа p и сравнить его с давлением идеального газа:

$$p = \nu RT/V.$$

В процессе движения молекулы газа, заключенные в сосуд, испытывают соударения с его стенками. При этом каждая молекула передает отражающей ее стенке некоторый импульс. Давление газа на стенку сосуда равно суммарному импульсу, передаваемому единице площади стенки в единицу времени множеством ударяющихся о нее молекул. Если считать, что отражение молекул от стенки происходит совершенно упруго, то импульс, передаваемый при одном соударении, равен $2mv_x$ (ось x направлена перпендикулярно стенке, см. рисунок).



Пусть $dj(v_x)$ – число молекул, падающих на единицу площади стенки в единицу времени и имеющих x -ю компоненту скорости в интервале $v_x \div v_x + dv_x$. Тогда давление газа равно

$$p = \int_0^{\infty} 2mv_x dj(v_x).$$

Величина $dj(v_x)$ равна числу молекул с данной компонентой скорости v_x , находящихся в параллелепипеде высотой v_x и основанием, равным единице площади:

$$dj(v_x) = v_x dn(v_x) = v_x ndw(v_x).$$

Подстановка $dj(v_x)$, интегрирование и сравнение двух выражений для давления дает величину

$$\alpha = m/(2kT),$$

где $k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К – постоянная Больцмана.

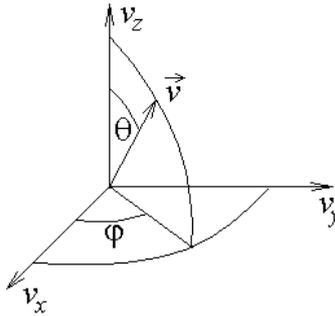
Наряду с распределением по компонентам скорости в декартовых координатах часто используется распределение в сферических координатах

$$dw(\vec{v}) = (\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv d\Omega,$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла, равный

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

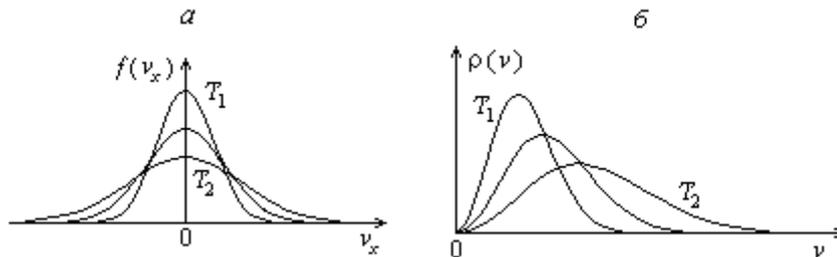
если угловые координаты θ и φ выбраны, как показано на рисунке.



Распределение по величине скорости получается, если вероятность проинтегрировать по телесному углу:

$$dw(v) = f(v)dv = 4\pi(\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv.$$

Графики плотности вероятности для распределений по компоненте скорости v_x и по величине скорости представлены на рисунке ($T_1 < T_2$).



Кривая плотности вероятности $f(v_x)$ (рис. а) симметрична по отношению к положительным и отрицательным значениям v_x , что является прямым следствием предположения о равноправности направлений молекулярного движения. Кривая $\rho(v)$ (рис. б) имеет максимум: наиболее вероятным состоянием молекулы является ее движение с отличной от нуля скоростью.

Распределение Максвелла (задачи)

1.6. Записать распределение Максвелла в сферической и цилиндрической системах координат. Получить отсюда частные распределения (распределение по абсолютным скоростям v , распределения по углам θ и φ).

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } dw(v, \theta, \varphi) &= 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2} \cdot \exp(-mv^2/2kT) v^2 dv \times \\ &\times (1/2) \sin\theta d\theta \cdot d\varphi 2\pi, \end{aligned}$$

$$dw(v_x, v_r, \varphi) = (m/2\pi kT)^{1/2} \cdot \exp(-mv_x^2/2kT) dv_x \times \\ \times (m/kT) \cdot \exp(-mv_r^2/2kT) v_r dv_r \cdot d\varphi/2\pi.$$

1.7. По распределению Максвелла найти средние значения x -й компоненты скорости \bar{v}_x , абсолютной величины скорости \bar{v} , среднеквадратичной скорости $\sqrt{\overline{v^2}}$; определить наиболее вероятную скорость v_m . Установить соотношения между найденными величинами. Рассчитать значения \bar{v} для молекул водорода и кислорода при комнатной температуре.

$$\text{Ответ: } \bar{v}_x = 0, \bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}, \sqrt{\overline{v^2}} = (3kT/m)^{1/2}, v_m = (2kT/m)^{1/2};$$

$$\bar{v}_{\text{H}_2} = 1780 \text{ м/с}, \bar{v}_{\text{O}_2} = 445 \text{ м/с}.$$

1.8. Найти распределение частиц газа по энергиям $\varepsilon = mv^2/2$. Рассчитать наиболее вероятную и среднюю энергии. Сравнить их соответственно с величинами $mv_m^2/2$ и $m\bar{v}^2/2$ и объяснить различие.

$$\text{Ответ: } dw(\varepsilon) = 2/(\pi(kT)^3)^{1/2} \cdot \exp(-\varepsilon/kT) \varepsilon^{1/2} d\varepsilon,$$

$$\varepsilon_m = kT/2 \neq mv_m^2/2 = kT,$$

$$\bar{\varepsilon} = m\overline{v^2}/2 = 3kT/2 \neq m\bar{v}^2/2 = 4kT/\pi.$$

1.9. Найти относительную флуктуацию δ_ε энергии молекулы идеального газа и относительную флуктуацию δ_E энергии газа, состоящего из N молекул.

$$\text{Ответ: } \delta_\varepsilon = (2/3)^{1/2}, \delta_E = (2/3N)^{1/2}.$$

1.10. Определить долю частиц в газе, у которых:

а) компонента скорости v_x лежит в интервале $0 \leq v_x \leq v_0$;

б) абсолютная величина скорости $0 \leq v \leq v_0$. Результат выразить

через интеграл вероятности $\operatorname{erf}(x) = 2/\pi^{1/2} \cdot \int_0^x \exp(-t^2) dt$.

Ответ: а) $\Delta n/n = 1/2 \cdot \operatorname{erf}(v_0/v_m)$;

б) $\Delta n/n = \operatorname{erf}(y) - 2/\pi^{1/2} \cdot y \cdot \exp(-y^2)$, $y = v_0/v_m$.

1.11. Пользуясь табличными значениями и асимптотическим ($x \gg 1$) представлением интеграла $\operatorname{erf}(x) = 1 - 1/\pi^{1/2} x \cdot \exp(-x^2)$, рассчитать:

а) долю частиц, у которых $|v_x| \geq v_m$;

б) долю частиц, у которых $v \geq v_m$;

в) долю частиц в атмосфере Земли, скорость которых превосходит вторую космическую $v_2 = 11,2$ км/с; $T = 300$ К, $\mu = 29$.

Ответ: а) $\Delta n/n = 0,160$;

б) $\Delta n/n = 0,576$;

в) $\Delta n/n \approx 10^{-316}$.

1.12. Оставаясь в рамках классической механики, оценить для электронного газа при температуре в 1 эВ (11 600 К) долю электронов, имеющих скорость больше скорости света. При какой температуре доля электронов будет порядка единицы? Как изменятся эти результаты для молекулярного азота?

Ответ: для электронного газа $\Delta n/n \sim 10^{-100000}$, $T \sim 6 \cdot 10^9$ К;

для молекулярного азота $\Delta n/n \sim 10^{-6 \cdot 10^9}$, $T \sim 3 \cdot 10^{14}$ К.

1.13. Пленки некоторых нерастворимых органических кислот и спиртов на воде можно моделировать идеальным двумерным газом.

Написать распределение по скоростям в таком газе в декартовых и полярных координатах. Определить среднюю энергию одной молекулы.

Ответ: $dw(v_x, v_y) = m/2\pi kT \cdot \exp(-m(v_x^2 + v_y^2)/2kT) dv_x dv_y,$

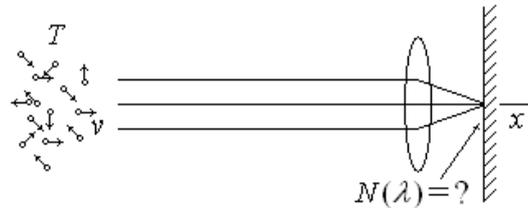
$$dw(v, \varphi) = m/kT \cdot \exp(-mv^2/2kT) v dv \cdot d\varphi/2\pi.$$

$$\bar{\varepsilon} = m \overline{v^2} / 2 = kT.$$

1.14. Найти среднюю скорость теплового движения молекул двумерного идеального газа.

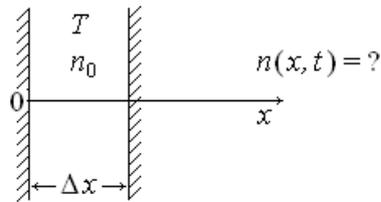
Ответ: $\bar{v} = (\pi kT/2m)^{1/2}.$

1.15. Газ состоит из атомов, излучающих свет с длиной волны λ_0 . Найти закон распределения измеряемой в спектрографе интенсивности излучения газа $I(\lambda)$ в зависимости от длины волны. Учесть эффект Доплера.



Ответ: $I = I_0 \cdot \exp(-(\lambda - \lambda_0)^2 / \delta^2), \delta = (2kT/m)^{1/2} \cdot \lambda_0 / c.$

1.16. Между двумя стенками находится газ при температуре T с концентрацией n_0 . Внезапно одна стенка исчезает и газ начинает разлетаться. Найти, как меняется концентрация газа $n(x, t)$ на расстоянии x от стенки. Считать, что расстояние между стенками Δx много меньше x .



Ответ:
$$n(x,t) = \frac{n_0 \Delta x}{t} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mx^2}{2kTt^2}\right).$$

1.17. Идеальный газ находится в неравновесном состоянии, в котором все молекулы имеют одинаковые по модулю скорости v и изотропно распределены по направлениям движения. Найти распределение для проекций скоростей на некоторую ось. С его помощью рассчитать давление газа и число ударов молекул о единицу площади стенки. Концентрация газа n , масса молекулы m .

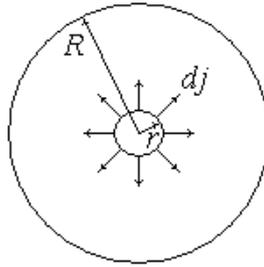
Ответ: $p = mnv^2/3, j = nv/4.$

1.18. Пленки некоторых нерастворимых органических кислот и спиртов можно моделировать идеальным двумерным газом. Считая, что такой идеальный газ находится в неравновесном состоянии, в котором все молекулы имеют одинаковые по модулю скорости v и изотропно распределены по направлениям движения в плоскости пленки, найти распределение для проекций скоростей на некоторую ось в плоскости пленки. С его помощью рассчитать давление газа и число ударов молекул о единичный отрезок границы пленки. Концентрация газа n , масса молекулы m .

Ответ: $p = mnv^2/2, j = nv/\pi.$

1.19. По плоской поверхности из источника радиусом r разлетаются молекулы массой m и оседают на окружности радиуса R , расположенной концентрически с источником. Мощность

источника j , распределение молекул по скоростям $dj \sim \exp(-v/v_0)dv$.
Найти давление на внешнюю окружность. Столкновениями молекул между собой пренебречь.



Ответ: $p = jmv_0/2\pi R$.

1.20. Найти число молекул, ударяющихся о единицу площади стенки за единицу времени и имеющих скорость между v и $v + dv$.

Ответ: $dj(v) = vdn(v)/4$.

1.21. Найти число молекул, ударяющихся о единицу площади стенки в единицу времени и имеющих компоненту скорости, перпендикулярную стенке, большую, чем некоторая заданная величина v_0 .

Ответ: $j_{v_x > v_0} = n \bar{v} / 4 \cdot \exp(-mv_0^2/2kT)$.

1.22. Как изменится радиус сферического объема, наполненного одноатомным газом, если при адиабатическом процессе число столкновений атомов газа о стенку объема увеличится в четыре раза?

Ответ: $R = R_0/2$, R_0 – начальный радиус.

1.23. Найти распределение по скоростям частиц газа, вылетающих из тонкостенного сосуда через малое отверстие (или падающих на стенку), а также полный поток этих частиц j , если температура газа в сосуде T , площадь отверстия s . Распределение записать в декартовой и сферической системах координат.

Ответ: $dw_j = nsv_x dw_M(\vec{v})/j$ ($dw_M(\vec{v})$ – распределение Максвелла),

$$dw_j(v_x, v_y, v_z) = (m/kT) \cdot \exp(-mv_x^2/2kT) v_x dv_x \times$$

$$\times dw_M(v_y) \cdot dw_M(v_z),$$

$$dw_j(v, \theta, \varphi) = 2(m/2kT)^2 \cdot \exp(-mv^2/2kT) v^3 dv \times$$

$$\times 2\cos\theta \sin\theta d\theta \cdot d\varphi/2\pi,$$

$$j = n \bar{v} s/4.$$

1.24. Рассчитать среднюю и среднеквадратичную скорость частиц в молекулярном пучке, а также их среднюю энергию. Не противоречит ли результат первому началу термодинамики?

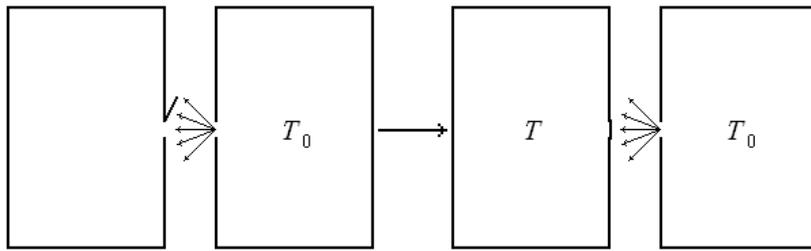
Ответ: $\bar{v}_j = (9\pi kT/8m)^{1/2}$, $\sqrt{v_j^2} = 2(kT/m)^{1/2}$, $\bar{\varepsilon}_j = 2kT$.

1.25. В сосуде находится идеальный газ. Масса молекулы равна m , температура газа – T . С какой скоростью молекулы наиболее часто ударяются о стенку?

Ответ: $v = \sqrt{3kT/m}$.

1.26. В адиабатически изолированный пустой сосуд через малое отверстие впускается порция газа из сосуда с температурой T_0 .

Какова будет температура газа в первом сосуде после размешивания?

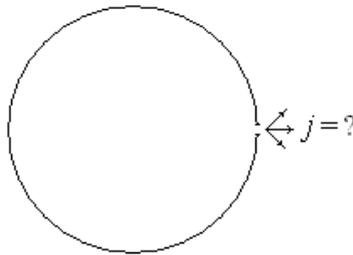


Ответ: $T = (1 + k/2C_V)T_0$.

1.27. На ракете установлен эффузионный двигатель. Поступающий газ нагревается до определенной температуры и истекает из малых отверстий, образуя реактивную тягу. Какова эффективность работы двигателя χ (сила тяги на единицу затраченной энергии), зависит ли она от свойств используемого газа? Какова удельная тяга эффузионного двигателя f (сила тяги на единицу расходуемой массы)?

Ответ: $\chi = 2k/(C_V + k/2)/\bar{v}$; $f = \pi\bar{v}/4$.

1.28. Найти плотность потока молекул двумерного идеального газа через малое отверстие.



Ответ: $j = n \bar{v} / \pi$.

1.29. На поверхности Луны лежит баллон с газом, из которого через малое отверстие бьет струя газа в вертикальном направлении. Каковы значения средней и наиболее вероятной высоты взлета молекул в поле тяжести Луны?

Ответ: $\bar{h} = \frac{kT}{mg}$, $h_m = 0$.

1.30. В стенке сосуда с идеальным газом на некоторое (небольшое) время открывается малое отверстие. Найти скорость центра масс вылетевших молекул. Температура газа T , масса молекулы m .

Ответ: $v_c = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}$.

1.31. Показать на основании кинетической теории, что при квазистатическом передвижении поршня в цилиндре, наполненном идеальным одноатомным газом, давление и объем газа связаны соотношением $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = 5/3$. Стенки цилиндра и поршень теплонепроницаемы.

1.32. Оценить время τ , за которое атмосфера может покинуть Землю. При оценке приближенно считать атмосферу однородным (по плотности) плоским слоем толщиной $h_{\text{эфф.}} \cong kT/mg$, $T \cong 300$ К, $g \cong 10$ м/с, $m = 5 \cdot 10^{-26}$ кг.

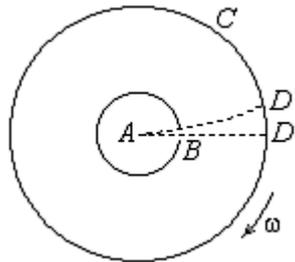
Указание. Молекула покидает атмосферу (плоский слой), когда ее тепловая скорость больше второй космической скорости $v_2 \cong 11$ км/с. За время существования атмосферы τ принять время, в течение которого плотность атмосферы уменьшится в e раз.

Ответ: $\tau = 4h_{\text{эфф.}}/\bar{v} \cdot \exp(mv_2^2/2kT) \sim 10^{319}$ с (время существования Вселенной $\sim 10^{17}$ с).

1.33. Найти распределение по скоростям электронов, вылетающих из нагретого плоского катода, предполагая, что внутри металла распределение максвелловское. Рассчитать плотность эмиссионного тока. Работа выхода из металла равна A .

Ответ: распределение вылетающих частиц не зависит от величины потенциального барьера и совпадает с распределением частиц, вылетающих из малого отверстия; $j = -en\bar{v}/4 \cdot \exp(-A/kT)$, где n – плотность электронов внутри металла.

1.34. Небольшой кусок серебра, расположенный в центре сферической полости (в точке A), под действием лазерного излучения испаряется. Атомы серебра через малое отверстие B вылетают из полости и попадают на сферический барабан C , конденсируясь на охлаждаемой пластинке DD' . Весь прибор вращается (аналог опыта Штерна). Каким скоростям атомов, попадающих на пластинку DD' , соответствует ее наибольшее почернение?

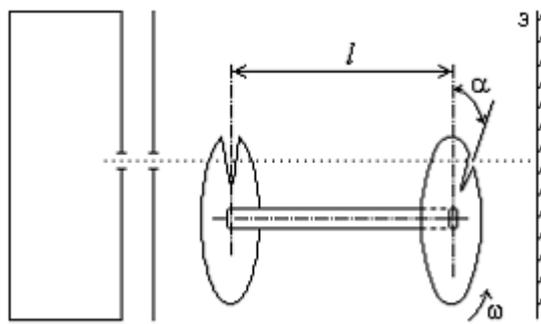


Ответ: $v = (5kT/m)^{1/2}$.

1.35. В эксперименте с молекулярным пучком ртути получена следующая зависимость числа частиц ΔN , попавших на экран за постоянное время $t \gg \omega^{-1}$, от скорости (определяемой как $v = \omega l/\alpha$):

v м/с = 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700.

$\Delta N \cdot 10^{-9} =$ 61 195 415 664 856 915 835 663 417 287 155 70.



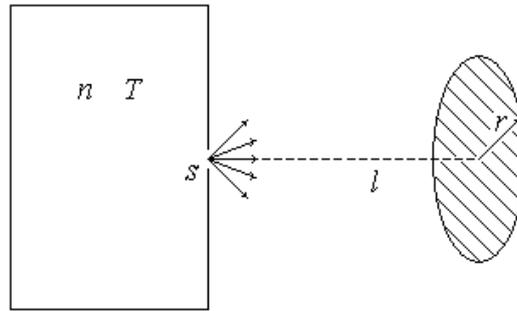
Построить график распределения молекул ртути по скоростям в печке. Какова приблизительно температура паров ртути в печке? В процессе измерений $\omega = \text{const}$, $l = \text{const}$. Обратите внимание на то, что интервал скоростей молекул, проходящих через вертушку, не остается постоянным.

Ответ: $T \approx 755 \text{ K}$.

1.36. В вакуумном диоде электроны, эммитируемые накаливаемым катодом, попадают в задерживающее поле анода. До анода доходят лишь достаточно быстрые электроны. Считая, что тепловые скорости электронов, покидающих катод, распределены по закону Максвелла с температурой $T = 1150 \text{ K}$, определить долю электронов, преодолевающих задерживающий потенциал $U = 0,2 \text{ В}$. Катодом является тонкая прямолинейная нить, натянутая по оси длинного цилиндрического анода.

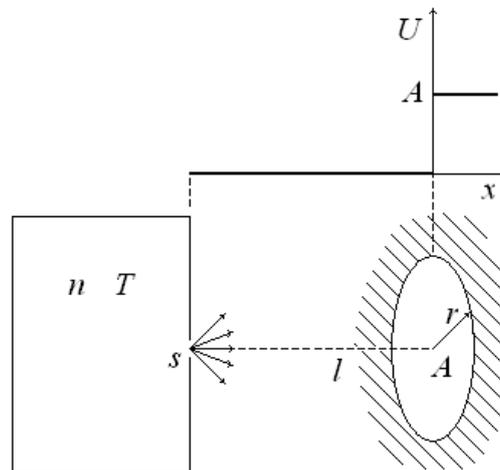
Ответ: $\Delta n/n = \exp(-eU/kT) \cong 0,135$.

1.37. Рассчитать силу, с которой вытекающий из малого отверстия в вакуум молекулярный пучок давит на пластинку радиусом r , расположенную на расстоянии l от отверстия и центрированную с ним. Площадь отверстия s .



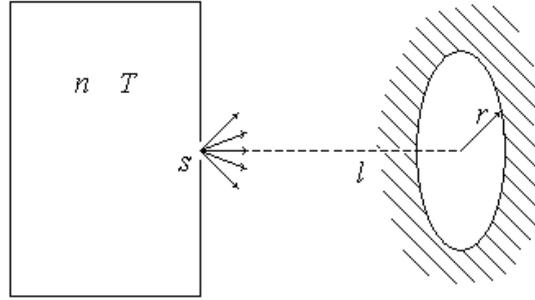
Ответ: $F = nkTs(1 - (1 + (r/l)^2)^{-3/2})$.

1.38. Рассчитать поток молекул через диафрагму с задерживающим потенциалом A . Молекулярный пучок образуется в результате истечения газа из сосуда через малое отверстие площадью s ; в сосуде T , n и m (масса молекулы) заданы. Диафрагма имеет радиус r , расположена на расстоянии l от отверстия и центрирована с ним.



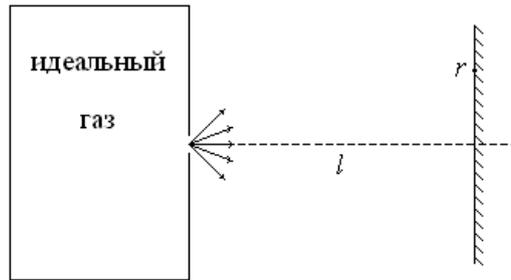
Ответ: $j = n \bar{v} s/4 \cdot \exp(-A/kT)(1 - \exp(-A(r/l)^2/kT)/(1 + (r/l)^2))$.

1.39. Найти поток частиц через диафрагму радиусом r , вылетающих из малого отверстия в сосуде с газом, расположенного на расстоянии l и центрированного с диафрагмой.



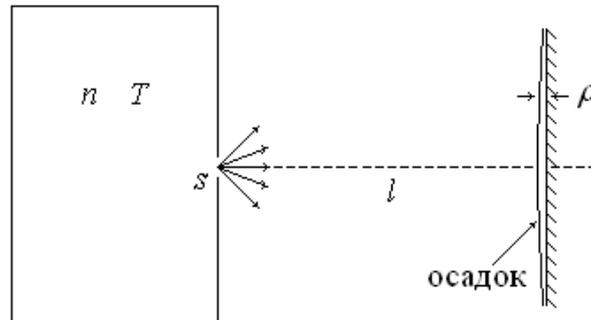
Ответ: $j = n \bar{v} s / 4 \cdot (1 + (l/r)^2)^{-1}$.

1.40. Сосуд с идеальным газом имеет маленькое отверстие, на расстоянии l от которого расположен холодный экран, улавливающий молекулы газа. Плоскость экрана перпендикулярна направлению пучка молекул. Найти среднее расстояние на экране от точки попадания молекул до центра пучка.



Ответ: $\bar{r} = \frac{\pi}{2} l$.

1.41. В сосуде находятся пары металла при температуре T (плотность частиц n). Вылетая через малое отверстие площадью s , атомы металла оседают на экране, поставленном параллельно плоскости отверстия на расстоянии l от него. Определить, с какой скоростью увеличивается плотность осадка в различных точках экрана.



Ответ: $\rho = n \bar{v} s / (4\pi l^2) \cdot (1 + (r/l)^2)^{-2}$.

1.42. На некотором расстоянии от малого отверстия, через которое происходит молекулярное истечение (эффузия) газа, расположен экран. Найти распределение давления по экрану, создаваемое пучком.

Ответ: $p = 3p_0 s / (2\pi l^2) \cdot (1 + (r/l)^2)^{-5/2}$.

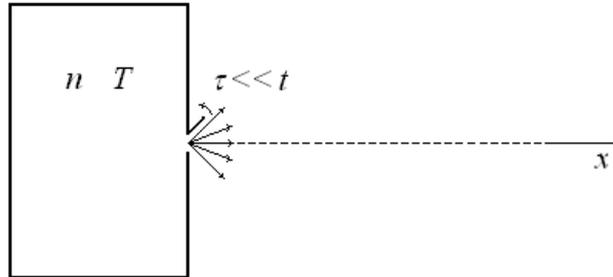
1.43. В тонкостенном сосуде содержатся пары ртути при температуре T и низком давлении p . Через небольшое круглое отверстие радиусом r атомы ртути вылетают из сосуда и конденсируются на охлаждаемой металлической пластине, расположенной параллельно стенке с отверстием на расстоянии l . Получить распределение поверхностной плотности ртути на пластине как функцию времени t .

Ответ: $\rho = 2pr^2 \cos^4 \theta / (\pi \bar{v} l^2) \cdot t (\exp(-\eta^2) -$

$$- \pi^{1/2} \eta (1 - \operatorname{erf}(\eta))/2), \quad \eta = 2l/(\pi^{1/2} \bar{v} t \cos \theta),$$

где θ – угол между нормалью к плоскости отверстия и радиус-вектором точки на собирающей пластине.

1.44. В боковой стенке сосуда с идеальным газом (концентрация – n , температура – T , масса молекулы – m) имеется отверстие площадью s , закрытое заслонкой.

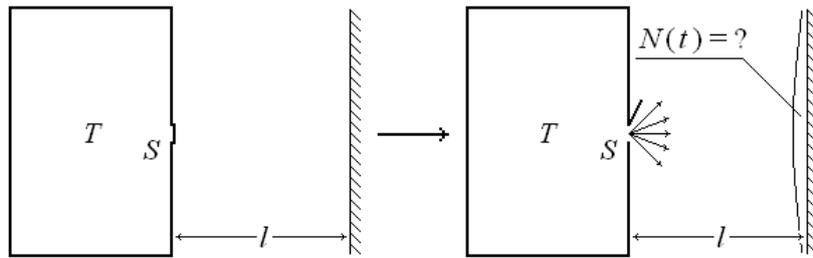


В момент времени $t = 0$ заслонку открывают на короткое время τ .
Найти функцию распределения вылетевших частиц по x в момент времени $t \gg \tau$. Как меняется со временем их средняя координата? Ось x направлена от сосуда.

Ответ: $dw(x) = m/kT \cdot \exp(-m/2kT \cdot (x/t)^2) \cdot x dx/t^2,$

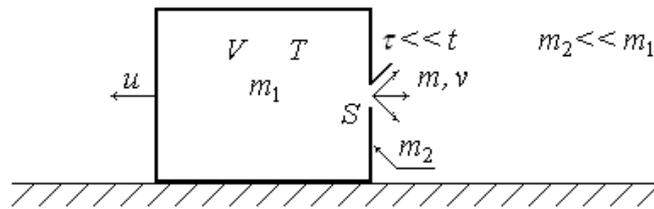
$$\bar{x} = (\pi kT/2m)^{1/2} t.$$

1.45. Перед закрытым малым отверстием площадью S в стенке сосуда на расстоянии l установлен экран, поглощающий молекулы пучка. На короткое время τ отверстие открывается. Как изменяется с течением времени полное число частиц, поглощаемых экраном? Плоскости экрана и отверстия параллельны друг другу.



Ответ: $N(t) = n \bar{v} / 4 \cdot S \tau \cdot \exp(-m(l/t)^2 / 2kT)$.

1.46. На гладкой поверхности находится сосуд объемом V с газом при температуре T .

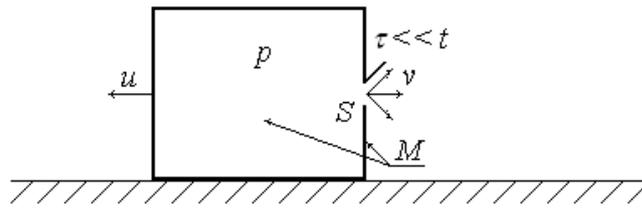


На короткое время τ в боковой стенке сосуда открывается малое отверстие площадью S . Какова скорость сосуда, если его массой можно пренебречь по сравнению с массой газа, а струя газа через отверстие параллельна поверхности? Газ идеальный, масса молекулы m . Вне сосуда вакуум.

Ответ: $u = \frac{S\tau}{2mV} kT$.

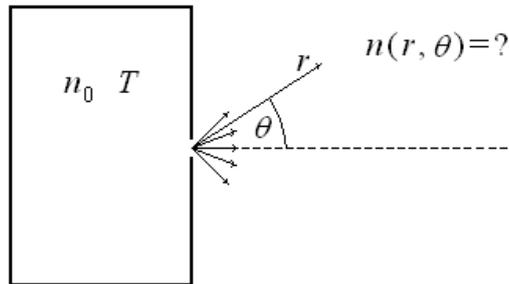
1.47. На гладкой поверхности находится сосуд с идеальным газом. Заслонка в боковой стенке сосуда на короткое время τ открывает малое отверстие площадью S . Какова будет скорость сосуда, если давление газа равно p , общая масса газа и сосуда M ?

Струя газа через отверстие параллельна поверхности? Вне сосуда вакуум.



Ответ: $u = pS\tau/2M$.

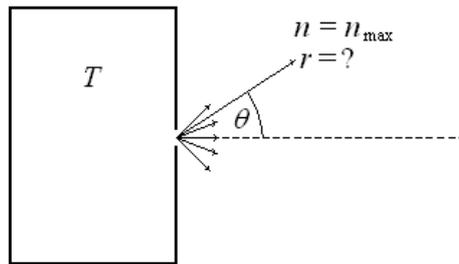
1.48. Из малого отверстия площадью s в стенке сосуда происходит стационарное истечение газа в вакуум.



В сосуде давление и температура поддерживаются постоянными. Найти распределение плотности частиц n в окружающем сосуд пространстве, если плотность их в сосуде n_0 .

Ответ: $n = n_0 s \cdot \cos\theta / (4\pi r^2)$, где r – расстояние до отверстия, θ – угол между \vec{r} и нормалью к отверстию.

1.49. В стенке сосуда с идеальным газом на малое время τ открывается малое отверстие. На каком расстоянии r от отверстия при заданном угле θ к нормали плотность числа молекул максимальна? Температуру T газа считать постоянной; масса молекулы m .



Ответ: $r = (kT/m)^{1/2}t$.

Распределение Больцмана (теория)

Из опыта известно, что газ в отсутствие внешнего поля равномерно распределен по объему сосуда. Следовательно, вероятность обнаружить молекулу в элементе объема $dV = dx dy dz$ около точки с координатами x, y, z равна

$$dw(x, y, z) = dV/V = dx dy dz/V.$$

В поле тяжести молекула газа обладает потенциальной энергией, равной

$$u = mgz,$$

где ось z направлена вертикально вверх. Вес газа в сосуде измеряется разностью давлений, оказываемых газом на дно и крышку сосуда:

$$P = (p(0) - p(h)) S.$$

С другой стороны, вес газа равен просто весу всех его молекул:

$$P = mgN = mg \int_0^h n(z) S dz.$$

Если газ идеальный и температура его не меняется с высотой, то из двух выражений для P следует формула

$$dn/dz = - mg/kT \cdot n.$$

Решение этого уравнения определяет изменение концентрации молекул с высотой:

$$n(z) = n(0) \exp(- mgz/kT).$$

Для давления получается барометрическая формула:

$$p(z) = p(0) \exp(- mgz/kT)$$

Вероятность обнаружить молекулу в слое толщиной dz на высоте z определяется долей таких молекул от общего числа:

$$dw(z) = dN(z)/N = n(z)Sdz/N = 1/Z \exp(- u(z)/kT) Sdz,$$

где u – потенциальная энергия молекулы; $Z = N/n(0)$ – нормировочный множитель.

В произвольной системе координат распределение вероятности имеет вид

$$dw(\vec{r}) = 1/Z \exp(-u(\vec{r})/kT) d\vec{r},$$

где $d\vec{r}$ – элемент объема конфигурационного пространства. Это и есть распределение Больцмана.

В случае «толстой» изотермической атмосферы потенциальная энергия молекулы равна

$$u = - \gamma mM/r.$$

С учетом сферической симметрии

$$dw(r) = 1/Z \exp(\gamma m M / k T r) 4\pi r^2 dr;$$

$$Z = \int_{r_0}^{\infty} \exp(\gamma m M / (k T r)) 4\pi r^2 dr.$$

Для концентрации молекул (если не задаваться вопросом о величине Z) из данного распределения следует формула

$$n(r) = N dw(\vec{r}) / d\vec{r} = n(r_0) \exp(\gamma m M / (k T) (r^{-1} - r_0^{-1})).$$

При $z = r - r_0 \ll r_0$ из нее получается распределение для тонкой атмосферы (барометрической формулы). Однако есть одна неприятность: интеграл в выражении для Z расходится. Нельзя равновесным образом распределить конечное число молекул в бесконечном пространстве. На больших высотах плотность газа очень мала, молекулы почти не сталкиваются, и там не устанавливается равновесное состояние.

Распределение Больцмана можно использовать, чтобы найти распределение взвесей в суспензиях и эмульсиях, с учетом того, что потенциальная энергия частицы взвеси равна

$$u = mgz(1 - \rho_0/\rho),$$

где ρ и ρ_0 – плотности вещества частицы и растворителя соответственно.

В химии и биологии нашло широкое применение центрифугирование как эффективный способ разделения близких по молекулярному весу или плотности веществ.

