МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет естественных наук
Кафедра общей физики

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ
им. акад. С. А. Христиановича СО РАН

В. П. ЗАМУРАЕВ, А. П. КАЛИНИНА

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Учебное пособие

Новосибирск
2012

УДК 536.7
ББК В36я73-1
З 266

Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями контрольных работ по квантовой механике: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 203 с.

ISBN 978-5-4437-0084-7

В учебном пособии изложены алгоритмы решения задач контрольных работ по физике (раздел «Квантовая механика»), проводимых на втором курсе факультета естественных наук НГУ у химиков в течение ряда лет. Данное пособие отличается от уже опубликованных подобных изданий тем, что в нем подробно изложен алгоритм решения, тогда как в аналогичных изданиях для МГУ, МФТИ и т. д. изложены обычно только контуры решения задач.

Предназначено для преподавателей и студентов вузов.

Рецензент
д-р физ.-мат. наук В. А. Багрянский

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

Учебное пособие рекомендовано к изданию ученым советом ИТПМ СО РАН.

ISBN 978-5-4437-0084-7

Введение

Курс «Физика. Квантовая механика» является одним из разделов четырехсеместрового курса общей физики, читаемого на факультете естественных наук НГУ, специальность «Химия». Задачами данного раздела являются: овладение относящимися к нему фундаментальными основами естествознания; подготовка к восприятию последующих общих и специальных курсов, которые требуют знаний физики.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с квантовомеханическими явлениями, областями их экспериментального и технического применения, в том числе и в смежных областях знания и приборостроения и иного промышленного производства (в химии, медицине, биологии и т. д.).

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, семинарские занятия, контрольные работы, коллоквиумы, домашние задания, консультации, сдачу экзаменов, самостоятельную работу студентов.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля.

Текущий контроль. Освоение студентами курса проходит с использованием системы ИКИ (индивидуального кумулятивного индекса). В течение семестра студенты проходят следующие контрольные точки: пишут две потоковые контрольные работы, сдают шесть коллоквиумов, готовят и сдают шесть домашних заданий. Все контрольные точки оцениваются баллами, и к концу семестра каждый студент набирает некоторую сумму баллов, которая может привести к получению итоговой оценки «автоматом» (от «удовлетворительно» до «отлично»).

Итоговый контроль. Итоговую оценку студент может получить на письменном экзамене в конце семестра, на котором он имеет возможность либо повысить оценку, полученную им «автоматом», либо получить любую положительную (или неудовлетворительную) оценку в случае отсутствия у него «оценки-автомата» по результатам системы ИКИ.

Подробнее с системой ИКИ можно познакомиться в учебном издании: Пуртов П. А., Замураев В. П. Физика. Квантовая механика. Новосибирск: НГУ, 2011.

В учебном пособии приведены задачи с решениями потоковых контрольных и контрольных на экзаменах, в составлении и проведении которых принимал непосредственное участие В. П. Замураев. А. П. Калинина выполнила объемную работу по решению и проверке ответов задач, в написании пособия.

Задачи сгруппированы по годам и по контрольным работам. В скобках за номером задачи указано количество баллов, в которое оценивалась задача.

Учебное пособие «Задачи с решениями контрольных работ по квантовой механике» предназначено, в первую очередь, для студентов 2-го курса факультета естественных наук НГУ, специальность «Химия». Любой студент может заранее оценить свой уровень в освоении материала курса, повысить свои шансы в получении желаемой оценки за курс.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ 2011 г.

Вторая контрольная работа

1. (100 б.) Состояние плоского ротатора описывается ненормированной волновой функцией

$$\psi(\varphi) = 2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi.$$

Какие значения l_z и с какими вероятностями можно обнаружить? Чему равно среднее значение l_z?

2. (130 б.) В первом порядке теории возмущений рассчитать сдвиг уровней энергии атома водорода с $n = 2$ и $l = 1$ при действии возмущения

$$\hat{V} = \alpha(\hat{L}_x - \hat{L}_y).$$

3. (130 б.) Имеются три невзаимодействующих частицы со спинами 1/2, 1/2 и 1. Система находится в состоянии с полным спином 2 и проекцией на ось z, равной 1. Найти вероятность обнаружения первых двух спинов в триплетном состоянии с проекцией на ось z, равной 0.

4. (170 б.) Состояние частицы со спином $s = 1/2$ описывается в s_x-представлении волновой функцией

$$|\psi\rangle = A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Найти вид этой функции в s_z-представлении. Найти средние значения

$\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z$ и $\hat{s}^2$.

5. (170 б.) Гамильтониан системы в базисе векторов $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$ имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 5 & -2i \\ 0 & 2i & 1 \end{pmatrix}.$$

Волновая функция в E-представлении задана следующим образом:

$$\psi = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}$$

(собственные значения возрастают сверху вниз). Какова средняя энергия системы?

Экзамен

1. (140 б.) В базисе $|1\rangle, |2\rangle$ гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система находится в состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle.$$

Записать волновую функцию в виде вектора в заданном базисе. Найти среднюю энергию системы. С какой вероятностью можно обнаружить различные значения энергии?

2. (140 б.) Угловая зависимость волновой функции частицы в центральном поле имеет вид

$$\Phi(\theta, \varphi) = C\cos^2\theta.$$

Найти вероятности различных значений момента частицы и среднее значение квадрата момента.

3. (170 б.) В полярных координатах оператор $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{A} = i\frac{\partial}{\partial\varphi} - a\frac{\partial}{\partial r},$$

где a – действительное положительное число. Найти собственные функции и собственные значения оператора.

4. (190 б.) Гармонический осциллятор (масса m, частота ω) находится в состоянии

$$\psi(x) = c(\psi_0(\mathrm{x}) + \psi_1(x)),$$

где $\psi_0(\mathrm{x})$ и $\psi_1(\mathrm{x})$ – собственные функции осциллятора. Определить амплитуду и частоту колебаний среднего значения координаты.

5. (210 б.) Система, состоящая из двух невзаимодействующих спинов ($s_1 = s_2 = 1/2$), находится в состоянии

$$\psi = \frac{1}{4}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + \sqrt{\frac{7}{8}}\alpha_1\beta_2.$$

Найти среднее значение проекции на ось z и квадрата суммарного спинового момента в этом состоянии.

6. (250 б.) В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии атома водорода с $n = 2$, если действует возмущение

$$\hat{V} = A\left(\hbar^2\hat{L}^2 + \sqrt{2}\hbar\hat{L}_x\right).$$

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ 2009 г.

Первая контрольная работа

1. (100 б.) Нормировать волновую функцию

$$\psi(r,\theta,\varphi) = Ar^{-1}\exp(-\alpha r)\cos\theta\exp(-i\varphi),\ \text{где}\ \alpha > 0.$$

2. (120 б.) Частица массой m находится в двумерной прямоугольной, бесконечно глубокой потенциальной яме со сторонами a и $2a$. Найти значения энергии частицы на первых четырех энергетических уровнях.

3. (150 б.) Осциллятор с массой m и частотой ω находится в состоянии

$$\psi(x) = A(x\sqrt{m\omega/\hbar}\psi_1(x) + \psi_3(x)),$$

где A = const. Какие значения энергии осциллятора и с какой вероятностью могут быть получены при измерении? Найти среднее значение энергии.

4. (150 б.) Частица массой m находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, расположенными в точках $x = 0$ и $x = a$. На частицу действует возмущение

$$V(x) = V_0\cos(2\pi x/a).$$

Найти в первом порядке теории возмущений волновую функцию первого возбужденного состояния частицы и во втором порядке теории возмущений энергию этого состояния.

5. (180 б.) Частица массой m находится в трехмерном потенциальном поле в основном состоянии:

$$U(r,\theta,\varphi) = m\omega^2r^2/2,$$

где ω = const. На каком среднем расстоянии от начала координат находится частица?

Вторая контрольная работа

1. (100 б.) Под действием электромагнитного излучения электрон в атоме водорода оказался в состоянии с $n = 3$ и определенным значением проекции орбитального момента, равном единице. Указать возможные значения пар полного момента и проекции полного момента этого электрона.

2. (120 б.) В базисе $|1\rangle, |2\rangle$ гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система находится в состоянии

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}|1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|2\rangle.$$

Записать волновую функцию системы в заданном базисе. Найти среднюю энергию системы. Какие значения энергии и с какой вероятностью можно получить при измерении?

3. (140 б.) Найти вероятность перехода атома водорода из основного в первое возбужденное состояние под действием зависящего от времени возмущения

$$V(t) = \beta(1 - r/2a)^{-1}\delta(t),$$

где a – боровский радиус.

4. (160 б.) Система состоит из двух слабо взаимодействующих спинов $s_1 = 4$ и $s_2 = 1$. Какова вероятность того, что для состояния $|4,2\rangle|1,1\rangle$ полный спин системы равен 5?

5. (180 б.) Система из двух электронов находится в синглетном состоянии. С некоторого момента времени первый электрон оказывается в магнитном поле с индукцией $2\vec{B}$, а второй – в поле с индукцией $\vec{B}/2$.

Какова вероятность обнаружить систему электронов в состоянии T_0? Гамильтониан взаимодействия спина с магнитным полем имеет вид $\hat{H} = \gamma\hbar\left(\hat{\vec{s}}, \vec{B}\right)$.

Экзамен

1. (130 б.) Найти поправку первого порядка теории возмущений к энергии основного состояния гармонического осциллятора в потенциале

$$V(x) = V_0 \exp(-m\omega x^2/\hbar),$$

где m – масса, ω – частота осциллятора.

2. (150 б.) В базисе векторов $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 5 & -2i \\ 0 & 2i & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти уровни энергии и собственные функции гамильтониана.

3. (170 б.) Частица массой m находится в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме шириной a. Состояние частицы является суперпозицией трех стационарных состояний: ψ_{n-1}, ψ_n и ψ_{n+1}, где $n \ge 2$. Средняя энергия частицы равна

$$E_n = \pi^2\hbar^2 n^2/2ma^2.$$

С какой вероятностью можно обнаружить частицу в состоянии ψ_{n-1}, если вероятность найти ее в состоянии ψ_n равна w_n?

4. (190 б.) Гармонический осциллятор (масса m, частота ω) находится в состоянии

$$\psi(x) = C(\psi_0 + \psi_1),$$

где ψ_0 и ψ_1 – собственные функции осциллятора. Определить амплитуду и частоту колебаний среднего значения координаты.

5. (220 б.) Два невзаимодействующих спина $s_1 = 1/2$ и $s_2 = 3/2$ находятся в состоянии с проекциями на ось z, равными $s_{1z} = -1/2$ и $s_{2z} = 3/2$. Найти разложение вектора этого состояния по векторам, соответствующим определенным значениям полного момента и его проекции. Найти среднее значение квадрата полного момента в этом состоянии.

6. (240 б.) На атом водорода, находящийся в основном состоянии, действует зависящее от времени возмущение

$$V(r,\theta,\varphi,t) = V_0 r^{-2} \cos\theta \exp(-t/\tau),$$

где V_0 и τ – константы, $0 \le \tau \le \infty$. В какие состояния с $n = 2$ возможны переходы? Вычислить вероятности переходов.

Переэкзаменовка

1. (130 б.) Частица в одномерной бесконечно глубокой яме со «стенками», расположенными в точках $x = 0$ и $x = a$, находится в состоянии с волновой функцией

$$\psi = A \sin\frac{5\pi x}{2a} \sin\frac{3\pi x}{2a},$$

где A = const. Найти вероятность обнаружить при измерении наименьшую возможную энергию частицы.

2. (150 б.) Частица находится в состоянии с волновой функцией

$$\psi(x) = C\begin{cases} e^{x/a}, & x \le 0, \\ e^{-x/b}, & x > 0, \end{cases}$$

где a, b = const, $a > 0$, $b > 0$. Найти среднее значение координаты частицы.

3. (160 б.) В некотором четырехмерном представлении система с волновой функцией

$$\psi_{E_0} = A\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$$

имеет определенное значение энергии, равное E_0. Найти вероятность обнаружить энергию E_0 для состояния, описываемого волновой функцией

$$\varphi = B\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

4. (200 б.) Частица со спином 3/2 находится в состоянии с определенным значением проекции спина на ось x: $s_x = 3/2$. Какие значения проекции спина на ось z и с какими вероятностями можно обнаружить при измерении? Чему равно среднее значение проекции s_z?

5. (220 б.) На плоский гармонический осциллятор массой m с двумя одинаковыми частотами колебаний по осям x и y ($\omega_x = \omega_y = \omega$) действует возмущение $V = \alpha xy$, где α – действительная постоянная.

1) Найти энергии и кратности вырождения трех нижних энергетических уровней невозмущенного осциллятора.

2) В первом порядке теории возмущений найти расщепление третьего уровня. Выписать правильные волновые функции (волновые функции одномерного осциллятора считать известными).

6. (240 б.) Частица массой m находится в трехмерной сферически симметричной потенциальной яме радиусом r_0: $U(r) = 0$ при $r < r_0$ и $U(r) = \infty$ при $r > r_0$. Орбитальный момент частицы равен нулю. Найти уровни энергии и нормированные собственные функции частицы.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ 2007 г.

Первая контрольная работа

1. (100 б.) Частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\psi(x) = \begin{cases} Ce^{x/a}, & x \le 0, \\ Ce^{-x/b}, & x > 0, \end{cases}$$

где $b > 0$ и $a > 0$ – известные константы. Найти среднюю координату частицы $\langle x \rangle$.

2. (120 б.) Доказать, что среднее значение $\langle xp_x + p_x x \rangle$ в любом состоянии является вещественной величиной.

3. (140 б.) На находящийся в основном состоянии линейный осциллятор массой m, частотой ω и с зарядом q на промежутке времени $-\pi/2\omega \le t \le \pi/2\omega$ действует однородное электрическое поле $E = E_0 \cos \omega t$, направленное вдоль оси осциллятора. В какие состояния возможны переходы? Каковы вероятности этих переходов после выключения поля?

4. (160 б.) Частица массой m находится в одномерном потенциале

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < -a/2, \\ -V_0 \cos\dfrac{2\pi x}{a}, & -a/2 \le x \le a/2, \\ \infty, & x > a/2, \end{cases}$$

где $V_0 > 0$ и $a > 0$ – известные константы. Найти с точностью до первого порядка теории возмущений волновую функцию основного состояния частицы и с точностью до второго порядка теории возмущений энергию этого состояния.

5. (180 б.) Частица массой m находится в прямоугольном ящике с бесконечно жесткими, непроницаемыми стенками. Найти объем этого ящика, если известно, что семь первых уровней энергии равноотстоят друг от друга на величину ΔE. При этом первые три уровня являются невырожденными.

Вторая контрольная работа

1. (100 б.) Состояние частицы со спином 1/2 описывается в S^2, S_z -представлении волновой функцией

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найти средние значения $\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle, \langle S^2 \rangle$.

2. (120 б.) В базисе $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В момент времени $t = 0$ система находилась в состоянии $|1\rangle$. Найти волновую функцию системы в произвольный момент времени $\psi(t)$ в этом представлении.

3. (140 б.) В L^2, L_z -представлении волновая функция системы с моментом $l = 1$ имеет вид

$$\psi = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 0 \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix},$$

где α – действительная постоянная. Как выглядит нормированная волновая функция в L^2, L_x-представлении? Чему равны $\langle L_z \rangle$ и $\langle L_x \rangle$?

4. (160 б.) В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии для состояний атома водорода с главным квантовым числом n = 2. Оператор возмущения $\hat{V} = A\hat{L}_x$, где A – действительная константа. Выписать «правильные» волновые функции.

5. (180 б.) Система с орбитальным моментом $l = 1$ и спином $s = 1/2$ находится в состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle.$$

Какие значения суммарного момента системы и с какими вероятностями можно обнаружить в этом состоянии?

Экзамен

1. (120 б.) Частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\psi(x) = C\begin{cases} \cos\frac{\pi x}{a}, & -a/2 \le x \le 0, \\ \cos\frac{\pi x}{b}, & 0 \le x \le b/2, \\ 0, & x < -a/2,\ x > b/2, \end{cases}$$

причем $a < b$. Какова вероятность обнаружить частицу в промежутке $-a/2 \le x \le a/2$?