В лабораторной системе отсчета газ в центрифуге вращается как единое целое, следовательно, существует центростремительное ускорение, т. е. система не находится в равновесии и к ней нельзя применить распределение Больцмана. В системе же отсчета, связанной с центрифугой, объект исследования находится не только в тепловом, но и в механическом равновесии, и к нему можно применить указанное распределение. Но в этой системе отсчета на

частицы действует центробежная сила. Соответствующая потенциальная энергия частицы равна

$$u = -\int_0^r m\omega^2 r dr = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2.$$

Распределение Больцмана с учетом цилиндрической симметрии имеет вид

$$dw(r) = 1/Z \exp(m\omega^2 r^2 / 2kT) 2\pi r l dr,$$

где l – высота барабана центрифуги. Для концентрации частиц получается формула

$$n(r) = N dw(r) / (2\pi r l dr) = n(0) \exp(m\omega^2 r^2 / (2kT)).$$

Из формулы следует, что концентрация тяжелых частиц у боковой стенки центрифуги относительно выше, что используется для разделения смесей.

Распределение Больцмана (задачи)

1.50. Адиабатической называется атмосфера, в которой давление и плотность в зависимости от высоты удовлетворяют соотношению $p \cdot \rho^{-\gamma} = \text{const}$. Показать, что температура такой атмосферы линейно уменьшается с высотой. Найти температурный градиент для параметров земной атмосферы.

Ответ: $dT/dz = -(\gamma - 1)\mu g / \gamma R = \text{const}$;

для земной атмосферы $dT/dz = -9,8$ К/км.

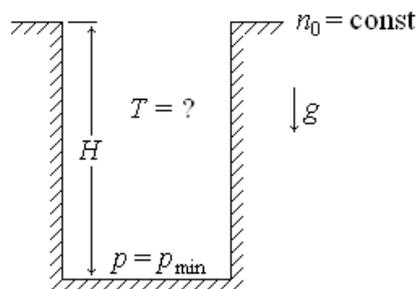
1.51. Возможно ли существование у небесного тела равновесной (больцмановской) атмосферы? Масса ядра тела и его атмосферы конечная.

Ответ: невозможно, потому что атмосфера рассеивается в мировом пространстве.

1.52. Сферический сосуд радиусом R наполнен идеальным газом. При какой температуре наиболее вероятное положение молекул газа находится на расстоянии $R/2$ от дна сосуда? Ускорение свободного падения g .

Ответ: $T = 3mgR/4k$.

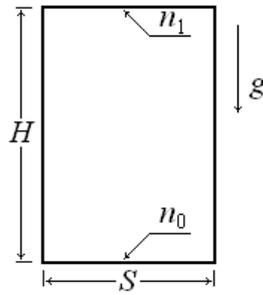
1.53. В земле вырыта яма глубиной H .



При какой температуре давление газа на дно ямы будет минимальным? Концентрацию газа на поверхности земли считать постоянной. Масса молекулы газа равна m .

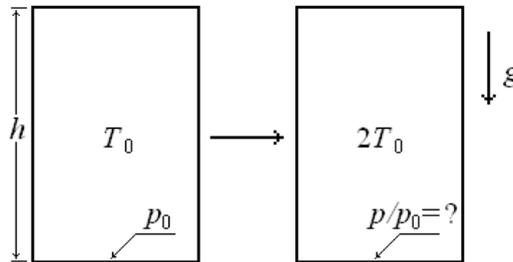
Ответ: $T = mgH/k$.

1.54. В столбе газа высотой H и сечением S (в поле тяжести) концентрация молекул у нижнего и верхнего оснований равна n_0 и n_1 соответственно. Найти полное число молекул газа в этом объеме.



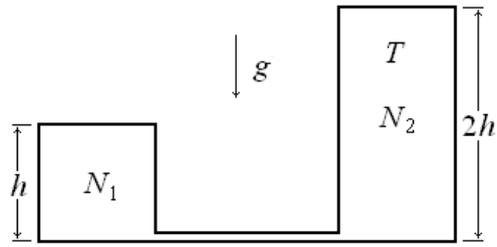
Ответ: $N = (n_0 - n_1)SH/\ln(n_0/n_1)$.

1.55. Идеальный газ находится в поле тяжести в закрытом цилиндрическом сосуде высотой h . Во сколько раз изменится давление газа на дно сосуда, если его температуру увеличить в два раза? T_0 – первоначальная температура газа, m – масса молекулы.



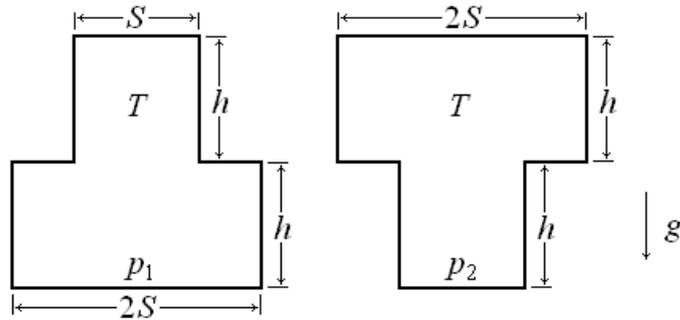
Ответ: $p_1/p_0 = 1 + \exp(-mgh/2kT_0)$.

1.56. Два цилиндрических сосуда одинакового радиуса, заполненные идеальным газом, имеют разную высоту h и $2h$ соответственно. Сосуды возле дна соединены узкой трубкой. Найти отношение числа частиц в сосудах в состоянии равновесия при температуре T .



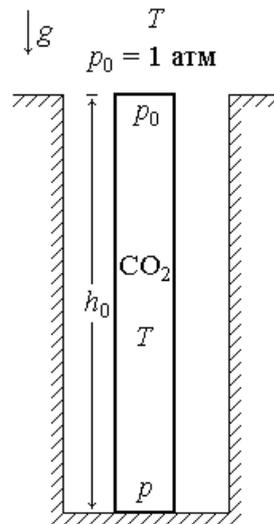
Ответ: $N_2/N_1 = 1 + \exp(-mgh/kT)$.

1.57. Два полых цилиндра с поперечными сечениями S и $2S$ и одинаковой высоты h соединены встык и образуют замкнутый сосуд. В его объем закачан идеальный газ при температуре T . Найти относительное изменение давления в нижней части сосуда при его переворачивании, возникающее при учете неравномерности распределения газа по высоте. Оценить его для условий Земли.



Ответ: $p_2/p_1 = 2 + \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) / 1 + 2\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$.

1.58. В шахту глубиной 7 км поставлена труба, в которую закачан углекислый газ CO_2 . Давление CO_2 в верхней части трубы равно 1 атм. Каков вес CO_2 ? Температуру считать постоянной и равной температуре наружного воздуха.



Ответ: $P = p_0 S (\exp(mgh_0/kT) - 1)$.

1.59. Как изменяется с высотой удельный объем v жидкости в поле тяжести? Температуру жидкости можно считать постоянной, ее изотермическая сжимаемость $\gamma = -v^{-1} \cdot (\partial v / \partial p)_T$ задана.

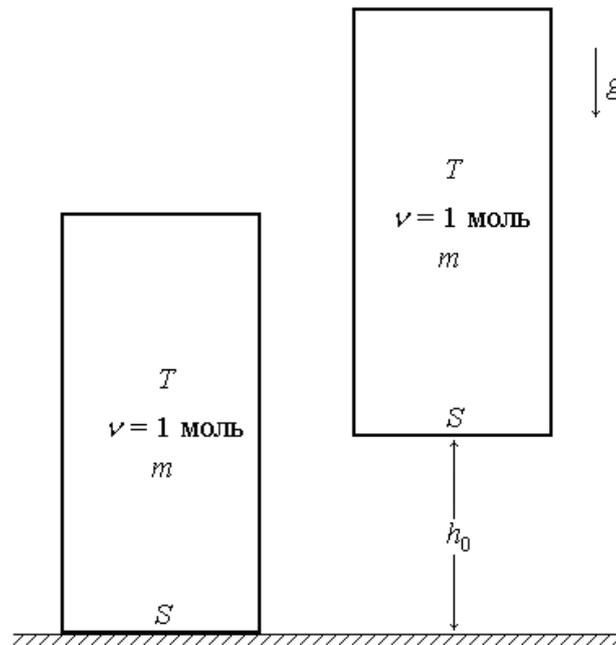
Ответ: $dv/dz = \gamma g$.

1.60. Рассчитать центр тяжести столба газа высотой h в поле тяжести Земли. Ускорение земного тяготения и температуру считать постоянными.

Ответ: $z_c = kT/mg - h / (\exp(mgh/kT) - 1)$.

1.61. Два одинаковых очень высоких сосуда установлены вертикально так, что основание одного находится выше основания другого на величину h_0 . В каждом сосуде находится один моль

идеального газа с массой молекул m . Сколько газа нужно добавить в один из сосудов, чтобы потенциальные энергии газов сравнялись?



Температура газов поддерживается одинаковой и постоянной. Ускорение свободного падения g не зависит от высоты.

Ответ: $\Delta\nu = \nu \frac{mgh_0}{kT}$.

1.62. Газ находится в поле тяжести. На какой высоте суммарная потенциальная энергия молекул в единице объема будет наибольшей? Масса молекулы равна m , температура газа – T , ускорение свободного падения – g .

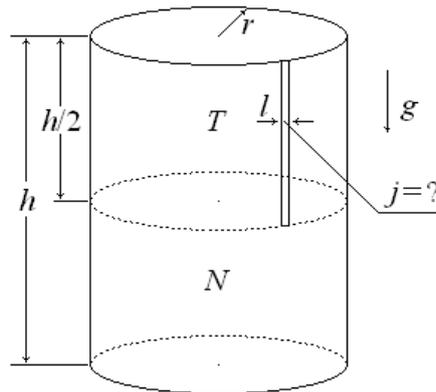
Ответ: $h = kT/mg$.

1.63. Найти избыточную теплоемкость, которую должен иметь газ, находящийся в поле тяжести. Рассмотреть случаи:

- бесконечный по высоте столб газа;
- столб конечной высоты h .

Ответ: $\Delta c_V = Nk(1 - a^2 \cdot \exp(a)/(\exp(a) - 1)^2)$, где $a = mgh/kT$.

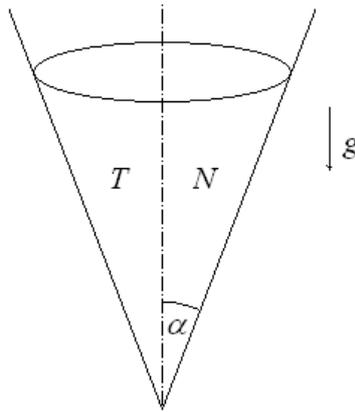
1.64. Газ находится в цилиндрическом сосуде высотой h и радиусом r в однородном поле тяжести при температуре T . Масса одной молекулы равна m . В верхней половине боковой стенки цилиндра имеется очень узкая щель высотой $h/2$ и шириной l .



Найти число частиц, вылетающих через щель из сосуда за 1 с, если количество молекул в сосуде поддерживается постоянным и равным N . Газ во время процесса истечения остается в равновесии.

Ответ: $j = N\bar{v} l/4s \cdot (\exp(mgh/2kT) + 1)^{-1}$.

1.65. Найти давление газа в вершине бесконечной воронки, стоящей вертикально в однородном поле силы тяжести, если число молекул в воронке равно N , а угол раствора конуса 2α . Какова средняя потенциальная энергия частицы газа?



Ответ: $p = N(mg)^3/(kT)^2/(2\pi g^2 \alpha)$, $\bar{u} = 3kT$.

1.66. На какой высоте содержание водорода в воздухе удваивается по сравнению с содержанием углекислого газа? Среднюю по высоте температуру считать равной 40°C .

Ответ: $h \approx 4,36$ км.

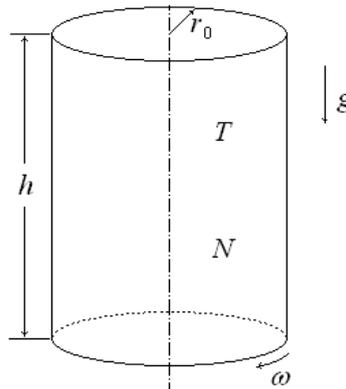
1.67. Найти распределение одного моля газа в центрифуге, используя лабораторную систему отсчета. Вычислить энергию вращательного движения газа. Заданы: радиус центрифуги r_0 , ее высота h , угловая скорость ω , температура газа T .

Ответ: $n = N_A \alpha / (\pi h) \cdot \exp(\alpha r^2) / (\exp(\alpha r_0^2) - 1)$;

$$E = N_A kT (\alpha r_0^2 - 1) / (1 - \exp(-\alpha r_0^2)), \quad \alpha = m\omega^2 / 2kT.$$

1.68. Найти распределение плотности газа по радиусу и среднюю «потенциальную» энергию частицы во вращающейся с угловой скоростью ω цилиндрической центрифуге. Внешний радиус центрифуги r_0 , внутренний равен нулю, высота ее h . В центрифуге

находится N частиц. При решении задачи воспользоваться распределением Больцмана. Сравнить полученные результаты с решением предыдущей задачи.



Ответ: $\rho = mN\alpha/(\pi h) \cdot \exp(\alpha r^2)/(\exp(\alpha r_0^2) - 1)$;

$$\bar{u} = kT(1 - \alpha r_0^2/(1 - \exp(-\alpha r_0^2))), \alpha = m\omega^2/2kT.$$

1.69. В центрифуге радиусом r , вращающейся с угловой скоростью ω , находится смесь двух газов с молекулярными весами μ_1 и μ_2 и количеством молекул N_1 и N_2 . Найти отношение концентраций газов у внешней стенки и на оси центрифуги. Сделать оценки для смесей $\text{H}_2 - \text{D}_2$ и $\text{U}^{235} - \text{U}^{238}$; $r = 10$ см, $\omega = 10^4$ с $^{-1}$.

Ответ: $n_{\text{D}_2}(0)/n_{\text{H}_2}(0) = 0,90 N_2/N_1$, $n_{\text{D}_2}(r)/n_{\text{H}_2}(r) = 1,10 N_2/N_1$;

$$n_{\text{U}^{238}}(0)/n_{\text{U}^{235}}(0) = 0,56 N_2/N_1,$$

$$n_{\text{U}^{238}}(r)/n_{\text{U}^{235}}(r) = 1,01 N_2/N_1.$$

1.70. Во вращающейся центрифуге находится смесь изотопов водорода D_2 и H_2 в пропорции $N_{D_2} / N_{H_2} = \beta$. Во сколько раз можно увеличить соотношение компонент в смеси, если ее отбор производить с боковой поверхности центрифуги?

Ответ: $(N_{D_2} / N_{H_2})_{\max} = 2\beta$.

1.71. Найти распределение микроскопических частиц радиусом $r = 10^{-4}$ см (плотность их вещества $\rho = 0,999$ г/см³) в среде с плотностью $\rho_0 = 1$ г/см³. Изобразить это распределение графически. Оценить толщину слоя, в которой сосредоточены частицы.

Ответ: $n = n_0 \cdot \exp(-(\rho_0 - \rho)4\pi r^3 gz/3kT)$, $\Delta z \approx 10^{-2}$ см.

1.72. Найти равновесное распределение эмульсионных частиц по их величине на высоте z в сосуде, если в заполняющей его эмульсии доля частиц с объемом V задана распределением

$$\rho(V) = (\alpha/\pi)^{1/2} \cdot \exp(-\alpha(V - \bar{V})^2).$$

Каков наиболее вероятный размер частиц на этой высоте? Считать, что сосуд имеет бесконечную высоту. Удельный вес жидкости и вещества частиц γ_0 и γ .

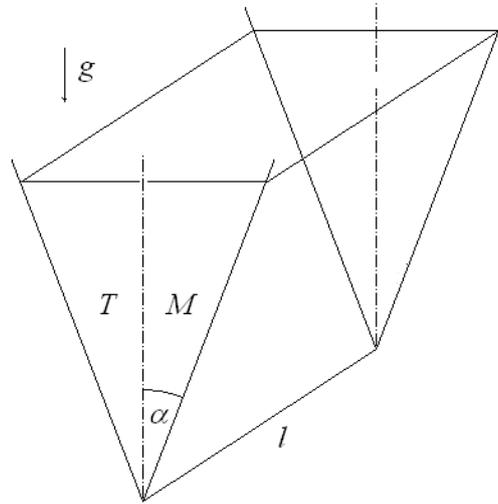
Ответ: $\rho(V, z) = \rho(V)(\gamma - \gamma_0)V/kT \cdot \exp(-(\gamma - \gamma_0)Vz/kT)$,

$$V_m = ((V_0^2 + 2/\alpha)^{1/2} + V_0)/2, \quad V_0 = \bar{V} - (\gamma - \gamma_0)z/(2\alpha kT).$$

1.73. Пыль в атмосфере состоит из частиц массой m_1 и m_2 (плотность ρ вещества одинакова). Внизу концентрация пылинок первого вида в два раза меньше, чем второго вида. На какой высоте концентрации пылинок сравниваются? Изменением плотности воздуха ρ_0 на этих высотах пренебречь.

Ответ: $H = kT \cdot \ln 2 / ((m_2 - m_1)g(1 - \rho_0/\rho))$.

1.74. Тонкая взвесь, содержащая частицы одинакового размера объемом V с плотностью вещества ρ , налита в высокий сосуд, имеющий форму клина с углом раствора 2α , обращенным вершиной к поверхности земли.



Найти плотность частиц у острия клина, если плотность жидкости ρ_0 , длина сосуда l , а масса всех частиц в сосуде M . Рассчитать среднюю потенциальную энергию частицы.

Ответ: $n = M / (2\rho V l \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot ((\rho - \rho_0)gV/kT)^2$, $\bar{u} = 2kT$.

1.75. Потенциальная энергия молекул газа в некотором центральном поле зависит от расстояния r до центра поля как $u(r) = Br^2$, где B – положительная постоянная. Температура газа T , концентрация молекул в центре поля n_0 . Найти:

- 1) относительное число молекул, находящихся в слое $r, r + dr$;
- 2) полное число всех молекул;
- 3) наиболее вероятное расстояние молекул от центра поля.

Ответ: 1) $dN/N = \left(\frac{B}{\pi kT}\right)^{3/2} \exp(-Br^2/kT) 4\pi r^2 dr;$

2) $N = n_0 \left(\frac{\pi kT}{B}\right)^{3/2};$ 3) $r_{\max} = \sqrt{kT/B}.$

1.76. Газ находится в поле с потенциальной энергией $u = -B\cos\theta$ ($B = \text{const}$, θ – угол между осью молекулы и некоторым выделенным направлением). Получить распределение молекул по направлениям и вычислить среднее значение потенциальной энергии молекулы, считая, что θ меняется непрерывно в интервале от 0 до π .

Ответ: $dW(\theta, \varphi) = \frac{B}{2kT \cdot \text{sh}(B/kT)} \exp(B\cos\theta/kT) \sin\theta d\theta \frac{d\varphi}{2\pi};$

$$\bar{u} = kT - B \text{ctg}(B/kT).$$

1.77. Примесный атом находится в межузельной полости в кристалле с потенциалом $u(r) = ar^4$ (ангармонический потенциал). Рассчитать его среднюю энергию.

Ответ: $\bar{\varepsilon} = 9kT/4.$

1.78. Разреженный газ из молекул с дипольным моментом p находится во внешнем электрическом поле E при температуре $T = pE/k$. Какая доля молекул имеет угол между векторами дипольного момента и поля, меньший $\pi/2$?

Ответ: $\Delta W = \frac{e - 1}{e - e^{-1}}.$

1.79. Найти среднюю энергию взаимодействия молекулы, обладающей дипольным моментом p , с зарядом q , отстоящим от нее на большом расстоянии r .

Ответ: $\bar{u} = - (pq)^2 / (3kT r^4)$.

1.80. Газ, молекулы которого обладают постоянным собственным дипольным моментом p , находится в электрическом поле напряженности E . Найти поляризацию газа P (суммарный дипольный момент всех молекул в единице объема). Рассмотреть предельные случаи слабых и сильных электрических полей.

Ответ: $P = npL(\alpha)$,

$$L(\alpha) = \text{cth}(\alpha) - \alpha^{-1} - \text{функция Ланжевена, } \alpha = pE/kT;$$

$$P = np^2/(3kT) \cdot E \text{ при } \alpha \ll 1, \quad P = np \text{ при } \alpha \gg 1.$$

1.81. Над плоским бесконечным подогреваемым катодом имеется электронное облако. Найти распределение плотности электронов в пространстве с учетом потенциала, создаваемого самими электронами. Граничные условия: на бесконечности плотность электронов n и поле E равны нулю, потенциал катода принят за нуль. Плотность электронов вблизи катода n_0 .

Ответ: $n = n_0 / (1 + az)^2$;

$$\text{потенциал } \varphi = -2kT/e \cdot \ln(1 + az), \quad a = (2\pi e^2 n_0 / kT)^{1/2}.$$

Теория теплоемкости. Распределение энергии по степеням свободы (теория)

Распределения молекул по координатам и скоростям не зависят друг от друга. Поэтому вероятность того, что молекула находится в

данном положении и одновременно имеет данную скорость, в соответствии с теоремой умножения вероятностей равна

$$dw(\vec{r}, \vec{v}) = dw_B(\vec{r})dw_M(\vec{v}) = 1/Z \exp(-\varepsilon/kT) d\vec{r} d\vec{v},$$

$$Z = Z_M Z_B = \int \exp(-mv^2/2kT) d\vec{v} \int \exp(-u/kT) d\vec{r},$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + u$ – полная энергия молекулы. Это распределение носит название распределения Максвелла – Больцмана. Оно связано только с поступательным движением молекулы и дает достаточную информацию лишь в случае одноатомного газа с нулевыми электрическими и магнитными моментами.

В более общем случае состояние молекулы вполне характеризуется заданием ее обобщенных координат q_i и импульсов p_i и изображается в пространстве этих переменных (фазовом пространстве) точкой. Распределение, применимое и к другим движениям молекулярной системы, имеет вид, сходный с распределением Максвелла – Больцмана:

$$dw = 1/Z \exp(-\varepsilon/kT) d\Gamma,$$

где $d\Gamma = d\vec{q} d\vec{p}$. Это каноническое распределение Гиббса. Оно обобщается на случай квантовых систем. Вероятность найти квантовую систему в состоянии с энергией ε_i равна

$$w_i = 1/Z \cdot \exp(-\varepsilon_i/kT) \Omega_i(\varepsilon_i),$$

где $\Omega_i(\varepsilon_i)$ – число различных квантовых состояний системы с энергией ε_i (статистический вес, кратность вырождения уровня энергии). Нормировочная постоянная Z (статистическая сумма) находится суммированием по всему спектру энергии системы:

$$Z = \sum_i \exp(-\varepsilon_i/kT) \Omega_i.$$

Теплоемкость идеального газа. Молярная теплоемкость газа вычисляется по известной средней энергии молекулы:

$$c_V = N_A \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial T}.$$

Средняя энергия молекулы связана со статическим интегралом (суммой) Z формулой

$$\bar{\varepsilon} = kT^2 \partial \ln Z / \partial T.$$

Теоретическое предсказание теплоемкости одноатомных газов хорошо подтверждается на опыте: был установлен закон равномерного распределения энергии по степеням свободы атомов.

Молекула двухатомных газов имеет шесть степеней свободы: три поступательных, две вращательных и одну колебательную. Энергия поступательного движения состоит из трех квадратичных слагаемых (соответствующих трем степеням свободы):

$$\varepsilon_n = \sum_{i=x,y,z} p_i^2 / 2m.$$

Статистическая сумма равна

$$Z = V \left(\sqrt{2\pi mkT} \right)^3,$$

так что $\bar{\varepsilon}_n = 3/2kT$ и $c_V = 3/2R$. На каждую степень свободы поступательного движения молекулы приходится энергия $kT/2$.

Энергия вращательного движения состоит из двух квадратичных слагаемых (для двух степеней свободы):

$$\varepsilon_{\text{вр}} = M_1^2/2J + M_2^2/2J,$$

где M_i ($i = 1, 2$) – моменты вращения вокруг осей, перпендикулярных оси молекулы и между собой; θ и φ – углы в сферической системе координат, определяющие ориентацию оси молекулы. Момент инерции J считается постоянным.

Статистическую сумму можно вычислить, пользуясь тем или иным выражением для $\varepsilon_{\text{вр}}$:

$$Z = 4\pi \left(\sqrt{2\pi JkT} \right)^2.$$

Средняя энергия вращательного движения равна $\varepsilon_{\text{вр}} = kT$, на каждую степень свободы приходится по $kT/2$; $c_V = R$.

Энергия колебательного движения состоит из двух слагаемых (кинетической и потенциальной энергий), а степень свободы одна:

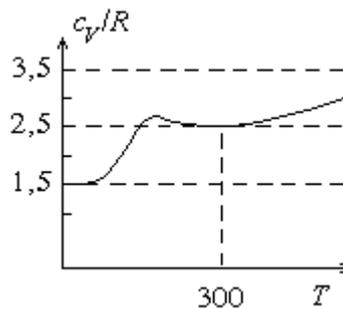
$$\varepsilon_{\text{кол}} = p^2/2\mu + \chi q^2/2.$$

Здесь q – отклонение расстояния между атомами от равновесного значения a ; рассматриваются малые колебания: $|q| \ll a$ (приближение гармонического осциллятора); сила, стремящаяся вернуть атомы в равновесное положение, равна $F = -\chi q$; μ – приведенная масса. Статистическая сумма осциллятора равна

$$Z = 2\pi \sqrt{\mu/\chi} kT = kT/\nu,$$

где ν – частота колебаний. Средняя энергия осциллятора $\varepsilon_{\text{кол}} = kT$ и теплоемкость $c_V = R$. Для колебательного движения на одну степень свободы приходится энергия вдвое большая. Возникшее несоответствие закону равнораспределения было устранено путем изменения его трактовки: каждое квадратичное слагаемое энергии имеет среднее значение, равное $kT/2$.

В соответствии с законом равнораспределения теплоемкость двухатомных газов должна быть равна $7R/2$. Однако эксперимент показал, что столь большой теплоемкостью двухатомные газы не обладают. Более того, ее значение зависит от температуры. Эта зависимость теплоемкости показана на рисунке.



При высоких температурах теплоемкость хотя и не достигает теоретического значения из-за диссоциации молекул, но стремится к нему. При понижении температуры теплоемкость падает и стремится к значению $5R/2$ при комнатной температуре. При дальнейшем понижении температуры теплоемкость не меняется, пока не начинает сказываться межмолекулярное взаимодействие. Однако для водорода эксперимент показал, что при температурах ниже 80 К теплоемкость становится близкой к $3R/2$. Водород при очень низких температурах имеет теплоемкость такую же, как и одноатомный газ. Колебательное и вращательное движения молекул водорода оказываются замороженными. При комнатной температуре заморожено колебательное движение.

Закон равнораспределения получен в предположении, что молекула может обладать любой энергией не только поступательного, но и вращательного и колебательного движений. Соответственно этому обобщенные координаты и импульсы, характеризующие состояние молекулы, пробегают непрерывный ряд значений (а точки фазового пространства, отвечающие состояниям системы, непрерывным образом заполняют его). Однако экспериментальное изучение атомных систем показало, что существенной их особенностью является дискретный характер

устойчивых состояний. Оказалось, что энергия атомов и молекул может принимать только дискретный ряд значений.

Теория теплоемкости. Распределение энергии по степеням свободы (задачи)

1.82. Пользуясь законом равнораспределения энергии по степеням свободы, вычислить молярную теплоемкость n -атомного газа. Рассмотреть случаи: а) линейных и б) нелинейных молекул.

Ответ: а) $c_V = (6n - 5)R/2$; б) $c_V = 3(n - 1)R$.

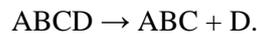
1.83. В закрытом сосуде находится один моль идеального газа трехатомных нелинейных молекул ABC. Под действием света происходит полная диссоциация газа: $ABC \rightarrow A + BC$. Найти суммарную теплоемкость газа в сосуде до и после воздействия света. Температура газа намного превышает характеристические колебательные температуры молекул ABC и BC.

Ответ: $c_{V1} = 6R$, $c_{V2} = 5R$.

1.84. Поглощение фотонов приводит к диссоциации α -части молекул двухатомного газа. Какова температура газа, если остаток энергии после диссоциации равен $\Delta\varepsilon$ ($h\nu = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, ε_0 – энергия связи атомов), а начальная температура газа была T_0 ?

Ответ: $T = (5T_0 + 2\alpha\Delta\varepsilon/k)/(5 + \alpha)$.

1.85. Линейная четырехатомная молекула ABCD под действием света распадается на нелинейную молекулу ABC и атом D:



Энергия кванта света равна энергии диссоциации. Найти температуру газа после установления равновесия, считая, что она

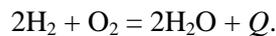
превышает характеристические колебательные температуры молекул ABCD и ABC.

Ответ: $T = 19T_0/15$.

1.86. В адиабатически изолированном объеме находится двухатомный газ A_2 при температуре $T_0 > D/k$ (D – энергия диссоциации молекулы). В последующей спонтанной диссоциации газ полностью диссоциировал. Найти конечную температуру газа. Во сколько раз возросло давление?

Ответ: $T = 7T_0/6 - D/3k, p/p_0 = 2T/T_0$.

1.87. В адиабатически изолированной бомбе осуществляется взрыв гремучего газа:



Рассчитать конечную температуру паров воды, если тепловой эффект реакции $Q = 113$ ккал/моль, а начальная температура была комнатной.

Ответ: $T = 5T_0/8 + Q/12k$.

1.88. Сосуд заполнен смесью двухатомного и трехатомного газов. Трехатомный газ состоит из нелинейных молекул. После размораживания всех колебательных степеней свободы теплоемкость смеси увеличилась в 1,5 раза. Найти отношение количеств молекул газов в сосуде.

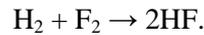
Ответ: $N_1/N_2 = 6$.

1.89. Сосуд заполнен смесью двух трехатомных газов. Один газ состоит из линейных молекул, другой – из нелинейных. После нагрева и размораживания всех колебательных степеней свободы

теплоемкость смеси увеличилась в 2,5 раза. Найти отношение количеств молекул газов в сосуде.

Ответ: $N_1/N_2 = 6$.

1.90. В теплоизолированном сосуде находится смесь из двух молей H_2 и одного моля F_2 при температуре T_0 . Найти температуру газа после того, как полностью прошла реакция



Считать, что при низких температурах теплоемкость двухатомного газа равна $c_V = \frac{5}{2}R$, а при высоких — $c_V = \frac{7}{2}R$. Энергия разрыва связи в молекуле H_2 равна ε_1 , в молекуле F_2 — ε_2 , в молекуле HF — ε_3 .

Ответ: $T = \frac{5}{7}T_0 - 2\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)N_A}{21R}$.

1.91. Получить соотношение

$$\delta_\varepsilon = (kT^2 c_V)^{1/2} / \bar{\varepsilon},$$

связывающее относительную флуктуацию δ_ε энергии системы с ее теплоемкостью c_V и средней энергией $\bar{\varepsilon}$.

1.92. Одним из простейших и весьма чувствительных приборов является легкое зеркальце, подвешенное на тонкой кварцевой нити. Чувствительность прибора определяется возможностью регистрации малых углов поворота зеркальца при однократном измерении. Найти предел чувствительности такого прибора. Модуль кручения нити $a = 10^{-13}$ ед. СИ. $T = 300$ К.

Ответ: $\varphi_{\min} \approx (kT/a)^{1/2} \approx 2 \cdot 10^{-4}$.

1.93. Предел чувствительности пружинных весов ограничивается тепловым движением молекул механизма весов и воздуха. Найти малую массу m , которая может быть определена при однократном взвешивании на пружинных весах, если жесткость пружины равна χ , а температура – T .

Ответ: $m \approx (\chi k T)^{1/2} / g$.

1.94. Найти энергию и теплоемкость ультрарелятивистского газа (энергия и импульс частицы связаны соотношением $\varepsilon = cp$).

Ответ: $U = 3NkT$, $c_V = 3Nk$.

1.95. В одном из параллельных миров кинетическая энергия частицы связана с импульсом по закону $E = \alpha p^3$, где $\alpha = \text{const} > 0$. Найти термическое и калорическое уравнения состояния одноатомного идеального газа в этом мире. Мир является трехмерным.

Ответ: $p = \frac{N}{V} kT$, $U = \frac{1}{2} NkT$.

1.96. Рассчитать теплоемкость системы с плотностью уровней $g(E) = cE^n$, $0 \leq E \leq \infty$.

Ответ: $c_V = (n + 1)k$.

1.97. Энергетический спектр системы состоит из двух зон. Плотность уровней в первой зоне ($0 \leq E \leq E_0$) равна ρ_0 , во второй ($E_0 \leq E \leq \infty$) равна ρ_1 . При какой температуре вероятности обнаружения системы в обеих зонах равны?

Ответ: $T = \frac{E_0}{k \ln(1 + \rho_1 / \rho_0)}$.

1.98. Энергетический спектр системы состоит из двух зон с разными плотностями уровней энергии: $\rho(E) = \rho_1$ при $-E_0 < E < 0$; $\rho(E) = \rho_2$ при $0 < E < E_0$, и области вне зон, где $\rho(E) = 0$. Найти среднюю энергию системы. Определить температуру, при которой вероятности обнаружить систему в одной и другой зонах равны между собой.

$$\text{Ответ: } \bar{E} = kT \left(1 - \alpha \frac{\rho_1 e^\alpha + \rho_2 e^{-\alpha}}{(\rho_1 e^\alpha + \rho_2)(1 - e^{-\alpha})} \right), \quad \alpha = \frac{E_0}{kT};$$

$$T_0 = \frac{E_0}{k \ln(\rho_2 / \rho_1)}.$$

1.99. Найти среднюю длину l и коэффициент теплового расширения $\gamma = a^{-1}(\partial l / \partial T)$ двухатомной молекулы с учетом ангармоничности колебаний. Получить также соответствующую поправку к теплоемкости. Потенциальная энергия имеет вид $u = \chi q^2 / 2 - \alpha q^3 + \beta q^4$. Равновесное расстояние между ядрами равно a .

$$\text{Ответ: } l = a + 3\alpha kT / \chi^2, \quad \gamma = 3\alpha k / \chi^2 a,$$

$$\Delta c_V = -6\beta k^2 T / \chi^2.$$

1.100. Вычислить характеристические температуры $\theta = \Delta E / k$ для колебаний атомов в молекулах H_2 , O_2 и HCl , если соответствующие частоты равны $\nu_{\text{H}_2} = 12,7 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\nu_{\text{O}_2} = 4,7 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\nu_{\text{HCl}} = 8,75 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, ΔE – минимальная энергия возбуждения молекул, k – постоянная Больцмана.

$$\text{Ответ: } \theta_{\text{H}_2} = 6100 \text{ К}, \quad \theta_{\text{O}_2} = 2250 \text{ К}, \quad \theta_{\text{HCl}} = 4200 \text{ К}.$$

1.101. Вычислить характеристические температуры для вращения молекул H_2 и O_2 , если моменты инерции этих молекул имеют значения: $I_{\text{H}_2} = 0,47 \cdot 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $I_{\text{O}_2} = 19,2 \cdot 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

Ответ: $\theta_{\text{H}_2} = 170 \text{ К}$, $\theta_{\text{O}_2} = 4,2 \text{ К}$.