2. (150 б.) В одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, расположенными в точках $x = 0$ и $x = a$, находится частица массой m. Состояние частицы описывается волновой функцией

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2,$$

где ψ_1, ψ_2 – волновые функции стационарных состояний с квантовыми числами $n = 1$ и $n = 2$ соответственно. Найти период и амплитуду колебаний среднего импульса частицы.

3. (170 б.) Имеется двумерный осциллятор массой m. Частоты колебаний осциллятора вдоль любых двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости колебаний, равны ω. На осциллятор действует возмущение $V(r) = \alpha/r$, где α – известная константа, r – расстояние до точки минимума потенциальной энергии невозмущенного осциллятора. Найти с точностью до первого порядка теории возмущений энергию основного состояния осциллятора.

4. (200 б.) Атом водорода находится в основном состоянии. В течение времени τ на него действует возмущение $V(r) = -\beta/r$, где β – известная положительная постоянная, r – расстояние до ядра атома. Найти вероятность перехода в первое возбужденное состояние.

5. (220 б.) Две частицы со спинами $s_1 = s_2 = 1/2$ находятся в однородном магнитном поле с индукцией B. В момент времени $t = 0$ система находилась в синглетном состоянии. Гамильтониан взаимодействия первой частицы с полем равен

$$\hat{H}_1 = -\gamma_1 \hbar \vec{B} \cdot \hat{\vec{s}}_1,$$

гамильтониан второй равен

$$\hat{H}_2 = -\gamma_2 \hbar \vec{B} \cdot \hat{\vec{s}}_2,$$

где $\gamma_1 < \gamma_2$ – положительные постоянные. Спустя какое время система окажется в триплетном состоянии?

6. (240 б.) В некотором базисе гамильтониан невозмущенной системы и оператор возмущения имеют вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & \sqrt{3}E & 0 \\ \sqrt{3}E & 3E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & -V & 0 \\ -V & 0 & V \\ 0 & V & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти энергетические уровни системы во втором порядке теории возмущений.

Переэкзаменовка

1. (120 б.) Найти среднюю координату частицы, состояние которой описывается волновой функцией

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ xe^{-x/a}, & 0 \le x < \infty. \end{cases}$$

2. (150 б.) Два первых уровня энергии двумерного осциллятора массой m равны второму и третьему уровням энергии частицы массой m в одномерной прямоугольной яме шириной a с бесконечно высокими стенками. Выписать гамильтониан осциллятора.

3. (170 б.) На осциллятор массой m с частотой ω действует возмущение

$$V(x) = \beta\delta(x - a),$$

где β – известная постоянная. При каких значениях a поправка первого порядка к энергии первого возбужденного состояния осциллятора будет максимальна? Чему она при этом равна?

4. (200 б.) Найти среднее значение энергии кулоновского взаимодействия электрона с ядром в атоме водорода, находящемся в состоянии с $n = 3$, $l = 2$.

5. (220 б.) Система, состоящая из трех слабо взаимодействующих частиц со спином 1/2, находится в состоянии с определенными значениями суммарного спина $s = 3/2$ и его проекции $s_z = 1/2$. С какой вероятностью подсистему, состоящую из двух первых частиц, можно обнаружить в триплетном состоянии $|\mathrm{T}_0\rangle$?

6. (240 б.) В базисе состояний $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти вид гамильтониана в энергетическом представлении. Какие значения энергии и с какими вероятностями можно обнаружить, если система находится в состоянии $|2\rangle$? Найти среднее значение энергии в этом состоянии.

Вторая переэкзаменовка

1. (100 б.) Волновая функция в полярных координатах задана следующим образом:

$$\psi(r,\varphi) = \begin{cases} C\exp(i\sin\varphi), & \text{если} \quad r < R_0 \quad \text{и} \quad 0 \le \varphi < \pi, \\ 0 \; - \; \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти средние значения $\bar{r}$ и $\bar{\varphi}$.

2. (100 б.) Найти собственные функции и собственные значения оператора

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \text{ если } \psi(x) = \psi(x+a).$$

3. (100 б.) Осциллятор с частотой ω и массой m находится в состоянии

$$\psi(x) = C(\psi_0(x) + x\sqrt{m\omega/\hbar}\,\psi_2(x)).$$

Найти среднее значение энергии.

4. (100 б.) Имеется система из трех спинов $S_1 = 1/2$, $S_2 = 1$ и $S_3 = 3/2$. Найти значения суммарного спина S. Сколько состояний имеют проекцию суммарного спина $S_z = 2$?

Третья переэкзаменовка

1. (100 б.) Волновая функция в полярных координатах задана следующим образом:

$$\psi(r,\varphi) = \begin{cases} C\exp(i\cos^3\varphi), & \text{если} \quad r < R_0 \quad \text{и} \quad 0 \le \varphi < \pi, \\ 0 \; - \; \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти средние значения $\bar{r}$ и $\bar{\varphi}$.

2. (100 б.) Найти собственные функции и собственные значения оператора

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}, \text{ если } \psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi).$$

3. (100 б.) Осциллятор с частотой ω и массой m находится в состоянии

$$\psi(x) = C(\psi_1(x) + x\sqrt{m\omega/\hbar}\,\psi_3(x)).$$

Найти среднее значение энергии.

4. (100 б.) Имеется система из трех спинов $S_1 = S_2 = 1/2$ и $S_3 = 1$. Найти значения суммарного спина S. Сколько состояний имеют проекцию суммарного спина $S_z = 1$? Выписать эти состояния.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ 2005 г.

Первая контрольная работа

1. (100 б.) Волновая функция в полярных координатах задана следующим образом:

$$\psi(r,\varphi) = \begin{cases} C\exp(i\sin\varphi), & \text{если } r < R_0 \text{ и } 0 \le \varphi < \pi, \\ 0 \text{ – иначе.} \end{cases}$$

Найти средние значения $\bar{r}$ и $\bar{\varphi}$.

2. (130 б.) В полярных координатах оператор $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{A} = i\frac{\partial}{\partial\varphi} - a\sqrt{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

где a – действительное положительное число. Найти собственные функции и собственные значения оператора.

3. (130 б.) Осциллятор с частотой ω и массой m находится в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\psi(x) = C(\psi_0(x) + x\sqrt{m\omega/\hbar}\,\psi_2(x)),$$

где $\psi_0(x)$ и $\psi_2(x)$ – собственные функции осциллятора. Найти среднее значение энергии.

4. (160 б.) Частица массой m находится в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & -a \le x \le a \\ \infty, & |x| > a. \end{cases}$$

Волновая функция частицы:

$$\psi(x) = C(x^2 - a^2).$$

Найти вероятность обнаружить частицу в основном состоянии.

5. (180 б.) На двумерный осциллятор ($\omega_x = \omega_y = \omega$) массой m действует возмущение

$$\hat{V} = \alpha x + \beta y.$$

Найти во втором порядке теории возмущений смещение энергии основного состояния.

Вторая контрольная работа

1. (100 б.) В $\hat{L}^2, \hat{L}_z$-представлении состояние системы описывается вектором

$$\alpha|3, 2\rangle + \beta|2, 2\rangle,$$

где α и β − комплексные числа. Найти среднее значение квадрата момента и его проекции на ось z.

2. (120 б.) В базисе $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & 2b & a \\ a & a & b \end{pmatrix},$$

где a и b − действительные константы, причем $a << b$. В первом порядке теории возмущений найти значения энергии и правильные волновые функции.

3. (140 б.) В $\hat{S}^2, \hat{S}_z$-представлении волновая функция спина 1/2 имеет вид

$$|\psi\rangle = C\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

Как выглядит волновая функция в $\hat{S}^2, \hat{S}_y$-представлении?

4. (160 б.) Два невзаимодействующих спина $S_1 = 1/2$ и $S_2 = 3/2$ находятся в состоянии с проекциями на ось z, равными $S_{1z} = -1/2$ и $S_{2z} = 3/2$. Найти разложение вектора этого состояния по векторам, отвечающим определенным значениям полного момента и его проекции. Найти среднее значение квадрата полного момента в этом состоянии.

5. (180 б.) Найти вероятность перехода атома водорода из состояния $\left|1, 0, 0\right\rangle$ в состояние $\left|2, 0, 0\right\rangle$ под действием включающегося в момент времени $t = 0$ возмущения

$$\hat{V} = \frac{\alpha}{r}(\hat{L}^2 + 1)e^{-t/t},$$

где α и τ – константы.

Экзамен

1. (150 б.) Волновая функция частицы равна:

$$\psi(x) = C\begin{cases} e^{-x^2/(2a^2)}, & x < 0 \\ e^{-x^2/(8a^2)}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти вероятность обнаружить частицу в области пространства $x \geq 0$ и среднее значение ее координаты.

2. (200 б.) В S^2, S_z-представлении спиновая волновая функция имеет вид

$$\left\langle\psi\right| = C(0, 2, 0, 0, 1, 0, 0).$$

Найти $\left\langle S_x^2 + S_y^2 \right\rangle$.

3. (200 б.) Атом водорода находится в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = A\exp(-r/(2a_B)),$$

где A – константа, a_B – радиус Бора. Какова вероятность обнаружить атом в любом из возбужденных состояний?

4. (250 б.) В первом порядке теории возмущений найти энергию основного состояния трехмерного осциллятора с массой m и частотой ω, если оператор возмущения в сферических координатах имеет вид $\hat{V} = V_0\delta(r - r_0)$. Каковы условия применимости теории возмущений?

5. (300 б.) Собственные значения эрмитова оператора $\hat{A}$ равны α_1 и α_2. Собственные значения эрмитова оператора $\hat{B}$ равны β_1 и β_2. В $\hat{A}$-представлении собственные функции оператора $\hat{B}$ равны:

$$\left|\varphi_1\right\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}, \quad \left|\varphi_2\right\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{1/3} \end{pmatrix}.$$

Найти вид коммутатора $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ в $\hat{A}$– представлении. Можно ли величины A и B определить одновременно?

Переэкзаменовка

1. (150 б.) Оператор $\hat{A}^2 = \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2$. Операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ коммутируют с оператором $\hat{B}$. Вычислить коммутатор $\left[\hat{B}, \hat{A}^2\right]$.

2. (200 б.) В базисе $\left|1\right\rangle, \left|2\right\rangle, \left|3\right\rangle$ гамильтониан системы определяется матрицей

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти вид гамильтониана в E-представлении. Если система находится в состоянии $|1\rangle$, то какие значения энергии и с какими вероятностями можно обнаружить в этом состоянии? Каково будет в этом состоянии среднее значение энергии?

3. (200 б.) Атом водорода находится в состоянии

$$|\psi\rangle = C\left(|2,1,1\rangle + |1,0,0\rangle\right).$$

Определить среднее значение величины $\hat{F} = \hat{E} + \hat{L}^2 - \hat{L}_z$.

4. (250 б.) Система, состоящая из двух частиц со спинами $S_1 = 5/2$ и $S_2 = 1/2$, находится в состоянии с определенным значением проекции суммарного спина на ось z, равным двум. Определить максимум и минимум возможных значений $\left\langle \hat{S}_{1x}^2 + \hat{S}_{1y}^2 \right\rangle$.

5. (300 б.) На частицу массой m, находящуюся в двумерной прямоугольной яме с бесконечно высокими стенками

$$U(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \le x \le a \text{ и } 0 \le y \le a \\ \infty, & \text{при } x < 0,\ x > a,\ y < 0,\ y > a, \end{cases}$$

действует возмущение

$$\hat{V} = V_0 \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{a},$$

где V_0 – константа. Найти в первом порядке теории возмущений уровни энергии первого возбужденного состояния и правильные волновые функции.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ 2003 г.

Первая контрольная работа

1. (100 б.) Являются ли функции $f_1 = kx + B^2$ и $f_2 = kx^2 + B^2$ собственными функциями оператора

$$\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + B^2?$$

Здесь k и B – константы.

2. (130 б.) Частица массой m локализована в области пространства размером l. Оценить кинетическую энергию частицы K, при которой ее относительная неопределенность $\Delta K/K$ будет порядка 0,01.

3. (140 б.) Частица массой m находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, расположенными в точках $x = 0$ и $x = a$. Во втором порядке теории возмущений найти энергию основного состояния при наличии возмущения

$$V(x) = V_0 \cos(2\pi x/a).$$

При каком значении V_0 теория возмущений применима?

4. (150 б.) Плоский (двумерный) симметричный осциллятор с частотами $\omega_x = \omega_y = \omega$ и массой m находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить осциллятор на расстоянии не более R от положения равновесия?

5. (180 б.) Определить амплитуду и частоту колебаний среднего значения координаты x одномерного гармонического осциллятора с частотой ω и массой m, если в начальный момент он находился в состоянии

$$\psi(\xi) = C(\xi\psi_{n-1}(\xi) + \psi_{n+1}(\xi)).$$

Вторая контрольная работа

1. (100 б.) Состояние плоского ротатора описывается волновой функцией

$$\psi(\varphi) = C(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Какие значения L_z и с какими вероятностями можно обнаружить в этом состоянии? Чему равно $\langle L_z \rangle$? Записать вид волновой функции в $\hat{L}_z$-представлении.

2. (110 б.) Частица массой m первоначально находилась в основном состоянии в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками $0 < x < a$. В момент времени $t = 0$ включается возмущение

$$V(x,t) = V_0 \cos\frac{\pi x}{a} e^{-kt},$$

где V_0 и k – положительные константы. Определить вероятность перехода частицы в первое возбужденное состояние при $t \to \infty$.

3. (140 б.) Система состоит из трех слабо взаимодействующих подсистем с орбитальными моментами $l_1 = l_2 = 1$, $l_3 = l$. Какие значения j может принимать суммарный момент? Каково число разных состояний с одним и тем же значением j? Сколько всего различных состояний в базисе суммарного момента этой системы?

4. (160 б.) Состояние спина электрона в S^2, S_z-представлении задается функцией

$$C\begin{pmatrix} 4 \\ 3i \end{pmatrix}.$$

Какие значения проекции спина на ось y и с какими вероятностями можно обнаружить в этом состоянии? Чему равны $\langle S_z \rangle$ и $\langle S_y \rangle$?

5. (190 б.) На атом водорода действует стационарное возмущение

$$V(\varphi) = V_0 \cos 2\varphi,$$

где V_0 – константа, φ – одна из сферических координат ($0 < \varphi < 2\pi$). Найти поправки первого порядка к уровням энергии $2p$-состояния и правильные волновые функции.

Экзамен

1. (150 б.) Для операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ их коммутатор

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 1.$$

Вычислить коммутаторы

$$\left[\hat{A}^2, \hat{B}\right], \left[\hat{A}, \hat{B}^2\right], \left[\hat{A}, \hat{B}^3\right].$$

2. (160 б.) Волновая функция $\psi(x, t)$ частицы массой m в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < a$) в начальный момент времени имеет вид

$$\psi(x, 0) = A\sin(2\pi x/a)\cos(3\pi x/a).$$

Какие значения энергии и с какими вероятностями можно обнаружить при измерении в этом состоянии? Для точки $x = a/2$ и произвольного момента времени t рассчитать $\psi(a/2, t)$ и значение плотности вероятности.

3. (220 б.) На линейный осциллятор массой m с частотой ω действует возмущение

$$V(x) = \beta\delta(x - a),$$

где β – известная постоянная. При каких значениях a поправка первого порядка к энергии первого возбужденного состояния осциллятора будет максимальна? Чему она при этом равна?

4. (260 б.) Гамильтониан системы имеет два собственных значения E_1 и E_2. Собственные векторы, соответствующие этим значениям, в некотором представлении имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Записать матрицу гамильтониана в этом же представлении.

5. (310 б.) Система, состоящая из двух спинов $S_1 = 2$ и $S_2 = 1/2$, находится в состоянии с проекциями $S_{1z} = 1$ и $S_{2z} = 1/2$. Какова вероятность того, что при измерении суммарного спинового момента получится его максимальное значение?