1.102. Характеристическая температура колебательного движения молекул O_2 равна 2250 К. Какой вклад в молярную теплоемкость вносит это движение при температуре 300 К? Какая доля всех молекул будет находиться на первом возбужденном уровне энергии? Как изменятся результаты, если температура будет 600 К?

Ответ: $c_V = 0,033 R$, $w = 6 \cdot 10^{-4}$ при $T = 300 \text{ К}$;

$c_V = 0,353 R$, $w = 0,024$ при $T = 600 \text{ К}$.

1.103. Вычислить по квантовой теории молярные теплоемкости c_V и c_p углекислого газа при 0°С . Молекула CO_2 линейная: положения равновесия ее атомов находятся на одной прямой. Момент инерции молекулы $I = 7,2 \cdot 10^{-39} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, частоты ее нормальных колебаний: $\nu_1 = \nu_2 = 667,3 \text{ см}^{-1}$, $\nu_3 = 1388,3 \text{ см}^{-1}$, $\nu_4 = 2349,3 \text{ см}^{-1}$.

Ответ: $c_V = 3,32 R$, $c_p = 4,32 R$.

1.104. Двумерный гармонический осциллятор имеет дискретный спектр энергии: $\varepsilon_n = h\nu(n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Уровни его $(n + 1)$ –кратно вырожденные. Найти энергию и теплоемкость системы, состоящей из N таких независимых осцилляторов.

Ответ: $E = N h \nu \text{cth}(h\nu/2kT)$, $c_V = 2Nk (h\nu/2kT)^2 / \text{sh}^2(h\nu/2kT)$.

1.105. Молекула окиси углерода CO имеет длину связи $a = 1,13 \text{ \AA}$, массы атомов C и O: $m_1 = 2 \cdot 10^{-23} \text{ г}$ и $m_2 = 2,7 \cdot 10^{-23} \text{ г}$. Каково квантовое число наиболее заселенного вращательного уровня энергии при $T = 300 \text{ К}$?

Указание. Двухатомную молекулу CO считать жестким квантовым ротатором. Уровни энергии ротатора определяются квантовым числом j : $\varepsilon_j = h^2/2I \cdot j(j+1)$, $j = 0, 1, 2 \dots$; каждый уровень $(2j+1)$ кратно вырожден (h – постоянная Планка, деленная на 2π).

Ответ: $l_{н.з.} = 7$.

1.106. Рассматривая двухатомную молекулу как жесткий квантовый ротатор, рассчитать среднюю энергию и теплоемкость вращательного движения в случае высоких и низких температур. Показать, что кривая $c_V(T)$ имеет максимум.

Указание. При вычислении статистической суммы в случае высоких температур воспользоваться формулой суммирования Эйлера – Маклорена:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) \cong \int_0^{\infty} f(j) dj + f(0)/2 - f'(0)/12 + f'''(0)/720 - f^{(5)}(0)/30240.$$

Ответ: $\bar{\varepsilon} = 3(h^2/I) \cdot \exp(-h^2/IkT)$,

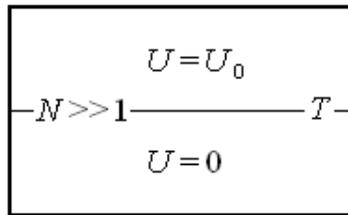
$$c_V = 3R (h^2/IkT)^2 \cdot \exp(-h^2/IkT) \text{ при } h^2/I \gg kT;$$

$$\bar{\varepsilon} = kT - (h^2/2I)/3 - (h^2/2I)^2/(45kT),$$

$$c_V = R (1 + (h^2/2IkT)^2/45) \text{ при } h^2/I \ll kT.$$

1.107. N молекул ($N \gg 1$) идеального газа находятся в сосуде, в одной половине которого потенциальная энергия молекулы равна

нулю, а в другой половине – U_0 . Температура газа равна T . Найти разность между числами молекул в половинах сосуда.



Ответ: $N_1 - N_2 = N \frac{1 - \exp(-U_0/kT)}{1 + \exp(-U_0/kT)}$.

1.108. Найти среднюю энергию, теплоемкость и населенности уровней системы, которая может находиться в двух квантовых энергетических состояниях со статистическими весами g_0 и g_1 . Разность энергетических уровней $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \Delta\varepsilon$.

Ответ: $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon / (1 + (g_0/g_1) \cdot \exp(\Delta\varepsilon/kT))$;

$$c_V = R (g_0/g_1) \cdot (\Delta\varepsilon/kT)^2 \cdot \exp(\Delta\varepsilon/kT) / (1 + (g_0/g_1) \cdot \exp(\Delta\varepsilon/kT))^2$$

$$N_0 = N / (1 + (g_1/g_0) \cdot \exp(-\Delta\varepsilon/kT)), N_1 = N - N_0.$$

1.109. Вычислить значение теплоемкости в максимуме и положение максимума для системы с двумя уровнями, у которой статистический вес верхнего уровня g_1 значительно меньше, чем вес нижнего уровня g_0 .

Ответ: $(c_V)_{\max} = 4R (g_1/g_0) \cdot e^{-2}$, $T_{\max} = \Delta\varepsilon/2k$.

1.110. Квантовая система из N неподвижных двухуровневых частиц с разностью энергий между уровнями ε имеет при $\varepsilon \gg kT$ среднюю энергию

$$\bar{E} \approx N(\varepsilon_0 + 3\varepsilon \exp(-\varepsilon/kT)),$$

где ε_0 – энергия нижнего уровня. Чему равно вырождение верхнего уровня, если нижний уровень вырожден двукратно?

Ответ: $g = 6$.

1.111. Энергетический спектр системы состоит из трех уровней: $0, E_0, 2E_0$ с кратностями вырождения 1, 2, 1 соответственно. Найти температуру, при которой среднее значение энергии равно $E_0/2$.

Ответ: $T = \frac{E_0}{k \ln 3}$.

1.112. Основное электронное состояние атома фтора 2P расщеплено спин-орбитальным взаимодействием на два состояния: $^2P_{3/2}$ ($g_0 = 4$) и $^2P_{1/2}$ ($g_1 = 2$). Расщепление равно 404 см^{-1} . Определить населенность верхнего состояния и теплоемкость атомарного фтора. $T = 300 \text{ К}$.

Ответ: $w_1 = N_1/N = 0,067, c_V = 0,235 R$.

1.113. Спектр энергии системы представляет собой совокупность n эквидистантных (равноотстоящих друг от друга) невырожденных уровней: $\varepsilon_i = \varepsilon i, i = 1, 2, \dots, n$. Найти среднюю энергию и теплоемкость такой системы. Исследовать предельные случаи высоких и низких температур.

Ответ: $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/(1 - \exp(-\varepsilon/kT)) - n\varepsilon/(\exp(n\varepsilon/kT) - 1)$;

$$c_V = k(\varepsilon/kT)^2 \cdot (n^2 - 1)/12 \text{ при } T \gg n\varepsilon/k;$$

$$c_V = k(\varepsilon/kT)^2 \cdot \exp(-\varepsilon/kT) \text{ при } T \ll \varepsilon/k.$$

Электрические и магнитные свойства газа

1.114. Вычислить дополнительную энергию, приобретаемую дипольным газом в слабом электрическом поле напряженности E . Чему равен соответствующий вклад в теплоемкость? Дипольный момент молекулы p .

$$\text{Ответ: } \Delta U = -N(pE)^2/3kT, \Delta c_V = Nk/3 \cdot (pE/kT)^2.$$

1.115. Проекция μ магнитного момента атома на магнитное поле H может принимать значения $\mu = \mu_B \cdot m$, $m = 0, \pm 1$ ($\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-20}$ эрг/гс). Определить намагниченность газа, состоящего из таких атомов. Температура газа комнатная.

$$\text{Ответ: } M = (2\mu_B^2 n/3kT) H.$$

1.116. Молекулы вещества могут находиться в триплетном и синглетном состояниях, разность энергий между которыми в отсутствие магнитного поля равна $E_T - E_S = \Delta E$. Найти магнитную восприимчивость вещества, учитывая, что синглетное состояние немагнитно, а магнитные моменты в состояниях триплета равны $\mu = \mu_B \cdot m$, $m = 0, \pm 1$. $T = 300$ К.

$$\text{Ответ: } \chi = M/H = (2\mu_B^2 n/kT)/(3 + \exp(\Delta E/kT)).$$

1.117. Газ NO, молекулы которого обладают спином $s = 1/2$, помещен в линейно возрастающее магнитное поле. Изменится ли распределение плотности газа? Если да, то оценить это изменение (проекция магнитного момента молекулы на направление

магнитного поля имеет $(2s + 1)$ значение, а именно в случае $s = 1/2$
 $\mu = \mu_B \cdot m$, где $m = 0, \pm 1$, $\mu_B \approx 10^{-20}$ эрг/гс; $0 \leq H \leq 10^5$ гс, $T = 300$ К).

Ответ: $n_{\max}/n_{\min} - 1 \approx 3 \cdot 10^{-4}$.

Равновесное излучение

1.118. Построить график функции Планка, исследовать предельные случаи высоких и низких частот ν . Установить границы применимости: а) закона Вина и б) классического приближения (закона Рэлея – Джинса), если погрешность от использования этих приближений не должна превышать 10 %.

Ответ: а) $\nu > 2,3kT/h$; б) $\nu < 0,19kT/h$.

1.119. Записать формулу Планка в переменных ν – частота и λ – длина волны. Найти, как зависит от температуры положение максимума спектральной плотности равновесного излучения (закон смещения Вина). Оценить λ_{\max} для Солнца ($T = 5800$ К).

Ответ: $\nu_{\max} = \text{const} \cdot T \approx 3kT/h$, $\lambda_{\max} = \text{const}/T \approx hc/(5kT)$,

$$\nu_{\max} \cdot \lambda_{\max} \approx 3/(5c), \lambda_{\max} \approx 5000 \text{ \AA}.$$

1.120. Оценить лучистое и термическое давление в центре Солнца ($T \approx 1,4 \cdot 10^7$ К, $\rho \approx 86$ г/см³, состав: ионизованный водород).

Ответ: $p_{\text{луч}} \approx 10^8$ атм, $p_{\text{терм}} \approx 2 \cdot 10^{11}$ атм.

1.121. Считая Землю черным шаром, определить ее среднюю температуру, принимая во внимание, что расстояние от Солнца до Земли $R \approx 1,5 \cdot 10^8$ км, $R_C \approx 0,7 \cdot 10^6$ км, $T_C \approx 5800$ К.

Ответ: $T = (R_C/2R)^{1/2} T_C = 280$ К.

1.122. Черное сферическое тело радиусом r , нагретое до температуры T , окружено зачерненной с обеих сторон тонкой оболочкой радиусом r_0 . Как такой экран влияет на скорость охлаждения тела?

Ответ: отношение потоков энергии, теряемой шаром, с экраном и без экрана равно $q/q_0 = (1 + (r/r_0)^2)^{-1}$.

1.123. В 1903 г. судно немецкой полярной экспедиции вмерзло в лед. Для его спасения лед вокруг был посыпан золой и углем. Подтаявший лед лопнул, и судну удалось освободиться из ледового плена. Оценить необходимое для этого время по следующим данным: толщина льда 1 м; отражательная способность чистого льда $r_1 = 0,9$; льда, посыпанного золой, $r_2 = 0,2$; поток солнечной энергии на широте судна $q = 1$ кал/(см²·мин). Для того, чтобы лед треснул, достаточно, чтобы подтаял слой толщиной $\Delta x = 5$ см. Температура окружающей среды 0 °С; теплота плавления льда $\lambda = 78$ кал/г, плотность его $\rho = 0,9$ г/см³.

Ответ: $\Delta t = \lambda \rho \Delta x / (q(r_1 - r_2)) \approx 500$ мин ≈ 8 ч.

ЧАСТЬ 2

ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

Столкновения молекул. Длина свободного пробега (теория)

Установление равновесия, теплопередача и т. д. – все эти процессы осуществляются в результате взаимодействия молекул. При этом молекулы не слишком плотных газов в некотором приближении можно считать упругими шариками. Ставится задача определения частоты их столкновения.

В системе отсчета, связанной с какой-либо молекулой, движение остальных молекул хаотично, и распределение их по относительным скоростям будет максвелловским (только вместо массы молекулы в него будет входить приведенная масса μ):

$$dW(\vec{v}_0) = (\mu/2\pi kT)^{3/2} \exp(-\mu v_0^2/2kT) d\vec{v}_0.$$

Средняя скорость относительного движения молекул равна

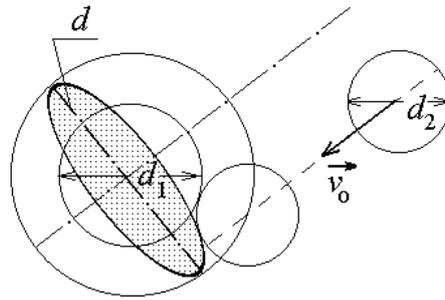
$$\bar{v}_0 = \sqrt{8kT/(\pi\mu)}.$$

Если массы сталкивающихся молекул одинаковы, то $\bar{v}_0 = \sqrt{2}\bar{v}$.

Если газ не очень плотный, то при расчете частоты столкновений следует учитывать только двухчастичные столкновения (столкновениями одновременно более чем двух молекул можно пренебречь). Задача решается в системе отсчета, связанной с рассматриваемой молекулой. Все остальные молекулы движутся с относительными скоростями и распределены по скоростям с приведенной выше вероятностью.

Вместо рассматриваемой молекулы можно ввести гипотетическую частицу диаметром $d = d_1 + d_2$, где d_1 и d_2 – диаметры сталкивающихся молекул (см. рисунок), заменив все

остальные молекулы материальными точками. Таким образом, задача определения частоты столкновений сводится к нахождению числа ударов о сферу диаметром d частиц максвелловского газа:



Частота всех столкновений данной молекулы равна

$$\nu = \sum_i n_i \bar{v}_{0i} \sigma_i$$

В случае однородного по составу газа формула принимает вид

$$\nu = \sqrt{2} n \bar{v} \sigma,$$

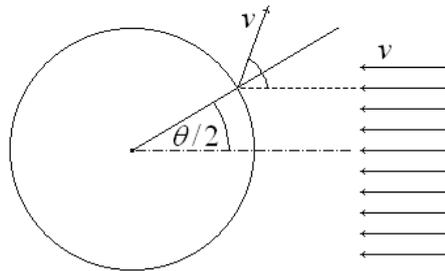
где \bar{v} – средняя скорость теплового движения молекул, $\sigma = \pi d^2$ – сечение столкновения. Средняя длина свободного пробега вычисляется по формуле

$$\bar{\lambda} = \bar{v} / \nu = 1 / (\sqrt{2} n \sigma).$$

В действительности молекулы взаимодействуют не только при непосредственном соприкосновении, но и при пролете на некотором расстоянии друг от друга. Такой характер взаимодействия учитывается посредством введения эффективного сечения столкновения.

Столкновения молекул. Длина свободного пробега (задачи)

2.1. Рассчитать распределение по скоростям точечных частиц после упругого столкновения с бесконечно тяжелой сферой. До столкновения все частицы имеют одинаковую скорость \vec{v} .



Ответ: $dw(\theta, \varphi) = \sin\theta d\theta d\varphi/4\pi$,
где θ, φ – углы сферической системы координат.

2.2. Исходя из распределения Максвелла, получить распределение вероятностей для скорости относительного движения двух частиц $\vec{v}_0 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Ответ: $dw(\vec{v}_0) = (\mu/2\pi kT)^{3/2} \exp(-\mu v_0^2/2kT) v_0^2 dv_0 \sin\theta d\theta d\varphi$,
где $\mu = \mu_1\mu_2/(\mu_1 + \mu_2)$ – приведенная масса.

2.3. Найти число соударений ν в секунду, среднее время между соударениями τ и среднюю длину свободного пробега λ для молекул газа, если газокинетическое сечение $\sigma = \pi d^2$ известно (d – эффективный диаметр молекулы). Рассчитать эти величины для азота при нормальных условиях ($d_{N_2} = 3,75 \text{ \AA}$). Сравнить λ со средним расстоянием \bar{x} между молекулами.

Ответ: $\nu = \sqrt{2} n \bar{v} \sigma$, $\tau = \nu^{-1}$, $\lambda = (\sqrt{2} n \sigma)^{-1}$;

$$\nu_{N_2} = 0,77 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}, \tau = 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ с}, \lambda = 5,9 \cdot 10^{-6} \text{ см} \approx 18 \bar{x}.$$

2.4. Во сколько раз уменьшится частота столкновений молекулы двухатомного газа, если объем газа адиабатически увеличится в два раза?

Ответ: $\nu_1/\nu_2 = 2^{1,2} \approx 2,3$.

2.5. Найти уравнение и теплоемкость процесса, при котором полное число столкновений в единице объема в единицу времени будет величиной постоянной.

Ответ: $T/V^4 = \text{const}, c = c_V + \frac{1}{4}R$.

2.6. На поверхности площадью S находится двумерный идеальный газ из N молекул. Найти частоту столкновений молекулы такого газа (d – диаметр молекулы).

Ответ: $\nu = \sqrt{2} N/S \cdot \bar{v} 2d$, где $\bar{v} = (\pi kT/2m)^{1/2}$.

2.7. Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул газа, рассматривая их как твердые шарики радиусом r , хаотически движущиеся с одинаковой абсолютной скоростью v .

Ответ: $\lambda = 3/(4n\sigma), \sigma = 4\pi r^2$.

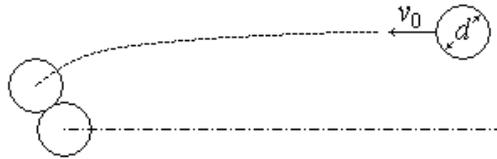
2.8. Найти среднюю длину свободного пробега молекул каждой компоненты смеси двух идеальных газов. Плотности n_i числа молекул, их массы m_i и радиусы r_i заданы.

Ответ: $\lambda_1 = (\sqrt{2} n_1 \sigma_1 + \sqrt{1+m_1/m_2} n_2 \sigma_{12})^{-1}$;

$$\lambda_2 = (\sqrt{1+m_2/m_1} n_1 \sigma_{12} + \sqrt{2} n_2 \sigma_2)^{-1};$$

$$\sigma_i = 4\pi r_i^2, \sigma_{12} = \pi(r_1 + r_2)^2.$$

2.9. Молекулы реального газа взаимодействуют друг с другом по закону $u = -a/r^6$ при $r > d$, где d – эффективный диаметр молекулы.



Найти зависимость сечения соударений σ от температуры (поправка Сезерленда), считая соударением соприкосновение частиц.

Ответ: $\sigma = \sigma_0(1 + c/T)$, $c = a/(\sqrt{2}kd^6)$.

2.10. Используя понятия теории вероятности, найти распределение молекул по длинам пробега. Средняя длина свободного пробега $\bar{\lambda}$ известна.

Ответ: $dw(x) = \exp(-x/\bar{\lambda}) dx/\bar{\lambda}$.

2.11. Оценить давление разреженного газа, если интенсивность тонкого молекулярного пучка ослабляется в таком газе в f раз на длине l . Температура газа T , сечение взаимодействия молекул пучка и газа σ .

Ответ: $p \approx kT \cdot \ln f/l\sigma$.

Явления переноса в плотном газе (теория)

Гипотеза локального термодинамического равновесия. В результате столкновений молекул друг с другом весьма быстро устанавливается равновесное распределение их по скоростям поступательного движения. Для этого достаточно, чтобы каждая из

молекул испытала одно-два соударения. Это можно рассматривать как экспериментальный факт. Он дает возможность ввести гипотезу локального термодинамического равновесия. Суть гипотезы состоит в следующем: предполагается, что все молекулы, попавшие в объем, размеры которого порядка $\bar{\lambda}$, испытают в нем соударения, и в объеме установится локальное равновесие с некоторой температурой, плотностью и т. д. В другом подобном объеме также устанавливается равновесное состояние, но параметры среды, вообще говоря, другие. Среда (газ) в целом не находится в равновесии. В этих рассуждениях предполагается, что длина свободного пробега молекул (размер объема) мала по сравнению с характерным размером задачи. Такие объемы можно считать точками, в которых определены температура и другие параметры среды. От точки к точке эти параметры меняются. В рамках этого приближения возможно непрерывное распределение параметров (кусочно-непрерывное распределение имеет место непременно). Параметры могут изменяться и с течением времени. В среде возникают потоки массы, импульса и энергии.

Теплопроводность. Гипотеза локального термодинамического равновесия применяется при рассмотрении явлений переноса в плотных газах. Экспериментально было установлено: поток тепла пропорционален градиенту температуры и направлен против него:

$$\vec{q} = -\chi \nabla T.$$

Это закон Фурье. Благодаря кинетической теории появилась возможность рассчитать коэффициент теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3} n c_V / N_A \cdot \bar{v} \lambda,$$

где c_V – молярная теплоемкость, N_A – число Авогадро.

Вязкость газов. Тепловое движение молекул отвечает также за внутреннее трение, или вязкость газов. При течении в канале, при обтекании какого-либо тела в потоке газа возникают градиенты скорости, обусловленные как существованием перепадов давления,

так и наличием трения о твердые поверхности. Из-за молекулярного теплового движения между слоями газа, движущимися с различными скоростями, происходит обмен молекулами.

Молекулы, попадающие в данный слой газа из соседнего, приносят с собой импульс, отличный от того, каким обладают молекулы данного слоя (речь идет об импульсе, связанном с движением газа в соответствующем слое). В столкновениях с молекулами данного слоя разница в импульсах теряется.

В результате между слоями газа возникает сила трения. Применение уже использованного ранее кинетического подхода дает следующее выражение для напряжения трения (силы трения, действующей на единичную площадку в сечении между слоями):

$$\tau = -\eta du/dx, \text{ где } \eta = \frac{1}{3} mn\bar{v}\lambda.$$

Диффузия. Закон Фика. Элементарная кинетическая теория дает для диффузионного потока примеси выражение

$$j = -Ddn/dx,$$

где n – концентрация молекул примеси, $D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda$ – коэффициент диффузии. Формула показывает, что диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации. Это закон Фика.

Коэффициенты теплопроводности и вязкости не зависят от плотности газа. Уменьшение плотности при понижении давления компенсируется увеличением длины свободного пробега молекул. В результате, например, поток тепла между двумя параллельными стенками, имеющими различные фиксированные температуры, не зависит от давления газа. Локальное термодинамическое равновесие имеет место при выполнении условия $\bar{\lambda} \ll h$ или при условии

$$p \gg p_0 = kT/(\sqrt{2}\sigma h).$$

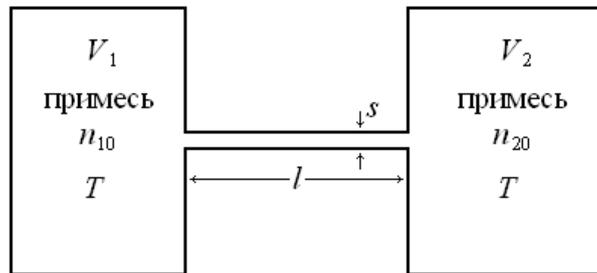
Явления переноса в плотном газе (задачи)

2.12. Используя представление о локальном равновесии и средней длине свободного пробега, получить выражения для коэффициентов самодиффузии D , теплопроводности χ , вязкости η . Оценить эти величины для азота при нормальных условиях; газокинетический диаметр $d_{N_2} = 3,75 \text{ \AA}$.

Ответ: $D = \lambda \bar{v} / 3$, $\chi = \rho c_v \lambda \bar{v} / 3$, $\eta = \rho \lambda \bar{v} / 3$,

где c_v – удельная теплоемкость, ρ – плотность газа. Для азота $D = 0,089 \text{ см}^2/\text{с}$, $\chi = 2 \cdot 10^{-5} \text{ кал}/(\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$, $\eta = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ пуаз}$.

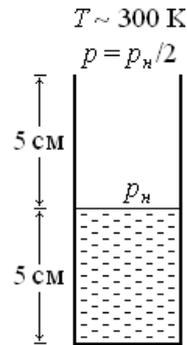
2.13. Два сосуда объемом V_1 и V_2 соединены трубкой длины l и сечения s . В обоих сосудах к основному газу добавлен примесный газ с начальными плотностями n_{10} и n_{20} . Температура газа везде одинакова. Найти закон изменения разности $\Delta n = n_1 - n_2$ со временем, если в начальный момент $|\Delta n| \ll n_{10}, n_{20}$. Рассчитать время релаксации τ системы при $V_1 = V_2 = 1 \text{ л}$, $l = 10 \text{ см}$, $s = 1 \text{ см}^2$, $D = 0,089 \text{ см}^2/\text{с}$ (смесь азота и кислорода).



Ответ: $\Delta n = \Delta n_0 \cdot \exp(-t/\tau)$; $\tau = V_1 V_2 / (V_1 + V_2) \cdot l / (sD) \approx 15,6 \text{ ч}$.

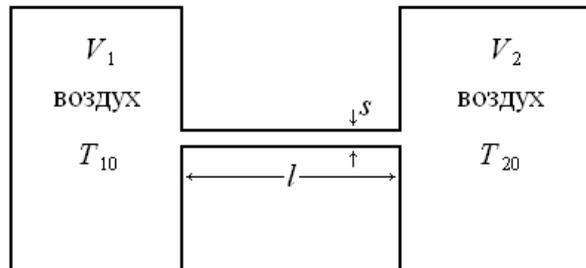
2.14. Оценить время испарения воды из трубки длиной 10 см, запаянной с одного конца. Температура комнатная. Первоначально

вода заполняла трубку наполовину. Относительная влажность воздуха 50 %, давление насыщенных паров 27 мм рт. ст. Длина свободного пробега молекул в системе воздух–пар порядка 10^{-5} см. Пар у поверхности воды считать насыщенным, капиллярными явлениями пренебречь.



Ответ: $t \approx 172$ дня.

2.15. Сосуды с объемом газа V_1 и V_2 соединены трубкой длиной l и сечением s с заглушкой, препятствующей течению газа, но не мешающей передаче тепла. Найти, как будут изменяться со временем температуры газов, если плотности числа частиц одинаковы и равны n_0 , а температуры вначале были T_{10} и T_{20} . Считать приближенно, что коэффициент теплопроводности χ постоянен. Для $V_1 = V_2 = 1$ л, $l = 10$ см, $s = 1$ см², $\chi = 820$ эрг/(см·с·К) (воздух) рассчитать время релаксации.

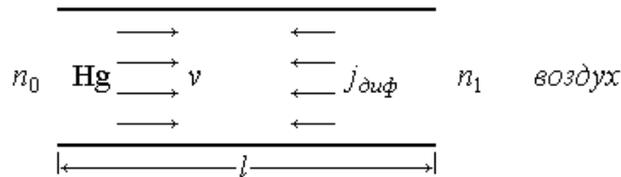


Ответ: $T_1 = T_{10} + (T_{20} - T_{10})V_2/(V_1 + V_2) \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$,

$$T_2 = T_{20} + (T_{10} - T_1)V_1/V_2,$$

$$\tau = V_1 V_2 / (V_1 + V_2) \cdot (l n_0 c_v) / (s \chi) \approx 15,8 \text{ ч.}$$

2.16. По трубке длиной l слева направо текут пары ртути, а навстречу им идет диффузионный поток откачиваемого газа (воздуха). В установившемся процессе концентрация воздуха на левом конце трубки n_0 , на правом n_1 . Найти скорость прокачки ртути, при которой воздух не будет доходить до левого конца трубки. Коэффициент диффузии воздуха в парах ртути равен D .

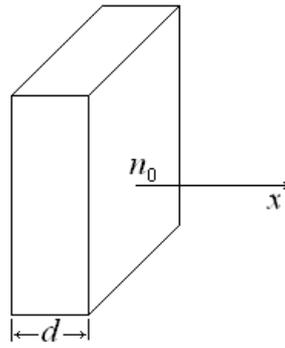


Ответ: $v = D/l \cdot \ln(n_1/n_0)$.

2.17. В плоской вертикальной пластине протекает химическая реакция первого порядка, скорость которой описывается выражением

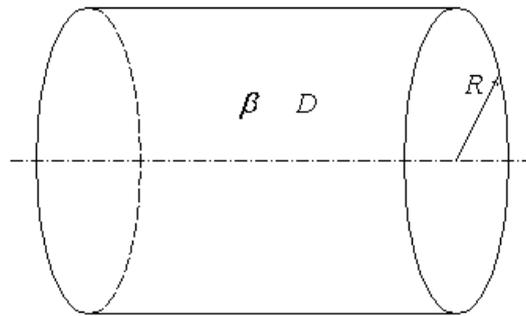
$$\frac{dn}{dt} = -kn,$$

где k – константа, n – концентрация реагента. Реагент подается в пластину с правого края так, что на правой границе его концентрация постоянна и равна n_0 . Коэффициент диффузии реагента D неизменен во время реакции, толщина пластины – d . Найти стационарный профиль $n(x)$ и расход реагента в единицу времени на единицу площади пластины.



Ответ: $n = n_0 \frac{\text{ch}(\alpha x)}{\text{ch}(\alpha d)}$, $\alpha = \sqrt{k/D}$; $j = D \left. \frac{dn}{dx} \right|_d = n_0 \sqrt{kD} \text{th}(\alpha d)$.

2.18. Длинное цилиндрическое тело радиусом R находится в вакууме. Внутри тела равномерно по его объему выделяется газ. Количество газа, выделяемого за единицу времени в единице объема, постоянно и равно β . Коэффициент диффузии газа в материале тела равен D . Найти стационарное распределение газа в теле.



Ответ: $n = \frac{\beta}{4D} (R^2 - r^2)$.

2.19. Найти установившуюся толщину льда на озере, если поток тепла от земли равен q . Температура воздуха $t < 0$ °С. Коэффициент теплопроводности льда постоянный.

$$\text{Ответ: } h = -\frac{\chi}{q} t \text{ } ^\circ\text{C}.$$

2.20. На концах столба газа длиной l температура равна T_0 и T_1 . Найти распределение температуры по длине столба и плотность потока тепла в стационарном случае. Учесть зависимость коэффициента теплопроводности от температуры.

$$\text{Ответ: } T = (T_0^{3/2} + (T_1^{3/2} - T_0^{3/2}) \cdot x/l)^{2/3};$$

$$q = -2\chi/3T^{1/2} \cdot (T_1^{3/2} - T_0^{3/2})/l.$$

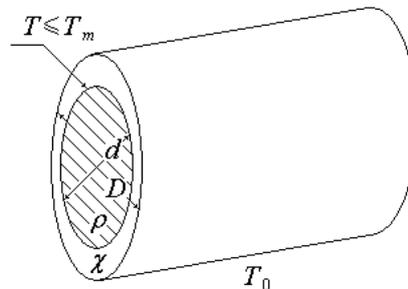
2.21. В слое вещества толщиной l коэффициент теплопроводности линейно меняется от χ_1 на нижней границе до χ_2 на верхней. Температура нижней границы поддерживается равной T_1 , а верхней T_2 . Найти распределение температуры в слое.

$$\text{Ответ: } T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln(\chi_2/\chi_1)} \ln \left(1 + \frac{\chi_2 - \chi_1}{\chi_1 l} x \right).$$

2.22. Цилиндрический стержень разрезали на две части длиной L и $2L$ и вставили между ними тонкий диск такого же диаметра D . Найти температуру диска, если в нем в единицу времени выделяется тепло P . Коэффициент теплопроводности стержня равен χ . Температура свободных концов стержня равна T_0 . Боковые поверхности стержня теплоизолированы.

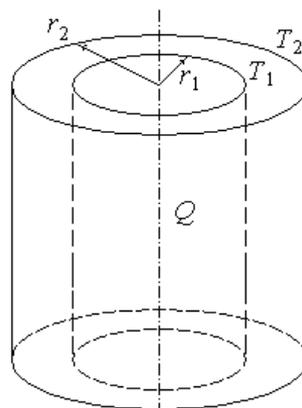
$$\text{Ответ: } T = T_0 + \frac{8PL}{3\pi D^2 \chi}.$$

2.23. Провод круглого сечения диаметром d покрыт изоляцией, внешний диаметр которой равен D . Удельное сопротивление провода равно ρ . Коэффициент теплопроводности изоляции равен χ . Температура плавления изоляции равна T_m . Температуру внешней поверхности изоляции T_0 поддерживают постоянной. Какой максимальный ток можно пропустить по проводу без разрушения изоляции? Теплопроводность провода настолько велика, что температуру по его сечению можно считать постоянной.



Ответ: $I \leq (2\pi\chi/\rho \cdot (T_m - T_0)/\ln(D/d))^{1/2}$.

2.24. Для измерения теплопроводности газа им заполняется пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами радиусами r_1 и r_2 .