Переэкзаменовка

1. (160 б.) Частица массой m находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < a$). Максимальное значение плотности вероятности обнаружения частицы равно p_m. Определить значения ширины ямы a и энергии частицы в этом состоянии.

2. (170 б.) Двумерный гармонический осциллятор массой m с частотами $\omega_x = \omega_y = \omega$ помещен в возмущающий потенциал

$$\hat{V}(r) = V_0\delta(r - r_0),$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, V_0 и r_0 – константы, $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака. Найти в первом порядке теории возмущений поправку к энергии осциллятора в основном состоянии.

3. (220 б.) Волновые функции

$$\psi_1(\varphi) = \sin\varphi/\sqrt{\pi} \text{ и } \psi_2(\varphi) = \cos\varphi/\sqrt{\pi} \quad (0 < \varphi < 2\pi)$$

описывают дважды вырожденное по энергии состояние некоторой системы. В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии этого состояния при наложении на систему возмущения

$$V = \begin{cases} V_0, & 0 < \varphi < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

4. (250 б.) В базисе $|1\rangle, |2\rangle$ гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \alpha\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Какие значения энергии и с какими вероятностями можно обнаружить в состоянии $|1\rangle$?

5. (300 б.) Атом водорода находится в $3d$-состоянии ($n = 3$, $l = 2$) с определенными значениями полного (орбитальный момент + спин электрона) момента $j = 5/2$ и его проекции на ось z, равной $j_z = 3/2$. Найти среднее значение проекции спина на ось z в этом состоянии.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ 2001 г.

Вторая контрольная работа

1. (90 б.) В одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме ($0 \le x \le a$) волновая функция частицы

$$\psi(x) = A\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{i}{4}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\right).$$

Записать $\psi(t)$ в E-представлении.

2. (120 б.) Для пяти невзаимодействующих электронов рассчитать число квантовых состояний для каждого из значений суммарного спина. Показать, что число состояний в базисе индивидуальных спинов и базисе суммарных спинов одно и то же.

3. (140 б.) Моменты двух слабо взаимодействующих спиновых подсистем, равные $s_1 = 1/2$ и $s_2 = 3/2$, складываются в результирующий момент. В состоянии совокупной системы $|1, 1\rangle$ найти вероятности различных значений проекций складываемых моментов на ось z и их средние значения.

4. (150 б.) Найти вероятность перехода атома водорода из состояния $|1, 0, 0\rangle$ в состояние $|2, 0, 0\rangle$ под действием возмущения

$$\hat{V} = \frac{\beta}{r}\exp(-t/\tau),$$

где τ – константа, t – время. $0 < t < \infty$.

5. (200 б.) Определить амплитуду и частоту колебаний среднего радиуса электрона в атоме водорода в состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0,0\rangle + |2,0,0\rangle\right).$$

Ценное указание:

$$R_{1,0} = \frac{2}{a^{3/2}}\exp(-r/a),\ \ R_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{2}a^{3/2}}(1 - r/2a)\exp(-r/2a),$$

где a – радиус Бора.

Экзамен

1. (170 б.) Состояние спина электрона в S^2, S_z-представлении задается функцией

$$C\begin{pmatrix}4\\3i\end{pmatrix}.$$

Какие значения проекции спина на ось y и с какими вероятностями можно обнаружить в этом состоянии? Чему равны $\langle S_z\rangle$ и $\langle S_y\rangle$?

2. (190 б.) В базисе $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Система находится в состоянии $|1\rangle$. Какие значения энергии и с какой вероятностью можно обнаружить при измерении? Найти среднее значение энергии этого состояния.

3. (210 б.) В первом порядке теории возмущений вычислить поправку к энергии основного состояния гармонического осциллятора при наличии возмущения

$$\hat{V} = \beta\exp(-x^2/a^2),$$

где a – константа.

4. (220 б.) Волновая функция частицы массой m в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < a$) в начальный момент времени имеет вид

$$\psi(x,0) = A\sin(2\pi x/a)\cos(3\pi x/a).$$

Какие значения энергии и с какой вероятностью можно обнаружить при измерении в этом состоянии? Найти $\psi(x, t)$ при $x = a/2$ и плотность вероятности обнаружить частицу в этой точке.

5. (310 б.) В однородном магнитном поле $\boldsymbol{B}_0$, направленном вдоль оси z, находится электрон в состоянии с определенным значением проекции спина на эту ось $|-1/2\rangle$. В дополнение к $\boldsymbol{B}_0$ на время τ включается магнитное поле $\boldsymbol{B}_1$, перпендикулярное к $\boldsymbol{B}_0$. Считая $\boldsymbol{B}_1$ возмущением, найти вероятность перехода в состояние $|+1/2\rangle$. Гамильтониан взаимодействия спина с магнитным полем $\hat{H} = -\gamma(\vec{B},\vec{S})$, где γ – гиромагнитное отношение.

Ценные замечания:

$$\sin\alpha\cos\beta = (\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))/2.$$

Интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/\alpha}$. Основное состояние осциллятора $\psi_0 = \pi^{-1/4}\exp(-\xi^2/2)$, $\xi = x/\sqrt{\hbar/m\omega}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ РАЗНЫХ ЛЕТ

Первая контрольная работа

1. (100 б.) Волновая функция в сферических координатах имеет вид

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} C\dfrac{\sin(kr)}{r}\cos\theta e^{i\varphi}, & \text{при } r \le \pi/k, \\ 0, & \text{при } r \le \pi/k. \end{cases}$$

Найти C.

2. (140 б.) Найти нормированные собственные функции и собственные значения оператора

$$\hat{A} = i\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2\cos^2\varphi,$$

где φ – полярный угол.

3. (140 б.) Одно из стационарных состояний гармонического осциллятора массой m и частотой ω описывается волновой функцией

$$\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}.$$

Определить значения величин A и α, а также энергию этого состояния.

4. (160 б.) Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода в сферических координатах имеет вид

$$\psi(r,\theta,\varphi) = A\exp(-r/a),$$

где a – радиус Бора. В первом порядке теории возмущений найти сдвиг уровня энергии основного состояния в постоянном однородном электрическом поле E_0, направленном вдоль оси z.

5. (160 б.) Осциллятор массой m и частотой ω находился в n-м стационарном состоянии, когда на него подействовало нестационарное возмущение

$$\hat{V}(x,t) = \begin{cases} \alpha x^2, & 0 \le t \le T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

В рамках нестационарной теории возмущений найти вероятности переходов осциллятора в другие состояния по окончании действия возмущения.

Вторая контрольная работа

1. (120 б.) Система состоит из двух невзаимодействующих спинов $s_1 = 1$ и $s_2 = 3$. Каково полное число состояний с определенным значением квадрата полного момента и его z-проекции? (Ответ обосновать.) Сколько из них имеют проекцию на ось z, равную -1? (Указать, каким значениям полного момента они соответствуют.)

2. (160 б.) Частица массой m находится в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме ($U = 0$ при $0 < x < a$). Какова вероятность перехода частицы из основного в первое возбужденное состояние под действием возмущения

$$V = A\cos\frac{\pi x}{a}e^{-kt}?$$

Здесь A и k – константы, t – время.

3. (190 б.) В базисе $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В начальный момент времени $\psi(t=0) = |2\rangle$. Найти $\psi(t)$.

4. (230 б.) В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии состояний атома Н при $n = 2$, если оператор возмущения имеет вид

$$\hat{V} = A\hat{L}_x,$$

где A – константа. Записать правильные волновые функции.

Экзамен

1. (130 б.) Частица массой m находится в кулоновском поле в состоянии с волновой функцией

$$\psi(r,\theta,\varphi) = A \cdot R_{10}Y_{00} + 0{,}6 \cdot R_{21}Y_{10}.$$

Нормировать $\psi(r,\theta,\varphi)$, найти среднюю энергию, найти вероятность обнаружить частицу в сферическом слое с $r = r_0$ и толщиной dr.

2. (170 б.) На одномерный осциллятор с частотой ω и массой m подействовали в течение времени τ постоянной силой F. До приложения силы осциллятор находился в первом возбужденном состоянии. Какова вероятность, что он перейдет на следующий уровень?

3. (180 б.) $\psi_1(\varphi) = \sin\varphi/\sqrt{\pi}$ и $\psi_2(\varphi) = \cos\varphi/\sqrt{\pi}$ являются волновыми функциями дважды вырожденного состояния некоторой системы. В первом порядке теории возмущений найти расщепление уровня энергии и правильные волновые функции, если на систему действует возмущение вида

$$V(\varphi) = \begin{cases} V_0, & 0 < \varphi < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

4. (200 б.) Электрон находится в состоянии, когда вероятность обнаружить спин вдоль оси x равна 2/3, а в противоположном направлении – 1/3. Какова вероятность обнаружить спин вдоль оси z? (Спин направлен вдоль данной оси, если его проекция на эту ось равна 1/2.)

5. (200 б.) Волновая функция некоторого стационарного состояния равна

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^2 e^{-\alpha x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найти энергию этого состояния и вид потенциальной энергии $U(x)$, если известно, что при $x \to \infty$ функция $U(x) \to 0$.

6. (220 б.) Два спина $S_1 = S_2 = 1$ находятся в состоянии с суммарным моментом $S = 1$ и его проекцией на ось z, равной $S_z = 0$. Какие значения S_{1z} и S_{2z} можно обнаружить и с какими вероятностями?

ОТВЕТЫ

Контрольные работы 2011 г.

Вторая контрольная работа

1. $W_{l_z=0}=\dfrac{18}{19},\ W_{l_z=\pm 2}=\dfrac{1}{38};\ \left\langle l_z\right\rangle=0.$

2. $E_1^{(1)}=0,\ E_{2,3}^{(1)}=\pm\sqrt{2}\alpha.$

3. $W=1/2.$

4. $\left|\psi_{sz}\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1-2i\\1+2i\end{pmatrix};$

$\left\langle s_x\right\rangle = -\dfrac{3}{10},\quad \left\langle s_y\right\rangle = \dfrac{4}{10},\quad \left\langle s_z\right\rangle = 0,\quad \left\langle s^2\right\rangle = \dfrac{3}{4}.$

5. $\left\langle E\right\rangle=\dfrac{5}{7}.$

Экзамен

1. $\left|\psi\right\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix},\ <E>=\dfrac{2}{3}\sqrt{2};\ w_{E=-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ w_{E=1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}.$

2. $W_0=W(l=0)=\dfrac{5}{9},\ W_2=W(l=2)=\dfrac{4}{9};\left\langle l^2\right\rangle=\dfrac{8}{3}.$

3. $\psi=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\gamma}{a}}\exp(-\gamma r/a)\exp(-im\varphi),\ \gamma>0,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots;\ b_m=\gamma+m.$

4. $<x>=\sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega\cdot t).$

5. $\left\langle s_z\right\rangle=0,\ \left\langle \hat{s}^2\right\rangle=\dfrac{9}{8}.$

6. $E_1^{(1)}=0,\ E_2^{(1)}=E_3^{(1)}=E_4^{(1)}=2A\hbar^2.$

Контрольные работы 2009 г.

Первая контрольная работа

1. $\left|A\right|=\sqrt{\dfrac{3\alpha}{2\pi}}.$

2. $E=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}i,\ i=5,8,13,17.$

3. $E_0=\hbar\omega/2,\ w_0=1/5;\ E_2=5\hbar\omega/2,\ w_2=2/5;\ E_3=7\hbar\omega/2,\ w_3=2/5;$

$<E>=5\hbar\omega/2.$

4. $\psi_2=\psi_2^{(0)}-\dfrac{V_0ma^2}{12\pi^2\hbar^2}\psi_4^{(0)};\ E_2=\dfrac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}-\dfrac{V_0^2ma^2}{24\pi^2\hbar^2}.$

5. $<r>=2\sqrt{\dfrac{\hbar}{\pi m\omega}}.$

Вторая контрольная работа

1.

j	5/2	5/2	3/2	3/2	1/2
j_z	3/2	1/2	3/2	1/2	1/2

2. $\psi = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$; $<E> = \frac{2}{5}\sqrt{6}$; $E_1 = -1$ $w_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{5}$, $E_2 = 1$ $w_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{5}$.

3. $W_{100 \to 200} = \frac{512\beta^2}{729\hbar^2}$.

4. $w = \frac{28}{45}$.

5. $w = \sin^2(3\gamma Bt/4)$.

Экзамен

1. $E^{(1)} = V_0/\sqrt{2}$.

2. $E_1 = 0$ $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ -2\end{pmatrix}$; $E_2 = 1$ $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$; $E_3 = 6$ $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\ 5i\\ -2\end{pmatrix}$.

3. $w_{n-1} = (2n+1)(1 - w_n)/4n$.

4. $<x> = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega \cdot t)$.

5. $\left|1/2, -1/2\right\rangle\left|3/2, 3/2\right\rangle = \frac{1}{2}\left|2, 1\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|1, 1\right\rangle$; $\left\langle \hat{S}^2 \right\rangle = 3$.

6. $W_{100 \to 210} = \frac{8V_0^2}{729a^4\hbar^2}\frac{\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$, где $\omega = \frac{3e^2}{32\pi\varepsilon_0 a\hbar}$.

Переэкзаменовка

1. $w = \frac{8}{225\pi^2}$.

2. $\left\langle x \right\rangle = \frac{b-a}{2}$.

3. $w = 16/25$.

4. $s_{z1} = 3/2$ $w_1 = 1/8$; $s_{z2} = 1/2$ $w_2 = 3/8$; $s_{z3} = -1/2$ $w_3 = 3/8$; $s_{z4} = -3/2$ $w_4 = 1/8$.

$\left\langle s_z \right\rangle = 0$.

5. Значения энергии E_n и кратность вырождения g_n трех нижних уровней невозмущенного осциллятора равны:

$E_0 = \hbar\omega$ $g_0 = 1$, $E_1 = 2\hbar\omega$ $g_1 = 2$, $E_2 = 3\hbar\omega$ $g_2 = 3$;

$E_{2,1}^{(1)} = -\alpha a^2$, $\varphi_{2,1}^{(0)} = \frac{1}{2}(\psi_0(x)\psi_2(y) - \sqrt{2}\psi_1(x)\psi_1(y) + \psi_2(x)\psi_0(y))$;

$E_{2,2}^{(1)} = 0$, $\varphi_{2,2}^{(0)} = \frac{1}{2}(\psi_0(x)\psi_2(y) - \psi_2(x)\psi_0(y))$;

$E_{2,3}^{(1)} = \alpha a^2$, $\varphi_{2,3}^{(0)} = \frac{1}{2}(\psi_0(x)\psi_2(y) + \sqrt{2}\psi_1(x)\psi_1(y) + \psi_2(x)\psi_0(y))$.

6. $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mr_0^2}n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}}\frac{\sin(\pi nr/r_0)}{r}$.

Контрольные работы 2007 г.

Первая контрольная работа

1. $\langle x\rangle = \dfrac{b-a}{2}$.

3. $w(0\to 1) = \dfrac{\pi^2 q^2 E_0^2}{8m\omega^3\hbar}$.

4. $\psi_1 = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\cos\dfrac{\pi x}{a} + \dfrac{V_0 m a^2}{8\pi^2\hbar^2}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\cos\dfrac{3\pi x}{a}$, $E_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \dfrac{V_0}{2} - \dfrac{V_0^2 m a^2}{16\pi^2\hbar^2}$.

5. $V = \dfrac{3}{\Delta E\sqrt{2\Delta E}}$.

Вторая контрольная работа

1. $\left\langle S_x\right\rangle = \dfrac{2}{5}$, $\left\langle S_y\right\rangle = 0$, $\left\langle S_z\right\rangle = -\dfrac{3}{10}$; $\left\langle S^2\right\rangle = \dfrac{3}{4}$.

2. $\psi(t) = e^{-2i\omega t}\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ -i\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}$.

3. $\psi_{L^2, L_x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ i\sqrt{2}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$; $\left\langle L_x\right\rangle = \left\langle L_z\right\rangle = 0$.

4. $E_1^{(1)} = 0$ $\psi_1^{(0)} = R_{2,0}Y_{00}$; $E_3^{(1)} = 0$ $\psi_3^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}R_{2,1}(Y_{1,1} - Y_{1,-1})$;

$E_{2,4}^{(1)} = \pm A$ $\psi_{2,4}^{(0)} = \dfrac{1}{2}R_{2,1}(Y_{1,1} \pm \sqrt{2}Y_{1,0} + Y_{1,-1})$.

5. $j = 3/2$ $w = \dfrac{2}{15}(3+2\sqrt{2})$; $j = 1/2$ $w = \dfrac{1}{15}(9-4\sqrt{2})$.

Экзамен

1. $w = \dfrac{2a + \dfrac{b}{\pi}\sin\dfrac{\pi a}{b}}{a+b}$.

2. Период колебаний $T = \dfrac{4ma^2}{3\pi\hbar}$, амплитуда $p_m = \dfrac{16\sqrt{2}\hbar}{9a}$.

3. $E_0 = \hbar\omega + \sqrt{2\pi}\,(m\omega/\hbar)^{3/2}$.

4. $W_{100\to 200} = \dfrac{128\beta^2}{729a^2\hbar^2\omega^2}\sin^2\dfrac{\omega\tau}{2}$, где $\omega = \dfrac{3e^2}{32\pi\varepsilon_0 a\hbar}$.

5. $t = \dfrac{(2n+1)\pi}{(\gamma_2-\gamma_1)B}$, $n = 0, 1, \ldots$

6. $E_1 = -E - \dfrac{2V^2}{5E}$, $E_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}V + \dfrac{3V^2}{16E}$, $E_3 = 4E - \dfrac{\sqrt{3}}{2}V + \dfrac{17V^2}{80E}$.

Переэкзаменовка

1. $\langle x\rangle = \dfrac{3a}{2}$.

2. $\hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{5\pi^2\hbar}{2ma^2}\right)^2 x^2 + \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}\right)^2 y^2$, или

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2}m\left(\frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}\right)^2 x^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2ma^2}\right)^2 y^2.$$

3. $a = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $\Delta E_1^{(1)} = \frac{2\beta}{e}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$.

4. $\langle U\rangle = -m_e\left(\frac{q_e^2}{12\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2$.

5. $W = 2/3$.

6. $\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $E_2 = 2\ W_2 = 1$; $|E\rangle = 2$.

Вторая переэкзаменовка

1. $\bar{r} = \frac{2}{3}R_0$; $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}$.

2. $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{a}}\exp(-ib_n x)$, $b_n = 2\pi/a\cdot n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. $\bar{E} = \frac{29}{14}\hbar\omega$.

4. $S = 3, 2, 1, 0$.

Его проекцию на ось z, равную $S_z = 2$, имеют три состояния.

Третья переэкзаменовка

1. $\bar{r} = \frac{2}{3}R_0$; $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}$.

2. $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-in\varphi)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. $\bar{E} = \frac{19}{6}\hbar\omega$.

4. $S = 2, 1, 0$;

$S_z = 1$; $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|0,0\rangle$.

Контрольные работы 2005 г.

Первая контрольная работа

1. $\bar{r} = \frac{2}{3}R_0$; $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}$.

2.

$\psi = 4\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\left(\frac{\gamma}{a}\right)^2 \exp(-2\gamma\sqrt{r/a})\exp(-im\varphi)$, $\gamma > 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $b_m = \gamma + m$.

3. $\bar{E} = \frac{29}{14}\hbar\omega$.

4. $w_0 = \frac{960}{\pi^6}$.

5. $\Delta E_0^{(2)} = -\frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2m\omega^2}$.

Вторая контрольная работа

1. $\langle \hat{L}^2 \rangle = \dfrac{6(2|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$, $\langle \hat{L}_z \rangle = 2$.

2. $E_1 = b \quad \psi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$E_2 = 2b - a \quad \psi_2^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_3 = 2b + a \quad \psi_3^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. В $\hat{S}^2, \hat{S}_y$ – представлении $|\psi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. $|1/2, -1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle = \dfrac{1}{2}|2, 1\rangle + \dfrac{\sqrt{3}}{2}|1, 1\rangle$; $\langle \hat{S}^2 \rangle = 3$.

5. $W(1,0,0 \to 2,0,0) = \dfrac{1}{\hbar^2}\left(\dfrac{4\sqrt{2}\alpha}{27a_B}\right)^2 \dfrac{\tau^2}{1 + \omega_{21}^2\tau^2}$, где $\omega_{21} = \dfrac{3e^2}{32\pi\varepsilon_0 a_B \hbar}$.

Экзамен

1. $w = \dfrac{2}{3}$, $\langle x \rangle = \dfrac{a}{\sqrt{\pi}}$.

2. $\langle S_x^2 + S_y^2 \rangle = \dfrac{43}{5}$.

3. $w = 217/729$.

4. $E_0^{(1)} = 4\pi V_0 \left(\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2} r_0^2 \exp\left(-\dfrac{m\omega}{\hbar} r_0^2\right)$.

5. $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \alpha_1) & 0 \end{pmatrix}$.

Величины A и B определить одновременно нельзя.

Переэкзаменовка

1. $\left[\hat{B}, \hat{A}^2\right] = 0$.

2. $\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $E = E_1 = 0 \quad w_1 = 2/3$, $\quad E = E_3 = 3 \quad w_3 = 1/3$;

$\langle E \rangle = 1$.

3. $\langle \hat{F} \rangle = -\dfrac{1}{8}$.

4. $\langle \hat{S}_{1x}^2 + \hat{S}_{1y}^2 \rangle_{\max} = 13/2$; $\langle \hat{S}_{1x}^2 + \hat{S}_{1y}^2 \rangle_{\min} = 5/2$.

5. $E_1 = \dfrac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \dfrac{V_0}{4} \quad \varphi_1^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x)\psi_2(y) - \psi_2(x)\psi_1(y))$,

$E_2 = \dfrac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + \dfrac{V_0}{4}$ $\quad \varphi_2^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x)\psi_2(y) + \psi_2(x)\psi_1(y)).$

Контрольные работы 2003 г.

Первая контрольная работа

1. Функция f_1 является собственной функцией оператора $\hat{A}$, а B^2 – его собственное число. Функция f_2 не является собственной функцией оператора $\hat{A}$.

2. $K = \dfrac{10^4\hbar^2}{2ml^2}$.

3. $E_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \dfrac{1}{2}V_0 - \dfrac{V_0^2 ma^2}{16\pi^2\hbar^2}.$

4. $W(r \le R) = 1 - \exp(-m\omega R^2/\hbar).$

5. Амплитуда колебаний $x_m = 2\sqrt{\dfrac{n(n+1)\hbar}{m\omega}\,\dfrac{1}{2n+1}}$. Частота колебаний ω.

Вторая контрольная работа

1. $\psi = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$; $L_z = \hbar$ $W = 1$; $\langle L_z \rangle = \hbar.$

2. $W_{1\to 2} = \dfrac{V_0^2}{4\hbar^2(k^2 + \omega_{21}^2)}$, где $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar = \dfrac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}.$

3. При $l \ge 2$

j	$l+2$	$l+1$	l	$l-1$	$l-2$
g	1	2	3	2	1
n	$2l+5$	$2(2l+3)$	$3(2l+1)$	$2(2l-1)$	$2l-3$

J – значение суммарного момента; g – статистический вес; n – число состояний. Всего состояний $9(2l + 1)$.

4. $S_y = 1/2$ $W = 49/50$; $S_y = -1/2$ $W = 1/50$; $\langle s_y \rangle = 0.48$, $\langle s_z \rangle = 0.14$.

5. $E_1 = -V_0/2$ $\quad |\psi_1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|2,1,1\rangle - |2,1,-1\rangle\right)$; $\quad E_2 = 0$ $\quad |\psi_2\rangle = |2,1,0\rangle$;

$E_3 = V_0/2$ $\quad |\psi_3\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|2,1,1\rangle + |2,1,-1\rangle\right).$

Экзамен

1. $\left[\hat{A}^2, \hat{B}\right] = 2\hat{A}$; $\left[\hat{A}, \hat{B}^2\right] = 2\hat{B}$; $\left[\hat{A}, \hat{B}^3\right] = 3\hat{B}^2.$

2. $E = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ $\quad W = \dfrac{1}{2}$; $\quad E = \dfrac{25\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ $\quad W = \dfrac{1}{2}.$

$|\psi(a/2, t)|^2 = \dfrac{2}{a}(1 - \cos(\omega_5 - \omega_1)t)$, где $\omega_5 - \omega_1 = \dfrac{12\pi^2\hbar}{ma^2}.$

3. $a = \pm\sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$; $\quad \Delta E_1^{(1)} = \dfrac{2\beta}{e}\sqrt{\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}}.$

4. $\hat{H} = \begin{pmatrix} (E_1 + E_2)/2 & i(E_1 - E_2)/2 \\ -i(E_1 - E_2)/2 & (E_1 + E_2)/2 \end{pmatrix}.$

5. $W\left(\left|\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle\right) = \frac{4}{5}.$

Переэкзаменовка

1. $a = 2/p_m,\ E_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2 p_m^2}{8m}.$

2. $E_0^{(1)} = \dfrac{2m\omega}{\hbar} V_0 r_0 \exp\left(-\dfrac{m\omega}{\hbar} r_0^2\right).$

3. $E^{(1)} = \dfrac{1}{4}V_0 \pm \dfrac{1}{2\pi}V_0 \quad \varphi^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin\varphi \pm \cos\varphi).$

4. $E_1 = 0$ $W_1 = 1/3$, $E_2 = 3\alpha$ $W_2 = 2/3$.

5. $\langle s_z \rangle = \dfrac{3}{10}.$

Контрольные работы 2001 г.

Вторая контрольная работа

1. $\psi(t) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5}\cdot\exp(-i\omega t) \\ 0 \\ -i/\sqrt{5}\cdot\exp(-9i\omega t) \\ 0 \\ . \\ . \end{pmatrix}$, где $\omega = \dfrac{\pi^2\hbar}{2ma^2}.$

3. $W_{S_{1z}=-1/2} = W_{S_{2z}=3/2} = 3/4,\ W_{S_{1z}=1/2} = W_{S_{2z}=1/2} = 1/4,$

$W_{S_{2z}=-1/2} = W_{S_{2z}=-3/2} = 0;\ \langle s_{1z} \rangle = -\dfrac{1}{4},\ \langle s_{2z} \rangle = \dfrac{5}{4}.$

4. $W(1,0,0 \to 2,0,0) = \dfrac{1}{\hbar^2}\left(\dfrac{4\sqrt{2}\beta}{27a_B}\right)^2 \dfrac{\tau^2}{1+\omega_{21}^2\tau^2}$, где $\omega_{21} = \dfrac{3e^2}{32\pi\varepsilon_0 a_B \hbar}.$

5. $a_m = \dfrac{32\sqrt{2}}{81}a, \quad \omega = \dfrac{3me^4}{8\hbar^3}.$

Экзамен

1. $S_y = 1/2$ $W = 49/50$; $S_y = -1/2$ $W = 1/50$; $\langle s_y \rangle = 0{,}48$, $\langle s_z \rangle = 0{,}14$.

2. $E = 0$ и 2 с равной вероятностью $W = 1/2$; $\langle E \rangle = 1$.

3. $E^{(1)} = \dfrac{V_0}{\sqrt{1 + \hbar/(m\omega a^2)}}.$

4. $E = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ $W = \dfrac{1}{2}$; $E = \dfrac{25\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ $W = \dfrac{1}{2}.$

$|\psi(a/2, t)|^2 = \dfrac{2}{a}(1 - \cos(\omega_5 - \omega_1)t)$, где $\omega_5 - \omega_1 = \dfrac{12\pi^2\hbar}{ma^2}.$

5. $W(|-1/2\rangle \to |+1/2\rangle) = \dfrac{B_1^2}{B_0^2}\sin^2\dfrac{\gamma B_0 \tau}{2}.$

Контрольные работы разных лет

Первая контрольная работа

1. $C = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{3k}{2}}.$

2. $\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi + \frac{1}{2} i \sin 2\varphi}$, $a_m = 1 + m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

3. $\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$ и $E = \frac{1}{2}\hbar\omega.$

4. $E^{(1)} = 0.$

5. $W(n \to k) =$

$$= \frac{\alpha^2}{(m\omega)^2 \omega_{kn}^2} \left((n+1)(n+2)\delta_{k,n+2} + (2n+1)^2 \delta_{k,n} + n(n-1)\delta_{k,n-2} \right) \sin^2 \frac{\omega_{kn} T}{2},$$

$\omega_{k,n} = \omega(k - n).$

Вторая контрольная работа

1. Полное число состояний $\sum\limits_{S=2}^{4}(2S+1) = 21$; три состояния с $S_z = -1$:

$\psi_{4,-1}$, $\psi_{3,-1}$, $\psi_{2,-1}$.

2. $W_{1 \to 2} = \frac{V_0^2}{4\hbar^2 (k^2 + \omega_{21}^2)}$, где $\omega_{21} = \frac{3\pi^2 \hbar}{2ma^2}.$

3. $\left|\psi(t)\right\rangle = e^{-2i\omega t}(-\left|1\right\rangle i \sin \omega t + \left|2\right\rangle \cos \omega t)$, где $\omega = 1/\hbar.$

4. $E_1^{(1)} = 0$ $\psi_1^{(0)} = R_{2,0} Y_{00}$; $E_3^{(1)} = 0$ $\psi_3^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{2,1}(Y_{1,1} - Y_{1,-1})$;

$E_{2,4}^{(1)} = \pm A$ $\psi_{2,4}^{(0)} = \frac{1}{2} R_{2,1}(Y_{1,1} \pm \sqrt{2} Y_{1,0} + Y_{1,-1}).$

Экзамен

1. $\psi(r, \theta, \varphi) = 0{,}8 \cdot R_{10} Y_{00} + 0{,}6 \cdot R_{21} Y_{10}$;

$$\mathrm{d}W(r) = (2{,}56 (r/a)^2 e^{-2r/a} + 0{,}015 (r/a)^4 e^{-r/a}) \frac{\mathrm{d}r}{a};$$

$\left\langle E \right\rangle = -0{,}73 \frac{me^4}{2\hbar^2}$ в CGSE.

2. $W_{1 \to 2} = \frac{4F^2}{m\hbar\omega^3} \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}.$

3. $E^{(1)} = \frac{1}{4} V_0 \pm \frac{1}{2\pi} V_0$ $\varphi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sin\varphi \pm \cos\varphi).$

4. $W_{S_z = 1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$, $W_{S_z = -1/2} = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{3}.$

5. $E = -\frac{(\alpha\hbar)^2}{2m}$, $U = \frac{\hbar^2}{mx^2}(1 - 2\alpha x).$

6. $W_{S_{1z} = -1} = W_{S_{1z} = 1} = W_{S_{2z} = -1} = W_{S_{2z} = 1} = 1/2$, $W_{S_{1z} = 0} = W_{S_{2z} = 0} = 0.$

РЕШЕНИЯ

Контрольные работы 2011 г.