Заполнение производится при невысоком давлении (~ 10 мм рт. ст.), чтобы исключить конвекцию. Внутренний цилиндр нагревается источником тепла с удельной мощностью Q , установившиеся температуры цилиндров t_1 и t_2 измеряются. Найти распределение температуры в газе и коэффициент теплопроводности. Рассчитать коэффициент теплопроводности и газокинетический диаметр молекулы для азота, если $r_1 = 0,5$ см, $r_2 = 2$ см, $Q = 0,038$ Вт/см, $t_1 = 93^\circ\text{C}$, $t_2 = 0^\circ\text{C}$.

$$\text{Ответ: } T = (T_1^{3/2} + (T_2^{3/2} - T_1^{3/2}) \cdot \ln(r/r_1) / \ln(r_2/r_1))^{2/3} \approx$$

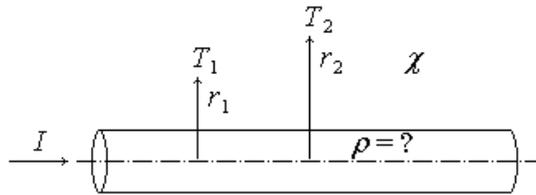
$$\approx T_1 + (T_2 - T_1) \cdot \ln(r/r_1) / \ln(r_2/r_1);$$

$$\chi = 3Q/4\pi \ln(r_2/r_1) (T_1^{3/2} - T_2^{3/2})^{-1} T^{1/2} \approx$$

$$\approx Q/2\pi \ln(r_2/r_1) (T_1 - T_2)^{-1},$$

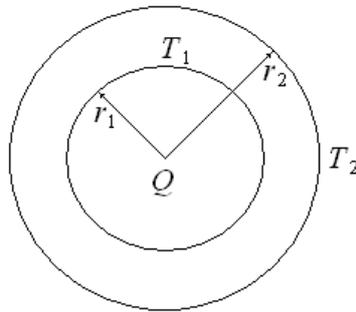
$$\chi_{\text{N}_2} \approx 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}/(\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{К}), \quad d_{\text{N}_2} \approx 3,6 \text{ \AA}.$$

2.25. В среде с теплопроводностью χ , не зависящей от температуры, находится прямой провод, по которому течет ток I . На расстоянии r_1 от оси провода температура равна T_1 , а на расстоянии $r_2 - T_2$. Найти сопротивление единицы длины провода.



$$\text{Ответ: } \rho = 2\pi\chi/l^2 \cdot (T_1 - T_2) / \ln(r_2/r_1).$$

2.26. Пространство между двумя концентрическими сферами с радиусами r_1 и r_2 заполнено газом. Внутренняя сфера подогревается источником тепла мощностью Q . Найти коэффициент теплопроводности и распределение температуры в газе, если температуры сфер равны T_1 и T_2 .



$$\text{Ответ: } \chi = 3Q/8\pi(1/r_2 - 1/r_1)T^{1/2}/(T_2^{3/2} - T_1^{3/2}) \approx$$

$$\approx Q/4\pi(1/r_2 - 1/r_1)/(T_2 - T_1);$$

$$T = (T_1^{3/2} + (T_2^{3/2} - T_1^{3/2}) \cdot (1/r - 1/r_1)/(1/r_2 - 1/r_1))^{2/3} \approx$$

$$\approx T_1 + (T_2 - T_1) \cdot (1/r - 1/r_1)/(1/r_2 - 1/r_1) \text{ при } |1 - T_2/T_1| \ll 1.$$

2.27. В слое газа между пластинами идет химическая реакция. Тепловой эффект реакции в расчете на единичный объем равен Q . Температура пластин поддерживается равной T_0 . Найти распределение температуры в газе и поток тепла к каждой пластине. Расстояние между пластинами h .

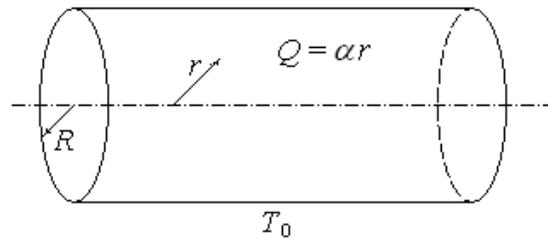
$$\text{Ответ: } T = (T_0^{3/2} + 3Q/4 \cdot T_0^{1/2} / \chi_0 \cdot y(h - y))^{2/3};$$

$$q = |\chi dT/dy|_{y=0, h} = Qh/2.$$

2.28. По длинному прямому проводу круглого сечения радиусом R течет ток плотностью j . Проводник обладает удельным сопротивлением ρ и коэффициентом теплопроводности χ . Поверхность провода поддерживается при температуре T_0 . Найти распределение температуры внутри провода. (Справка: мощность тока на единицу объема равна $w = \rho j^2$.)

Ответ: $T(r) = T_0 + \frac{\rho j^2}{4\chi}(R^2 - r^2)$.

2.29. Внутри цилиндрического объема радиусом R с теплоизолированными торцами выделяется теплота. Причем плотность выделения ее в единицу времени зависит от расстояния от оси цилиндра по закону $Q = \alpha r$, где α – постоянная. Найти распределение температуры в объеме. Температура внешней боковой поверхности объема поддерживается постоянной, равной T_0 . Коэффициент теплопроводности χ постоянный.



Ответ: $T = T_0 + \frac{\alpha}{9\chi}(R^3 - r^3)$.

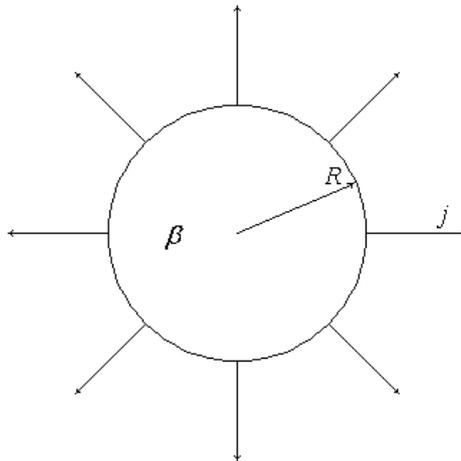
2.30. В вакууме находится цилиндр радиусом R с коэффициентом теплопроводности χ . Внутри цилиндра равномерно выделяется тепло с плотностью тепловыделения (мощностью на единицу объема), равной β . Поток тепла с единицы площади поверхности цилиндра равен σT_c^4 , где T_c – температура поверхности. Найти температуру на поверхности и оси цилиндра.

Ответ: $T_c = \left(\frac{\beta}{2\sigma}R\right)^{1/4}$, $T_0 = \left(\frac{\beta}{2\sigma}R\right)^{1/4} + \frac{\beta}{4\chi}R^2$.

2.31. Реактор имеет форму шара радиусом R . В реакторе идет медленная эндотермическая реакция. Количество поглощаемой энергии в единицу времени в единице объема равно w . Определить температуру в центре реактора, если его поверхность поддерживается при постоянной температуре T_0 , а коэффициент теплопроводности χ не зависит от температуры и состава реакционной смеси.

Ответ: $T = T_0 - \frac{wR^2}{6\chi}$.

2.32. Шар радиусом R , состоящий из вещества с коэффициентом теплопроводности χ , не зависящим от температуры, находится в вакууме. Внутри шара равномерно по объему выделяется теплота с плотностью тепловыделения β (эрг/(см³с)). Шар представляет собой абсолютно черное тело. Найти температуру в центре шара.



Указания.

1. Поверхность абсолютно черного тела излучает тепловую энергию по закону Стефана – Больцмана, т. е. плотность потока излучаемой тепловой энергии равна

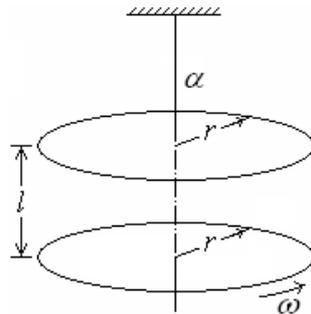
$$j = \sigma T^4 \text{ (эрг/(см}^2\text{с))},$$

где σ – постоянная Стефана – Больцмана, T – абсолютная температура. Плотность потока излучаемой тепловой энергии j представляет собой энергию, излучаемую единицей площади поверхности в единицу времени.

2. Плотность тепловыделения β представляет собой количество теплоты, выделяющееся в единице объема вещества в единицу времени.

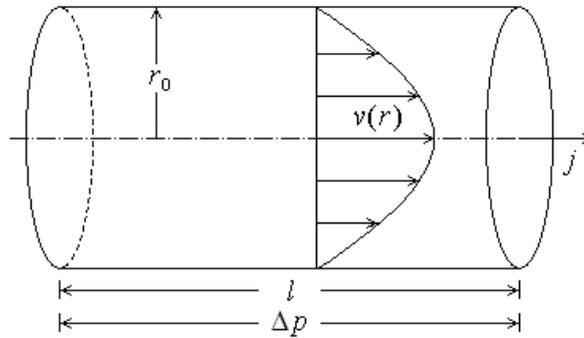
$$\text{Ответ: } T = \left(\frac{\beta R}{3\sigma} \right)^{1/4} + \frac{\beta R^2}{6\chi}.$$

2.33. Определить, на какой угол φ повернется диск, подвешенный на упругой нити, если под ним на расстоянии $l = 1$ см вращается второй такой же диск со скоростью $\omega = 50$ рад/с. Радиусы дисков $r = 10$ см, модуль кручения нити $\alpha = 100$ дин·см/рад, коэффициент внутреннего трения воздуха $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$ пуаз. Краевыми эффектами пренебречь. Движение воздуха между дисками считать ламинарным.



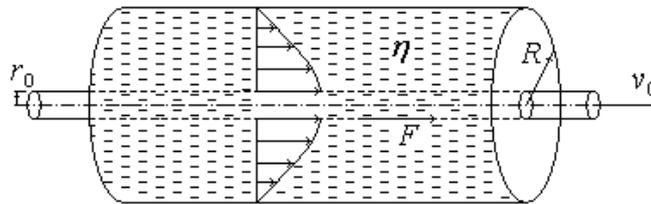
Ответ: $\varphi = \pi \omega r^4 \eta / 2 \alpha l = 81^\circ$.

2.34. Найти профиль скорости v и расход газа j (вытекающий объем) при ламинарном течении газа в трубе. Радиус трубы r_0 , длина l , на концах трубы поддерживается разность давлений Δp .



Ответ: $v = \Delta p (r_0^2 - r^2) / (4l\eta)$, $j = \pi \Delta p r_0^4 / (8l\eta)$.

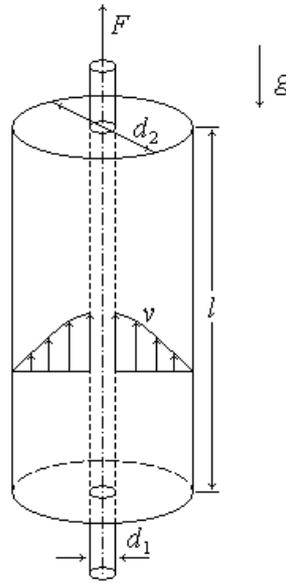
2.35. Труба радиусом R заполнена жидкостью с вязкостью η . Вдоль оси трубы с постоянной скоростью v_0 протягивают проволоку радиусом r_0 . Найти силу трения, действующую на единицу длины проволоки, и зависимость скорости течения жидкости от расстояния r до оси трубы.



Ответ: $F = -2\pi\eta v_0 / \ln(R/r_0)$;

$v = v_0 \ln(R/r) / \ln(R/r_0)$.

2.36. Вдоль оси вертикальной трубы длиной l и диаметром d_2 ($d_2 \ll l$), заполненной жидкостью с коэффициентом вязкости η , со скоростью v_1 тянут шнур диаметром d_1 . С какой силой тянут шнур? Найти профиль скорости жидкости в трубе.



Ответ: $F = 2\pi\eta l(-\rho g/2\eta \cdot r_1^2 + (v_1 + \rho g/4\eta \cdot (r_2^2 - r_1^2))/\ln(r_2/r_1))$;

$$v = -\rho g/4\eta \cdot (r_2^2 - r^2) + (v_1 + \rho g/4\eta \cdot (r_2^2 - r_1^2))\ln(r_2/r)/\ln(r_2/r_1).$$

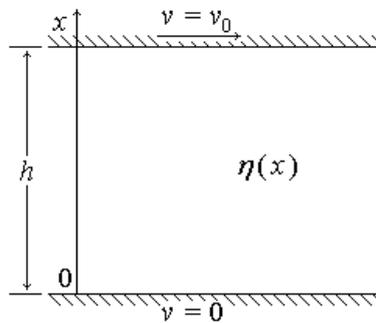
2.37. Длинная вертикальная трубка длиной l и радиусом r заполнена жидкостью, для которой коэффициент кинематической вязкости равен ν ($\nu = \eta/\rho$). За какое время t вся жидкость вытечет из трубки под действием силы тяжести? Влиянием сил поверхностного натяжения пренебречь. Процесс установления скорости жидкости считать мгновенным, а течение ламинарным.

Ответ: $t = 8\nu l/gR^2$.

2.38. Найти профиль скорости при ламинарном течении жидкости в плоском канале. Течение вызвано движением одной из стенок вдоль самой себя с постоянной скоростью v_0 . В этом же направлении действует и постоянный градиент давления dp/dx . Расстояние между стенками h . Рассмотреть случаи положительного, равного нулю и отрицательного градиента давления. Построить графики.

Ответ: $v = v_0 y/h - 1/2 \eta dp/dx \cdot y(h - y)$.

2.39. Одна пластина покоится, другая движется параллельно ей со скоростью v_0 . Между пластинами находится вязкая неоднородная жидкость с коэффициентом вязкости $\eta(x)$, обратно пропорциональным x , где x – расстояние от первой пластины. Найти, как скорость жидкости зависит от x в стационарном случае. Расстояние между пластинами h .



Ответ: $u = v_0 \left(\frac{x}{h} \right)^2$.

2.40. По дорожке с отверстиями, сквозь которые продувается воздух, на воздушной подушке движется бегунок. Начальная скорость его $v_0 = 1$ м/с, масса $m = 200$ г, площадь поверхности $s = 50$ см², толщина воздушной подушки $\Delta = 0,25$ мм,

газокинетический диаметр молекул воздуха $d = 3,8 \text{ \AA}$. Какое расстояние пройдет бегунок до остановки?

Ответ: $l = mv_0\Delta/\eta s = 0,68 \text{ км}$.

2.41. Показать, что вольт-амперная характеристика диода, в котором перенос заряда осуществляется стационарно движущимися электронами, подчиняется закону $i \sim \Delta V^{3/2}$, где ΔV – разность потенциалов анода и катода.

Ответ: $i = 1/6\pi(e\lambda/m \cdot (f/2)^{1/2})^{1/2} l^{-5/2} (5\Delta V/3)^{3/2}$, где l – расстояние между электродами, f равно отношению масс электрона m и молекулы M .

Явления переноса в ультраразреженном газе (теория)

В предельном случае

$$p \ll p_0 = kT/(\sqrt{2}\sigma h)$$

длина свободного пробега, полученная по формуле для плотного газа, оказывается много больше характерного размера, и молекулы будут летать, сталкиваясь чаще со стенками сосуда, чем друг с другом. Установление равновесия в таком ультраразреженном газе (физическом вакууме) осуществляется в результате неупругих столкновений его молекул со стенками. Если молекулы газа имеют более высокую температуру, то, прилипая к стенке, они отдают избыточную энергию и испаряются уже с температурой стенки. Более холодные молекулы при неупругом столкновении со стенкой приобретают дополнительную энергию. В газе устанавливается равновесие, соответствующее температуре стенок.

Поток тепла между двумя параллельными стенками с температурами T_1 и T_2 в случае ультраразреженного газа равен

$$q = \alpha / (2 - \alpha) \cdot n \bar{v}_1 \bar{v}_2 / (2(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)) \cdot (c_v / N_A + k/2) (T_1 - T_2),$$

где α – коэффициент аккомодации.

Для силы трения в случае молекулярного течения между двумя параллельными пластинами, движущимися вдоль самих себя в одном направлении со скоростями u_1 и u_2 , получается выражение

$$F = n \bar{v} / 4 \cdot m (u_1 - u_2) S.$$

Здесь S – площадь пластин.

Другой характер по сравнению со случаем течения в приближении сплошной среды имеет течение ультраразреженного газа. К примеру, пусть происходит истечение газа из сосуда через отверстие. Если длина свободного пробега мала по сравнению с размерами отверстия, то вблизи отверстия возникает коллективное движение молекул газа, которое следует рассматривать как гидродинамическое течение, обусловленное разностью давлений в сосуде и вне его. В другом крайнем случае, когда размеры отверстия (его диаметр и толщина стенки сосуда) малы, столкновения молекул в окрестности отверстия практически не происходят. Возникающий поток молекул газа называют эффузионным потоком. Его величина определяется формулой

$$j = S n \bar{v} / 4,$$

где S – площадь отверстия. Если имеется встречный поток того же газа, то суммарный поток равен

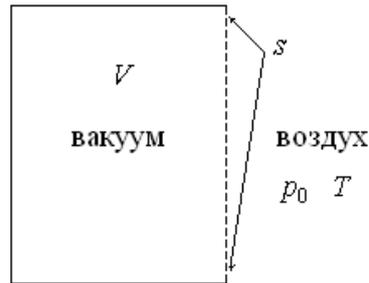
$$j = S (n_1 \bar{v}_1 - n_2 \bar{v}_2) / 4 = C S / \sqrt{m} \cdot (p_1 / \sqrt{T_1} - p_2 / \sqrt{T_2}),$$

где $C = 1 / \sqrt{2\pi k}$. В случае, когда газ по обе стороны от малого отверстия поддерживается при разных температурах, условие механического равновесия принимает вид $n_1 \bar{v}_1 = n_2 \bar{v}_2$, или $n_1 / n_2 = \sqrt{T_2 / T_1}$, или $p_1 / p_2 = \sqrt{T_1 / T_2}$, т. е. давление по обе стороны от

отверстия будет разное. Это явление называют тепловой эффузией, или эффектом Кнудсена.

Явления переноса в ультраразреженном газе (задачи)

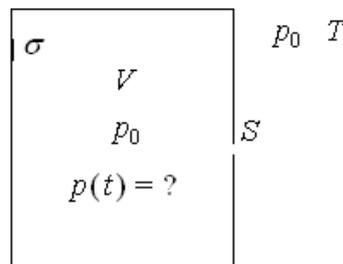
2.42. В тонкостенном вакуумированном сосуде емкостью $V = 1$ л возникла течь через малые отверстия (поры) общей площадью $s = 10^{-6}$ см². Найти, как будет возрастать давление в сосуде. Через какие времена t_1 и t_2 оно будет равно $p_1 = 10^{-2}$ мм рт. ст., p_2 – половине атмосферного? Температура и давление наружного воздуха равны $T = 20$ °С, $p_0 = 760$ мм рт. ст.



Ответ: $p = p_0(1 - \exp(-t/\tau))$, $\tau = 4V/(s\bar{v})$;

$$t_1 \approx 1,2 \text{ с}, t_2 \approx 17 \text{ ч.}$$

2.43. В тонкостенном сосуде с малым отверстием площадью S на стенку с внутренней стороны нанесен абсорбирующий слой площадью σ .



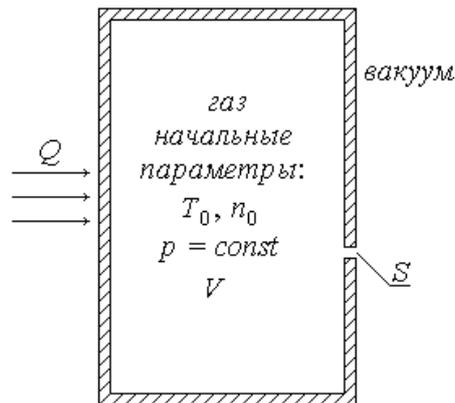
Начальное давление внутри сосуда и снаружи p_0 . Найти зависимость от времени давления газа в сосуде. Объем сосуда V .

Ответ: $p = p_0(S + \sigma \cdot \exp(-t/\tau))/(S + \sigma)$,
где $\tau = 4V/(\bar{v}(S + \sigma))$, \bar{v} – средняя скорость теплового движения молекул.

2.44. В сосуде объемом V находится N молекул идеального газа с сечением столкновения σ . В стенке сосуда открывается в вакуум малое отверстие площадью S . Найти число взаимных столкновений молекул в сосуде до полного выхода газа. Температура газа в сосуде поддерживается постоянной.

Ответ: $\nu = \sqrt{2}N^2 \frac{\sigma}{S}$.

2.45. В сосуде объемом V , содержащем газ, проделано небольшое отверстие площадью S . Снаружи сосуда поддерживается вакуум. Начальная температура газа T_0 , его плотность n_0 . Сосуд подогревают таким образом, что в нем все время поддерживается постоянное давление газа. За какое время газ покинет сосуд?

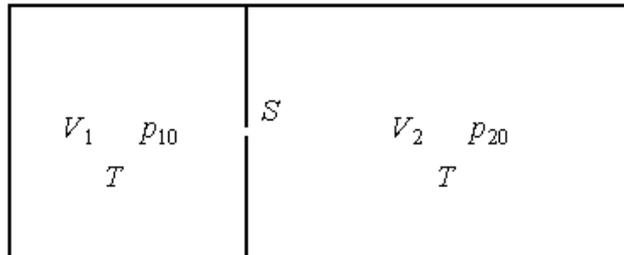


Ответ: $t = \frac{2Vn_0}{j_0 S} = \frac{8V}{\bar{v}_0 S}$.

2.46. В замкнутом сосуде объемом 1 л при комнатной температуре и начальном давлении 10^{-4} мм рт. ст. находится водород. В момент времени $t = 0$ в нем мгновенно нагревают до яркого свечения проволочную спираль общей площадью поверхности $0,2 \text{ см}^2$. Молекулы водорода при ударах о раскаленную спираль диссоциируют. Образовавшиеся нейтральные атомы водорода при контактах со стенками сосуда оседают на них (абсорбируются). Как изменяется давление в сосуде со временем t ? Через какое время давление в сосуде упадет до значения 10^{-7} мм рт. ст.? Влияние нагретой спирали на температуру газа можно не учитывать.

Ответ: $\bar{\lambda} \gg \sqrt[3]{V}$, $p = p_0 \exp(-t/\tau)$, $\tau = 4V/(s\bar{v})$; $t \approx 0,78 \text{ с}$.

2.47. Тонкостенный сосуд разделен перегородкой на две части объемом V_1 и V_2 . В обеих частях находится один и тот же газ при одинаковой температуре и при начальных давлениях p_{10} и p_{20} . В перегородке возникает малое отверстие площадью $S \ll \lambda^2$ (λ – средняя длина свободного пробега молекул). Как изменяются давления p_1 и p_2 со временем?

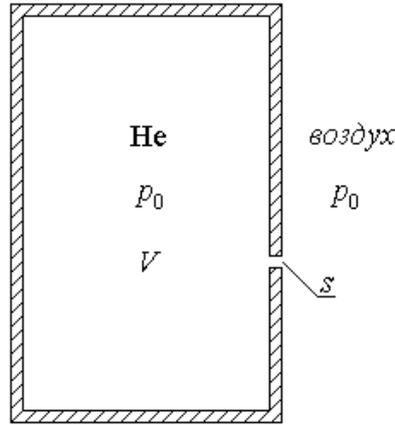


Ответ: $p_1 = (p_{10}V_1 + p_{20}V_2 + (p_{10} - p_{20})V_2 \cdot \exp(-t/\tau))/(V_1 + V_2)$,

$$p_2 = (p_{10}V_1 + p_{20}V_2 - (p_{10} - p_{20})V_1 \cdot \exp(-t/\tau))/(V_1 + V_2),$$

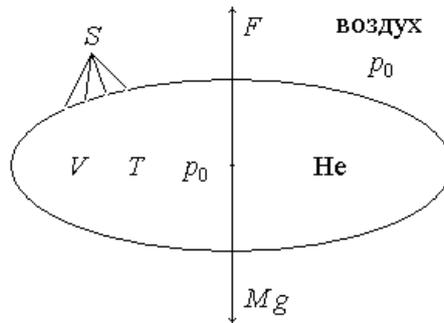
где $\tau = 4V_1V_2/(\bar{v}(V_1 + V_2)S)$.

2.48. В тонкостенном сосуде с гелием объемом V имеется малое отверстие площадью s . Как будет изменяться давление внутри сосуда, если вначале оно равно давлению окружающего воздуха?



Ответ: $p = p_0 (1 + \exp(-t/\tau_{\text{He}}) - \exp(-t/\tau_{\text{возд}}))$, $\tau = 4V/(s\bar{v})$.

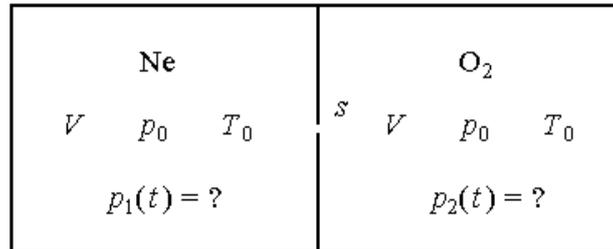
2.49. Через поры оболочки дирижабля с жестким каркасом происходит утечка гелия. Как будет изменяться подъемная сила дирижабля во времени? Объем V и масса M дирижабля заданы. Известна общая площадь пор S . Начальное давление гелия равно атмосферному p_0 . Температура газа в оболочке постоянна и равна температуре T наружного воздуха.



Ответ: $F = p_0 V / RT \cdot g(\mu_{\text{возд}}(1 - p_{\text{возд}}/p_0) - \mu_{\text{He}} p_{\text{He}}/p_0) - Mg$,

$$p_{\text{He}} = p_0 \cdot \exp(-t/\tau_{\text{He}}), p_{\text{возд}} = p_0(1 - \exp(-t/\tau_{\text{возд}})).$$

2.50. Сосуд разделен перегородкой на две равные части объемом V каждая. В одной части (первой) находится неон ($A_{\text{Ne}} = 20$), в другой – кислород ($M_{\text{O}_2} = 32$) при одинаковых давлениях p_0 и температурах T_0 .

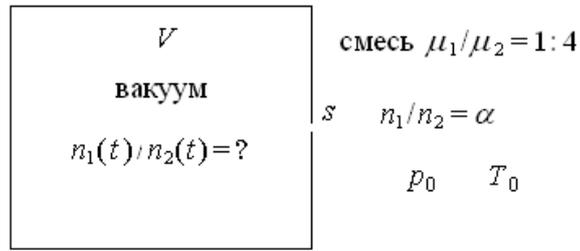


В момент $t = 0$ в перегородке открывается малое отверстие площади s . Найти давление в обеих частях сосуда в зависимости от времени. Температуру газа во все время процесса считать неизменной.

Ответ: $p_1 = p_0(1 + 1/2 \cdot \exp(-t/\tau_{\text{Ne}}) - 1/2 \cdot \exp(-t/\tau_{\text{O}_2}))$;

$$p_2 = p_0(1 - 1/2 \cdot \exp(-t/\tau_{\text{Ne}}) + 1/2 \cdot \exp(-t/\tau_{\text{O}_2})), \tau = 2V/(s\bar{v}).$$

2.51. Полностью эвакуированный тонкостенный сосуд помещен в атмосферу, состоящую из смеси двух газов, молекулярные массы которых относятся как 1 : 4, а отношение концентраций равно α . Эта смесь, поддерживаемая при постоянных давлении и температуре, через образовавшееся малое отверстие проникает в сосуд. Найти максимальное и минимальное значения отношения концентраций легкой и тяжелой компонент смеси в сосуде и моменты времени, когда достигаются эти значения.



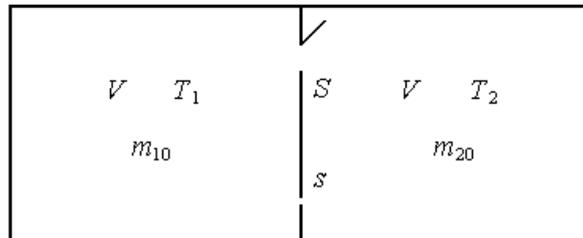
Ответ: $\beta = n_1/n_2 = \alpha(1 - \exp(-t/\tau_1))/(1 - \exp(-t/\tau_2))$;

$$\beta_{\max} = 2\alpha \text{ при } t = 0, \beta_{\min} = \alpha \text{ при } t = \infty.$$

2.52. В сосуде с газом поддерживается постоянная температура T_0 . Вне сосуда давление газа равно p_1 , а температура – T_1 . Чему равно давление в сосуде p_0 , если в стенке имеется небольшое отверстие? Газ внутри и вне сосуда является разреженным.

Ответ: $p_0 = p_1\sqrt{T_0/T_1}$.

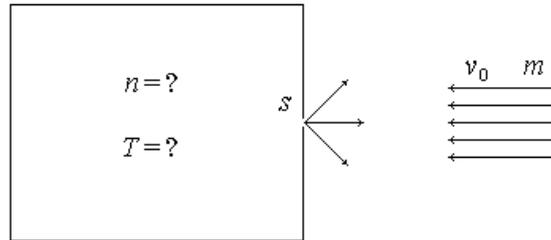
2.53. Сосуд разделен перегородкой на два равных объема. В перегородке имеются два отверстия – малое и большое по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа, заполняющего сосуд. Газ в первом объеме поддерживается при постоянной температуре $T_1 = 800$ К, а во втором сосуде – при $T_2 = 200$ К.



В каком направлении будет перетекать газ через малое отверстие, если перекрыть большое? Какая масса Δm газа перейдет при этом из одного объема в другой, если общая масса газа в сосуде равна m ?

Ответ: $\Delta m = m_1 - m_{10} = 2m/15$.

2.54. На малое отверстие в стенке сосуда, помещенного в вакуум, направляется параллельный с плотностью n_0 пучок атомов, летящих с одинаковой скоростью v_0 , перпендикулярной к плоскости отверстия. В результате столкновений друг с другом и со стенками в сосуде устанавливается максвелловское распределение скоростей. Определить плотность числа частиц n и температуру T газа в сосуде в стационарном случае. Теплопроводностью стенок пренебречь.

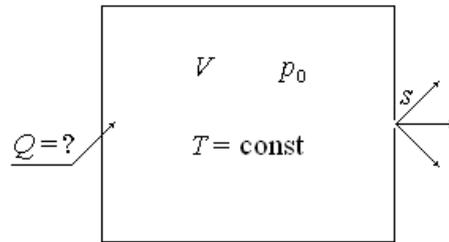


Ответ: $n = 2\sqrt{2\pi} n_0$, $\kappa T = mv_0^2/4$.

2.55. Два сосуда расположены в вакууме. В них проделаны небольшие отверстия: в первом площадью σ , во втором радиусом r . Отверстия расположены друг против друга на расстоянии L , причем $r/L \ll 1$. В первом сосуде находится идеальный одноатомный газ. Его температура T и концентрация n_0 поддерживаются постоянными. Какая стационарная концентрация газа установится во втором сосуде, если его температура также равна T ?

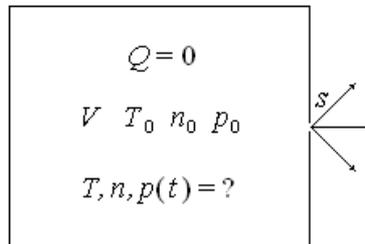
Ответ: $n = n_0 \frac{\sigma}{\pi L^2}$.

2.56. Из сосуда объемом V газ истекает в вакуум через малые отверстия общей площадью s . Как во времени нужно подводить тепло к газу, чтобы его температура оставалась неизменной? Начальное давление газа p_0 .



Ответ: $Q = p_0 s \bar{v} / 8 \cdot \exp(-t/\tau)$, $\tau = 4V/(s \bar{v})$.

2.57. Из адиабатически изолированного сосуда гелий через малые отверстия истекает в вакуум.



Найти временную зависимость температуры T , плотности числа частиц n и давления p в сосуде. За какое время давление уменьшится в 10 раз, если объем сосуда $V = 1$ л, начальная температура гелия $T_0 = 300$ К, суммарная площадь отверстий $s = 0,01$ мм²?

Ответ: $T = T_0/(1 + \gamma t)^2$, $n = n_0/(1 + \gamma t)^6$, $p = p_0/(1 + \gamma t)^8$,

$$\gamma = \bar{v}_0 s / (24V), \quad \bar{v}_0 = (8\kappa T_0 / \pi m)^{1/2}, \quad t_{10} = 10,5 \text{ мин.}$$

2.58. Между двумя параллельными пластинами, поддерживаемыми при температуре 300 и 600 К, находится азот ($d = 3,8 \text{ \AA}$), расстояние между пластинами 10 см. Построить график потока тепла в зависимости от давления.

2.59. Один из приборов для измерения давления, используемых в вакуумной технике, называется термодарным манометром. Он состоит из проволоки, протянутой по оси цилиндрической трубки, содержащей газ, давление которого надо измерить. По проволоке пропускается электрический ток, и температура проволоки, которая зависит от теплопроводности окружающего ее газа, измеряется при помощи термопары, присоединенной к проволоке. Дать оценку интервала давлений, в котором прибор может работать, если радиус трубки около 1 см. Считать, что эффективный диаметр «молекулы воздуха» равен $4,2 \text{ \AA}$.

$$\text{Ответ: } 2kT_{\infty}RI^2/(\pi r l \bar{v} c_V (T_0 - T_{\infty})) < p < kT_{\infty}/(\sqrt{2} \pi d^2 r).$$

2.60. В плохо откачанном сосуде Дюара давление воздуха, оставшегося между стенками, равно $p_0 = 10^{-3}$ мм рт. ст. при комнатной температуре $T_0 = 293$ К. Поверхность сосуда $s = 600 \text{ см}^2$, зазор между стенками $l = 0,4$ см. Оценить массу M жидкого воздуха, испаряющегося из такого сосуда за время $t = 1$ ч. Теплота испарения жидкого воздуха $q = 48,4$ кал/г, его температура $T = 93$ К.

$$\text{Ответ: } M = 3p_0 \bar{v}_0 s t / 2q \cdot ((T/T_0)^{1/2} - T/T_0) \approx 24 \text{ г.}$$

2.61. Между параллельными пластинками, одна из которых движется вдоль самой себя со скоростью v_0 , находится азот при комнатной температуре. Найти зависимость от давления силы τ , действующей на единицу площади каждой из пластин. Краевыми эффектами пренебречь. Расчеты провести для $v_0 = 10$ м/с, $h = 1$ см (расстояние между пластинами), $d = 3,8 \text{ \AA}$ (газокинетический диаметр молекул азота).

$$\text{Ответ: } \tau = \text{const} = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ н/м}^2 \text{ при } p \gg p_0 = 0,6 \text{ н/м}^2;$$

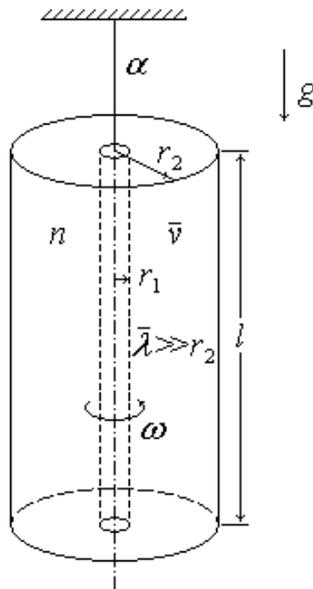
$$\tau = 1,25 \cdot 10^{-2} p \text{ при } p \ll p_0.$$

2.62. Предполагая, что при столкновении со стенкой частицы с вероятностью α (коэффициент аккомодации) приобретают свойства, характерные для стенки (например, температуру), а с вероятностью $(1 - \alpha)$ испытывают упругое столкновение, получить выражения для силы трения и плотности потока тепла между параллельными пластинами, разделенными ультраразреженным газом.

Ответ: $F = \alpha/(2 - \alpha) \cdot n \bar{v} / 4 \cdot m(v_2 - v_1)S$;

$$q = \alpha/(2 - \alpha) \cdot n \bar{v}_1 \bar{v}_2 / (2(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)) \cdot (c_V + k/2)(T_2 - T_1).$$

2.63. Определить, на какой угол φ повернется пустотелый цилиндр, подвешенный на упругой нити, если расположенный внутри соосно с ним другой цилиндр вращается с угловой скоростью ω .



Радиус внутреннего цилиндра r_1 . Цилиндры имеют одинаковую длину l . Модуль кручения нити равен α (момент сил определяется формулой $M = \alpha\varphi$). Краевыми эффектами пренебречь. Плотность газа равна n . Масса молекулы m , средняя скорость теплового движения \bar{v} . Длина свободного пробега $\bar{\lambda} \gg r_2$, r_2 – радиус внешнего цилиндра.

Ответ: $\varphi = \frac{\pi mn\bar{v}\omega}{2\alpha} r_1^3 l$.

2.64. Диск из задачи 2.33 помещены в камеру, из которой воздух откачивается до давления $p = 10^{-4}$ мм рт. ст. Каков угол поворота верхнего диска в этом случае?

Ответ: $\varphi = \omega R^4 / (\alpha \bar{v}) \cdot p \approx 0,015$ рад.

2.65. В сосуд, заполненный ультраразреженным газом с давлением p , помещены две параллельные пластинки, одна из которых (первая) имеет температуру сосуда T_1 , а другая нагрета до температуры $T_2 > T_1$. Оценить силу, действующую на пластинку 1 (s – площадь пластинки).

Ответ: $F = ap((T_2/T_1)^{1/2} - 1)s$, $a \sim 1$.

2.66. Диск радиусом r движется с малой скоростью v , перпендикулярной к диску, в ультраразреженном газе, имеющем температуру T и давление p . Найти силу сопротивления движению диска в предположении, что отражение молекул от поверхности происходит диффузно с коэффициентом аккомодации, равным 1.

Ответ: $F \approx (1 + \pi/4)mn\bar{v} v \pi r^2$.

2.67. Найти величину скорости v , с которой в сильно разреженном воздухе будет двигаться плоский диск; одна его

сторона нагрета до температуры $T_1 = 310$ К, а другая – до $T_2 = 300$ К. Температура воздуха комнатная.

Ответ: $v \approx \pi(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)/(4(4 + \pi)) \approx 85$ см/с.

2.68. Рассчитать момент сил M , действующий на вращающееся с небольшой угловой скоростью ω зеркальце, подвешенное на нити в сильно разреженном газе. Масса единицы площади зеркальца μ , момент инерции его I . Считать, что молекулы газа, сталкиваясь с зеркальцем, испытывают абсолютно упругое отражение.

Ответ: $M = -2mn\bar{v}(I/\mu)\omega$.

Броуновское движение

2.69. Найти функцию распределения возможных положений броуновской частицы и среднеквадратичное ее смещение спустя время t ($x(0) = 0$), используя следующую модель. Частица движется со скоростью v вдоль оси x , совершая свободные пробеги λ . После каждого соударения частица с равной вероятностью может либо продолжать движение, либо повернуть обратно. Рассмотреть предельный случай больших t .

Ответ: $dw(x, t) = (2\pi\lambda vt)^{-1/2} \exp(-x^2/(2\lambda vt)) dx$;

$$\left(\overline{x^2}\right)^{1/2} = (\lambda vt)^{1/2}.$$

2.70. При обработке экспериментальных данных, относящихся к броуновскому движению, удобнее и проще вычислять не $\overline{\Delta x^2}$, а $|\overline{\Delta x}|$. Предположив, что распределение смещений Δx подчиняется

закону ошибок Гаусса, найти выражение для среднего смещения броуновской частицы $\overline{|\Delta x|}$ за время t . Подвижность β -частиц известна.

$$\text{Ответ: } \overline{|\Delta x|} = (2 \overline{\Delta x^2} / \pi)^{1/2} = 2(kT\beta t / \pi)^{1/2}.$$

2.71. Определить среднеквадратичное горизонтальное перемещение зерен гуммигута в воде при $T = 20^\circ\text{C}$ за $t = 1$ мин. Радиус зерен гуммигута $r = 0,5$ мкм, вязкость воды $\eta = 0,01$ дин·с/см². Подвижность сферических частиц согласно Стоксу равна $\beta = (6\pi\eta r)^{-1}$.

$$\text{Ответ: } \left(\overline{\Delta r^2}\right)^{1/2} = (2kTt/(3\pi\eta r))^{1/2} \approx 10 \text{ мкм.}$$

2.72. Капелька масла массой $m = 10^{-10}$ г падает в воздухе с высоты $h = 1$ м, совершая при этом броуновское движение. Найти среднеквадратичное отклонение капельки от ожидаемой точки падения, если температура воздуха $T = 300$ К.

$$\text{Ответ: } \left(\overline{\Delta r^2}\right)^{1/2} = 2(kTh/mg)^{1/2} \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

2.73. В опытах Милликена наблюдалось броуновское движение масляных капель в жидкости, находящейся между обкладками конденсатора. Были измерены величины: v_1 – скорость установившегося падения капли при отсутствии электрического поля; v_2 – скорость подъема капли в электрическом поле напряженности E ; $\overline{\Delta x^2}$ – средний квадрат смещения капли за время t в направлении горизонтальной оси. Найти по этим данным произведение заряда капли q на число Авогадро N_A .

Ответ: $qN_A = 2RT(v_1 + v_2)t / (\overline{\Delta x^2} E)$.

2.74. Космические лучи блуждают в Галактике, отклоняясь в межзвездных магнитных полях. Этот процесс подобен диффузии. Найти время t , за которое частицы пройдут путь порядка размеров Галактики $r \approx 5 \cdot 10^{22}$ см, если эффективная длина свободного пробега $\lambda \approx 3 \cdot 10^{20}$ см.

Ответ: $t = r^2 / 2\lambda c \approx 4,4 \cdot 10^6$ лет (c – скорость света).

ЧАСТЬ 3

ТЕРМОДИНАМИКА

Уравнение состояния реального газа (теория)

Термическое уравнение состояния связывает обобщенные силы с внешними параметрами, являющимися обобщенными координатами, и с температурой. Для сжимаемых сред (газов, жидкостей) термическое уравнение состояния связывает давление, объем и температуру. В общем виде это уравнение можно записать следующим образом:

$$f(p, V, T) = 0.$$

Для идеального газа термическим уравнением состояния является уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$pV = \nu RT, \text{ или } p = \nu RT / V.$$

Здесь ν – число молей газа, $R = 8,314$ Дж / (моль · К) – универсальная газовая постоянная (одна и та же для всех газов).

Реальные газы лишь приблизительно следуют уравнению Клапейрона – Менделеева. Существует ряд моделей, учитывающих реальные свойства газов. Наиболее известной является модель газа Ван-дер-Ваальса. Уравнение Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$p = \nu RT / (V - \nu b) - a\nu^2 / V^2,$$

где a и b – постоянные, различные для конкретных газов. В этом уравнении учитывается конечный размер молекул и их взаимодействие. Модель описывает жидкие и газообразные состояния вещества, а также переход жидкости в газ, и наоборот.

Термическое уравнение состояния нельзя получить из общих принципов термодинамики. Оно заимствуется из опыта либо статистической физики.

Макроскопическая система необязательно может характеризоваться давлением и объемом, но также и другими параметрами. Например, гальванический элемент характеризуется эдс E и проходящим зарядом e (уравнение состояния в этом случае может иметь вид $E = E(T)$); мыльная или иная пленка – поверхностным натяжением σ и площадью Σ (уравнение состояния будет $\sigma = \sigma(T)$) и т. д.

Уравнение состояния реального газа (задачи)

3.1. Найти давление, температуру и объем газа в критической точке и установить связь между найденными величинами, если состояние газа описывается уравнением Ван-дер-Ваальса.

$$\text{Ответ: } p_k = a/(27b^2), T_k = 8a/(27Rb), V_k = 3b \nu,$$

$$S = \nu RT_k/(p_k V_k) = 8/3.$$

3.2. Приняв за единицы измерения критические значения параметров газа, записать уравнение Ван-дер-Ваальса в приведенных переменных $\pi = p/p_k$, $\tau = T/T_k$, $\varphi = V/V_k$.

$$\text{Ответ: } (\pi + 3/\varphi^2)(3\varphi - 1) = 8\tau.$$

3.3. Найти критические значения параметров газа, подчиняющегося уравнению состояния Дитеричи:

$$p = \nu RT/(V - b\nu) \cdot \exp(-a\nu/(RTV)).$$

Записать уравнение состояния в универсальной форме закона соответственных состояний.

$$\text{Ответ: } p_k = a/(4e^2b^2), T_k = a/(4Rb), V_k = 2b \nu, S = \nu RT_k/(p_k V_k) = e^2/2;$$

$$\pi = \tau/(2\varphi - 1) \cdot \exp(2 - 2/(\tau\varphi)).$$

Работа и количество теплоты. Первое начало термодинамики (теория)

Реальные процессы в системе, происходящие под действием контакта с другой системой, неравновесные. Но в ряде случаев они моделируются равновесными процессами.

Процесс называется равновесным, или квазистатическим, если все параметры системы изменяются физически бесконечно медленно, так что система все время находится в равновесных состояниях. Если Δt – характерное время изменения внешних параметров, а τ – время релаксации (время, характеризующее самопроизвольный переход системы в равновесное состояние), то процесс можно считать равновесным при выполнении условия $\Delta t \gg \tau$. В этом случае система будет проходить через непрерывную последовательность равновесных состояний.

Важнейшими равновесными процессами являются:

1) *изотермический* процесс, когда система находится в тепловом контакте с термостатом, и изменения в ней происходят квазистатически при постоянной температуре термостата;

2) *адиабатический* процесс, когда медленные изменения происходят при отсутствии теплового (и материального) контакта с окружающей средой.

Рассматриваются также другие равновесные процессы: изохорический, изобарический и т. д.

Неравновесные процессы возникают при быстром изменении внешних условий, при наличии значительной начальной неоднородности в распределении параметров. Помимо релаксационного, неравновесными процессами являются, например, разлет газа в пустоту, теплообмен между телами с различной температурой и др.

Равновесные процессы являются абстракцией. Изучение их важно, так как именно при этих процессах ряд представляющих интерес величин (работа, КПД тепловых машин и др.) имеет предельные, максимально возможные значения. Поэтому выводы термодинамики для равновесных процессов играют роль своего рода предельных теорем.

Первое начало термодинамики – это закон сохранения энергии в приложении к тепловым явлениям. При переходе системы из начального состояния 1 в конечное состояние 2 получаемая системой от окружающей среды сумма работы A' , теплоты Q и энергии переноса массы Z определяется только состояниями 1 и 2 и не зависит от того, каким способом осуществляется переход.

Это означает, что существует такая величина U , характеризующая внутреннее состояние системы, что разность ее значений в состояниях 1 и 2 определяется соотношением

$$U_2 - U_1 = A' + Q + Z.$$

Функция U представляет собой внутреннюю энергию системы.

Это математическое выражение первого начала термодинамики при конечных изменениях в системе. Изменение внутренней энергии системы происходит за счет работы внешних сил A' , подвода к системе теплоты Q от внешних тел и за счет энергии переноса массы Z . Сумма в правой части соотношения является алгебраической. Каждое слагаемое может быть как положительным, так и отрицательным. Для закрытой системы $Z = 0$.

Для равновесных процессов вместо работы над системой обычно рассматривается работа A самой системы. Тогда первое начало для закрытых систем записывается так:

$$Q = \Delta U + A.$$

Для бесконечно малого процесса (естественно, равновесного) уравнение принимает вид

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Первое начало термодинамики устанавливает существование у всякой равновесной системы функции состояния – внутренней энергии.

Для равновесного кругового процесса можно записать:

$$\oint dU = 0.$$

Это означает, что дифференциал dU внутренней энергии полный.

Внутренняя энергия U является функцией температуры T и внешних параметров x_i ($i = 1, \dots, n$):

$$U = U(T, x_1, \dots, x_n).$$

Это калорическое уравнение состояния. Оно устанавливается опытным путем. Его можно получить методами статистической физики. Для газов калорическое уравнение состояния имеет вид

$$U = U(T, V).$$

В результате опытов Гей-Люссака и Джоуля установлен закон Джоуля о независимости внутренней энергии идеального газа от объема.

Элементарная работа над газом вычисляется по формуле

$$\delta A' = -p_e dV,$$

где p_e – внешнее давление (предполагается, что других внешних сил, кроме сил давления, нет). Если процесс расширения (сжатия) равновесный, то давление газа равно наружному: $p = p_e$ и работа системы (газа) равна

$$\delta A = p dV.$$

При изменении объема от V_1 до V_2 работа газа в равновесном процессе выражается интегралом

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Работа системы не определяется только начальным и конечным состояниями, а зависит еще от процесса перехода.

Теплота Q передается системе без изменения внешних параметров. Как и работа, количества теплоты и энергии переноса массы зависят от процесса.

Величину

$$c_x = \delta Q/dT$$

называют теплоемкостью системы для такого процесса. Теплоемкость определяет количество теплоты, необходимое для изменения температуры на 1 К. Когда масса тела равна единице, теплоемкость называют удельной. Чаще используют молярную теплоемкость. Численно величина c_x изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ (в зависимости от x).

С определением теплоемкости тесно связано понятие о термостате. Термостат – тело с настолько большой теплоемкостью ($c \rightarrow \infty$), что его температура при теплообмене с какой-либо системой не изменяется.

Если внутреннюю энергию считать функцией переменных T и V , то

$$c_x = (\partial U/\partial T)_V + ((\partial U/\partial V)_T + p)(\partial V/\partial T)_x.$$

При постоянном объеме $c_V = (\partial U/\partial T)_V$. При постоянном давлении

$$c_p = c_V + ((\partial U/\partial T)_V + p)(\partial V/\partial T)_p.$$

Для идеального газа имеет место соотношение Майера:

$$c_p - c_V = R.$$

Оно получено для идеального газа и, следовательно, справедливо лишь для него. Для реальных газов соотношение Майера можно применять только приближенно (при невысоких давлениях).

Работа и количество теплоты. Первое начало термодинамики

(задачи)

3.4. Идеальный газ расширяется от объема V_1 до V_2 . Процесс происходит: 1) изобарически, 2) изотермически, 3) адиабатически. Начертить графики этих процессов на (p, V) - и (U, V) -диаграммах. Определить:

- а) при каком процессе произведенная газом работа наименьшая;
- б) знак приращения внутренней энергии газа ΔU при каждом процессе.

Ответ: а) при адиабатическом;

б) при изобарическом расширении $\Delta U > 0$, при изотермическом $\Delta U = 0$, при адиабатическом $\Delta U < 0$.

3.5. Температура одного моля идеального газа повышается от T_1 до T_2 . Процесс происходит: а) изохорически, б) изобарически, в) адиабатически. Построить графики этих процессов на (p, V) -диаграмме. Вычислить совершенную газом работу, количество подведенной к нему теплоты и изменение внутренней энергии газа при каждом процессе.

Ответ: а) $A = 0$, $Q = \Delta U = c_v \Delta T$;

б) $A = R \Delta T$, $Q = c_p \Delta T$, $\Delta U = c_v \Delta T$;

в) $A = -c_v \Delta T$, $Q = 0$, $\Delta U = c_v \Delta T$, где $\Delta T = T_2 - T_1$.

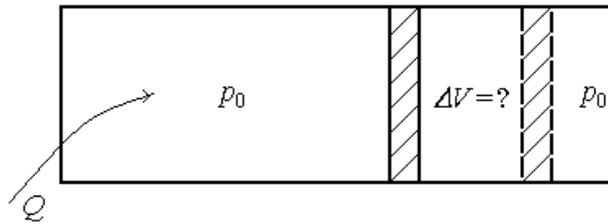
3.6. Внутри закрытого с обеих сторон термостатированного цилиндрического сосуда находится подвижный поршень. Первоначально поршень делит сосуд на равные части объемом V_0 , каждая из которых заполнена идеальным газом одинаковой температуры с одним и тем же давлением p_0 . Какую работу нужно совершить, чтобы, медленно двигая поршень, изотермически увеличить отношение объемов одной части к другой в η раз?

Ответ: $A' = p_0 V_0 \ln \frac{(1+\eta)^2}{4\eta}$.

3.7. Определить, какая часть тепла, подводимого к идеальному двухатомному газу в изобарическом процессе, расходуется на работу, а какая часть – на изменение внутренней энергии.

Ответ: $A/Q = 1 - \Delta U/Q = 2/7$.

3.8. Одноатомный идеальный газ находился в состоянии с давлением p_0 . При подведении к нему тепла Q он изобарически расширился. На сколько при этом изменился объем газа?



Ответ: $\Delta V = \frac{2Q}{5p_0}$.

3.9. Одноатомный идеальный газ адиабатически расширился от объема V до объема $2V$. Как изменится средняя скорость теплового движения молекул?

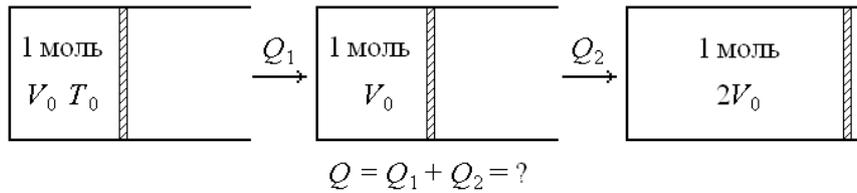
Ответ: $\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

3.10. Моль идеального газа изобарически нагрели на ΔT , сообщив ему количество тепла Q . Найти приращение внутренней

энергии ΔU и показатель адиабаты γ . Теплоемкость c_V не зависит от температуры.

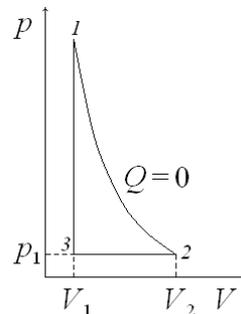
Ответ: $\Delta U = c_V \Delta T$, $\gamma = Q / (Q - R \Delta T)$.

3.11. Один моль одноатомного идеального газа с температурой T_0 находится в цилиндре объемом V_0 , закрытом поршнем. Поршень удерживается на месте за счет силы трения. Газ начинают медленно подогревать. При температуре газа, равной T_1 , поршень приходит в движение и движется до тех пор, пока объем не удвоится. Найти подведенное к системе тепло. Считать, что в процессе движения поршня сила трения постоянна.



Ответ: $Q = \frac{1}{2} R (8T_1 - 3T_0)$.

3.12. Один моль идеального газа свободно (и без подвода тепла) расширяется до некоторого объема. Затем он квазистатически при постоянном давлении сжимается до начального объема.



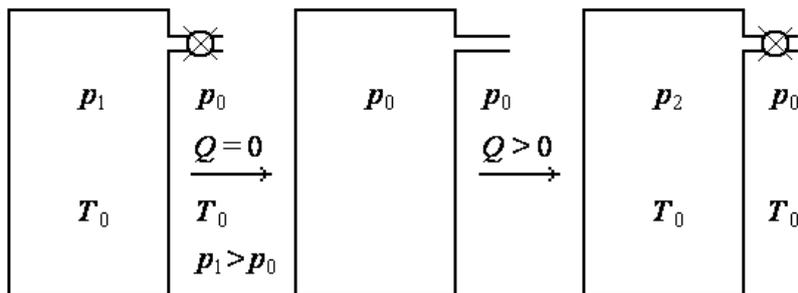
Наконец, газ медленно нагревается при постоянном объеме до тех пор, пока его давление не станет равным начальному. Этот цикл называется циклом Майера. С его помощью доказать соотношение Майера $c_p = c_v + R$. Молярную теплоемкость считать постоянной.

3.13. Для одного моля идеального газа рассмотреть следующие равновесные процессы: изохорический, изобарический, изотермический, адиабатический и политропический. Получить уравнение каждого процесса в переменных p, V : $f(p, V) = \text{const}$. Вычислить: работу A , совершенную газом; количество теплоты Q , полученное им; изменение внутренней энергии ΔU ; теплоемкость c . Считать молярные теплоемкости c_p и c_v известными и постоянными.

Ответ:

№	f	A	Q	ΔU	c
1	V	0	$c_v \Delta T$	$c_v \Delta T$	c_v
2	p	$R \Delta T$	$c_p \Delta T$	$c_v \Delta T$	c_p
3	pV	$\frac{RT}{\ln(V_2/V_1)}$	$\frac{RT}{\ln(V_2/V_1)}$	0	$\pm \infty$
4	pV^γ	$-C_v \Delta T$	0	$c_v \Delta T$	0
5	pV^n	$(c - c_v) \Delta T$	$c \Delta T$	$c_v \Delta T$	c

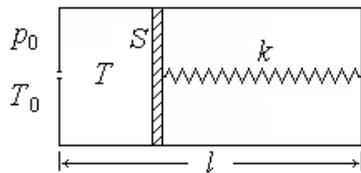
3.14. Из сосуда, в котором находится газ при комнатной температуре и под давлением p_1 , большим атмосферного p_0 , приоткрыв кран, выпускают газ, пока избыток давления не исчезнет.



Затем кран закрывают и, после того как температура в сосуде вновь станет комнатной, измеряют давление в сосуде p_2 . Как по этим данным найти показатель адиабаты газа γ ? Тот же вопрос для случая, когда в сосуде вначале был воздух под давлением $p_1 < p_0$. Истечение считать квазистационарным.

Ответ: $\gamma = (p_1 - p_0)/(p_1 - p_2)$ при малом перепаде давления $|p_1 - p_0| \ll p_0$.

3.15. В откачанный адиабатически изолированный сосуд из атмосферы просачивается газ и двигает поршень, подпираемый пружиной. Какая температура установится в сосуде, если равновесная длина пружины l равна длине сосуда и коэффициент упругости удовлетворяет условию $k > p_0 S/l$ (p_0 , T_0 – атмосферные давление и температура, S – площадь поршня)?



Ответ: $T = \frac{2\gamma}{\gamma+1} T_0$.

3.16. Политропическим называется процесс, происходящий с постоянной теплоемкостью c . Найти уравнение этого процесса для идеального газа, теплоемкость c_V которого не зависит от температуры. Рассмотреть частные случаи: а) $c = c_V$; б) $c = c_p$; в) $c = 0$; г) $c = \infty$.

Ответ: $pV^n = \text{const}$, где $n = (c - c_p)/(c - c_V)$;

а) $V = \text{const}$; б) $p = \text{const}$; в) $pV^\gamma = \text{const}$; г) $pV = \text{const}$.

3.17. При каких значениях показателя политропы n политропическое расширение идеального газа сопровождается:

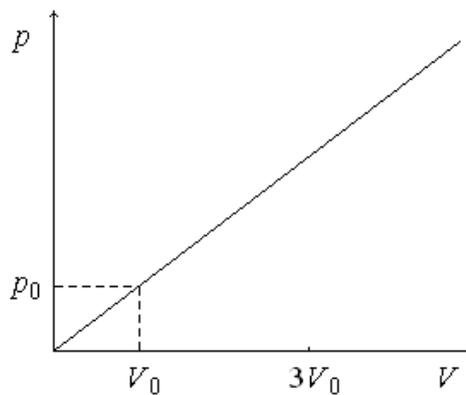
- а) поглощением тепла и нагреванием газа;
- б) поглощением тепла и охлаждением газа;
- в) выделением тепла? За счет какого источника энергии в этом случае газ совершает работу?

Ответ: а) $n < 1$; б) $1 < n < \gamma$;

в) $n > \gamma$, работа совершается за счет внутренней энергии газа.

3.18. Некоторое количество идеального газа расширяется так, что процесс на диаграмме p, V изображается прямой линией, проходящей через начало координат. Известны: начальный объем газа V_0 , начальное давление p_0 и отношение $\gamma = c_p/c_v$. В результате расширения объем газа увеличился в три раза. Найти:

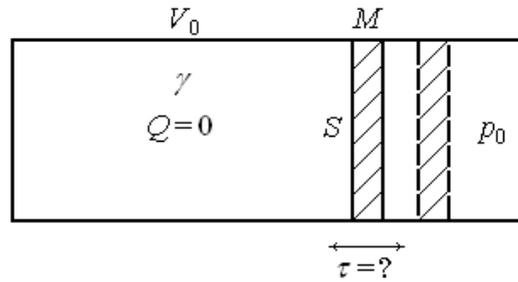
- а) показатель политропы n ;
- б) приращение внутренней энергии ΔU газа;
- в) работу A , совершаемую газом;
- г) молярную теплоемкость c газа при этом процессе.



Ответ: а) $n = -1$; б) $\Delta U = 8p_0V_0/(\gamma - 1)$; в) $A = 4p_0V_0$;

$$\text{г) } c = \frac{\gamma - 1}{2(\gamma + 1)} R.$$

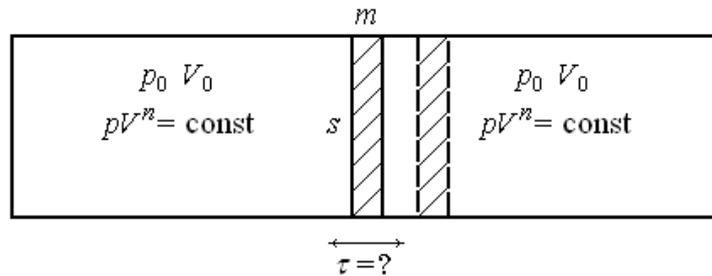
3.19. В горизонтальном, закрытом с одного конца цилиндре площадью S находится подвижный поршень массой M . Закрытая часть цилиндра заполнена идеальным газом с показателем адиабаты γ . Вне цилиндра поддерживается постоянное давление p_0 . В положении равновесия объем газа в цилиндре равен V_0 .



Считая процесс в газе адиабатическим, найти период τ малых колебаний поршня.

Ответ:
$$\tau = \frac{2\pi}{S} \sqrt{\frac{MV_0}{\gamma p_0}}.$$

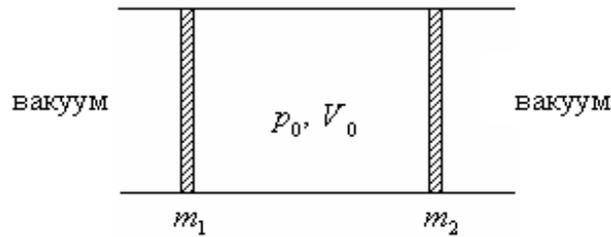
3.20. В цилиндрическом сосуде находится поршень, который может перемещаться без трения. По обе стороны от поршня имеется одинаковое количество одного и того же идеального газа. При равновесном положении поршня давление газа равно p_0 , а объемы – V_0 каждый.



Найти период малых колебаний поршня при отклонении его от положения равновесия. Считать, что объем и давление газа связаны уравнением политропы с показателем n . Масса поршня равна m , его площадь s .

Ответ: $\tau = 2\pi(m V_0/(2n p_0 s^2))^{1/2}$.

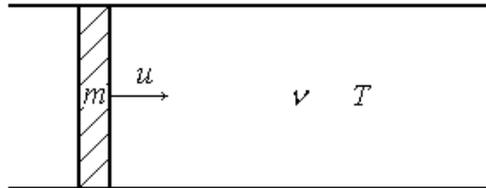
3.21. В цилиндре между двумя подвижными тяжелыми поршнями с массами m_1 и m_2 находится один моль идеального газа объемом V_0 при давлении p_0 .



Найти максимальную скорость поршней, если их отпустить. Трение не учитывать. Подводом теплоты пренебречь.

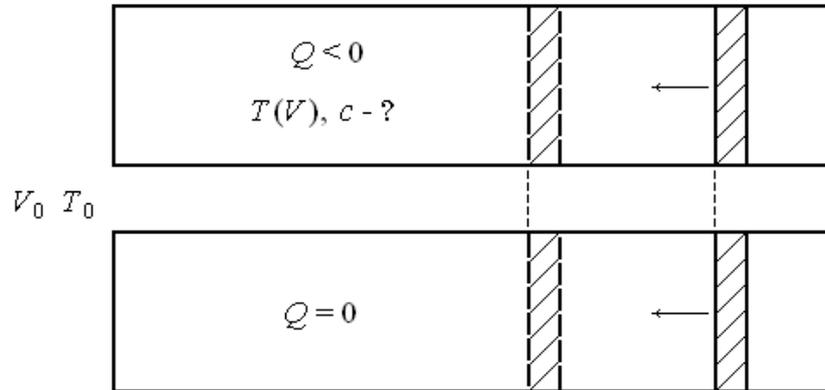
Ответ: $v_1 = -\sqrt{\frac{2p_0V_0}{\gamma-1} \frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{2p_0V_0}{\gamma-1} \frac{m_1}{m_2(m_1+m_2)}}$.

3.22. В цилиндре с поршнем массой m находится ν молей одноатомного идеального газа. Поршень движется с начальной скоростью u , сжимая газ. Эта система помещена в термостат с температурой T . Определить количество тепла, которое газ отдаст термостату.



Ответ: $Q = \frac{mv^2}{2}, \quad \frac{V}{V_0} = \exp\left(-\frac{mv^2}{2\nu RT}\right).$

3.23. Поршень медленно вдвигается в цилиндр. Из-за потерь тепла через стенки изменение температуры газа, находящегося в цилиндре, в два раза меньше, чем в случае отсутствия потерь при смещении поршня на то же расстояние.



Найти уравнение данного процесса. Вычислить соответствующую теплоемкость газа.

Ответ: $T = \frac{1}{2}T_0\left(1 + (V_0/V)^{\gamma-1}\right), \quad c = -\frac{c_V}{2T/T_0 - 1}.$

3.24. С моле идеального газа совершается процесс, в котором $p = kV^3$, где k – известная постоянная. Найти теплоемкость газа в этом процессе. Теплоемкость при постоянном объеме c_V известна.

Ответ: $c = c_V + R/4.$

3.25. В идеальном газе с молярной теплоемкостью $c_V = \text{const}$ происходит процесс, в котором $\exp(\alpha p) = \beta T$ (постоянные $\alpha < 0, \beta < 0$). Найти молярную теплоемкость $c(p, T)$ в этом процессе.

Ответ: $c(p, T) = c_V + R \left(1 - \frac{1}{\alpha p} \right)$.

3.26. В сосуде с поршнем находится 1 моль идеального одноатомного газа. Поршень удерживается пружиной. Найти теплоемкость газа. Объемом газа при ненапряженной пружине пренебречь.



Ответ: $c = 2R$.

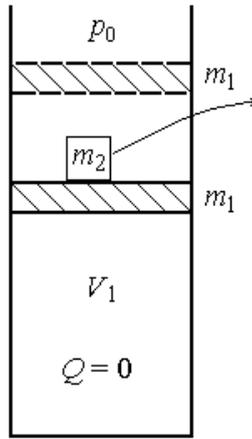
3.27. Молярная теплоемкость идеального газа при некотором процессе изменяется по закону $c = c_V + \alpha p^2$, где α – постоянная. Найти уравнение этого процесса (в переменных T и V).

Ответ: $V^2 = \alpha RT^2 + \text{const}$.

3.28. Молярная теплоемкость идеального газа при некотором процессе изменяется по закону $c = \alpha/T$, где α – постоянная. Найти уравнение этого процесса.

Ответ: $pV^\gamma \cdot \exp(\alpha(\gamma - 1)/pV) = \text{const}$.

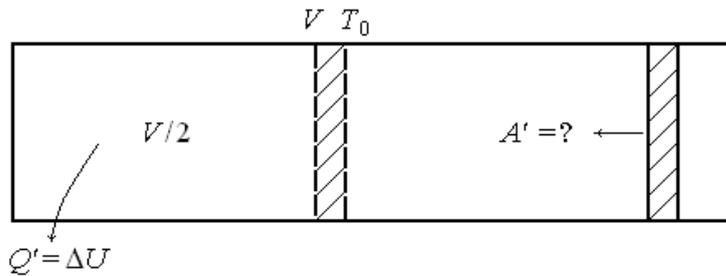
3.29. Газ находится в вертикальном цилиндре под поршнем с грузом. Груз убирается – газ расширяется. Найти работу, совершаемую газом при его расширении. Процесс считать квазистатическим. Стенки цилиндра и поршень не проводят тепло. Масса поршня m_1 , груза m_2 . Площадь поршня S . Начальный объем газа V_1 . Наружное давление p_0 .



Ответ: $A = p_1 V_1 / (\gamma - 1) (1 - (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma})$,

где $p_1 = p_2 + m_2 g/S$, $p_2 = p_0 + m_1 g/S$.

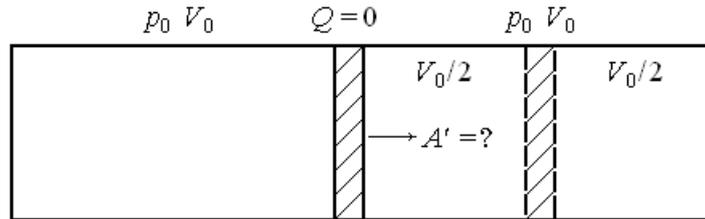
3.30. Идеальный газ сжимается под поршнем в цилиндре так, что уходящее в окружающую среду тепло равно изменению внутренней энергии газа.



Определить работу, затраченную на сжатие моля газа при изменении объема в два раза. Чему равна теплоемкость в этом процессе? Начальная температура газа T_0 .

Ответ: $A' = 2c_V T_0 (2^{(\gamma-1)/2} - 1)$.

3.31. В цилиндрическом сосуде находится поршень, который может перемещаться без трения. Первоначально поршень делит сосуд на части объемом V_0 каждая. Обе половины сосуда заполнены идеальным газом до давления p_0 .



Найти работу, которую нужно совершить, чтобы, медленно двигая поршень, сжать газ в одной из частей сосуда вдвое. Сосуд теплоизолирован. Рассмотреть случаи: а) поршень не проводит тепло; б) поршень проводит тепло.

Ответ: а) $A' = p_0 V_0 / (\gamma - 1) \cdot (2^{\gamma-1} + (2/3)^{\gamma-1} - 2)$;

б) $A' = 2p_0 V_0 / (\gamma - 1) \cdot ((4/3)^{(\gamma-1)/2} - 1)$.

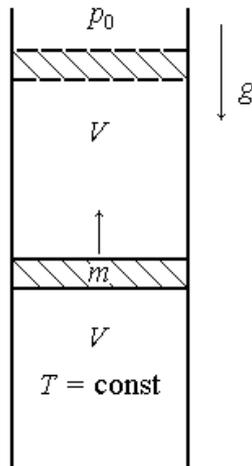
3.32. Какую работу нужно затратить, чтобы надуть автомобильное колесо объемом V от исходного атмосферного давления p_0 до давления p ? Процесс считать: а) изотермическим; б) адиабатическим.