Вторая контрольная работа

1. Преобразуем волновую функцию

$$\psi(\varphi) = 2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 + \cos^2\varphi = 1 + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{4}(e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi}) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{3}{2}\psi_0 + \frac{1}{4}(\psi_2 + \psi_{-2})\right),$$

при этом использовались формула Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi))$$

и собственные волновые функции оператора $\hat{L}_z$:

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(im\varphi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Исходная и, следовательно, преобразованная волновая функция ненормированная. Умножим ее на константу:

$$\psi(\varphi) = B\left(\frac{3}{2}\psi_0 + \frac{1}{4}(\psi_2 + \psi_{-2})\right).$$

Величину B найдем из условия нормировки:

$$B^2\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{16}\cdot 2\right) = \frac{19}{8} \to B = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{19}}.$$

Волновая функция примет вид

$$\psi = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}\psi_0 + \frac{1}{\sqrt{38}}(\psi_2 + \psi_{-2}).$$

Искомые вероятности равны

$$W_{l_z=0} = \frac{18}{19}, \quad W_{l_z=\pm 2} = \frac{1}{38}.$$

Среднее значение $\langle l_z \rangle$ равно

$$\langle l_z \rangle = 0\cdot\frac{18}{19} + 2\cdot\frac{1}{38} + (-2)\cdot\frac{1}{38} = 0.$$

2. Атом водорода находится в состояниях с $n = 2$ и $l = 1$. Указанному орбитальному квантовому числу l отвечают значения магнитного квантового числа $m = 0, \pm 1$. Следовательно, волновые функции заданных состояний атома водорода равны

$$\psi_1 = R_{21}Y_{11}, \quad \psi_2 = R_{21}Y_{10}, \quad \psi_3 = R_{21}Y_{1-1}.$$

Используя повышающий и понижающий операторы

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y, \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y,$$

можно возмущению придать вид

$$\hat{V} = \alpha(\hat{L}_x - \hat{L}_y) = \alpha\left(\frac{\hat{L}_+ + \hat{L}_-}{2} - \frac{\hat{L}_+ - \hat{L}_-}{2i}\right) = \frac{\alpha}{2}((1+i)\hat{L}_+ + (1-i)\hat{L}_-).$$

Вычислим соответствующие матричные элементы:

$$V_{21} = \left\langle R_{21}Y_{10}\middle|\hat{V}\middle|R_{21}Y_{11}\right\rangle = \frac{\alpha}{2}\left\langle R_{21}Y_{10}\middle|(1-i)\hat{L}_{-}\middle|R_{21}Y_{11}\right\rangle =$$

$$= \frac{\alpha}{2}(1-i)\sqrt{2}\left\langle R_{21}Y_{10}\middle|R_{21}Y_{10}\right\rangle = \frac{\alpha}{2}(1-i)\sqrt{2};$$

$$V_{23} = \left\langle R_{21}Y_{10}\middle|\hat{V}\middle|R_{21}Y_{1-1}\right\rangle = \frac{\alpha}{2}\left\langle R_{21}Y_{10}\middle|(1+i)\hat{L}_{+}\middle|R_{21}Y_{1-1}\right\rangle =$$

$$= \frac{\alpha}{2}(1+i)\sqrt{2}\left\langle R_{21}Y_{10}\middle|R_{21}Y_{10}\right\rangle = \frac{\alpha}{2}(1+i)\sqrt{2};$$

$$V_{12} = \left\langle R_{21}Y_{11}\middle|\hat{V}\middle|R_{21}Y_{10}\right\rangle = \frac{\alpha}{2}\left\langle R_{21}Y_{11}\middle|(1+i)\hat{L}_{+}\middle|R_{21}Y_{10}\right\rangle =$$

$$= \frac{\alpha}{2}(1+i)\sqrt{2}\left\langle R_{21}Y_{11}\middle|R_{21}Y_{11}\right\rangle = \frac{\alpha}{2}(1+i)\sqrt{2};$$

$$V_{32} = \left\langle R_{21}Y_{1-1}\middle|\hat{V}\middle|R_{21}Y_{10}\right\rangle = \frac{\alpha}{2}\left\langle R_{21}Y_{1-1}\middle|(1-i)\hat{L}_{-}\middle|R_{21}Y_{10}\right\rangle =$$

$$= \frac{\alpha}{2}(1-i)\sqrt{2}\left\langle R_{21}Y_{1-1}\middle|R_{21}Y_{1-1}\right\rangle = \frac{\alpha}{2}(1-i)\sqrt{2};$$

$$V_{11} = V_{22} = V_{33} = V_{13} = V_{31} = 0.$$

При вычислении матричных элементов учитывалась ортогональность волновых функций.

В матричном виде оператор возмущения имеет вид

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & (1+i)c & 0 \\ (1-i)c & 0 & (1+i)c \\ 0 & (1-i)c & 0 \end{pmatrix},$$

где элементы и строк, и столбцов соответствуют парам квантовых чисел (l, m) последовательно:

$$(1, 1), (1, 0), (1, -1);\ c = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Решается секулярное уравнение

$$\begin{vmatrix} -E & (1+i)c & 0 \\ (1-i)c & -E & (1+i)c \\ 0 & (1-i)c & -E \end{vmatrix} = -E(E^2 - 2c^2) + 2c^2E = 0 \to E = 0,\ \pm 2c.$$

Поправки к энергии атома водорода в первом порядке теории возмущений равны

$$E_1^{(1)} = 0,\ E_{2,3}^{(1)} = \pm\sqrt{2}\alpha.$$

3. Подсистема из двух слабо взаимодействующих частиц со спином 1/2 может обладать суммарным спином $s_{1,2} = 1$ или 0, находясь соответственно в триплетном или синглетном состоянии. Включение в систему спина $s_3 = 1$ дает значения суммарного спина $s \equiv s_{1,2,3} = 2, 1, 0$ для $s_{1,2} = 1$ и $s \equiv s_{1,2,3} = 1$ для $s_{1,2} = 0$. Таким образом, суммарный спин рассматриваемой системы трех спинов может принимать значения $s = 2, 1, 0$. По условию система находится в состоянии с полным спином 2 и проекцией на ось z, равной 1, при этом первые два спина образуют триплет с проекцией на ось z, равной 0. Волновой вектор заданного состояния можно получить, действуя понижающим оператором на очевидное равенство

$$\left|2,2\right\rangle = \left|1/2,1/2\right\rangle\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,1\right\rangle.$$

Имеем:

$$J_-\left|2,2\right\rangle = 2\left|2,1\right\rangle = J_-\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,1\right\rangle =$$

$$= \left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,1\right\rangle + \left|1/2,1/2\right\rangle\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1,1\right\rangle + \sqrt{2}\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,0\right\rangle,$$

откуда

$$\left|2,1\right\rangle = \frac{1}{2}\Big(\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1/2,1/2\right\rangle + \left|1/2,1/2\right\rangle\left|1/2,-1/2\right\rangle\Big)\left|1,1\right\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,0\right\rangle.$$

Триплетному состоянию первых двух спинов с нулевой проекцией на ось z отвечает первое слагаемое, а второе слагаемое относится к триплетному состоянию с проекцией суммарного спина этой пары на ось z, равной 1. Другими словами, найденный волновой вектор можно записать следующим образом:

$$\left|2,1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|T_0\right\rangle\left|1,1\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|T_1\right\rangle\left|1,0\right\rangle.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$W = 1/2.$$

4. Нормируем волновую функцию:

$$\left\langle\psi|\psi\right\rangle = 1 \to A = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Среднее значение проекции спина на ось x может быть найдено непосредственно:

$$\left\langle s_x\right\rangle = \sum s_{xn}w_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5} = -\frac{3}{10}.$$

Чтобы найти средние значения проекций спина на другие оси, необходимо знать соответствующие операторы в s_x-представлении. Имеем:

$$\hat{s}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ \hat{s}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\ \cdot\hat{s}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}.$$

Они получаются циклической перестановкой из известных выражений операторов в s_z-представлении (см. задачу 1 в приложении).

Вычисляем:

$$\left\langle s_y\right\rangle = \left\langle\psi\left|\hat{s}_y\right|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\ 2)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{4}{10},$$

$$\left\langle s_z\right\rangle = \left\langle\psi\left|\hat{s}_z\right|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\ 2)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0,$$

$$\left\langle s^2\right\rangle = \left\langle\psi\left|\hat{s}^2\right|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\ 2)\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{3}{4}.$$

Собственные функции оператора $\hat{s}_z$ в s_x-представлении имеют вид

$$\psi_{s_z=1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix},\ \psi_{s_z=-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}.$$

Составим матрицу перехода:

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\1 & i\end{pmatrix}.$$

Действуем этим оператором на исходную волновую функцию в s_x-

представлении и получаем ее в s_z-представлении:

$$\left|\psi_{s_z}\right\rangle = \hat{S}\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1-2i \\ 1+2i \end{pmatrix}.$$

5. Чтобы найти уровни энергии (собственные значения) гамильтониана в матричной форме, необходимо решить вековое (секулярное) уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-E & -i & 0 \\ i & 5-E & -2i \\ 0 & 2i & 1-E \end{vmatrix} = 0 = (1-E)E(E-6).$$

Его корни (в порядке убывания) равны $E = 6, 1, 0$. Они являются собственными значениями гамильтониана. Гамильтониан в E-представлении имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Волновая функция задана в E-представлении:

$$\psi = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

В нормированном виде она имеет вид

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем вероятности

$$W_{E=6} = \frac{1}{14},\ W_{E=1} = \frac{2}{7},\ W_{E=0} = \frac{9}{14}.$$

Средняя энергия системы равна

$$\left\langle E\right\rangle = 6\cdot\frac{1}{14} + 1\cdot\frac{2}{7} + 0\frac{9}{14} = \frac{5}{7}.$$

Экзамен

1. Волновая функция в базисе $|1\rangle$, $|2\rangle$ имеет вид

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

По определению среднего

$$<E> = <\psi\left|\hat{H}\right|\psi> = \frac{1}{3}(1\ \sqrt{2})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(1\ \sqrt{2})\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Собственные значения и собственные функции находятся стандартным образом. Решается секулярное уравнение и определяются собственные значения:

$$\begin{vmatrix} -E & 1 \\ 1 & -E \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow E = \pm 1.$$

Последовательная подстановка значений E в уравнение

$$-EA_1 + A_2 = 0$$

и выполнение условия нормировки

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = 1$$

дают соответствующие значения коэффициентов A_1 и A_2 и, тем самым, собственные функции:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \text{ для } E_1 = -1 \text{ и } \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ для } E_2 = 1.$$

Функция состояния разлагается по собственным функциям гамильтониана:

$$\psi = C_1\,\psi_1 + C_2\,\psi_2.$$

Находятся коэффициенты разложения C_1 и C_2:

$$C_1 = \langle\psi_1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\ -1)\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-\sqrt{2}),$$

$$C_2 = \langle\psi_2|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(1+\sqrt{2}).$$

Значение $E_1 = -1$ измеряется с вероятностью $w_1 = |C_1|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$, а значение $E_2 = 1$ – с вероятностью $w_1 = |C_1|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}$.

2. Заданная по условию угловая зависимость волновой функции частицы в центральном поле

$$\Phi(\theta,\varphi) = C\cos^2\theta$$

определяет состояние некоторого пространственного ротатора.

Для решения задачи воспользуемся сферическими функциями

$$Y_{0,\,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_{2,\,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\vartheta - 1).$$

Несложно получить

$$\cos^2\vartheta = \sqrt{4\pi}\frac{1}{3}(Y_{0,\,0} + \frac{2}{\sqrt{5}}Y_{2,\,0}).$$

Это соотношение позволяет выразить волновую функцию Φ через сферические функции

$$\Phi = A(Y_{0,\,0} + \frac{2}{\sqrt{5}}Y_{2,\,0}).$$

Сферические функции ортогональные, благодаря чему легко выполнить нормировку волновой функции

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}}{3}Y_{0,\,0} + \frac{2}{3}Y_{2,\,0}.$$

Из этого выражения для волновой функции видно, что возможны только состояния с орбитальными квантовыми числами $l = 0$ и 2, с $m = 0$. Соответствующие коэффициенты разложения равны $C_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $C_2 = \frac{2}{3}$. Все остальные коэффициенты равны нулю. Вероятности обнаружения ротатора в этих состояниях равны $W_0 = W(l=0) = \frac{5}{9}$, $W_2 = W(l=2) = \frac{4}{9}$. Это позволяет вычислить среднее значение квадрата момента:

$$\langle l^2\rangle = \frac{8}{3}.$$

3. Чтобы найти собственные функции и собственные значения оператора $\hat{A}$, необходимо решить линейное уравнение

$$\hat{A}\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - a\frac{\partial\psi}{\partial r} = b\psi.$$

Для его решения применяется метод разделения переменных: искомая функция ψ ищется в виде произведения функции одной независимой переменной на функцию другой переменной:

$$\psi = \psi_1(r)\,\psi_2(\varphi).$$

После подстановки этого выражения для функции ψ в исходное уравнение и деления правой и левой его частей на ψ получаем:

$$i\frac{1}{\psi_2}\frac{d\psi_2}{d\varphi} - a\frac{1}{\psi_1}\frac{d\psi_1}{dr} = b.$$

Сумма функций различных независимых переменных может быть постоянной только в том случае, если эти функции сами имеют постоянное значение. Полагаем:

$$\frac{1}{\psi_2}\frac{d\psi_2}{d\varphi} = -im \;\to\; \psi_2 = \exp(-im\varphi).$$

Из условия однозначности волновой функции

$$\psi_2(2\pi) = \psi_2(0)$$

следует, что $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Для $\psi_1(r)$ имеем уравнение

$$-a\frac{1}{\psi_1}\frac{d\psi_1}{dr} = \gamma \;\to\; \psi_1 = C\exp(-\gamma r/a),\; \gamma > 0.$$

Итак, искомое решение имеет вид $\psi = C\exp(-\gamma r/a)\exp(-im\varphi)$. Нормировка позволяет найти постоянную C:

$$|C|^2\int_0^\infty \exp(-2\gamma r/a) r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = -|C|^2 2\pi\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty \exp(-\alpha r)dr =$$

$$= 2\pi|C|^2\left(\frac{a}{2\gamma}\right)^2 = 1 \;\to\; C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\gamma}{a}.$$

Здесь использовано обозначение $\alpha = 2\gamma/a$.

Окончательный вид искомого решения следующий:

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\gamma}{a}\exp(-\gamma r/a)\exp(-im\varphi),\; \gamma > 0,\; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\; b_m = \gamma + m.$$

4. Прежде необходимо нормировать волновую функцию $\psi(x)$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx = |C|^2\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_0^* + \psi_1^*)(\psi_0 + \psi_1)dx = 2|C|^2, \quad C = 1/\sqrt{2}.$$

$$\psi(x) = (\psi_0 + \psi_1)/\sqrt{2}.$$

Колебания гармонического осциллятора описываются волновой функцией

$$\psi(x,t) = (\psi_0(x)\exp(-iE_0/\hbar\cdot t) + \psi_1(x)\exp(-iE_1/\hbar\cdot t))/\sqrt{2},$$

где $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

По определению среднего значения

$$<x> = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)x\psi(x,t)dx =$$

$$= 1/2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_0^*(x)e^{iE_0/\hbar\cdot t} + \psi_1^*(x)e^{iE_1/\hbar\cdot t})(\psi_0(x)e^{-iE_0/\hbar\cdot t} + \psi_1(x)e^{-iE_1/\hbar\cdot t})x\,dx =$$

$$= 1/2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_0^2(x) + \psi_1^2(x) + \psi_0(x)\psi_1(x)(\exp(i\omega\cdot t) + \exp(-i\omega\cdot t)))x\,dx =$$

$$= \cos(\omega\cdot t)\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(x)\psi_1(x)x\,dx = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos(\omega\cdot t)\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(\xi)\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(\xi)d\xi =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega\cdot t).$$

Здесь использован переход к безразмерной координате $x = \xi\sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$ и применено известное рекуррентное соотношение

$$\xi\psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi) + \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi),$$

а также то, что функции $\psi_n(x)$ действительные.

5. Система, состоящая из двух невзаимодействующих спинов $s_1 = s_2 = 1/2$, может обладать суммарным спином, равным $s = 1$ или 0. При первом значении $s = 1$ будем иметь триплет, при втором $s = 0$ – синглет.

Один спин $s = 1/2$ может находиться в состояниях

$$\left|\alpha\right\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|\beta\right\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Система в этих обозначениях может быть в состояниях

$$\left|\alpha_1\alpha_2\right\rangle = \left|1,1\right\rangle = \left|\mathrm{T}_+\right\rangle, \quad \left|\beta_1\beta_2\right\rangle = \left|1,-1\right\rangle = \left|\mathrm{T}_-\right\rangle.$$

Они соответствуют триплету с проекцией спина, равной +1 и –1 соответственно. Для компоненты триплета с проекцией спина, равной нулю, и для синглета имеем:

$$\left|\mathrm{T}_0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\alpha_1\beta_2\right\rangle + \left|\beta_1\alpha_2\right\rangle\Big), \qquad \left|\mathrm{S}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\alpha_1\beta_2\right\rangle - \left|\beta_1\alpha_2\right\rangle\Big).$$

Почленно складывая два последних соотношения, получим:

$$\left|\alpha_1\beta_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\mathrm{T}_0\right\rangle + \left|\mathrm{S}\right\rangle\Big).$$

В результате заданная волновая функция преобразуется к виду

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{4}\Big(\left|\mathrm{T}_+\right\rangle + \left|\mathrm{T}_-\right\rangle\Big) + \frac{\sqrt{7}}{4}\Big(\left|\mathrm{T}_0\right\rangle + \left|\mathrm{S}\right\rangle\Big) = \frac{1}{4}\Big(\left|1,1\right\rangle + \left|1,-1\right\rangle\Big) + \frac{\sqrt{7}}{4}\Big(\left|1,0\right\rangle + \left|0,0\right\rangle\Big).$$

Квадраты коэффициентов при слагаемых в правой части равенства дают вероятности возможных состояний. Это позволяет вычислить средние значения:

$$\left\langle s_z\right\rangle = (+1)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 0\cdot\left(\frac{7}{16}+\frac{7}{16}\right) + (-1)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0,$$

$$\left\langle \hat{s}^2\right\rangle = 1\cdot(1+1)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{7}{16}\right) + 0\cdot(0+1)\frac{7}{16} = \frac{9}{8}.$$

6. Для главного квантового числа n орбитальное квантовое число l может принимать значения $l = 0, 1, \ldots, n-1$. Для каждого l магнитное квантовое число m может иметь $2l-1$ значений. Всего для данного значения n число различных состояний равно n^2. В рассматриваемом случае $n = 2$, и различных квантовых состояний четыре. Соответственно квадрат момента частицы описывается четырехрядной диагональной матрицей

$$\hat{L}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оператор проекции момента на ось $\hat{L}_x$ выражается через повышающий $\hat{L}_+$ и понижающий $\hat{L}_-$ операторы:

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right).$$

Последние описываются в данном случае четырехрядными матрицами

$$\hat{L}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, возмущение выражается также четырехрядной матрицей с элементами V_{ik}, где индексу i соответствует двойной индекс $l'm'$, а индексу k – индекс lm. Эти элементы для рассматриваемого возмущения могут быть вычислены по известным формулам (без использования непосредственно матриц):

$$V_{ik} = A\hbar^2 \times l(l+1)\delta_{ll'}\delta_{mm'} +$$

$$+ A\hbar^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\delta_{ll'}\delta_{m+1,m'} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\delta_{ll'}\delta_{m-1,m'} \right).$$

Для вычисления поправок к энергии в первом порядке теории возмущений необходимы только диагональные элементы матрицы возмущения. Вводим обозначения:

$$|1\rangle = |2,0,0\rangle,\ |2\rangle = |2,1,-1\rangle,\ |3\rangle = |2,1,0\rangle,\ |4\rangle = |2,1,1\rangle,$$

где в правых частях стоят векторы $|n,l,m\rangle$.

Вычисляем поправки к энергии:

$$E_1^{(1)} = V_{11} = \langle 1|V|1\rangle = 0,\ E_2^{(1)} = V_{22} = \langle 2|V|2\rangle = 2A\hbar^2,\ E_3^{(1)} = E_4^{(1)} = 2A\hbar^2.$$

Контрольные работы 2009 г.

Первая контрольная работа

1. Условие нормировки

$$\int |\psi|^2 \mathrm{d}V = 1$$

в данной задаче принимает вид

$$|A|^2 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{-2} \exp(-2\alpha r)\cos^2\theta\, r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 1.$$

Вычисления дают $|A| = \sqrt{\frac{3\alpha}{2\pi}}$.

2. Энергия частицы в яме равна

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}(4n^2 + k^2),$$

где квантовые числа n и k принимают значения: $n, k = 1, 2, \ldots$ В таблице приведены значения этих чисел и суммы $4n^2 + k^2$ для первых четырех уровней энергии.

n	1	1	1	2
k	1	2	3	1
$4n^2 + k^2$	5	8	13	17

Если ввести обозначение $i = 4n^2 + k^2$, то энергия первых четырех энергетических уровней равна

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} i,\ i = 5, 8, 13, 17.$$

3. Если ввести безразмерную координату $x = \xi\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ и использовать рекуррентное соотношение

$$\xi\psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi) + \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi),$$

то волновая функция примет вид

$$\psi(\xi) = A(\xi\psi_1(\xi) + \psi_3(\xi)) = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(\xi) + \psi_2(\xi) + \psi_3(\xi)\right).$$

Нормировка дает $A^2(1/2 + 1 + 1) = 1$, $A = \sqrt{2/5}$, так что

$$\psi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{5}}\psi_0(\xi)+\sqrt{\frac{2}{5}}(\psi_2(\xi)+\psi_3(\xi)).$$

Искомые значения энергии осциллятора и соответствующие вероятности равны

$$E_0=\hbar\omega/2,\ w_0=1/5;\ E_2=5\hbar\omega/2,\ w_2=2/5;\ E_3=7\hbar\omega/2,\ w_3=2/5.$$

Среднее значение энергии равно

$$<E>=\sum E_i w_i=5\hbar\omega/2.$$

4. Энергия частицы во втором порядке теории возмущений находится по формуле

$$E_2=E_2^{(0)}+V_{22}+\sum_{n\neq 2}\frac{V_{2n}V_{n2}}{E_2^{(0)}-E_n^{(0)}}.$$

Матричные элементы:

$$V_{2n}=V_{n2}=\int_0^a\psi_n^{(0)*}V\psi_2^{(0)}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{2}{a}V_0\int_0^a\sin(\pi n\frac{x}{a})\cos(2\pi\frac{x}{a})\sin(2\pi\frac{x}{a})\mathrm{d}x=\frac{1}{a}V_0\int_0^a\sin(\pi n\frac{x}{a})\sin(4\pi\frac{x}{a})\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}V_0\int_0^a\psi_n^{(0)*}\psi_4^{(0)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}V_0\delta_{n,4}.$$

Здесь $\psi_n^{(0)}$ – волновые функции частицы в невозмущенном состоянии; соответствующие значения энергии

$$E_n^{(0)}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2.$$

В результате энергия первого возбужденного состояния частицы во втором порядке теории возмущений равна

$$E_2=\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}-\frac{V_0^2ma^2}{24\pi^2\hbar^2}.$$

Волновая функция первого возбужденного состояния частицы в первом порядке теории возмущений равна

$$\psi_2=\psi_2^{(0)}+\sum_{n\neq 2}\frac{V_{n2}}{E_2^{(0)}-E_n^{(0)}}\psi_n^{(0)}=\psi_2^{(0)}-\frac{V_0ma^2}{12\pi^2\hbar^2}\psi_4^{(0)}.$$

5. Волновая функция одномерного осциллятора в основном состоянии имеет вид

$$\psi_0(x)=(m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\exp(-m\omega x^2/2\hbar).$$

В трехмерном случае волновая функция равна

$$\psi_0(r,\theta,\varphi)=\psi_0(x)\psi_0(y)\psi_0(z)=(m\omega/\pi\hbar)^{3/4}\exp(-m\omega r^2/2\hbar).$$

По определению среднего

$$<r>=\int_0^\infty\left|\psi_0\right|^2 r4\pi r^2\mathrm{d}r=$$

$$=4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty\exp(-\alpha r^2)r^3\mathrm{d}r=-4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^\infty\exp(-\alpha r^2)r\mathrm{d}r=$$

$$=-4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{1}{2\alpha}=2/\sqrt{\pi\alpha}=2\sqrt{\frac{\hbar}{\pi m\omega}}.$$

Здесь использовано обозначение $\alpha=m\omega/\hbar$.

Вторая контрольная работа

1. При $n=3$ возможные значения орбитального квантового числа равны $l=0,1,2$. Полному моменту атома водорода с учетом спина электрона $s=1/2$ отвечают значения квантового числа j, равные: $j=1/2$ при $l=0$; $j=1/2$ и $3/2$ при $l=1$; $j=3/2$ и $5/2$ при $l=2$.

По условию атом водорода имеет определенное значение проекции орбитального момента $m = 1$. Проекции полного момента отвечают два значения $j_z = m \pm s_z$, т. е. $j_z = 1/2,\ 3/2$. Результирующие возможные значения пар полного момента и проекции полного момента электрона в атоме водорода приведены в таблице.

j	5/2	5/2	3/2	3/2	1/2
j_z	3/2	1/2	3/2	1/2	1/2

2. Волновая функция в базисе $|1\rangle$, $|2\rangle$ имеет вид

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

По определению среднего

$$<E> = <\psi|\hat{H}|\psi> = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\sqrt{6}.$$

Собственные значения и собственные функции находятся стандартным образом. Решается секулярное уравнение и определяются собственные значения:

$$\begin{vmatrix}-E & 1\\ 1 & -E\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow E = \pm 1.$$

Последовательная подстановка значений E в уравнение

$$-EA_1 + A_2 = 0$$

и выполнение условия нормировки

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = 1$$

дают соответствующие значения коэффициентов A_1 и A_2 и, тем самым, собственные функции:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \text{ для } E_1 = -1 \text{ и } \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \text{ для } E_2 = 1.$$

Функция состояния разлагается по собственным функциям гамильтониана:

$$\psi = C_1\,\psi_1 + C_2\,\psi_2.$$

Находятся коэффициенты разложения C_1 и C_2:

$$C_1 = \langle\psi_1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(1\ \ -1)\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{2} - \sqrt{3}),$$

$$C_2 = \langle\psi_2|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Значение $E_1 = -1$ измеряется с вероятностью $w_1 = |C_1|^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{5}$, а значение $E_2 = 1$ – с вероятностью $w_1 = |C_1|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{5}$.

3. Первому возбужденному состоянию атома водорода отвечает значение главного квантового числа $n = 2$. Таким образом, рассматриваются переходы $|1,0,0\rangle \to |2,l,m\rangle$. Однако волновая функция исходного (основного) состояния четная, возмущение описывается четной функцией, поэтому возможен переход только в состояние с четной волновой функцией: $|1,0,0\rangle \to |2,0,0\rangle$. Соответствующие волновые функции (начального и конечного) состояний суть

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\exp(-r/a), \quad \psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}}\left(1 - \frac{r}{2a}\right)\exp(-r/2a).$$

Матричный элемент равен

$$V_{200,100}(t) = \int_0^\infty \psi_{200}^* \hat{V} \psi_{100} 4\pi r^2 \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\beta\delta(t)}{2\sqrt{2}\pi a^3} \int_0^\infty \exp(-3r/2a) 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2}\beta\delta(t)}{a^3} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} \int_0^\infty \exp(-\alpha r)\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\beta\delta(t)}{a^3} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} \frac{1}{\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\beta\delta(t)}{a^3} \frac{1}{\alpha^3} = \frac{16\sqrt{2}\beta\delta(t)}{27},$$

где использовано обозначение $\alpha = 3/(2a)$.

Искомая вероятность перехода равна

$$W_{100\to 200} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_{200,100}(t) \exp(i\omega_{21} t)\mathrm{d}t \right|^2 = \frac{512\beta^2}{729\hbar^2}.$$

4. Возможные значения суммарного спина системы лежат в пределах от $s_1 + s_2$ до $|s_1 - s_2|$, т. е. в данном случае суммарный спин может принимать значения $s = 3, 4, 5$. Проекция спина системы равна $s_z = s_{1z} + s_{2z} = 2 + 1 = 3$. С такой проекцией возможны состояния системы $|3,3\rangle$, $|4,3\rangle$, $|5,3\rangle$. Заданное по условию задачи состояние системы можно рассматривать как суперпозицию состояний с определенными значениями полного спина и его проекции:

$$|4,2\rangle|1,1\rangle = C_1|5,3\rangle + C_2|4,3\rangle + C_3|3,3\rangle.$$

Действуя два раза подряд повышающим оператором на левую и правую части этого равенства, получим:

$$\sqrt{14}|4,3\rangle|1,1\rangle = 3\sqrt{2}C_1|5,4\rangle + 2\sqrt{2}C_2|4,4\rangle,$$

$$\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{2}|4,4\rangle|1,1\rangle = 3\sqrt{2}\sqrt{10}C_1|5,5\rangle.$$

Из последнего равенства, используя тождество $|4,4\rangle|1,1\rangle = |5,5\rangle$, получим $C_1 = \dfrac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}$. Искомая вероятность равна

$$w = C_1^2 = \frac{28}{45}.$$

5. Волновой вектор синглетного состояния системы электронов равен

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle - |1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle\Big).$$

Для рассматриваемого триплетного состояния

$$|T_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle + |1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle\Big).$$

Гамильтониан электрона в магнитном поле

$$\hat{H} = \gamma\hbar\left(\hat{\vec{s}},\vec{B}\right) = \gamma\hbar B\hat{s}_z.$$

В соответствии с этим зависимость волнового вектора рассматриваемой системы от времени имеет вид

$$\left|\psi(t)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1/2,1/2\right\rangle e^{-i\gamma Bt}\left|1/2,-1/2\right\rangle e^{i\gamma Bt/4} - \left|1/2,-1/2\right\rangle e^{i\gamma Bt}\left|1/2,1/2\right\rangle e^{-i\gamma Bt/4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1/2,-1/2\right\rangle e^{-i3\gamma Bt/4} - \left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1/2,1/2\right\rangle e^{i3\gamma Bt/4}\right).$$

Здесь использовано начальное условие: в момент времени $t = 0$ система находилась в синглетном состоянии: $\left|\psi(0)\right\rangle = \left|S\right\rangle$.

Искомая вероятность определяется коэффициентом C: $w = \left|C\right|^2$, где

$$C = \left\langle T_0\middle|\psi(t)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\langle 1/2,1/2\right|\left\langle 1/2,-1/2\right| + \left\langle 1/2,-1/2\right|\left\langle 1/2,1/2\right|\right)\times$$

$$\times\left(\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1/2,-1/2\right\rangle e^{-i3\gamma Bt/4} - \left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1/2,1/2\right\rangle e^{i3\gamma Bt/4}\right) =$$

$$= -i\sin(3\gamma Bt/4).$$

Здесь использованы условия ортогональности:

$$\left\langle 1/2,1/2\middle|1/2,1/2\right\rangle = 1,\ \left\langle 1/2,1/2\middle|1/2,-1/2\right\rangle = 0.$$

Таким образом,

$$w = \left|C\right|^2 = \sin^2(3\gamma Bt/4).$$

Экзамен

1. Волновая функция гармонического осциллятора в основном состоянии имеет вид

$$\psi(x) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\exp(-m\omega x^2/2\hbar).$$

Поправка первого порядка теории возмущений к энергии основного состояния осциллятора равна

$$E^{(1)} = V_{00} = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^*(x)\hat{V}\psi_0(x)\mathrm{d}x =$$

$$= V_0(m\omega/\pi\hbar)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2m\omega x^2/\hbar)\mathrm{d}x = V_0/\sqrt{2}.$$

2. Чтобы найти уровни энергии (собственные значения) гамильтониана в матричной форме, необходимо решить вековое (секулярное) уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-E & -i & 0 \\ i & 5-E & -2i \\ 0 & 2i & 1-E \end{vmatrix} = 0 = (1-E)E(E-6).$$

Его корни $E = 0, 1, 6$ являются собственными значениями гамильтониана. Для нахождения соответствующих собственных функций решается система уравнений:

$$\begin{cases} (1-E)C_1 - iC_2 = 0, \\ iC_1 + (5-E)C_2 - 2iC_3 = 0, \\ 2iC_2 + (1-E)C_3 = 0, \\ \left|C_1\right|^2 + \left|C_2\right|^2 + \left|C_3\right|^2 = 1. \end{cases}$$

Подстановка значений E и решение системы дает наборы коэффициентов C_i (i = 1, 2, 3) и соответствующие собственные функции гамильтониана:

$$E_1 = 0 \quad C_1 = 1/\sqrt{6},\ C_2 = -i/\sqrt{6},\ C_3 = -2/\sqrt{6},\ \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ -2\end{pmatrix};$$

$$E_2 = 1 \quad C_1 = 2/\sqrt{5},\ C_2 = 0,\ C_3 = 1/\sqrt{5},\ \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix};$$

$$E_3 = 6 \quad C_1 = 1/\sqrt{30},\ C_2 = 5i/\sqrt{30},\ C_3 = -2/\sqrt{30},\ \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\ 5i\\ -2\end{pmatrix}.$$

3. Средняя энергия частицы по определению равна

$$\langle E\rangle = E_{n-1}\, w_{n-1} + E_n\, w_n + E_{n+1}\, w_{n+1},$$

откуда с учетом условий задачи следует равенство

$$(n-1)^2\, w_{n-1} + n^2\, w_n + (n+1)^2\, w_{n+1} = n^2.$$

Наряду с ним имеется условие нормировки

$$w_{n-1} + w_n + w_{n+1} = 1.$$

Из равенства и условия нормировки находится

$$w_{n-1} = (2n+1)(1-w_n)/4n.$$

4. См. решение задачи 4 на экзамене 2011 г.