Ответ: а) $A' = pV \ln(p/p_0) - (p - p_0)V$;

$$\text{б) } A' = \frac{pV}{\gamma-1} - \frac{p_0 V}{\gamma-1} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} - p_0 V \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} - 1 \right).$$

3.33. В вертикальном цилиндре под поршнем находится один моль идеального газа. Первоначально его давление на поршень уравновешивается весом последнего и атмосферным давлением.

Затем, действуя на поршень извне, выдвигают его из цилиндра настолько медленно, что температура газа T в цилиндре остается практически постоянной. Найти работу, затраченную при увеличении объема газа в два раза. Трение поршня о стенки не учитывать.



Ответ: $A' = RT \cdot (1 - \ln 2)$.

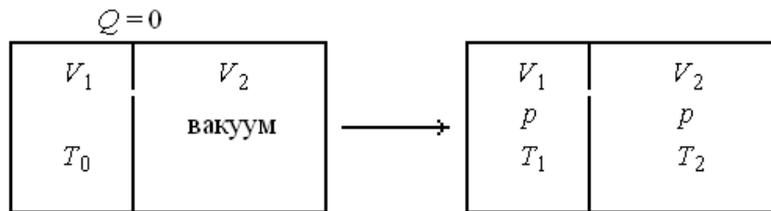
3.34. Найти зависимость давление – удельный объем для идеального газа, в котором при сжатии изменение удельного объема на $1 \text{ см}^3/\text{г}$ сопровождается выделением теплоты q . Построить зависимость $p(V)$.

Ответ: $p = (p_0 + (\gamma - 1)/\gamma q)(V_0/V)^\gamma - (\gamma - 1)/\gamma \cdot q$.

3.35. В комнате в течение некоторого времени был включен нагреватель. При этом температура воздуха поднялась от t_1 до t_2 , давление же его не изменилось и осталось равным давлению снаружи. Считая воздух идеальным газом, найти количество тепла, которое пошло на увеличение внутренней энергии воздуха, находящегося в комнате.

Ответ: $Q = 0$.

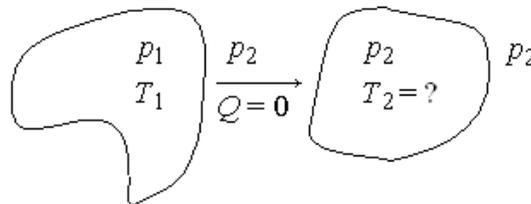
3.36. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две части объемом V_1 и V_2 . В объеме V_1 находится идеальный газ при температуре T_0 , имеющий показатель адиабаты γ . В объеме V_2 вакуум. В перегородке образовалось малое по сравнению с размерами сосуда (но большее по сравнению с длиной свободного пробега молекул) отверстие. В результате газ занял весь объем сосуда. Определить температуры T_1 и T_2 газа в объемах V_1 и V_2 сразу после выравнивания давления. Перегородка тепло не проводит.



Ответ: $T_1 = T_0(V_1/(V_1 + V_2))^{(\gamma-1)/\gamma}$;

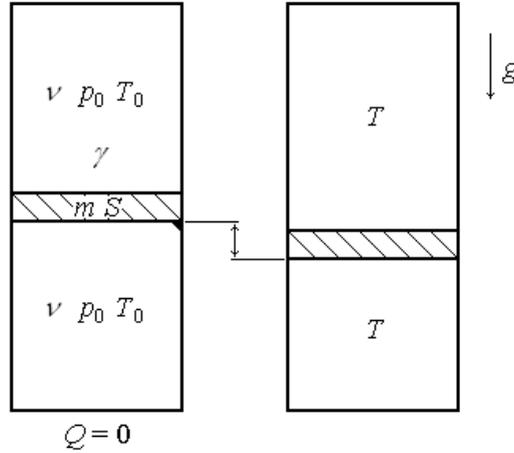
$$T_2 = T_0 V_2 / (V_1 + V_2) / (1 - (V_1 / (V_1 + V_2))^{1/\gamma}).$$

3.37. Идеальный газ находится в эластичной адиабатической оболочке под давлением p_1 , имея температуру T_1 . Внешнее давление на газ скачкообразно изменяется до значения p_2 . Определить температуру газа T_2 , которая при этом установится. Сравнить ее с температурой T_2' газа в том случае, если процесс происходит квазистатически.



Ответ: $T_2 = T_1 [1 + (\gamma - 1)/\gamma(p_2 - p_1)/p_1]$; $T_2' = (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$.

3.38. Вертикально стоящий закрытый, теплоизолированный сосуд разделен первоначально закрепленным теплопроводящим поршнем массой m и площадью S на две равные части, в каждой из которых находится по ν молей идеального газа с показателем адиабаты γ при давлении p_0 и температуре T_0 .

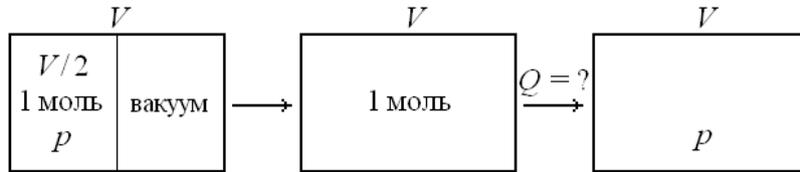


Найти температуру газа, которая установится после освобождения поршня. Каковы ее значения в предельных случаях: при малых и больших значениях параметра $a = mg/p_0S$? Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь.

Ответ: $T = T_0 a(1 - x^2)/2x$, где $x = ((1 + a^2\gamma)^{1/2} - 1)/a\gamma$,

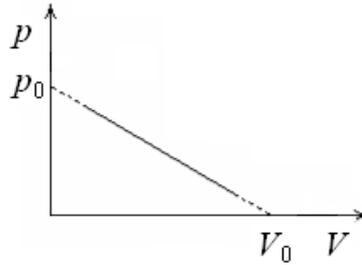
$T = T_0(1 + a^2(\gamma - 1)/4)$ при $a \ll 1$; $T = T_0 a(\gamma - 1)/2\gamma^{1/2}$ при $a \gg 1$.

3.39. Сосуд объемом V разделен непроницаемой перегородкой пополам. В одной половине находится один моль идеального газа с показателем адиабаты γ при давлении p , в другой – вакуум. Перегородку мгновенно удаляют. Какое количество тепла Q нужно сообщить газу, чтобы в нем установилось первоначальное давление?



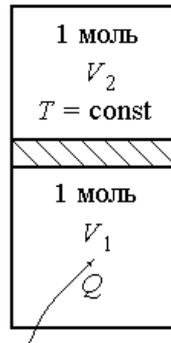
Ответ: $Q = \frac{pV}{2(\gamma-1)}$.

3.40. Вычислить теплоемкость $c(V)$ моля идеального газа, совершающего процесс, приведенный на рисунке. Значение показателя адиабаты γ считать известным.



Ответ: $c(V) = R/(\gamma-1) \cdot (\gamma - (\gamma+1)V/V_0) / (1 - 2V/V_0)$.

3.41. Цилиндр разделен свободно перемещающимся поршнем на части объемом V_1 и V_2 , содержащие по одному молю идеального газа.



Газ в объеме V_1 подогревается, а температура газа в объеме V_2 поддерживается постоянной. Найти теплоемкость газов в обеих частях цилиндра.

Ответ: $c_1 = c_V(V_1 + \gamma V_2)/(V_1 + V_2)$; $c_2 = \infty$.

Второе начало термодинамики.

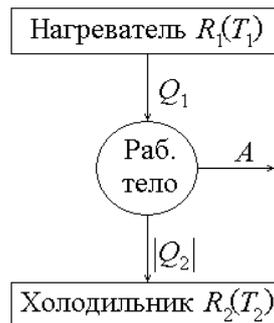
Циклы. Неравенство Клаузиуса. Метод циклов. Энтропия

(теория)

Первое начало термодинамики устанавливает существование у всякой равновесной системы однозначной функции состояния – внутренней энергии. Второе начало термодинамики устанавливает существование другой однозначной функции состояния – энтропии. Открытие второго начала связано с анализом работы тепловых машин.

Тепловой машиной называется устройство, позволяющее производить работу при циклическом процессе теплообмена между системой (рабочее вещество, или рабочее тело) и термостатом (его образуют несколько тепловых резервуаров). В зависимости от того, обратимым или необратимым является цикл, тепловая машина будет обратимой или необратимой.

В соответствии со вторым началом термодинамики тепловая машина должна иметь, по крайней мере, два тепловых резервуара: нагреватель и холодильник (см. рисунок).



От нагревателя рабочее тело получает количество теплоты Q_1 , часть этой теплоты $|Q_2|$ отдает холодильнику, а разность $Q_1 - |Q_2|$ превращает в работу A :

$$A = Q_1 - |Q_2| = Q_1 + Q_2.$$

Коэффициент полезного действия (сокращенно КПД) тепловой машины определяется как отношение совершенной работы A к полученному от нагревателя количеству теплоты Q_1 :

$$\eta = A / Q_1 = 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 + Q_2 / Q_1.$$

Особое значение для термодинамики имеет тепловая машина, у которой один нагреватель и один холодильник с постоянными температурами. Единственно возможный здесь квазистатический цикл – это обратимый цикл Карно. Он состоит из двух изотермических и двух адиабатических процессов. КПД обратимого цикла Карно с идеальным газом в качестве рабочего тела равен

$$\eta = 1 - T_2 / T_1.$$

Теорема Карно.

КПД тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, не зависит от природы рабочего вещества и устройства машины, а определяется только температурами нагревателя и холодильника. КПД необратимой тепловой машины, имеющей те же самые тепловые резервуары, меньше КПД обратимого цикла Карно.

Второе начало термодинамики позволило удовлетворительно решить вопрос о количественной мере температуры и построить рациональную температурную шкалу, не зависящую от выбора термометрического тела и устройства термометра. В. Томсон ввел физически безупречную шкалу температур, названную абсолютной термодинамической шкалой, или шкалой Кельвина.

На использовании теоремы Карно основан метод циклов. Суть его в следующем. Исследуемая система используется в качестве рабочего вещества в обратимой машине Карно. Разница между температурами нагревателя и холодильника берется бесконечно малой. Применение принципа Карно позволяет получить информацию о системе.

С помощью принципа Карно второму началу термодинамики можно придать следующую количественную формулировку.

Если система, совершая циклический процесс, получает теплоту Q_i от теплового резервуара R_i с температурой T_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n Q_i/T_i \leq 0.$$

Его называют неравенством Клаузиуса.

Для квазистатических циклических процессов неравенство Клаузиуса переходит в равенство

$$\oint \delta Q/T = 0.$$

Из этого равенства следует существование однозначной функции состояния – энтропии:

$$S = S_0 + \int \delta Q/T.$$

Изменение энтропии системы при бесконечно малом теплоподводе равно

$$dS = \delta Q/T.$$

Уравнение, объединяющее первое и второе начала термодинамики, для определенной массы газа имеет вид

$$dU = TdS - pdV.$$

Его называют основным термодинамическим тождеством.

Если система состоит из термически равновесных подсистем, то ее энтропия равна сумме энтропий подсистем (энтропия – аддитивная функция состояния).

Неравенство

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \delta Q / T_e$$

является математическим выражением второго начала термодинамики с использованием понятия энтропии. Для бесконечно малого процесса неравенство принимает вид

$$dS \geq \delta Q / T.$$

Закон возрастания энтропии.

В адиабатически изолированной системе энтропия не убывает.

Из основного термодинамического тождества для закрытых систем следует

$$\oint T dS = \oint p dV, \text{ или } \iint dT dS = \iint dp dV.$$

Справа в этом интегральном соотношении – работа A системы за круговой процесс; она равна площади этого процесса на (p, V) -диаграмме. Слева количество теплоты Q , полученное системой за тот же круговой процесс. Площадь на (T, S) -диаграмме за тот же круговой процесс численно равна Q . Полученное соотношение выражает эквивалентность площадей на (p, V) - и (T, S) -диаграммах (равенство работы A и теплоты Q за цикл). Следовательно, якобиан преобразования $(T, S) \rightarrow (p, V)$ равен единице:

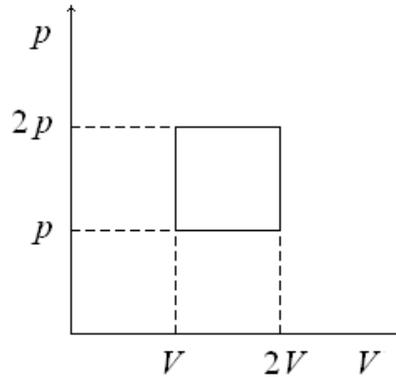
$$\partial(T, S) / \partial(p, V) = 1.$$

Это калибровочное соотношение. Оно устанавливает соответствие между температурной шкалой и шкалой энтропии.

Второе начало термодинамики.

**Циклы. Неравенство Клаузиуса. Метод циклов. Энтропия
(задачи)**

3.42. Найти КПД η и холодильный коэффициент ε цикла, состоящего из двух изохор и двух изобар. Рабочим веществом является идеальный двухатомный газ. В пределах цикла давление и объем меняются в два раза.

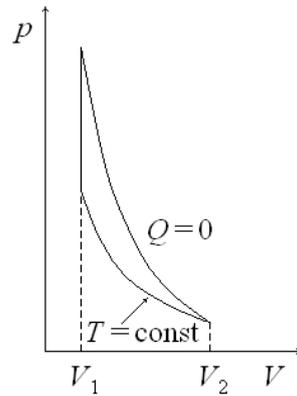


Ответ: $\eta = (\gamma - 1)/(2\gamma + 1) \approx 0,105$, $\varepsilon = (\gamma + 2)/(\gamma - 1) = 8,5$.

3.43. Цикл состоит из изохоры, политропы $pV^2 = \text{const}$ и изотермы. На изохоре давление изменяется в b раз. Найти КПД цикла для идеального газа.

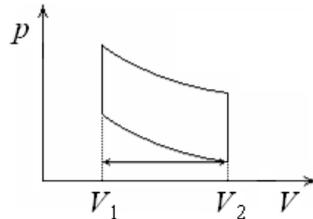
Ответ: $\eta = (\gamma - 1)(1 - \ln b/(b - 1))$.

3.44. Определить КПД цикла, образованного изохорой $V = V_1$, а также адиабатой и изотермой, пересекающимися при $V = V_2$. Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.



Ответ: $\eta = 1 - (\gamma - 1) \frac{\ln(V_2/V_1)}{(V_2/V_1)^{\gamma-1} - 1}$, $\gamma = \frac{5}{3}$.

3.45. Найти КПД цикла Отто двигателя внутреннего сгорания. Считать, что цикл состоит из двух адиабат с $\gamma = 1,4$, двух изохор и изобар. Коэффициент сжатия V_1/V_2 ограничивается возможностью детонации горючей смеси при температуре 1600°C .



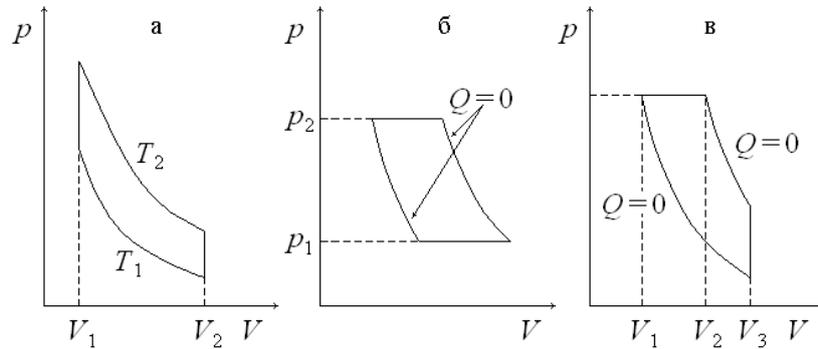
Ответ: $\eta = 1 - (V_1/V_2)^{\gamma-1} < 0,82$.

3.46. Найти КПД следующих циклов, предполагая, что рабочим веществом является идеальный газ с показателем адиабаты γ :

а) цикл состоит из двух изотерм с температурами T_1 и T_2 и двух изохор с объемами V_1 и V_2 (Цикл Клапейрона); $T_2 > T_1$, $V_2 > V_1$;

б) цикл состоит из двух изобар с давлениями p_1 и p_2 ($p_2 > p_1$) и двух адиабат (цикл Джоуля);

в) цикл состоит из двух адиабат, изобары с изменением объема от V_1 до V_2 и изохоры с объемом V_3 , причем $V_1 < V_2 < V_3$ (цикл Дизеля).



Ответ: а) $\eta = ((\gamma - 1)(T_2 - T_1) \ln(V_2/V_1)) / (T_2 - T_1 + (\gamma - 1)T_2 \ln(V_2/V_1))$;

$$\text{б) } \eta = 1 - (p_1/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma};$$

$$\text{в) } \eta = 1 - ((V_2/V_3)^\gamma - (V_1/V_3)^\gamma) / ((V_2/V_3) - (V_1/V_3)) / \gamma.$$

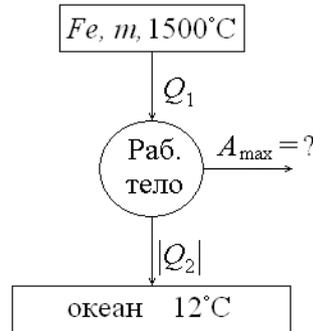
3.47. Каким образом можно сильнее увеличить КПД машины Карно: подняв температуру нагревателя T_1 на ΔT при неизменной температуре холодильника T_0 или при неизменной температуре нагревателя понизив температуру холодильника на такую же величину?

Ответ: во втором случае.

3.48. Используя воду, нагретую до температуры 100°C , и атмосферный воздух при температуре 0°C в качестве нагревателя и холодильника в тепловой машине, определить, на какую максимальную высоту может быть поднята вода.

Ответ: $h \approx 6$ км.

3.49. Вычислить максимальную работу, которую может произвести тепловая машина, если в качестве первого теплового резервуара используется кусок железа массой 200 кг с начальной температурой 1500°C , а в качестве второго – вода океана с температурой 12°C . Удельная теплоемкость железа постоянна и равна $0,6$ кДж/(кг·К).



Ответ: $A' = 1,16 \cdot 10^5$ кДж.

3.50. Атмосфера Земли может рассматриваться как гигантская тепловая машина, в которой роль нагревателя и холодильника играют экваторная зона и зоны полюсов, а источником энергии является солнечная радиация. Считая, что полный поток солнечной энергии, поступающий на Землю, равен $Q = 1,7 \cdot 10^{17}$ Вт, а КПД рассматриваемой «машины» на порядок меньше максимально возможного, оценить среднюю мощность N , расходуемую на образование ветров, в расчете на 1 км^2 земной поверхности. Обсудить физические причины, следствием которых является $\eta < \eta_{\text{max}}$.

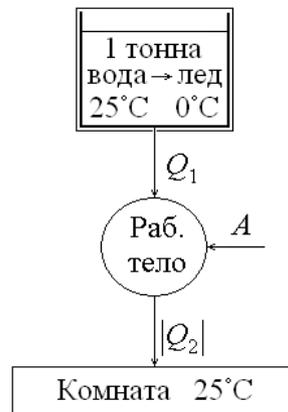
Ответ: $N \approx 5 \cdot 10^6$ Вт/км².

3.51. Тело массой m с теплоемкостью C , имеющее температуру окружающей среды T_0 , падает с высоты H . При ударе вся

кинетическая энергия тела переходит в его внутреннюю энергию (нагрев). Какую максимальную работу может совершить тепловая машина, используя данное тело в качестве нагревателя, а неограниченную окружающую среду – в качестве холодильника? На какую высоту можно поднять тело, совершив над ним эту работу? Ускорение свободного падения равно g , сопротивлением воздуха пренебречь.

$$\text{Ответ: } A' = mgH - CT_0 \ln \left(1 + \frac{mgH}{CT_0} \right), \quad h = H - \frac{CT_0}{mg} \ln \left(1 + \frac{mgH}{CT_0} \right).$$

3.52. При 0°C теплота плавления льда равна 1436 кал/моль. Холодильник должен произвести тонну льда при комнатной температуре (25°C). Какое минимальное количество электроэнергии необходимо для этого?



Ответ: $W = 9,75$ кВт·ч.

3.53. Два тела с одинаковыми теплоемкостями C и температурами T_1 и T_2 образуют адиабатически замкнутую систему. Какова будет конечная температура этой системы, если предоставить ей возможность перейти в состояние равновесия:

- а) свободно;
 б) обратимым образом?

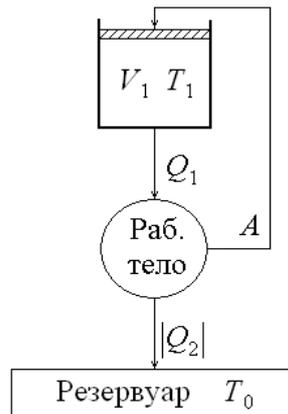
Какова максимальная работа, которую можно получить от этой системы?

Ответ: а) $T = (T_1 + T_2)/2$; б) $T = (T_1 T_2)^{1/2}$, $A' = C(T_1 + T_2 - 2(T_1 T_2)^{1/2})$.

3.54. Два тела с постоянными (конечными) теплоемкостями C_1 и C_2 нагреты до разных температур T_1 и T_2 ($T_2 > T_1$). Найти максимальную работу, которую можно получить, используя эти тела в качестве нагревателя и холодильника в тепловой машине.

Ответ: $A = C_1 T_1 + C_2 T_2 - (C_1 + C_2) T_1^{C_1/(C_1+C_2)} T_2^{C_2/(C_1+C_2)}$.

3.55. Нагревателем тепловой машины является сосуд объемом V_1 с поршнем, содержащий идеальный газ при начальной температуре T_1 ; холодильником является резервуар с постоянной температурой T_0 . Вся работа машины используется для сжатия исходного газа. Найти его минимальный конечный объем.



Ответ: $V \geq V_1 (T_1/T_0)^{1/(\gamma-1)} \cdot \exp(-(T_1/T_0 - 1)/(\gamma - 1))$.

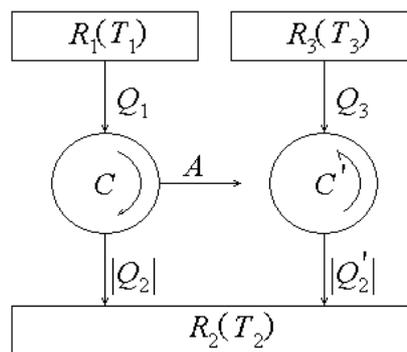
3.56. Один моль H_2O с температурой 25°C охлаждается до 0°C и замерзает. Все тепло, полученное охлаждающей машиной, работающей с максимальной теоретически допустимой эффективностью, передается другому молю H_2O при 25°C , в результате чего его температура повышается до 100°C .

а) Сколько молей H_2O переходит в пар при 100°C ? Теплота испарения при 100°C равна 9730 кал/моль. Теплота плавления льда при 0°C равна 1438 кал/моль.

б) Какую работу должен произвести рефрижератор?

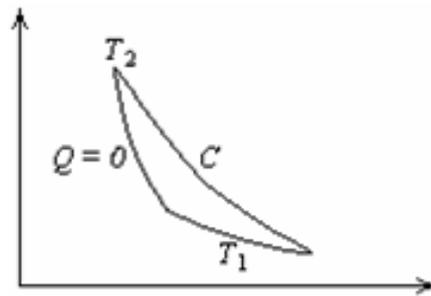
Ответ: а) $\nu = 0,107$; б) $A' = 2,13$ кДж.

3.57. Тепловой двигатель совершает круговой процесс, обмениваясь теплом с нагревателем (температура $T_1 = 500$ К) и природным резервуаром воды (температура $T_2 = 290$ К). Полученная работа используется для приведения в действие холодильной машины, совершающей также круговой процесс. Холодильная машина забирает тепло от охлаждаемого резервуара (температура $T_3 = 250$ К) и передает тепло тому же природному резервуару воды. Найти минимальную мощность нагревателя, если от холодильника для поддержания его температуры постоянной необходимо отводить поток тепла $Q_3 = 100$ Вт.



Ответ: $Q_1 = Q_3 \cdot T_1 / T_3 \cdot (T_2 - T_3) / (T_1 - T_2) \approx 38$ Вт.

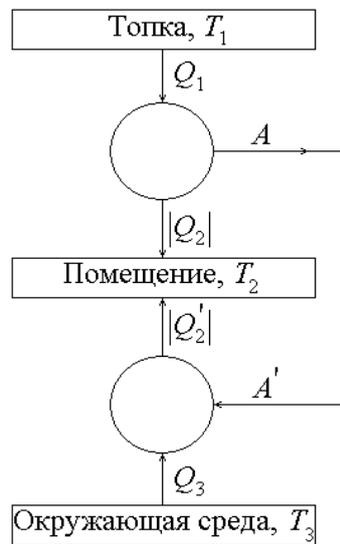
3.58. Найти работу, совершаемую произвольным рабочим телом за цикл, состоящий из адиабаты, политропы и изотермы.



Ответ: $A = C(T_1 - T_2 + T_1 \ln(T_2/T_1))$.

3.59. Рассмотреть цикл Карно, в котором в качестве рабочего тела используется фотонный газ. Показать справедливость теоремы Клаузиуса.

3.60. Идея динамического отопления, высказанная В. Томсоном (1852 г.), заключается в следующем.



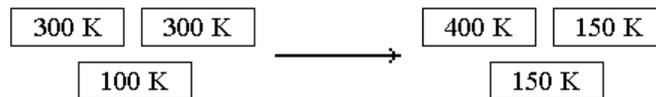
Тепловой двигатель, в топке которого сжигается уголь, приводит в действие холодильную машину. Холодильная машина отнимает теплоту от природного резервуара воды (например, от грунтовой воды) и отдает ее воде в отопительной системе. Одновременно вода в отопительной системе служит холодильником теплового двигателя. Определить теоретическое количество тепла, которое получает отапливаемое помещение от сжигания 1 кг каменного угля. Удельная теплота сгорания угля $q = 8000$ ккал/кг, температура в котле паровой машины $t_1 = 210$ °С, температура воды в отопительной системе $t_2 = 60$ °С, а грунтовой воды – $t_3 = 15$ °С.

Ответ: $Q \approx 24000$ ккал.

3.61. Помещение может отапливаться либо путем непосредственного сжигания дров в печке (при этом выделяется количество тепла Q_0), либо с помощью холодильной машины, которая работает по обратимому циклу Карно и приводится в действие тепловой машиной, потребляющей то же количество дров, что и печка, и работающей (также по циклу Карно) между температурами $t_1 = 100$ °С и $t_2 = 10$ °С. Во сколько раз количество тепла Q_1 , передаваемое помещению холодильной машиной, больше величины Q_0 ? В помещении поддерживается температура $t_0 = 20$ °С. Температура наружного воздуха равна $t_2 (= 10$ °С).

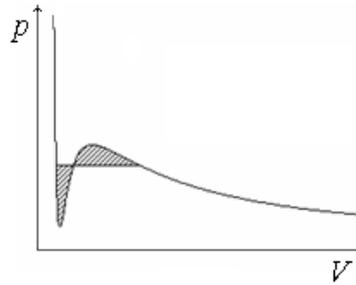
Ответ: $Q_1/Q_0 = (T_1 - T_2)T_0/(T_0 - T_2)/T_1 \approx 7,1$.

3.62. Три одинаковых тела с постоянной теплоемкостью находятся при температуре 300, 300 и 100 К. Если извне не подводится тепло и не совершается работа внешних сил, то до какой максимальной температуры можно нагреть одно из тел?



Ответ: $T_{\max} = 400$ К.

3.63. Переход из жидкого состояния в газообразное происходит по изотерме-изобаре. На (p, V) -диаграмме эта линия отсекает от соответствующей изотермы газа Ван-дер-Ваальса равные площади (правило Максвелла). Доказать это, пользуясь теоремой Клаузиуса.



3.64. Показать, что для любого вещества политропа ($C < \infty$) может пересекать изотерму не более чем в одной точке.

3.65. Доказать, что для вещества с произвольным уравнением состояния, описываемым однозначной функцией $T = T(p, V)$, две политропы не могут встречаться более чем в одном состоянии.

3.66. Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно для газа, получить равенство:

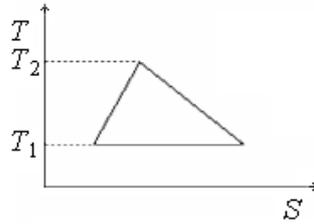
$$(\partial U / \partial V)_T = T(\partial p / \partial T)_V - p.$$

Здесь U – внутренняя энергия газа, V – его объем, T – температура и p – давление.

3.67. Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно, получить уравнение для ЭДС E обратимого гальванического элемента. Зависимость от температуры величины q теплового эффекта реакции на единицу проходящего заряда считать известной.

Ответ: $T(dE/dT) = E - q.$

3.68. Тепловая машина с произвольным веществом в качестве рабочего тела совершает обратимый цикл, представленный на (T, S) -диаграмме. Выразить КПД этого цикла через минимальную и максимальную температуры.



Ответ: $\eta = (T_2 - T_1)(T_2 + T_1)$.

3.69. С молем идеального газа совершается процесс, в котором энтропия изменяется по закону

$$S(T) = \alpha T^2 + c_V \ln T,$$

где c_V – теплоемкость при постоянном объеме, α – постоянная. Найти теплоемкость газа в этом процессе. Какое количество тепла было подведено к системе, если начальная температура T_0 , а конечная $2T_0$?

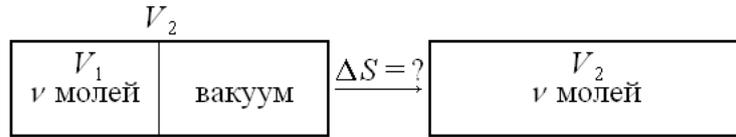
Ответ: $c = c_V + 2\alpha T^2$; $Q = c_V T_0 + \frac{14}{3} \alpha T_0^3$.

3.70. Идеальный газ с показателем адиабаты γ , находившийся при температуре T_0 и давлении p_0 в объеме V_0 , изобарически нагрели, сообщив ему количество теплоты Q . Найти изменение энтропии газа.

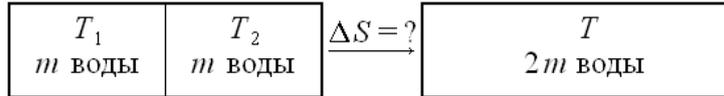
Ответ: $\Delta S = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Q}{p_0 V_0} \right)$.

3.71. Показать, что энтропия увеличивается при следующих процессах:

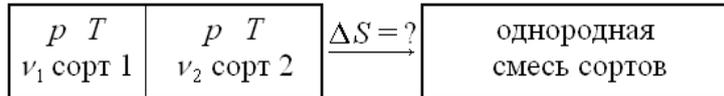
а) при расширении идеального газа в пустоту от объема V_1 до $V_2 > V_1$ (процесс Гей-Люссака);



б) при теплообмене между равными массами горячей и холодной воды;



в) в результате диффузионного смешения идеальных газов двух сортов, первоначально находившихся в двух сосудах и имевших одинаковые давления и температуры.



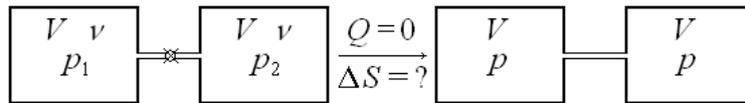
Ответ: а) $\Delta S = \nu R \cdot \ln(V_2/V_1) > 0$;

б) $\Delta S = mc_v \cdot \ln((T_1 + T_2)^2 / 4T_1 T_2) > 0$;

в) $\Delta S = R \cdot (\nu_1 \ln(1 + \nu_2/\nu_1) + \nu_2 \ln(\nu_1/\nu_2 + 1))$, где ν_i – число молей.

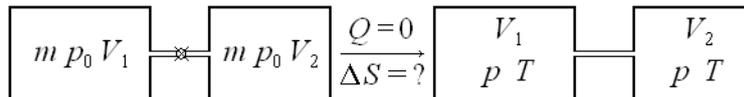
3.72. Два одинаковых адиабатически изолированных сосуда, содержащие равное число молей одного и того же идеального газа при разных давлениях, соединены трубкой с краном. Кран

открывается, и состояния газа в обоих сосудах становятся одинаковыми. Показать, что энтропия при этом процессе увеличивается.



Ответ: $\Delta S = \nu c_V \ln((p_1 + p_2)^2 / 4p_1 p_2) > 0$.

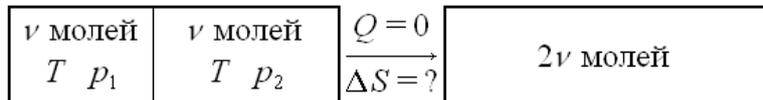
3.73. Две колбы объемами V_1 и V_2 заполнены одним и тем же идеальным газом при одном давлении, но разных температурах. Массы газа в колбах равны.



Найти изменение энтропии после того, как колбы соединили и система пришла в равновесие. Стенки колб обеспечивают теплоизоляцию газа от окружающей среды. Считать, что теплоемкость газа не зависит от температуры.

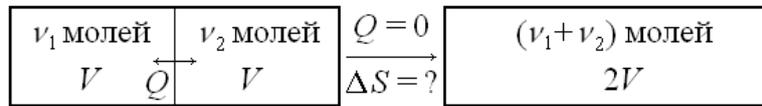
Ответ: $\Delta S = m c_p \ln((V_1 + V_2)^2 / 4V_1 V_2) > 0$.

3.74. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой. По обе стороны от нее идеальный газ. Число молей и температура газа в отсеках равны; давление разное – p_1 и p_2 соответственно. Перегородку убирают. Определить изменение энтропии.



Ответ: $\Delta S = \nu R \ln((p_1 + p_2)^2 / 4p_1 p_2) > 0$.

3.75. Теплоизолированный сосуд разделен теплопроводящей перегородкой на два равных объема. В одном из них находится ν_1 молей идеального газа, в другом того же газа ν_2 молей. Перегородка убирается. Найти изменение энтропии газа при установлении равновесия. Вычислить это изменение при $\nu_1 = 1$ и $\nu_2 = 2$.