5. Суммарный спин системы может принимать два значения: s = 2 и 1. Проекция суммарного спина на ось z равна s_z = 1. С такими значениями полного момента и с его проекцией s_z = 1 возможны два состояния системы: $|2,1\rangle$ и $|1,1\rangle$. Таким образом, разложение вектора состояния системы по векторам, соответствующим определенным значениям полного момента и его проекции, должно иметь вид

$$|1/2,-1/2\rangle|3/2,3/2\rangle = C_1|2,1\rangle + C_2|1,1\rangle.$$

Применение повышающего оператора J_+ к обеим частям данного равенства позволяет получить коэффициент C_1. Применение J_+ к левой части дает

$$J_+|1/2,-1/2\rangle|3/2,3/2\rangle = |1/2,1/2\rangle|3/2,3/2\rangle \equiv |2,2\rangle.$$

Применение J_+ к правой части дает

$$C_1 J_+|2,1\rangle + C_2 J_+|1,1\rangle = 2C_1|2,2\rangle.$$

Из сравнения результатов получаем $C_1 = 1/2$. Условие нормировки позволяет найти коэффициент $C_2 = \sqrt{3}/2$. Таким образом, разложение вектора состояния системы по векторам, соответствующим определенным значениям ее полного момента и его проекции, равно

$$|1/2,-1/2\rangle|3/2,3/2\rangle = \frac{1}{2}|2,1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1,1\rangle.$$

Среднее значение квадрата полного момента системы равно

$$\left\langle \hat{S}^2\right\rangle = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 3 + \frac{3}{4}\cdot 1\cdot 2 = 3.$$

6. При $n = 2$ возможные значения орбитального квантового числа равны l = 0, 1. Волновая функция исходного (основного) состояния четная, возмущение описывается нечетной функцией, поэтому возможен переход только в состояние с нечетной волновой функцией без изменения магнитного числа: $|1,0,0\rangle \to |2,1,0\rangle$. Волновые функции начального и конечного состояний имеют вид

$$\psi_{100} = R_{10}Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\exp(-r/a),$$

$$\psi_{210} = R_{21}Y_{10} = \frac{i}{4\sqrt{2\pi a^5}} r\exp(-r/2a)\cos\theta.$$

Необходимый матричный элемент для расчета вероятности перехода $\left|1, 0, 0\right\rangle \;\to\; \left|2, 1, 0\right\rangle$ равен

$$V_{210,100}(t) = \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \psi^*_{210}\hat{V}\psi_{100} r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi =$$

$$= -\frac{iV_0\exp(-t/\tau)}{3\sqrt{2}a^4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^\infty \exp(-\alpha r)\mathrm{d}r = -\frac{iV_0\exp(-t/\tau)}{3\sqrt{2}a^4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{1}{\alpha} =$$

$$= \frac{iV_0\exp(-t/\tau)}{3\sqrt{2}a^4}\frac{1}{\alpha^2} = \frac{i2\sqrt{2}V_0\exp(-t/\tau)}{27a^2},$$

где использовано обозначение $\alpha = 3/(2a)$.

Искомая вероятность перехода равна

$$W_{100\to 210} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\infty V_{210,100}(t)\exp(i\omega t)\mathrm{d}t\right|^2 = \frac{8V_0^2}{729a^4\hbar^2}\frac{1}{\left|i\omega - 1/\tau\right|^2} =$$

$$= \frac{8V_0^2}{729a^4\hbar^2}\frac{\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}.$$

Частота ω определяется разностью уровней энергии и в данном случае равна

$$\omega = \frac{3e^2}{32\pi\varepsilon_0 a\hbar}.$$

Переэкзаменовка

1. Измеряемые значения энергии (собственные значения гамильтониана) частицы в одномерной бесконечно глубокой яме определяются выражением

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2,$$

где n $(n = 1, 2, \ldots)$ – квантовое число, определяющее уровень энергии. Необходимо найти наименьшее возможное значение n.

Разложение волновой функции частицы по собственным функциям имеет вид

$$\psi = \sum_n C_n\psi_n(x).$$

Суммирование ведется по всем допустимым значениям n. Для наименьшего возможного значения n соответствующий коэффициент C_n должен быть отличным от нуля:

$$C_n = \left\langle\psi_n\middle|\psi\right\rangle = \int_0^a \psi_n(x)\psi(x)\mathrm{d}x =$$

$$= A\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{5\pi x}{2a}\sin\frac{3\pi x}{2a}\mathrm{d}x = A\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{a}{\pi}\int_0^\pi \sin ny \sin\frac{5y}{2}\sin\frac{3y}{2}\mathrm{d}y =$$

$$= A\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{a}{2\pi}\int_0^\pi \sin ny(\cos y - \cos 4y)\mathrm{d}y =$$

$$= A\sqrt{\frac{a}{2}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\sin(n+1)y + \sin(n-1)y - \sin(n+4)y - \sin(n-4)y)\mathrm{d}y.$$

Проверяем:

$$n=1,\ C_1=-A\sqrt{\frac{a}{2}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin 5y-\sin 3y)\mathrm{d}y=-A\sqrt{\frac{a}{2}}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)=A\sqrt{\frac{a}{2}}\frac{2}{15\pi}.$$

Таким образом, наименьшая измеряемая энергия определяется значением квантового числа $n = 1$, а искомая вероятность $w=C_1^2$. Чтобы найти ее, надо нормировать волновую функцию:

$$A^2\int_0^a \sin^2\frac{5\pi x}{2a}\sin^2\frac{3\pi x}{2a}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}A^2\int_0^a(1-\cos\frac{5\pi x}{a})(1-\cos\frac{3\pi x}{a})\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{4}A^2\int_0^a(1-\cos\frac{5\pi x}{a}-\cos\frac{3\pi x}{a}+\cos\frac{5\pi x}{a}\cos\frac{3\pi x}{a})\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{4}A^2\int_0^a(1+\cos\frac{5\pi x}{a}\cos\frac{3\pi x}{a})\mathrm{d}x=\frac{1}{4}A^2\int_0^a(1+\frac{1}{2}(\cos\frac{8\pi x}{a}+\cos\frac{2\pi x}{a}))\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{a}{4}A^2=1\to A=2/\sqrt{a}.$$

Ответ: $w=C_1^2=\dfrac{8}{225\pi^2}.$

2. Прежде необходимо нормировать волновую функцию:

$$C^2\Big(\int_{-\infty}^{0}e^{2x/a}\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}e^{-2x/b}\mathrm{d}x\Big)=C^2\frac{1}{2}(a+b)=1\to C=\sqrt{2/(a+b)}.$$

Нормированная волновая функция равна

$$\psi(x)=\sqrt{2/(a+b)}\begin{cases}e^{x/a}, & x\le 0,\\ e^{-x/b}, & x>0.\end{cases}$$

По определению среднего

$$\langle x\rangle=\frac{2}{a+b}\left(\int_{-\infty}^{0}xe^{2x/a}\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}xe^{-2x/b}\mathrm{d}x\right)=\frac{2}{a+b}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha x}\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\int_0^{\infty}e^{-\beta x}\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\frac{2}{a+b}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{1}{\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\frac{1}{\beta}\right)=\frac{2}{a+b}\left(-\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)=\frac{b-a}{2}.$$

(Решение см. также в задаче 1 из первой контрольной работы 2007 г.)

3. Очевидно, что E_0 является собственным значением, а ψ_{E_0} – собственной функцией гамильтониана. Волновую функцию, описывающую любое другое состояние системы, можно разложить по собственным функциям гамильтониана. Коэффициенты этого разложения позволяют найти соответствующие вероятности. Итак, искомый коэффициент равен

$$C_{E_0}=\langle\psi_{E_0}|\varphi\rangle=AB(1\,2\,2\,1)\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=8AB.$$

Из условия нормировки находятся A и B:

$$\langle\psi_{E_0}|\psi_{E_0}\rangle=A^2(1\ 2\ 2\ 1)\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=10A^2=1\to A=1/\sqrt{10},$$

$$\langle\varphi|\varphi\rangle=B^2(-1\ 2\ 2\ 1)\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=10B^2=1\to B=1/\sqrt{10},$$

так что $C_{E_0}=4/5$. Вероятность обнаружить энергию E_0 для состояния, описываемого волновой функцией φ, равна
$$w=16/25.$$

4. В $\hat{S}^2, \hat{S}_x$ -представлении волновая функция частицы имеет вид

$$\psi_{\hat{S}^2,\hat{S}_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\hat{s}_z$ в этом представлении изображается матрицей

$$s_z = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения и собственные функции равны

$$s_{z1} = \frac{3}{2} \quad \psi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ -i \end{pmatrix}; \quad s_{z2} = \frac{1}{2} \quad \psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i\sqrt{3} \\ 1 \\ -i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix};$$

$$s_{z3} = -\frac{1}{2} \quad \psi_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i\sqrt{3} \\ 1 \\ i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad s_{z4} = -\frac{3}{2} \quad \psi_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ i \end{pmatrix}.$$

Разложение волновой функции частицы по собственным функциям оператора $\hat{s}_z$ позволит найти вероят- вероятности обнаружения

различных значений проекции спина на ось z. Коэффициенты этого разложения равны

$$C_1 = \langle \psi_1 | \psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 \;\; -i\sqrt{3} \;\; -\sqrt{3} \;\; i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$C_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(i\sqrt{3} \;\; 1 \;\; i \;\; \sqrt{3})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \;\; C_3 = -\frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \;\; C_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, вероятность обнаружения значения проекции спина на ось z, равную $s_{z1} = 3/2$, будет $w_1 = 1/8$; значение $s_{z2} = 1/2$ будет обнаружено с вероятностью $w_2 = 3/8$; значение $s_{z3} = -1/2$ – с вероятностью $w_3 = 3/8$; $s_{z4} = -3/2$ – $w_4 = 1/8$.

Среднее значение проекции спина на ось z равно

$$\langle s_z \rangle = \sum s_{zn} w_n = \frac{3}{2}\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{3}{8} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{8} + \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{8} = 0.$$

Это результат симметрии состояния частицы относительно оси x.

5. Энергия линейного гармонического осциллятора находится по формуле $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, где $n = 0, 1, \ldots$ Уровни энергии невырожденные. Рассматриваемый плоский (двумерный) осциллятор представляет собой совокупность двух линейных осцилляторов. Его энергия вычисляется по формуле

$$E_n = E_{n_1} + E_{n_2} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) = \hbar\omega(n+1),$$

где $n = n_1 + n_2 = 0, 1, \ldots$ Определенное значение квантового числа n можно получить $(n + 1)$-м способом: в то время, как число n_1 пробегает ряд значений $n_1 = 0, 1, \ldots, n$, число n_2 принимает значения $n_2 = n - n_1$. Таким образом, кратность вырождения уровней энергии данного плоского осциллятора равна $n + 1$. Значения энергии E_n и кратность вырождения g_n трех нижних уровней невозмущенного осциллятора равны

$$E_0 = \hbar\omega\ g_0 = 1,\ E_1 = 2\hbar\omega\ g_1 = 2,\ E_2 = 3\hbar\omega\ g_2 = 3.$$

Для третьего (второго возбужденного) уровня энергии данного осциллятора квантовое число равно $n = 2$. Уровень трехкратно вырожден. С одной и той же энергией $E_2 = 3\hbar\omega$ существуют три различных состояния с квантовыми числами: $n_1 = 0\ n_2 = 2$, $n_1 = n_2 = 1$ и $n_1 = 2\ n_2 = 0$. Эти состояния описываются собственными функциями:

$$\varphi_1^{(0)} = \psi_0(x)\psi_2(y),\ \ \varphi_2^{(0)} = \psi_1(x)\psi_1(y),\ \ \varphi_3^{(0)} = \psi_2(x)\psi_0(y).$$

Вычисляем матричные элементы. Матричный элемент V_{11} равен

$$V_{11} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^{(0)*}\hat{V}\varphi_1^{(0)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi_0(x)\right|^2 x\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi_2(y)\right|^2 y\mathrm{d}y\ = 0$$

(интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю). По этой же причине $V_{22} = V_{33} = V_{13} = V_{31} = 0$. Другие матричные элементы равны

$$V_{12} = V_{21} = V_{23} = V_{32} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^{(0)*}\hat{V}\varphi_2^{(0)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(x)\psi_1(x)x\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(y)\psi_1(y)y\mathrm{d}y =$$

$$= \alpha a^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(\xi)\psi_1(\xi)\xi\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(\xi)\psi_1(\xi)\xi\mathrm{d}\xi =$$

$$= \alpha a^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1^2(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(\xi)\left(\psi_2(\xi) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(\xi)\right)\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{\alpha a^2}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^2(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2^2(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{\alpha a^2}{\sqrt{2}}.$$

При вычислении этих интегралов использован переход к безразмерным координатам $x, y = a\xi$, где $a = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$, и применена рекуррентная формула

$$\xi\psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi) + \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi).$$

Для вычисления поправок первого порядка теории возмущений к энергетическому уровню решается секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix} -E^{(1)} & V_{12} & 0 \\ V_{21} & -E^{(1)} & V_{23} \\ 0 & V_{32} & -E^{(1)} \end{vmatrix} = 0,\ \text{или}\ \begin{vmatrix} -E^{(1)} & b & 0 \\ b & -E^{(1)} & b \\ 0 & b & -E^{(1)} \end{vmatrix} = 0 =$$

$$= -E^{(1)}((E^{(1)})^2 - b^2) + b^2E^{(1)}) \ \to\ E^{(1)} = 0, \pm\sqrt{2}b,\ \text{где}\ b = \alpha a^2/\sqrt{2}.$$

Таким образом, под действием возмущения произошло расщепление трехкратно вырожденного уровня энергии:

$$E_{2,1}^{(1)} = -\alpha a^2,\ \ E_{2,2}^{(1)} = 0,\ \ E_{2,3}^{(1)} = \alpha a^2.$$

Коэффициенты разложения волновой функции находятся из решения системы уравнений

$$\begin{cases} -E^{(1)}C_1 + bC_2 = 0, \\ bC_1 - E^{(1)}C_2 + bC_3 = 0, \\ \left|C_1\right|^2 + \left|C_2\right|^2 + \left|C_3\right|^2 = 1. \end{cases}$$

Для энергии $E_{2,1}^{(1)} = -\alpha a^2$ $C_1 = C_3 = \dfrac{1}{2}$, $C_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. В результате соответствующая правильная волновая функция имеет вид

$$\varphi_{2,1}^{(0)} = \frac{1}{2}(\varphi_1^{(0)} - \sqrt{2}\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(\psi_0(x)\psi_2(y) - \sqrt{2}\psi_1(x)\psi_1(y) + \psi_2(x)\psi_0(y)).$$

Для $E_{2,2}^{(1)} = 0$

$$C_1 = -C_3 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ C_2 = 0 \ \rightarrow\ \varphi_{2,2}^{(0)} = \frac{1}{2}(\psi_0(x)\psi_2(y) - \psi_2(x)\psi_0(y)).$$

Для $E_{2,3}^{(1)} = \alpha a^2$

$$C_1 = C_3 = \frac{1}{2},\ \ C_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow\ \varphi_{2,3}^{(0)} = \frac{1}{2}(\psi_0(x)\psi_2(y) + \sqrt{2}\psi_1(x)\psi_1(y) + \psi_2(x)\psi_0(y)).$$

6. Для рассматриваемой частицы уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}\right) = E\psi.$$

Граничные условия: $r = 0$ $|\psi| < \infty$ – условие ограниченности волновой функции; $r = r_0$ $\psi = 0$.