Ответ: $\Delta S = \nu_1 R \cdot \ln(2\nu_1/(\nu_1 + \nu_2)) + \nu_2 R \cdot \ln(2\nu_2/(\nu_1 + \nu_2))$,

$$\Delta S = R \cdot \ln(32/27) > 0.$$

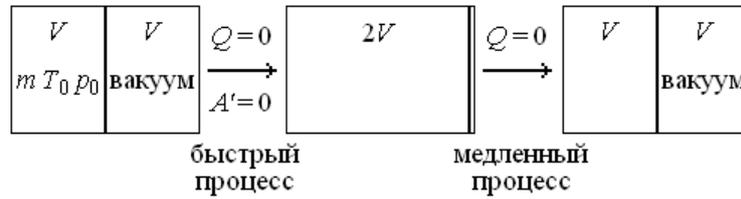
3.76. В замкнутой трубе объемом V_0 находится смесь двух идеальных газов по ν молей каждого. Начальное давление p . У краев трубы находятся поршни; каждый из них прозрачен для одного из газов. При перемещении поршней в среднюю точку газы полностью разделяются. Непосредственным вычислением найти работу A' , совершаемую внешними силами при изотермическом квазистатическом перемещении поршней, и сравнить отношение A'/T (где T – абсолютная температура) с изменением полной энтропии газов.



Ответ: $A' = 2\nu RT \cdot \ln 2$, $\Delta S = -A'/T$.

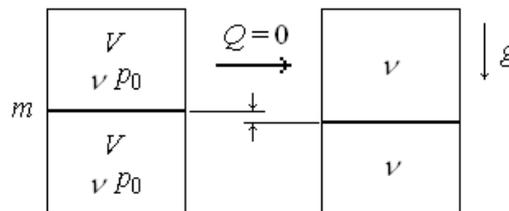
3.77. Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен поршнем пренебрежимо малой массы на две равные части. По одну сторону поршня находится идеальный газ с массой m , молекулярным весом μ и молярными теплоемкостями c_V и c_p , не зависящими от температуры, а по другую сторону поршня создан

высокий вакуум. Начальные температура и давление газа T_0 и p_0 . Поршень отпускают, и он, свободно двигаясь, дает возможность газу заполнить весь объем цилиндра. После этого, постепенно увеличивая давление на поршень, медленно доводят объем газа до первоначальной величины. Найти изменение внутренней энергии и энтропии газа при таком процессе.



Ответ: $\Delta U = m/\mu \cdot c_v T_0 (2^{c_p/c_v - 1} - 1)$; $\Delta S = m/\mu \cdot R \cdot \ln 2$.

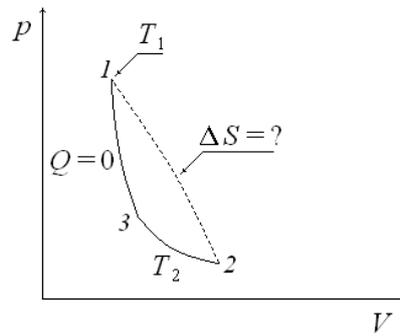
3.78. В расположенном вертикально теплоизолированном цилиндре радиусом r имеется теплопроводящий поршень массой m , закрепленный так, что он делит цилиндр на две равные части. В каждой из них содержится ν молей одного и того же газа при давлении p_0 и одинаковой температуре.



Крепление поршня удаляется, и под действием силы тяжести он опускается. Определить изменение энтропии ΔS к моменту установления равновесия. Считать, что $\pi r^2 p_0 \gg mg$.

Ответ: $\Delta S = (1 + 2\nu\mu/m)\nu R\alpha^2$; $\alpha = mg/(2\pi r^2 p_0)$.

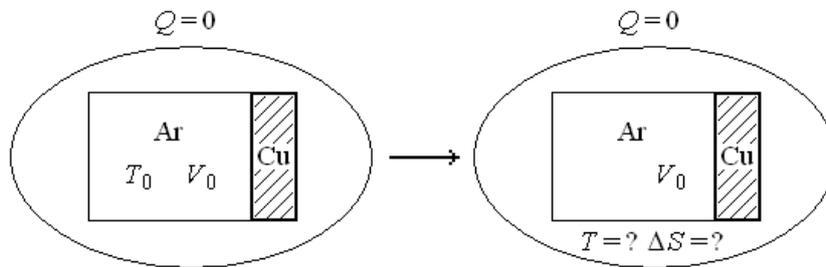
3.79. Идеальный одноатомный газ в количестве $\nu = 10$ молей, имеющий температуру $T_1 = 300$ К, расширяется без подвода тепла, необратимым образом совершая работу.



В результате температура его становится равной $T_2 = 200$ К. После этого газ квазистатически сжимается: сначала изотермически, а затем адиабатически, возвращаясь в первоначальное состояние. При сжатии затрачивается работа $A' = 15$ кДж. Найти изменение энтропии газа при расширении.

Ответ: $\Delta S = A'/T_2 - \nu C_V(T_1/T_2 - 1) = 13$ Дж/К.

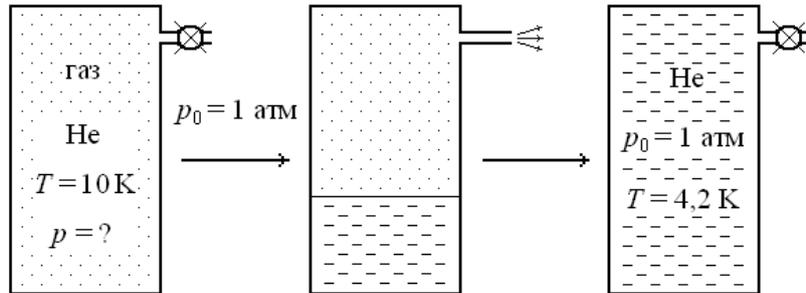
3.80. Сосуд объемом V_0 , заполненный аргоном при температуре T_0 и давлении p_0 , привели в тепловой контакт с медной пластиной, имеющей температуру T_1 . Теплоемкость пластины равна C . Найти установившуюся температуру и изменение энтропии, если газ поддерживается при постоянном давлении. Система (сосуд + пластина) теплоизолирована, теплоемкостью сосуда и термическим расширением меди пренебречь.



Ответ:

$$T = \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 V_0 + c T_1}{\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0 V_0 + c T_0}; \quad \Delta S = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0 V_0}{T_0} + c \right) \ln \frac{T}{T_0} + c \ln \frac{T_0}{T_1}.$$

3.81. Колба наполнена газообразным гелием при температуре 10 К и термоизолирована. Газ может медленно вытекать через капиллярную трубку до тех пор, пока давление в колбе не станет равным 1 атм, а температура 4,2 К (точка кипения гелия).



Предполагая, что состояние газообразного гелия может быть описано уравнением Клапейрона, найти начальное давление в колбе, если в конце процесса колба оказывается полностью наполненной жидким гелием. Удельная теплота испарения для гелия при температуре 4,2 К равна 20 кал/моль. Для газообразного гелия $C_V = 3 \text{ кал}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

Ответ: $p \approx 100 \text{ атм}$.

Термодинамические функции (теория)

Теория термодинамических потенциалов базируется на использовании основного уравнения термодинамики:

$$dU = TdS - pdV.$$

Это уравнение связывает пять функций состояния: U , T , S , p и V . Само же состояние простой системы определяется двумя параметрами. Если выбрать из пяти перечисленных величин две в качестве независимых переменных, то основное уравнение термодинамики содержит еще три неизвестных функции. Для их определения к этому уравнению необходимо добавить еще два уравнения. Ими могут быть термическое и калорическое уравнения состояния $p = p(T, V)$ и $U = U(T, V)$, если в качестве независимых переменных выбрать T и V . Однако для некоторых пар независимых переменных достаточно к основному уравнению добавить только одну функцию состояния. Она вместе с основным уравнением термодинамики полностью описывает систему. Эта функция и есть термодинамический потенциал, а соответствующие независимые параметры являются естественными переменными для него.

Термодинамические потенциалы являются однозначными функциями состояния и относятся к экстенсивным (пропорциональным массе или числу частиц) параметрам. Удельный потенциал может зависеть только от интенсивных (не зависящих от массы или числа частиц в системе) параметров и величин, рассчитанных на единицу массы. Дифференциалы термодинамических потенциалов полные. Задание термодинамического потенциала в естественных переменных содержит полную информацию как о термических, так и калорических свойствах вещества. Убыль термодинамического потенциала при некоторых условиях определяет работу системы против действующих на нее сил.

Установление существования таких функций состояния явилось крупным успехом термодинамики. Систематически они были введены Гиббсом.

К числу термодинамических потенциалов относится внутренняя энергия, заданная как функция энтропии и объема: $U = U(S, V)$. Параметры S и V являются естественными переменными для U . Дифференциал внутренней энергии определяется основным уравнением, и он полный. Это дает соотношение взаимности

$$(\partial T/\partial V)_S = -(\partial p/\partial S)_V,$$

называемое также соотношением Максвелла. Простое дифференцирование функции $U(S, V)$ по S и V позволяет получить систему двух уравнений:

$$T = (\partial U/\partial S)_V = T(S, V), \quad p = -(\partial U/\partial V)_S = p(S, V),$$

которую можно рассматривать как параметрическое задание термического уравнения состояния. Если из первого уравнения этой системы выразить энтропию через температуру и объем и подставить во второе уравнение, то термическое уравнение состояния примет обычный вид:

$$p = p(T, V).$$

Исключая S , можно получить калорическое уравнение состояния:

$$U = U(T, V).$$

С помощью операции дифференцирования и арифметических операций могут быть найдены все термодинамические величины, характеризующие физическую систему. Например:

$$c_V = T(\partial S/\partial T)_V = (\partial U/\partial T)_V = (\partial U/\partial S)_V / (\partial^2 U/\partial S^2)_V.$$

При адиабатическом процессе

$$\delta A = pdV = -dU,$$

т. е. система совершает работу за счет внутренней энергии, поэтому внутреннюю энергию называют также адиабатическим потенциалом.

Другой термодинамический потенциал – энтальпия:

$$H = U + pV.$$

Для нее естественные переменные – энтропия S и давление p . Дифференциал энтальпии в силу основного уравнения равен

$$dH = TdS + Vdp.$$

Условием того, что он полный, является соотношение Максвелла (еще одно):

$$(\partial T/\partial p)_S = (\partial V/\partial S)_p.$$

Температура и объем находятся через частные производные от H :

$$T = (\partial H/\partial S)_p = T(S, p), \quad V = (\partial H/\partial p)_S = V(S, p).$$

Эту систему функций можно рассматривать как параметрическое задание термического уравнения состояния. Внутренняя энергия находится из определения энтальпии. Можно получить другие термодинамические характеристики физической системы. Например:

$$c_p = (\delta Q/\partial T)_p = T(\partial S/\partial T)_p = T/(\partial T/\partial S)_p = (\partial H/\partial S)_p/(\partial^2 H/\partial S^2)_p.$$

Функцию

$$F = U - TS$$

называют свободной энергией (энергией Гельмгольца). Естественными переменными для нее являются температура и объем: $F = F(T, V)$.

Полный дифференциал свободной энергии равен

$$dF = -SdT - pdV.$$

При изотермических процессах система совершает работу за счет свободной энергии:

$$\delta A = pdV = -(dF)_T.$$

Соотношение взаимности имеет вид

$$(\partial S/\partial V)_T = (\partial p/\partial T)_V.$$

Дифференцирование свободной энергии позволяет получить термическое уравнение состояния и энтропию:

$$p = -(\partial F/\partial V)_T = p(T, V), \quad S = -(\partial F/\partial T)_V = S(T, V).$$

Калорические свойства вещества можно установить, исключая энтропию из формулы, определяющей свободную энергию:

$$U = F - T(\partial F/\partial T)_V.$$

Это уравнение Гиббса – Гельмгольца.

Температура и давление являются естественными независимыми переменными для термодинамического потенциала Гиббса:

$$G = G(T, p) = U - TS + pV = H - TS = F + pV.$$

Полный дифференциал потенциала Гиббса равен

$$dG = -SdT + Vdp.$$

Термические свойства определяются дифференцированием потенциала по давлению:

$$V = (\partial G / \partial p)_T = V(T, p),$$

а энтропия – дифференцированием по температуре:

$$S = -(\partial G / \partial T)_p = S(T, p).$$

Итак, каждый термодинамический потенциал, будучи известным в естественных переменных, содержит полную информацию о термодинамических свойствах системы. Если же термодинамическая функция задана не в естественных переменных, задача определения термодинамических свойств сводится к решению уравнения в частных производных, и необходима дополнительная информация о системе.

Метод исследования термодинамических систем с помощью термодинамических потенциалов является очень удобным и в настоящее время наиболее употребительным. В основе этого метода, называемого методом термодинамических потенциалов, лежит применение соотношений взаимности. Они используются для получения различных соотношений между величинами, характеризующими равновесные состояния системы.

Коэффициенты объемного расширения (изобарический и адиабатический) α_p и α_s определяются по формулам

$$\alpha_p = V^{-1}(\partial V / \partial T)_p, \quad \alpha_s = V^{-1}(\partial V / \partial T)_s;$$

термические коэффициенты давления (изохорический и адиабатический) β_V и β_S равны

$$\beta_V = p^{-1}(\partial p / \partial T)_V, \quad \beta_S = p^{-1}(\partial p / \partial T)_S.$$

Аналогичные формулы имеются для вычисления изотермической и адиабатической сжимаемостей γ_T и γ_S :

$$\gamma_T = -V^{-1}(\partial V / \partial p)_T, \quad \gamma_S = -V^{-1}(\partial V / \partial p)_S.$$

Изохорическая и изобарическая теплоемкости c_V и c_p вычисляются по соотношениям

$$c_V = T(\partial S/\partial T)_V, c_p = T(\partial S/\partial T)_p.$$

Термодинамические функции (задачи)

3.82. Используя свободную энергию F , доказать справедливость соотношения

$$(\partial U/\partial V)_T = T(\partial p/\partial T)_V - p.$$

где U – внутренняя энергия газа, V – его объем, T – температура и p – давление.

3.83. Используя термодинамический потенциал Гиббса G , доказать справедливость соотношения

$$(\partial H/\partial p)_T = -T(\partial V/\partial T)_p + V,$$

где H – энтальпия, p – давление, T – температура и V – объем.

3.84. Показать, что из условий $(\partial U/\partial V)_T = 0$ и $(\partial H/\partial p)_T = 0$ следует уравнение состояния идеального газа.

3.85. Найти свободную энергию, энтропию и внутреннюю энергию газа, подчиняющегося уравнению состояния

$$p = \nu RT/(V - b\nu)$$

и имеющего молярную теплоемкость

$$c_V = a + cT,$$

где a , b и c – постоянные, ν – число молей газа.

Ответ: $F = \nu(a(T - T \cdot \ln T) - RT \cdot \ln(V/\nu - b) - 1/2 \cdot cT^2 - \alpha T + \beta)$;

$$S = \nu(a \cdot \ln T + R \cdot \ln(V/\nu - b) + cT + \alpha), U = \nu(aT + 1/2 \cdot cT^2 + \beta).$$

3.86. Свободная энергия системы равна

$$F = aT - bT \cdot \ln T - RT \cdot \ln V + c,$$

где a, b, c – постоянные. Найти уравнение состояния, внутреннюю энергию, энтропию и теплоемкости c_V и c_p этой системы.

Ответ: $pV = RT$;

$$U = bT + c;$$

$$S = -a + b + b \cdot \ln T + R \cdot \ln V;$$

$$c_V = b, c_p = b + R.$$

3.87. Термодинамический потенциал Гиббса системы равен

$$G = aT - bT \cdot \ln T + RT \cdot \ln p - cT^2 + d,$$

где a, b, c, d – постоянные. Найти уравнение состояния, энтропию и теплоемкость c_p этой системы.

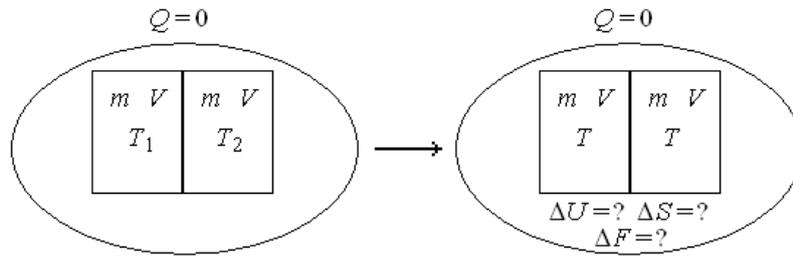
Ответ: $pV = RT$;

$$S = -a + b + b \cdot \ln T - R \cdot \ln p + 2cT,$$

$$c_p = b + 2cT.$$

3.88. Два кубика одинаковой массы m из сплава с очень малым изобарическим коэффициентом температурного расширения нагреваются: один – до температуры T_1 , другой – до T_2 ; затем они

оба помещаются в адиабатически изолированный сосуд и приводятся в контакт. Рассчитать изменение термодинамических функций S , U и F в результате установления равновесия, если удельная теплоемкость $c_v = \text{const}$.



Ответ: $\Delta S = mc_v \cdot \ln((T_1 + T_2)^2 / 4T_1 T_2) > 0$, $\Delta U = 0$,

$$\Delta F = mc_v \cdot \ln(T_1^{T_1} \cdot T_2^{T_2} / ((T_1 + T_2)/2)^{T_1 + T_2}).$$

3.89. Для некоторого газа экспериментально установлено, что произведение давления и удельного объема, а также внутренняя энергия зависят только от температуры. Что можно сказать относительно уравнения состояния такого газа с точки зрения термодинамики?

Ответ: $pV = \text{const} \cdot T$.

3.90. Для некоторого газа давление, объем и внутренняя энергия связаны соотношением

$$pV = gU,$$

где g – константа. Найти уравнение адиабаты в переменных p и V .

Ответ: $pV^{(g+1)} = \text{const}$.

3.91. Известна свободная энергия как функция температуры и объема:

$$F(T, V) = \alpha T \cdot \exp(-\beta V/T) + \gamma T + \delta,$$

где α , β , γ , δ – постоянные. Получить уравнение адиабаты в переменных p , T .

Ответ: $p = \text{const}$.

3.92. Найти общий вид уравнения состояния вещества, теплоемкость c_V которого не зависит от объема, а является функцией только температуры.

Ответ: $p = A(V)T + B(V)$,

где A и B – произвольные функции объема.

3.93. Доказать, что если уравнение состояния газа имеет вид $V = T \cdot f(p) + g(p)$, то теплоемкость c_p зависит только от температуры.

3.94. Найти общий вид уравнения состояния вещества, теплоемкость c_p которого не зависит от давления, а является функцией только температуры.

Ответ: $V = A(p)T + B(p)$,

где A и B – произвольные функции давления.

3.95*. При малых значениях p уравнение состояния реального газа и его внутреннюю энергию можно записать в виде

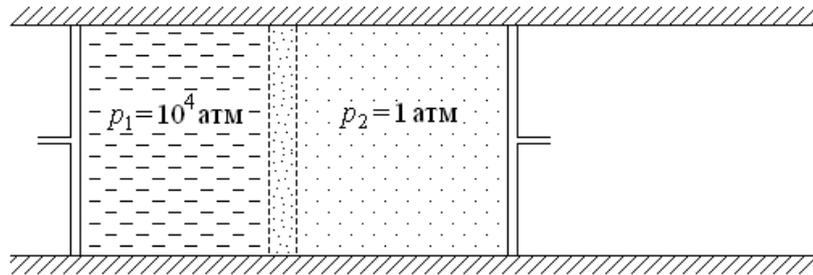
$$pV = A(T) + B(T)p + C(T)p^2 + \dots,$$

$$U = \alpha(T) + \beta(T)p + \gamma(T)p^2 + \dots$$

Определить молярную теплоемкость газа при постоянном давлении в предельном случае $p = 0$ (для идеального газа) по измеренному значению теплоемкости при конечном давлении p и известным функциям $A(T)$, $B(T)$, $C(T)$, ... в уравнении состояния.

Ответ: $c_p^0 = c_p + T \cdot (B''p + 1/2 \cdot C''p^2 \dots)$.

3.96. Один грамм воды, находящейся при температуре 20°C , выдавливается через пористую пробку под давлением 10^4 атм в большой сосуд, где давление равно 1 атм. Оценить массу образующегося в этом процессе пара. Процесс происходит без подвода тепла. Плотность воды предполагается неизменной. Теплота испарения равна 540 кал/г.



Ответ: $m \approx 0,3$ г.

3.97. В одном из методов получения низких температур используют охлаждение газа при его дросселировании через вентиль (эффект Джоуля – Томсона). В другом методе используют охлаждение газа при его обратимом адиабатическом расширении. Показать, что при одних и тех же начальном p_1 и конечном p_2 давлениях ($p_1 > p_2$) понижение температуры во втором методе больше, чем в первом.

3.98. Найти политропический коэффициент объемного расширения $\alpha_c = V^{-1}(\partial V/\partial T)_c$, если известны c , c_V и уравнение состояния $p = p(T, V)$.

Ответ: $\alpha_c = (c - c_v)/(VT)(\partial T/\partial p)_v$.

3.99. Показать, что если $(\partial U/\partial V)_T = 0$, то и $(\partial U/\partial p)_T = 0$. Здесь U – внутренняя энергия, T – абсолютная температура, V – объем и p – давление.

3.100. Доказать, что для вещества, внутренняя энергия которого не зависит объема, справедливо утверждение: объем зависит только от отношения давления к температуре.

3.101. Найти изменение энтропии в случае изобарического увеличения объема от V_1 до V_2 , если известны теплоемкость при постоянном давлении c_p и изобарический коэффициент теплового расширения $\alpha = V^{-1}(\partial V/\partial T)_p$.

$$\text{Ответ: } \Delta S = \nu \int_{V_1}^{V_2} c_p / (\alpha TV) dV.$$

3.102. Показать, что на (p, V) -диаграмме адиабаты с ростом V падают круче изотерм. Учесть, что $c_p \geq c_v > 0$ и $(\partial p/\partial V) < 0$.

3.103. Доказать, что для вещества с произвольным уравнением состояния температурный коэффициент объемного расширения $\alpha = V^{-1}(\partial V/\partial T)_p$, температурный коэффициент давления $\beta = (\partial p/\partial T)_V$ и коэффициент всестороннего сжатия $\gamma = -V^{-1}(\partial V/\partial p)_T$ связаны соотношением $\alpha = \beta \cdot \gamma$.

3.104. При адиабатическом сжатии жидкости относительное уменьшение объема $|\Delta V|/V = 0,1\%$, а температура поднимается на $\Delta T = 1$ К. Найти по этим данным c_p/c_v , если температурный коэффициент объемного расширения жидкости $\alpha = 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. На сколько при этом изменится давление в жидкости, если ее температурный коэффициент давления $\beta = (\partial p/\partial T)_V = 10^5 \text{ H}/(\text{м}^2\text{K})$?

Ответ: $c_p/c_v \approx 1 + \alpha \Delta T / (|\Delta V|/V) = 1,1$;

$$\Delta p \approx \beta c_p/c_v / (c_p/c_v - 1) \Delta T = 1,1 \cdot 10^6 \text{ H}/\text{м}^2.$$

3.105. Серебряная проволока диаметром $D = 1$ мм адиабатически нагружается при комнатной температуре силой $F = 10$ Н. Полагая, что удельная теплоемкость $c = 234$ Дж/(К·кг), плотность $\rho = 10$ г/см³, а температурный коэффициент линейного расширения $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹, определить изменение температуры проволоки.

Ответ: $\Delta T \cong -\alpha TF / (c\rho\pi D^2/4) \approx 0,03$ К.

3.106. Зависимость энергии тела от его объема и температуры задана соотношением $U = \alpha \cdot V \cdot T^{3/2}$, а энтропия обращается в нуль при $T = 0$ К. Найти теплоемкость $c_V(V, T)$ и уравнение состояния $p = p(V, T)$.

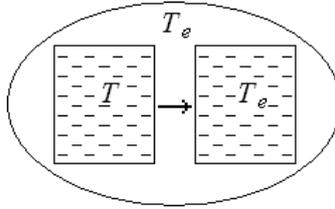
Ответ: $c_V = 1,5\alpha VT^{-1/2}$, $p = 2\alpha T^{3/2}$.

3.107. В объеме $V_1 = 3$ л находится $\nu_1 = 0,5$ моля кислорода O_2 , а в объеме $V_2 = 2$ л находится $\nu_2 = 0,5$ моля азота N_2 при температуре $T = 300$ К. Найти максимальную работу, которая может быть произведена при смешении этих газов в суммарном объеме $V_1 + V_2$ в изотермическом и адиабатическом процессах. Оба газа считать идеальными.

Ответ: $A_{\max} \approx 1,77$ кДж при $T = \text{const}$, $A_{\max} \approx 1,54$ кДж при $S = \text{const}$.

3.108. Показать, что если для системы известна только ее внутренняя энергия как функция температуры и объема, то этой информации недостаточно для полного определения термодинамических свойств системы.

3.109. Сосуд с водой, имеющей температуру T , поместили в термостат. Температура термостата постоянна и равна T_e .



Используя понятие энтропии, показать, что процесс выравнивания температуры воды до температуры термостата неравновесный.

3.110*. Показать, что для однородной замкнутой системы теплоемкость при постоянном объеме положительна и что давление при изотермическом расширении уменьшается.

3.111. Для однородной замкнутой системы объем при изотермическом возрастании давления уменьшается. Показать, что для такой системы $c_p \geq c_v$.

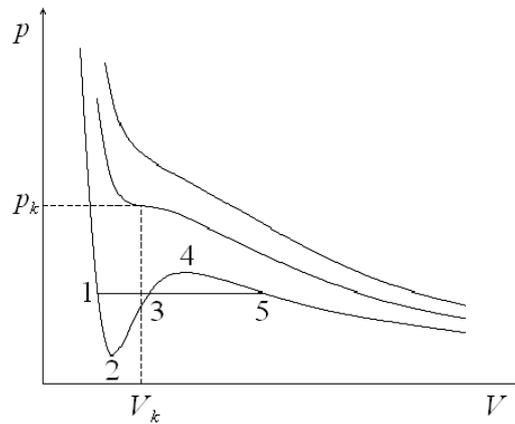
**Термодинамика различных систем:
реальные газы, упругие тела, диэлектрики и др.**

(теория)

Газ Ван-дер-Ваальса. Термическое уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$p = vRT/(V - vb) - av^2/V^2,$$

где a и b – постоянные, различные для разных газов; v – число молей. Эта модель приближенно описывает жидкое и газообразное состояния вещества и переход из одного состояния в другое.



На (p, V) -диаграмме изотермы газа Ван-дер-Ваальса имеют при низких температурах максимум и минимум. Левая, круто падающая, ветвь отвечает жидкому состоянию (некоторое изменение объема при большом перепаде давления говорит о малой сжимаемости вещества), правая, пологая, ветвь – газообразному состоянию. На участке 2-3-4 кривой состояние абсолютно неустойчиво и не реализуется. Переход из жидкого состояния в газообразное и наоборот происходит на самом деле по изотерме-изобаре 1-3-5 через последовательность двухфазных состояний; при этом ближе к точке 1 больше жидкости, а ближе к точке 5 – насыщенного пара.

Фотонный газ. Плотность равновесного излучения является функцией только температуры: $u = u(T)$. Соответственно полная энергия излучения в полости равна

$$U = u(T) \cdot V.$$

Из электродинамики известно термическое уравнение состояния фотонного газа (так иногда называют равновесное излучение):

$$pV = U/3.$$

Исключение U приводит уравнение состояния к виду

$$p = u(T)/3.$$

Упругие стержни. Работа стержня длиной l при растяжении его на dl силой f выражается формулой

$$\delta A = -fdl.$$

Основное уравнение термодинамики соответственно принимает вид

$$dU = TdS + fdl,$$

и условие калибровки записывается следующим образом:

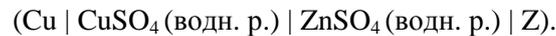
$$\partial(T, S)/\partial(f, l) = -1.$$

Термическое уравнение состояния упругого стержня имеет вид

$$f = E\sigma(l/l_0 \cdot (1 - \alpha T) - 1),$$

где E – модуль упругости Юнга, σ – площадь поперечного сечения стержня, α – коэффициент линейного температурного расширения стержня, зависящий только от материала стержня.

Обратимый гальванический элемент. Обратимыми называются такие гальванические элементы, в которых при пропускании тока в противоположном направлении идут обратные химические реакции. Примером может служить элемент Даниэля, положительный электрод которого, сделанный из меди, погружен в водный раствор медного купороса, а отрицательный из цинка – в водный раствор цинкового купороса:



Чтобы процессы, протекающие в обратимом элементе, можно было считать обратимыми, следует предположить, что джоулева теплота, выделяющаяся в нем, пренебрежимо мала.

При прохождении заряда de электродвижущая сила E совершает работу

$$\delta A = Ede.$$

Считается, что электродвижущая сила элемента меняется только с температурой (внешнее давление и объем электролита в элементе практически остаются постоянными). Уравнение $E = E(T)$ является, по сути, термическим уравнением состояния гальванического элемента, и основное уравнение термодинамики имеет вид

$$dU = TdS - E(T)de.$$

**Термодинамика различных систем:
реальные газы, упругие тела, диэлектрики и др.
(задачи)**

3.112. Найти адиабатическую зависимость давления от объема для газа Ван-дер-Ваальса ($c_V = \text{const}$).

Ответ: $(p + av^2/V^2)(V - bv)^{R/c_V + 1} = \text{const}$.

3.113. Доказать, что у газа Ван-дер-Ваальса теплоемкость при постоянном объеме зависит только от температуры, и найти выражение для внутренней энергии и энтропии молей газа.

Ответ: $U = \nu \int c_V dT - a\nu/V + \text{const}$;

$$S = \nu \int c_V dT/T + R \cdot \ln(V/\nu - b) + \text{const}.$$

3.114. Выразить изменение температуры свободно расширяющегося одноатомного газа через начальный и конечный

объемы и константы уравнения Ван-дер-Ваальса для газа. Оценить изменение энтропии и энтальпии.

Ответ: $\Delta T = -a/c_V (V_1^{-1} - V_2^{-1})$, $\Delta S \approx R \cdot \ln(V_2/V_1)$,

$$\Delta H \approx (R - c_V + c_V R T_1 b/a) \Delta T.$$

3.115. Для газа Ван-дер-Ваальса вычислить $(\partial T/\partial V)_U$, если известна c_V .

Ответ: $(\partial T/\partial V)_U = -va/(c_V V^2)$.

3.116. На (p, V) -диаграмме рассмотреть поведение адиабат и изотерм газа Ван-дер-Ваальса. Показать, что в области устойчивых состояний адиабаты падают круче изотерм.

3.117. Найти адиабатическую зависимость давления от объема для газа Ван-дер-Ваальса ($c_V = \text{const}$).

Ответ: $(p + av^2/V^2)(V - bv)^{R/c_V + 1} = \text{const}$.

3.118. В эксперименте 0,5 киломоля углекислого газа свободно расширяется от объема $V_1 = 0,5 \text{ м}^3$ до $V_2 = 3,0 \text{ м}^3$, температура при этом понижается на $12,2 \text{ }^\circ\text{C}$ ($c_V = 3,32R$). Вычислить по этим данным постоянную a , входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $a = c_V(T_2 - T_1)V_1V_2/(v(V_1 - V_2)) \approx 0,42 \text{ Дж} \cdot \text{м}^3/\text{моль}^2$.

3.119. Фотонный газ заполняет камеру объемом V_0 при температуре T_0 . Система адиабатически и обратимо расширяется до объема $V_1 = 8V_0$. Во сколько раз изменится температура системы?

Ответ: $T_1 = \frac{1}{2}T_0$.

3.120. Получить выражение для энтропии фотонного газа. Чему равен при этом потенциал Гиббса? Найти также теплоемкости c_V и c_p .

Ответ: $S = 4/3 \cdot \sigma T^3 V$; $G = 0$; $c_V = 4\sigma T^3 V$; $c_p = \infty$.

3.121. В объеме V в равновесии находятся один моль идеального газа с постоянной теплоемкостью c_V и фотонный газ. Температура этой системы T . Найти теплоемкость системы при постоянном давлении.

Ответ: $c_p = c_V + 4\sigma T^3 V + R \left(1 + \frac{4\sigma}{3R} T^3 V \right)^2$.

3.122. Найти разность молярных теплоемкостей $c_p - c_V$, если известно уравнение состояния вещества $p = p(T, V)$. Рассмотреть частные случаи: а) идеальный газ; б) газ Ван-дер-Ваальса; в) фотонный газ.

Ответ: $c_p - c_V = -T(\partial p / \partial T)_V^2 / (\partial p / \partial V)_T$.

3.123. Путем измерения силы натяжения X резиновой ленты, растянутой до фиксированной длины l , найдено, что $X = A \cdot T$, где $A = A(l) > 0$. Показать, что внутренняя энергия ленты не зависит от ее длины, а является функцией только температуры $U = U(T)$ и что энтропия S уменьшается с увеличением длины ленты.

3.124. Из опыта известно, что резиновый жгут удлиняется при охлаждении, если его натяжение остается постоянным. Доказать, что жгут нагреется, если его адиабатически растянуть.

3.125. Жесткость пружины зависит от температуры по линейному закону: $k(T) = k_0 - \alpha T$; теплоемкость c_x не зависит от T и деформации и равна c . При температуре T_0 пружина в свободном состоянии имеет длину l_0 . Найти температуру пружины после ее адиабатического растяжения до длины $2l_0$.

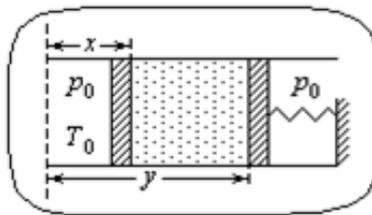
Ответ: $T = T_0 \cdot \exp(-at^2/2c)$.

3.126. Имеется упругая пружина, подчиняющаяся закону Гука: при постоянной температуре удлинение x пропорционально натяжению X . Константа пропорциональности k является функцией температуры. Найти свободную энергию F , внутреннюю энергию U и энтропию S как функции x . Тепловым расширением пренебречь.

Ответ: $F(T, x) = F(T, 0) + 1/2 \cdot kx^2$, $U(T, x) = U(T, 0) + 1/2 \cdot (k - T(dk/dT))x^2$,

$$S(T, x) = S(T, 0) - 1/2 \cdot (dk/dT)x^2.$$

3.127. В цилиндре, закрытом с двух сторон поршнями и помещенном в термостат, находится газ. Один из поршней удерживается пружиной, а на другой действует постоянное внешнее давление p_0 .



Определить термодинамический потенциал $V(T, x, y)$ системы «газ–пружина», принимающий наименьшее значение при равновесном положении поршней.

Ответ: $V(T, x, y) = U - TS + pV + k(y - y_0)^2/2$.

3.128. Найти свободную энергию, энтропию, внутреннюю энергию и уравнение для ЭДС E обратимого гальванического элемента. Зависимость от температуры теплового эффекта реакции q на единицу проходящего заряда считать известной.

Ответ: $F(T, e) = F(T, 0) - E(T)e$;

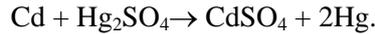
$$U(T, e) = U(T, 0) + (T(dE/dT) - E)e;$$

$$S(T, e) = S(T, 0) + (dE/dT)e, \quad T(dE/dT) = E - q.$$

3.129. В элементе Вестона один электрод из кадмия, другой – жидкая ртуть; электролит – соответствующие соли серной кислоты. Химическую реакцию, идущую в элементе, можно записать в следующем виде:



или



Электродвижущая сила E (Вольт) этого элемента дается эмпирической формулой:

$$E = 1,0183 - 4,06 \cdot 10^{-5}(T - 293).$$

а) Чему равна максимальная работа, которую можно получить в результате превращения одного моля Cd в реакции, идущей в элементе при 20 °С?

б) Вычислить количество поглощенного тепла.

Ответ: а) $A = 1,9653 \cdot 10^5$ Дж = $4,697 \cdot 10^4$ кал; б) $Q = -4,752 \cdot 10^4$ кал.

3.130. Найти свободную энергию, энтропию и внутреннюю энергию изотропного диэлектрика в переменных: температура T и электрическая поляризация P . Элементарная работа по поляризации диэлектрика равна $\delta A' = VEdP$. Поляризация P связана с напряженностью E внешнего электрического поля соотношением $P = (\varepsilon - 1)/4\pi \cdot E$. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(T)$ считается известной. Объем V диэлектрика предполагается неизменным.

Ответ: $F(T, P) = F(T, 0) + 2\pi V/(\varepsilon - 1) \cdot P^2$,

$$U(T, P) = U(T, 0) + (T(d\varepsilon/dT) + \varepsilon - 1)2\pi V/(\varepsilon - 1)^2 \cdot P^2,$$

$$S(T, P) = S(T, 0) + 2\pi V/(\varepsilon - 1)^2 \cdot (d\varepsilon/dT) P^2.$$

3.131. Найти свободную энергию, энтропию и внутреннюю энергию изотропного диэлектрика в переменных: температура T и напряженность электрического поля E . Элементарная работа диэлектрика равна $\delta A = VPdE$. Поляризация P связана с напряженностью E внешнего электрического поля соотношением $P = (\varepsilon - 1)/4\pi \cdot E$. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(T)$ считается известной. Объем V диэлектрика предполагается неизменным.

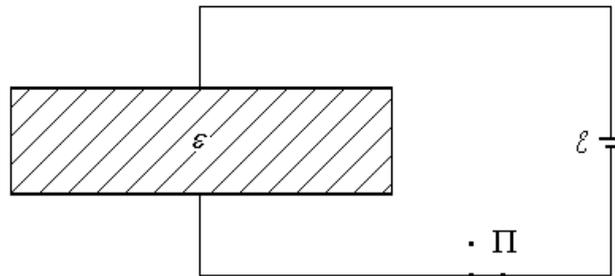
Ответ: $F(T, E) = F(T, 0) - V(\varepsilon - 1)/8\pi \cdot E^2,$

$$U(T, E) = U(T, 0) + V/8\pi \cdot (T(d\varepsilon/dT) - \varepsilon + 1)E^2,$$

$$S(T, E) = S(T, 0) + V/8\pi \cdot (d\varepsilon/dT)E^2.$$

3.132. Диэлектрик с зависящей от температуры диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(T)$ помещен между пластинами плоского конденсатора, соединенного с батареей, являющейся источником постоянной ЭДС (на рисунке П – выключатель). Исследовать:

- теплоемкость диэлектрика в случае замкнутой цепи;
- ее поведение при размыкании. Объем диэлектрика предполагается неизменным.



Ответ: а) $c_E = c_0 + V/8\pi \cdot T(d^2\varepsilon/dT^2)E^2$;

$$\text{б) } c_D = c_E - V/4\pi \cdot T \varepsilon^{-3} (d\varepsilon/dT)^2 D^2.$$

3.133. Пользуясь свободной энергией, найти, какое количество тепла следует подвести к диэлектрику при изотермическом включении электрического поля (от нуля до значения E). Элементарная работа диэлектрика в электрическом поле равна $\delta A = -V/4\pi \cdot \vec{E} d\vec{D}$ (\vec{D} – вектор электрической индукции).

Ответ: $Q = V/(8\pi) \cdot T(d\varepsilon/dT)E^2$.

3.134. Парамагнитное тело имеет изотермическую магнитную восприимчивость χ_T . Найти свободную энергию F как функцию температуры T и намагниченности M . Получить также внутреннюю энергию U и энтропию S . В магнитном поле напряженности H работа по намагничиванию, отнесенная к единице объема тела, равна $\delta A' = HdM$. Изменением объема парамагнетика в процессе намагничивания можно пренебречь.

Ответ: $F(T, M) = F(T, 0) + V/(2\chi_T) \cdot M^2$,

$$U(T, M) = U(T, 0) + (T(d\chi_T/dT) + \chi_T)V/(2\chi_T^2) \cdot M^2,$$

$$S(T, M) = S(T, 0) + (d\chi_T/dT)V/(2\chi_T^2) \cdot M^2.$$

3.135. Найти количество теплоты, которое следует подвести к парамагнетику при изотермическом увеличении напряженности магнитного поля от нуля до H . Работа по намагничиванию парамагнетика равна $\delta A' = HdM$. Изотермическая магнитная восприимчивость χ_T – известная функция температуры; $M = \chi_T H$.

Ответ: $Q = \frac{1}{2}VT \frac{d\chi_T}{dT} H^2$.

3.136. В результате измерений установлено, что в некоторой области температур намагниченность M парамагнитного тела зависит только от отношения H/T , т. е. $M = f(H/T)$, где H – напряженность магнитного поля. Доказать, что для этих температур внутренняя энергия парамагнетика не зависит от M , и найти функциональную форму энтропии S .

$$\text{Ответ: } S(T, H) = S(T, 0) - H/T \cdot f(H/T) + \int_0^{H/T} f(x) dx.$$

3.137. Магнитная восприимчивость парамагнитного вещества подчиняется закону Кюри $\chi = c/T$ (c – константа), а внутренняя энергия определяется выражением $U = aT^4$ (a – положительная константа).

а) Найти теплоту намагничивания, когда поле возрастает от 0 до H , а температура сохраняет постоянное значение T .

б) Как меняется температура при адиабатическом размагничивании, т. е. при адиабатическом уменьшении поля от H до 0? (Адиабатическое размагничивание применяется для получения температур ниже 1 К. Для создания охлаждающего устройства может быть использован цикл Карно, в котором в качестве рабочего вещества применяется подходящая парамагнитная соль (например, $\text{CdSO}_4(\text{H}_2\text{O})_n$), охлажденная предварительно с помощью жидкого гелия до 1–2 К в сильном магнитном поле. При выключении этого поля температура может упасть приблизительно до 0,001 К.)

$$\text{Ответ: а) } Q = -c/2T \cdot H^2;$$

$$\text{б) } T_2 = (T_1^3 - 3c/8a \cdot (H/T_1)^2)^{1/3}.$$

3.138. Показать, что для парамагнетика имеет место следующее соотношение между изотермической и адиабатической восприимчивостями:

$$\chi_s = \chi_T \cdot c_M / c_H.$$

Здесь c_M и c_H – теплоемкости соответственно при постоянной намагниченности M и при постоянном магнитном поле H ; по определению $\chi = \partial M / \partial H$. Считая намагниченность известной функцией температуры и поля H , найти разность $c_M - c_H$. Изменением объема парамагнитного вещества пренебречь.

Ответ: $c_M - c_H = -TH^2 / \chi T (\partial \chi T / \partial T)^2$.

3.139. Уравнение состояния сверхплотного вещества звезд типа белых карликов равно

$$p = a \cdot n^{5/3} + b \cdot T^2 \cdot n^{1/3},$$

где a и b – постоянные, n – число молей в единице объема, а теплоемкость c_V моля обращается в нуль при $n \rightarrow \infty$. Найти теплоемкость, энтропию, внутреннюю энергию, свободную энергию моля вещества.

Ответ: $c_V = 3 b T n^{-2/3}$, $S = 3 b T n^{-2/3} + S_0$,

$$F = 3/2 \cdot a \cdot n^{2/3} - 3/2 \cdot b T^2 n^{-2/3} - S_0 T + F_0,$$

$$U = 3/2 \cdot a \cdot n^{2/3} + 3/2 \cdot b T^2 n^{-2/3} + F_0.$$

Химический потенциал. Равновесие фаз. Химические реакции (теория)

В случае открытой системы число частиц i -го сорта N_i является переменным. Изменение числа частиц может происходить в результате фазовых переходов, химических реакций и т. д. Основное уравнение термодинамики для открытых систем содержит дополнительное слагаемое:

$$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i.$$

Определения всех других термодинамических потенциалов сохраняются, т. е.

$$H = U + pV, F = U - TS, G = H - TS.$$

Их дифференциалы равны

$$dH = TdS + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i, dF = -SdT - pdV + \sum_i \mu_i dN_i,$$

$$dG = -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i.$$

Для химического потенциала из этих выражений следуют равенства

$$\begin{aligned} \mu_i &= (\partial U / \partial N_i)_{S,V,N_j} = (\partial H / \partial N_i)_{S,p,N_j} = (\partial F / \partial N_i)_{T,V,N_j} = \\ &= (\partial G / \partial N_i)_{T,p,N_j}. \end{aligned}$$

В случае системы из одинаковых частиц зависимость термодинамических потенциалов от числа частиц должна быть такой:

$$U = N \cdot f_1(S/N, V/N), H = N \cdot f_2(S/N, p), F = N \cdot f_3(T, V/N), G = N \cdot f_4(T, p).$$

Отсюда получается, что $\mu = f_4(T, p)$, т. е. химический потенциал равен потенциалу Гиббса в расчете на одну частицу, и значит

$$G = N \cdot \mu.$$

Фазовые переходы. Фазой называется физически однородная часть системы, отличающаяся своими физическими свойствами от других ее частей и отделяющаяся от них четко выраженной

границей. Переход из одной фазы в другую называется фазовым превращением, или фазовым переходом.

При фазовых переходах первого рода скачком изменяется молярный объем и поглощается или выделяется теплота, т. е. терпят разрыв производные от термодинамического потенциала Гиббса:

$$(\partial G/\partial p)_T = V, (\partial G/\partial T)_p = -S.$$

Условие фазового равновесия имеет вид

$$\mu_1(T, p) = \mu_2(T, p).$$

Из него для фазовых переходов первого рода следует уравнение Клапейрона – Клаузиуса:

$$dp/dT = \lambda/(T(V_2 - V_1)).$$

Здесь скрытая теплота перехода $\lambda = T(S_2 - S_1)$.

Уравнение химической реакции записываем в виде

$$\sum v_i A_i = 0,$$

где A_i – химические символы веществ, участвующих в реакции, v_i – стехиометрические коэффициенты (они указывают число молекул веществ, возникающих при $v_i > 0$ и исчезающих, когда $v_i < 0$, в одном акте реакции). Условие химического равновесия имеет вид

$$\sum_i v_i \mu_i = 0.$$

Для идеального газа химический потенциал равен

$$\mu_i = c_{pi}T + \varepsilon_i - c_{pi}T \ln T + kT \ln p_i - S_{0i}T,$$

где p_i – парциальное давление, ε_i – внутренняя энергия, приходящаяся на одну молекулу соответствующего сорта при $T = 0$ (так называемая нулевая энергия), теплоемкости c_V и c_p рассчитываются на одну частицу.

Если ввести концентрацию i -го компонента

$$c_i = p_i/p$$

и обозначить через χ_i выражение

$$c_{pi}T + \varepsilon_i - c_{pi}T \ln T - S_{0i}T = \chi_i(T),$$

то

$$\mu_i = kT \ln (c_i p) + \chi_i(T).$$

В результате получим закон действующих масс:

$$\prod_i c_i^{\nu_i} = K_c(p, T).$$

Величина

$$K_c(p, T) = p^{-\sum \nu_i} \cdot \exp(-\sum \nu_i \chi_i(T)/kT)$$

называется константой химического равновесия.

Зависимость константы равновесия от температуры определяется производной

$$(\partial \ln K_c / \partial T)_p = 1/kT^2 \cdot \Delta h,$$

где величина

$$\Delta h = \sum_i \nu_i (\varepsilon_i + c_{pi}T)$$

представляет изменение энтальпии в одном акте реакции, или количество теплоты, поглощаемое при реакции, если она протекает изобарически. В термохимии вводится величина, противоположная по знаку Δh , – тепловой эффект реакции. Это количество теплоты, выделяющееся в реакции. Если в результате реакции получается какое-либо определенное химическое соединение, то тепловой эффект называют также теплотой образования этого соединения.

Тепловой эффект реакции зависит лишь от природы и физического состояния исходных веществ и конечных продуктов, но не зависит от промежуточных стадий реакции. Такое положение было установлено эмпирически русским академиком Гессом в 1840 г. и названо законом Гесса.

Химический потенциал. Равновесие фаз. Химические реакции (задачи)

3.140. Для идеального газа известна теплоемкость при постоянном объеме $c_V = N \cdot f(T)$ (N – число молекул). Найти свободную энергию F , внутреннюю энергию U , энтропию S и химический потенциал μ .

$$\text{Ответ: } F = N \left(\int^T f(T') dT' - T \int^T f(T') dT'/T' - kT \cdot \ln(V/N) - kT + \alpha - \beta kT \right),$$

$$U = N \left(\int^T f(T') dT' + \alpha \right), S = N \left(\int^T f(T') dT'/T' + k \cdot \ln(V/N) + k + \beta k \right),$$

$$\mu = \int^T f(T') dT' - T \int^T f(T') dT'/T' - kT \cdot \ln(V/N) + \alpha - \beta kT,$$

где α и β – постоянные.

3.141. Система состоит из N частиц одного сорта; U , T , V и μ обозначают соответственно внутреннюю энергию, абсолютную

температуру, объем и химический потенциал на одну частицу.
Доказать соотношение:

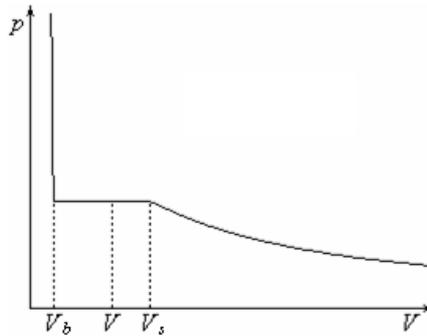
$$(\partial U/\partial N)_{T,V} = -T(\partial \mu/\partial T)_{V,N} + \mu.$$

3.142. Установить соотношение между химическим потенциалом μ и термодинамическим потенциалом Гиббса G .

Ответ: $\mu = G/N$.

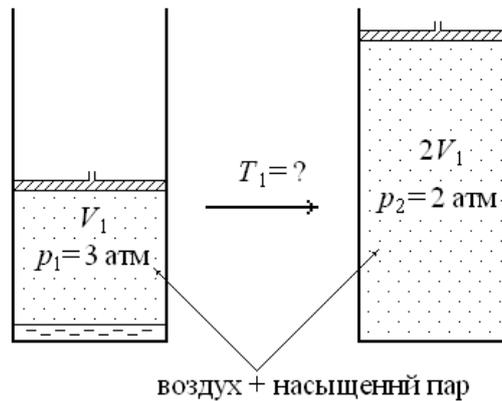
3.143. Изотермы реального газа на (p, V) -диаграмме имеют вид, показанный на рисунке. Левая ветвь кривой отвечает жидким состояниям, правая – газообразным, а отрезок прямой, параллельной оси абсцисс, $V_b \leq V \leq V_s$ (область насыщения) – двухфазным состояниям. Показать, что в этой области точка V делит указанный отрезок изотермы в отношении числа молей ν_1 в газообразной фазе к числу молей ν_2 в жидкой фазе, т. е.

$$(V - V_b)/(V_s - V) = \nu_1/\nu_2.$$



3.144. Камера заполнена воздухом. Температура ее стенок равна T_1 . На дне камеры разлито немного воды. Давление в камере p_1 , ее объем V_1 . Состояние системы равновесное. Объем камеры медленно увеличивается при сохранении неизменной температуры стенок T_1 .

При увеличении объема камеры в два раза ($V_2 = 2V_1$) вода на дне камеры почти полностью исчезла.



Найти:

а) температуру стенок T_1 , если вначале давление $p_1 = 3$ атм, а затем стало равным $p_2 = 2$ атм;

б) каким станет давление p_3 в камере, если еще раз удвоить объем $V_3 = 2V_2$?

в) полную массу воды (в жидкой и парообразной фазах) и массу воздуха в камере, если $V_2 = 44,8$ л.

Указание. Термодинамические параметры пара удовлетворяют уравнению состояния идеального газа.

Ответ: а) $T_1 = 373$ К; б) $p_3 = 1$ атм; в) $m_{\text{воды}} = 26,28$ г, $m_{\text{воздуха}} = 42,32$ г.

3.145. Определить точку кипения воды на вершине холма высотой 300 м над уровнем моря. Изменением температуры с высотой пренебречь. Удельная теплота парообразования при нормальных условиях равна 540 кал/г. Пар подчиняется уравнению состояния идеального газа.

Ответ: $t = 99$ °С.

3.146. В закрытом сосуде объемом 5 л находится 1 кг воды при температуре 100 °С. Пространство над водой занято насыщенным водяным паром (воздух выкачан). Найти увеличение массы насыщенного пара при повышении температуры системы на 1 К. Удельная теплота парообразования 539 кал/г. В расчетах пар считать идеальным газом. Удельным объемом воды пренебречь по сравнению с удельным объемом пара.

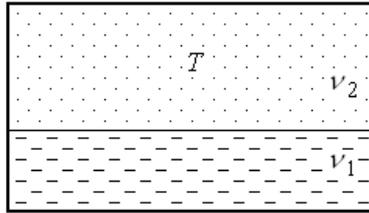
Ответ: $\Delta m \approx 0,075$ г.

3.147. В цилиндре с поршнем на высоте H от дна установлена перегородка. Между перегородкой и поршнем находится жидкость массой M с очень тонким слоем насыщенного пара при температуре T . Ниже перегородки вакуум. Система полностью теплоизолирована. После того как через отверстие в перегородке жидкость сливается вниз, поршень поднимается на высоту h . Определить массу образовавшегося насыщенного пара, если удельная теплота парообразования жидкости λ , ее молярная масса μ , ускорение свободного падения g . Пар считать идеальным газом.



Ответ:
$$m = \frac{MgH}{\lambda - \frac{H}{H+h} \frac{RT}{\mu}}$$

3.148. В сосуде в равновесии при температуре T находится ν_1 молей жидкости и ν_2 молей ее насыщенного пара.



Определить теплоемкость c_V этой системы, если молярная теплота парообразования этого вещества равна λ . Пар описывается моделью идеального газа с известной молярной теплоемкостью c_p . Жидкость считать несжимаемой. Ее молярная теплоемкость равна c . Предполагается, что молярный объем пара много больше молярного объема жидкости.

$$\text{Ответ: } c_V = \nu_1 c + \nu_2 c_p - \frac{2\nu_2 \lambda}{T} + \frac{\nu_2 \lambda^2}{RT^2}.$$

3.149. Давление p насыщенных паров ртути зависит от температуры T по закону

$$\ln p = -a/T - b \cdot \ln T + c,$$

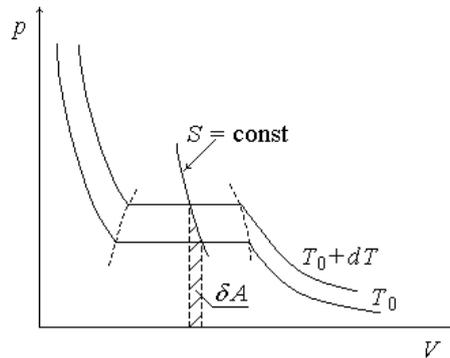
где a , b , c – постоянные. Найти молярную теплоту испарения ртути как функцию температуры $\lambda(T)$.

$$\text{Ответ: } \lambda = R(a - bT).$$

3.150. Найти молярную теплоту испарения воды при температуре T_0 , считая, что процесс перехода жидкость–пар описывается уравнением Ван-дер-Ваальса. Плотность воды при температуре T_0 равна ρ_0 , молекулярный вес μ .

$$\text{Ответ: } \lambda = a\rho_0/\mu + RT_0.$$

3.151. В вертикальном теплоизолированном сосуде под поршнем находятся в равновесии жидкость с молярной массой μ и ее насыщенный пар при температуре T_0 .



Поршень опускают, и он совершает дифференциально малую работу δA . Рассмотреть этот процесс на (p, V) -диаграмме. Определить изменение температуры вещества под поршнем, если суммарная теплоемкость этого вещества при постоянном объеме равна c_V , а удельная теплота парообразования — λ . Пар считать идеальным газом. Перемещение центра масс жидкости и газа не учитывать.

Ответ:
$$dT = \frac{\lambda \mu \delta A}{RT_0 c_V}.$$

3.152. При 0°C упругость водяного пара надо льдом 4,58 мм рт. ст. Удельная теплота плавления льда при 0°C $q_1 = 80$ кал/г. Теплота испарения воды при 0°C $q_2 = 596$ кал/г. Найти упругость водяного пара надо льдом при температуре -1°C .

Ответ: $p \approx 4,20$ мм рт. ст.

3.153. Рассчитать самую низкую температуру льда на катке, при которой катание на коньках еще возможно. Длина конька 40 см,

ширина лезвия 0,2 см, вес конькобежца 80 кг. Считать, что снижение сопротивления происходит за счет плавления льда.

Ответ: $t_{\min} \approx -91 \text{ }^\circ\text{C}$.

3.154. При атмосферном давлении удельные теплоемкости воды и льда в пределах нескольких градусов Цельсия ниже точки замерзания определяются выражениями:

$$c_p(\text{воды}) = 4222 - 22,6t, \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{кг}}; c_p(\text{льда}) = 2112 + 7,5t, \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{кг}}.$$

Определить теплоемкость каждой фазы при температуре $t = -10 \text{ }^\circ\text{C}$. Какая из этих фаз находится в более упорядоченном состоянии?

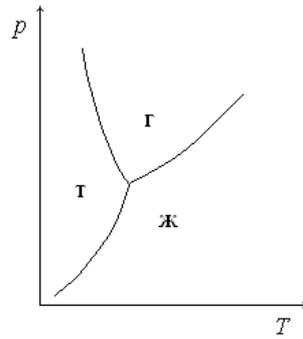
Ответ: $S = S_0 + 4222 \ln \frac{263}{273} + 226 \text{ (вода)},$

$$S' = S'_0 + 2112 \ln \frac{263}{273} - 75 \text{ (лед)},$$

где $S_0 (S'_0)$ – энтропия воды (льда) при $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$,

$$S - S' = 2110 \cdot \ln \frac{263}{273} + 1528 \approx 1450 > 0.$$

3.155. Вблизи тройной точки кривая равновесия (кривая $p - T$) между твердой и газообразной фазами имеет обычно больший наклон к температурной оси, чем кривая равновесия между жидкой и газообразной фазами. Дать термодинамическое объяснение этого явления.



3.156. Определить удельную теплоемкость насыщенного пара, расширяющегося (или сжимающегося) таким образом, что во время процесса он все время остается насыщенным. Считать, что пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона. Удельным объемом жидкости пренебречь по сравнению с удельным объемом пара. Численный расчет произвести для воды при температуре 100°C . Удельная теплота парообразования для воды при 100°C равна $q = 539$ кал/г. Молярная теплоемкость водяного пара при постоянном давлении равна 8 кал/(моль·К).

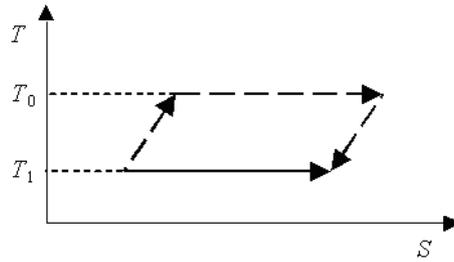
Ответ: $c = c_p - q/T = -1$ кал/(г·К).

3.157. Найти изменение энтропии системы, состоящей из воды и насыщенного пара, при переходе ее в насыщенный пар. Начальная температура системы T_1 , конечная T_2 . Начальная масса пара m_1 , конечная m_2 . Зависимость удельной теплоты парообразования воды q от температуры пренебречь. Пар рассматривать как идеальный газ.

Ответ: $\Delta S = (m_2 - m_1)q/T_1 + m_2(c_p \cdot \ln(T_2/T_1) + q(1/T_2 - 1/T_1))$.

3.158. Теплоемкость некоторого вещества в твердом состоянии равна c_m , в жидком — $c_{ж}$. При переходе из твердого состояния в жидкое, происходящем при температуре T_0 , поглощается скрытая теплота q_0 . Полагая, что все удельные теплоемкости не зависят от

температуры, вычислить скрытую теплоту перехода при температуре $T_1 (< T_0)$.



Ответ: $q = (c_m - c_{жс})T_1 \cdot \ln(T_0/T_1) + q_0 T_1/T_0$.

3.159. Найти зависимость степени диссоциации газа, состоящего из двухатомных молекул A_2 , как функцию температуры и давления. Энергия диссоциации молекулы равна D .

Ответ: $\alpha = n_A / (2n_{A_2} + n_A)$, $\alpha^2 / (1 - \alpha^2) = \text{const} \cdot T^{1/2} / p \cdot \exp(-D/kT)$.

3.160. В атмосфере некоторых звезд интенсивно протекает процесс тепловой ионизации металлических паров:



С помощью закона действующих масс найти зависимость степени ионизации α от температуры и давления. Энергия ионизации атома равна I .

Ответ: $\alpha^2 / (1 - \alpha^2) = \text{const} \cdot T^{5/2} / p \cdot \exp(-I/kT)$.

Поверхностное натяжение (теория)

Термодинамика поверхностных явлений была развита Гиббсом. Он принимал поверхностный слой за новую «поверхностную фазу», отличную от объемных фаз тем, что ее толщина мала, и поэтому

рассматривал поверхностный слой как геометрическую разделяющую поверхность, применяя к ней термодинамические уравнения.

Площадь поверхности фазы Σ является ее параметром. Изменение этой площади сопровождается работой:

$$\delta A = -\sigma d\Sigma.$$

Величина σ называется коэффициентом поверхностного натяжения. Из опыта известно, что σ зависит от жидкости и среды, с которой жидкость граничит, и является функцией температуры (с ростом температуры убывает).

Сила поверхностного натяжения по величине равна

$$f = \sigma l,$$

где l – длина края пленки (или разреза граничной поверхности), и направлена перпендикулярно краю по касательной к поверхности жидкости.

Основное уравнение термодинамики для поверхности раздела сред имеет вид

$$dU_\Sigma = TdS_\Sigma + \sigma d\Sigma.$$

Соответственно дифференциал свободной энергии этой поверхности определяется выражением

$$dF_\Sigma = -S_\Sigma dT + \sigma d\Sigma.$$

Частные производные от свободной энергии равны

$$(\partial F_\Sigma / \partial T)_\Sigma = -S_\Sigma, \quad (\partial F_\Sigma / \partial \Sigma)_T = \sigma.$$

Поскольку коэффициент поверхностного натяжения для данной системы зависит только от температуры $\sigma = \sigma(T)$ (это фактически

термическое уравнение состояния поверхности раздела), то второе соотношение интегрируется:

$$F_{\Sigma} = \sigma(T) \cdot \Sigma$$

(постоянная интегрирования по физическим соображениям равна нулю). Энтродпия находится из первого соотношения:

$$S_{\Sigma} = -d\sigma/dT \cdot \Sigma.$$

Внутренняя энергия имеет вид

$$U_{\Sigma} = (\sigma - T \cdot d\sigma/dT) \cdot \Sigma.$$

Поверхностное натяжение (задачи)

3.161. Найти высоту поднятия (опускания) жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения σ в капилляре радиусом r и между параллельными пластинками при расстоянии между ними l , если краевой угол равен θ .

Ответ: $h_1 = 2\sigma \cos\theta / (\rho g r)$, $h_2 = 2\sigma \cos\theta / (\rho g l)$.

3.162. Две стеклянные вертикальные пластинки, погруженные частично в воду, образуют друг с другом очень малый двугранный угол α . Найти высоту поднятия жидкости h как функцию расстояния x от ребра двугранного угла.

Ответ: $h = 2\sigma \cos\theta / (\rho g \alpha x)$.

3.163. Чему равно капиллярное давление в капельке ртути диаметром $d = 1$ мкм ($\sigma = 487$ дин/см)?

Ответ: $p = 4\sigma/d = 19,2$ атм.

3.164. Найти усилие, необходимое для отрыва пластин, между которыми в промежутке шириной 1 мкм помещена капля воды массой 0,1 г ($\sigma = 73$ дин/см). Краевой угол равен нулю.

Ответ: $F = 2\sigma m/(\rho l^2) = 1500$ кГ.

3.165. На два кольца радиусами r , расположенных в параллельных плоскостях, натянута мыльная пленка. Она образует замкнутую поверхность. Часть ее между кольцами можно считать цилиндрической. Какова форма пленки на торцах?

Ответ: сегменты сферы радиуса $R = 2r$.

3.166. Найти давление насыщенного пара над выпуклой или вогнутой сферической поверхностью жидкости, если его давление над плоской поверхностью p_0 . Плотности насыщенного пара ρ_n и жидкости ρ_j известны.

Ответ: $p = p_0 \pm 2\sigma/r \cdot \rho_n/\rho_j$.

3.167. Рассмотреть бесконечно малый цикл Карно. Найти $d\sigma/dT$. Скрытая теплота образования пленки равна q .

Ответ: $d\sigma/dT = -q/T$.

3.168. Показать, что: а) энтропия и внутренняя энергия пленки увеличиваются при ее изотермическом растяжении; б) температура пленки повышается при адиабатическом сжатии.

3.169. Показать, что вблизи абсолютного нуля поверхностное натяжение жидкого гелия перестает зависеть от температуры.

3.170. Капля жидкости находится в равновесии с паром при давлении $p_1(T)$, которое из-за поверхностного натяжения в капле больше давления $p_2(T)$ насыщенного пара над плоской поверхностью. Найти критический (равновесный) радиус капли в

зависимости от разности химических потенциалов жидкости и пара, а также найти давление p_1 как функцию радиуса капли при заданной температуре T . Пар считать идеальным газом и не учитывать сжимаемость жидкости $(\partial\rho/\partial p)_T = 0$. При решении воспользоваться потенциалом Гиббса, который является суммой потенциалов объемных фаз и энергии поверхности.

Ответ: $p_1(T) = p_2(T) \cdot \exp(2\sigma m / (\rho k T r))$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука, 1990. 592 с.
- Козел С. М. и др.* Сборник задач по физике / С. М. Козел, Э. И. Рашба, С. А. Славатинский. М.: Наука, 1987. 302 с.
- Сборник задач по общей физике / Н. Н. Взоров, О. И. Замша, И. Е. Иродов, И. В. Савельев.* М.: Наука, 1968. 208 с.
- Гинзбург В. Л. и др.* Сборник задач по общему курсу физики / Гинзбург В. Л., Левин Л. М., Сивухин Д. В., Яковлев И. А. М.: Наука, 1964. Ч. 2. 412 с.
- Базаров И. П.* Термодинамика. М.: Высш. шк., 1991. 376 с.
- Кубо Р.* Термодинамика. М.: Мир, 1970. 304 с.
- Тер Хаар Д., Вергеланд Г.* Элементарная термодинамика. М.: Мир, 1968. 220 с.
- Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977. 552 с.
- Левич В. Г.* Введение в статистическую физику. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. 528 с.
- Кронин Дж. и др.* Сборник задач по физике с решениями / Дж. Кронин, Д. Гринберг, В. Телегди. М.: Атомиздат, 1975. 336 с.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.
- Кристи Р., Питти А.* Строение вещества: введение в современную физику. М.: Наука, 1969. 596 с.
- Бенсон С.* Основы химической кинетики. М.: Мир, 1964.
- Замураев В. П.* Задания для студентов по молекулярной физике и термодинамике. Новосибирск: НГУ, 1991. 40 с.
- Оришич Т. И., Филиппова Л. Г.* Сборник задач с решениями по термодинамике и статистической физике. Новосибирск: НГУ, 1993. 93 с.
- Замураев В. П., Калинина А. П.* Физика сплошных сред. Новосибирск: НГУ, 1997–2000. Ч. 1–3. 212 с.
- Замураев В. П., Калинина А. П.* Задачи по термодинамике и молекулярной физике. Новосибирск: НГУ, 2003. 62 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА	3
Элементы теории вероятностей (теория)	3
Элементы теории вероятностей (задачи)	6
Распределение Максвелла (теория)	8
Распределение Максвелла (задачи)	13
Распределение Больцмана (теория)	30
Распределение Больцмана (задачи)	33
Теория теплоемкости. Распределение энергии по степеням свободы (теория)	45
Теория теплоемкости. Распределение энергии по степеням свободы (задачи)	50
Электрические и магнитные свойства газа	59
Равновесное излучение	60
Часть 2. ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА	62
Столкновения молекул. Длина свободного пробега (теория)	62
Столкновения молекул. Длина свободного пробега (задачи)	64
Явления переноса в плотном газе (теория)	66
Явления переноса в плотном газе (задачи)	69
Явления переноса в ультраразреженном газе (теория)	83
Явления переноса в ультраразреженном газе (задачи)	85
Броуновское движение	96
Часть 3. ТЕРМОДИНАМИКА	99
Уравнение состояния реального газа (теория)	99
Уравнение состояния реального газа (задачи)	100
Работа и количество теплоты. Первое начало термодинамики (теория)	101
Работа и количество теплоты. Первое начало термодинамики (задачи)	105
Второе начало термодинамики. Циклы. Неравенство Клаузиуса. Метод циклов. Энтропия (теория)	121
Второе начало термодинамики. Циклы. Неравенство Клаузиуса. Метод циклов. Энтропия (задачи)	125
Термодинамические функции (теория)	141
Термодинамические функции (задачи)	147
Термодинамика различных систем: реальные газы, упругие тела, диэлектрики и др. (теория)	154

Термодинамика различных систем: реальные газы, упругие тела, диэлектрики и др. (задачи)	157
Химический потенциал. Равновесие фаз. Химические реакции (теория)	165
Химический потенциал. Равновесие фаз. Химические реакции (задачи)	169
Поверхностное натяжение (теория)	177
Поверхностное натяжение (задачи)	179
Библиографический список	182

Учебное издание

Замураев Владимир Павлович,
Калинина Анна Павловна

ЗАДАЧИ ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Редактор *Е. П. Войтенко*

Подписано в печать 07.11.2012 г.
Формат 60×84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 11,5. Усл. печ. л. 11. Тираж 200 экз.

Заказ №
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090. Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.