При решении уравнения воспользуемся подстановкой $\psi(r) = \chi(r)/r$. Для функции $\chi(r)$ будем иметь уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\chi'' = E\chi, \text{ или } \chi'' + k^2\chi = 0, \text{ где } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Решение имеет вид

$$\chi = A\cdot\sin(kr + \alpha) \text{ и } \psi = \frac{A}{r}\sin(kr + \alpha).$$

Первому условию удовлетворяет $\alpha = 0$. Второе условие удовлетворяется, если $\sin(kr_0) = 0$. Отсюда $kr_0 = \pi\cdot n$, где $n = 1, 2, \ldots$ Частица имеет уровни энергии

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mr_0^2}n^2,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Нормированные собственные функции частицы:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}}\frac{\sin(\pi nr/r_0)}{r}.$$

Контрольные работы 2007 г.

Первая контрольная работа

1. Прежде необходимо нормировать волновую функцию:

$$C^2\left(\int_{-\infty}^{0} e^{2x/a}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-2x/b}\mathrm{d}x\right) = C^2\frac{1}{2}(a+b) = 1 \ \rightarrow\ C = \sqrt{2/(a+b)}.$$

Нормированная волновая функция равна

$$\psi(x) = \sqrt{2/(a+b)}\begin{cases} e^{x/a}, & x \le 0 \\ e^{-x/b}, & x > 0 \end{cases}.$$

По определению среднего

$$\langle x \rangle = \frac{2}{a+b}\left(\int_{-\infty}^{0} xe^{2x/a}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} xe^{-2x/b}\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{a+b}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\int_{0}^{\infty} e^{-\beta x}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2}{a+b}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{1}{\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\frac{1}{\beta}\right) = \frac{2}{a+b}\left(-\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{b-a}{2}.$$

2. Рассмотрим оператор $\hat{L} = x\hat{p}_x + \hat{p}_x x$. Комплексно сопряженный ему оператор $\hat{L}^* = x\hat{p}_x^* + \hat{p}_x^* x$. По определению среднего

$$\langle L\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\hat{L}\psi(x)\mathrm{d}x \text{ и } \langle L\rangle^*=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\hat{L}^*\psi^*(x)\mathrm{d}x.$$

Покажем, что $\langle L\rangle=\langle L\rangle^*$. С этой целью воспользуемся тем, что $\hat{x}=x$ и $\hat{p}_x=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$, и вычислим интеграл в выражении для $\langle L\rangle$ по частям:

$$\langle L\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\hat{L}\psi(x)\mathrm{d}x=$$

$$=-i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}x\right)\psi(x)\mathrm{d}x=-i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\left(x\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}+\frac{\partial x\psi(x)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=-i\hbar\left(2\psi^*(x)x\psi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\left(\frac{\partial x\psi^*(x)}{\partial x}+x\frac{\partial\psi^*(x)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\right)=$$

$$=i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\left(\frac{\partial x\psi^*(x)}{\partial x}+x\frac{\partial\psi^*(x)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x=i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}x+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi^*(x)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)(\hat{p}^*x+x\hat{p}^*)\psi^*(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\hat{L}^*\psi^*(x)\mathrm{d}x=\langle L\rangle^*.$$

Таким образом, показано, что среднее значение $\langle xp_x+p_xx\rangle$ равно своему комплексно сопряженному значению $\langle xp_x+p_xx\rangle^*$. Это означает, что оно вещественное, а оператор $\hat{L}=x\hat{p}_x+\hat{p}_xx$ – эрмитовский.

Можно было бы доказать, что оператор $\hat{L}=x\hat{p}_x+\hat{p}_xx$ эрмитовский, из чего следует, что среднее значение $\langle xp_x+p_xx\rangle$ в любом состоянии является вещественной величиной.

3. Возмущающее действие электрического поля на линейный осциллятор определяется оператором

$$\hat{V}=-qxE_0\cos\omega t.$$

Необходимые для решения задачи матричные элементы равны

$$V_{n0}=-qE_0\cos\omega t\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(x)x\psi_0(x)\mathrm{d}x=$$

$$=-qE_0\cos\omega t\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi)+\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi)\right)\psi_0(\xi)\mathrm{d}\xi=$$

$$=-qE_0\cos\omega t\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}\delta_{n+1,0}+\sqrt{\frac{n}{2}}\delta_{n-1,0}\right)=-qE_0\cos\omega t\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\delta_{n-1,0}.$$

Из полученного равенства следует, что

$$V_{10}=-qE_0\cos\omega t\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}},\ V_{n0}=0 \text{ при } n\neq 1.$$

Таким образом, возможен только переход с основного уровня энергии на первый возбужденный. Вероятность такого перехода равна

$$w(0\to 1)=\frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-t_0}^{t_0}V_{10}e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right|^2=\frac{e^2E_0^2}{2m\omega\hbar}\left|\int_{-t_0}^{t_0}\cos\omega t e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right|^2.$$

Интеграл по времени вычисляется несложным образом, если воспользоваться формулами Эйлера:

$$\int\limits_{-t_0}^{t_0}\cos\omega t e^{i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{-t_0}^{t_0}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})e^{i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{-t_0}^{t_0}(e^{2i\omega t}+1)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{e^{2i\omega t_0}-e^{-2i\omega t_0}}{4i\omega}+t_0=\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t_0+t_0=\frac{\pi}{2\omega}.$$

Здесь использовано обозначение $t_0=\dfrac{\pi}{2\omega}$.

Окончательный ответ:

$$w(0\to 1)=\frac{\pi^2 q^2 E_0^2}{8m\omega^3\hbar}.$$

4. Перенесем начало координат в точку $x=-a/2$: $y=x+a/2$. Тогда возмущение, действующее на частицу в бесконечно глубокой яме $0\le y\le a$, примет вид

$$\hat{V}=V_0\cos\frac{2\pi y}{a}.$$

Волновые функции частицы равны

$$\psi_n(y)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n y}{a}.$$

Матричные элементы:

$$V_{1n}=\frac{2}{a}V_0\int\limits_0^a\sin\frac{\pi y}{a}\cos\frac{2\pi y}{a}\sin\frac{\pi n y}{a}\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{2}{\pi}V_0\int\limits_0^\pi\sin z\cos 2z\sin nz\,\mathrm{d}z=\frac{1}{\pi}V_0\int\limits_0^\pi(\sin 3z-\sin z)\sin nz\,\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{1}{2\pi}V_0\int\limits_0^\pi(\cos(n-3)z-\cos(n+3)z-\cos(n-1)z+\cos(n+1)z)\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{1}{2}V_0(\delta_{n,3}-\delta_{n,1}).$$

Отличны от нуля только два матричных элемента: $V_{11}=-V_0/2$ и $V_{13}=V_0/2$. В таком случае энергия основного состояния частицы в яме равна

$$E_1=E_1^{(0)}+V_{11}+\frac{V_{13}^2}{E_1^{(0)}-E_3^{(0)}}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}-\frac{V_0}{2}-\frac{V_0^2 ma^2}{16\pi^2\hbar^2}.$$

Правильная волновая функция основного состояния будет иметь вид

$$\psi_1=\psi_1^{(0)}+\sum_{n\ne 1}\frac{V_{1n}}{E_1^{(0)}-E_n^{(0)}}\psi_n^{(0)}=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi y}{a}-\frac{V_0 ma^2}{8\pi^2\hbar^2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi y}{a},$$

или, если вернуться к независимой переменной x,

$$\psi_1=\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi x}{a}+\frac{V_0 ma^2}{8\pi^2\hbar^2}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{3\pi x}{a}.$$

5. Пусть энергия E и разность ее последовательных значений ΔE измеряются в единицах $\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2m}$. Тогда энергия основного состояния частицы в ящике будет равна

$$E_1=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

где a, b, c – длины сторон ящика, квантовые числа имеют значения 1, 1, 1. Если у ящика две какие-либо стороны имеют равную длину, то уже второй уровень энергии будет вырожденный, что противоречит условию задачи. Итак, стороны ящика имеют разную длину. Предположим, что между длинами сторон выполняется соотношение $a>b>c>0$ (это не нарушает общности исследования). Первое слагаемое в выражении для энергии первого уровня в силу сделанного предположения самое маленькое. Поэтому для второго уровня энергии можно написать

$$E_2 = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = E_1 + \Delta E,$$

откуда с учетом выражения для энергии первого уровня следует, что $\Delta E = 3/a^2$, следовательно, $a^2 = 3/\Delta E$. Квантовые числа для второго уровня энергии имеют значения 2, 1, 1.

Энергия третьего уровня может определяться следующими наборами квантовых чисел: 3, 1, 1; 2, 2, 1; 1, 2, 1. Рассмотрим соответствующие выражения для энергии:

$$E_3 = \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = E_2 + \Delta E, \quad E_3 = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{1}{c^2} = E_2 + \Delta E,$$

$$E_3 = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{1}{c^2} = E_1 + 2\Delta E.$$

Первое из них оказывается невозможным: получается другое значение для ΔE. Второе противоречит принятому предположению – неравенству сторон ящика. Из третьего следует, что $\Delta E = 3/2b^2$, соответственно $b^2 = 3/2\Delta E$. Квантовые числа для третьего уровня энергии имеют значения 1, 2, 1.

Четвертый уровень энергии можно получить, увеличивая на единицу первое квантовое число (комбинация 2, 2, 1) либо третье из квантовых чисел, уменьшая при этом второе (комбинация 1, 1, 2). Соответственно можно написать два выражения для энергии четвертого уровня:

$$E_4 = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{1}{c^2} = E_3 + \Delta E, \quad E_4 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{c^2} = E_1 + 3\Delta E.$$

Первое равенство удовлетворяется автоматически. Из второго следует, что $\Delta E = 1/c^2$. При этом выполняется неравенство $a > b > c > 0$. Таким образом, четвертый уровень энергии вырожденный.

При получении пятого уровня энергии возможны наборы квантовых чисел: 3, 2, 1; 1, 3, 1; 2, 1, 2. Последний набор дает выражение для пятого уровня энергии:

$$E_5 = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{c^2} = E_1 + 4\Delta E.$$

Из него следует, что $\Delta E = 1/c^2$, как из второго выражения для четвертого уровня энергии.

Для шестого и седьмого уровней энергии можно показать, что единственными комбинациями квантовых чисел будут 1, 2, 2 и 2, 2, 2 соответственно. Энергия этих уровней определяется выражениями

$$E_6 = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{4}{c^2}, \quad E_7 = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{4}{c^2}.$$

Новых соотношений для длин сторон ящика не появляется.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяют следующие длины сторон ящика:

$$a = \sqrt{3/\Delta E}, \quad b = \sqrt{3/2\Delta E}, \quad c = 1/\sqrt{\Delta E}.$$

Соответствующий объем ящика равен

$$V = \frac{3}{\Delta E\sqrt{2\Delta E}}.$$

Спектр состояний частицы (в пределах семи уровней энергии) выглядит следующим образом.

Энергия	Комбинация квантовых чисел
E_7	2, 2, 2
E_6	1, 2, 2
E_5	2, 1, 2
E_4	2, 2, 1; 1, 1, 2
E_3	1, 2, 1
E_2	2, 1, 1
E_1	1, 1, 1

Эти уровни равноотстоящие.

Вторая контрольная работа

1. Функция ненормированная. Выполняем нормировку:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \;\to\; C^*(1\;\;2)C\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 5|C|^2 = 1 \;\to\; C = 1/\sqrt{5}.$$

Нормированная волновая функция в S^2, S_z-представлении имеет вид

$$\psi_{S^2,S_z} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Действуя стандартным образом, получаем искомые средние величины:

$$\langle S_x\rangle = \langle\psi|\hat{S}_x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\;\;2)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5};$$

$$\langle S_y\rangle = \langle\psi|\hat{S}_y|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\;\;2)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0;$$

$$\langle S_z\rangle = \langle\psi|\hat{S}_z|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\;\;2)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -\frac{3}{10}.$$

Оператор $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$. Среднее значение $\langle S^2\rangle$ равно

$$\langle S^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\;\;2)\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{3}{4}.$$

2. Чтобы найти собственные значения гамильтониана, решается секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix}2-E & 1 & 0\\ 1 & 2-E & 0\\ 0 & 0 & -E\end{vmatrix} = 0 = -E((2-E)^2-1) \;\to\; E = 0, 1, 3.$$

Собственные функции находятся из решения системы уравнений:

$$\begin{cases}(2-E)C_1 + C_2 = 0,\\ C_1 + (2-E)C_2 = 0,\\ -EC_3 = 0,\\ |C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 = 1.\end{cases}$$

Подставляя в нее найденные значения E, получим наборы коэффициентов C_i и соответствующие собственные волновые функции гамильтониана:

для $E_1 = 0$ получим $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = 1$ и $\psi_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

для $E_2 = 1 -$ $C_1 = -C_2 = 1/\sqrt{2}$, $C_3 = 0$ и $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$;

для $E_3 = 3 -$ $C_1 = C_2 = 1/\sqrt{2}$, $C_3 = 0$ и $\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Составляем матрицу преобразования:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы представляют собой собственные функции гамильтониана. Вектор-столбец из элементов базиса находится умножением матрицы S на вектор-столбец из собственных волновых функций гамильтониана:

$$\begin{pmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \\ |3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \end{pmatrix}.$$

Разложение векторов состояния $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ по собственным волновым функциям гамильтониана будет иметь вид

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle\right),$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle\right),$$

$$|3\rangle = |\psi_1\rangle.$$

Отсюда

$$|\psi_1\rangle = |3\rangle,$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right),$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right).$$

В начальный момент времени система находится в состоянии $|1\rangle$, т. е. ее волновая функция при $t = 0$ равна

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle\right).$$

В произвольный момент времени волновая функция системы равна

$$|\psi(t)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_2\rangle e^{-i\omega t} + |\psi_3\rangle e^{-3i\omega t}\right) = \frac{1}{2}e^{-2i\omega t}\left(\left(|1\rangle - |2\rangle\right)e^{i\omega t} + \left(|1\rangle + |2\rangle\right)e^{-i\omega t}\right) =$$

$$= e^{-2i\omega t}\left(|1\rangle \cos\omega t - |2\rangle i \sin\omega t\right),$$

где $\omega = 1/\hbar$. В базисе $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ волновой вектор в произвольный момент времени имеет вид

$$\psi(t) = e^{-2i\omega t}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -i\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Функция ненормированная. Выполняем нормировку:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \;\to\; C^*(e^{-i\alpha}\;\;0\;\;e^{i\alpha})C\begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 0 \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix} = 2|C|^2 = 1 \;\to\; C = 1/\sqrt{2}.$$

Нормированная волновая функция в L^2, L_z-представлении имеет вид

$$\psi_{L^2,L_z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 0 \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix}.$$

Оператор проекции момента на ось x и его собственные значения и собственные функции в L^2, L_z-представлении имеют вид

$$\hat{L}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_x = 1 \quad \psi_{L^2,L_z} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad L_x = 0 \quad \psi_{L^2,L_z} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$L_x = -1 \quad \psi_{L^2,L_z} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу перехода в базис $\hat{L}_x$:

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Действуя этой матрицей на волновую функцию в L^2, L_z-представлении, получаем волновую функцию в L^2, L_x-представлении:

$$\psi_{L^2,L_x} = S\psi_{L^2,L_z} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 0 \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ i\sqrt{2}\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

В L^2, L_z –представлении оператор проекции момента на оси x указан выше, а оператор проекции момента на ось z имеет вид

$$\hat{L}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Действуя стандартным образом, получаем искомые средние величины:

$$\langle L_x\rangle = \langle\psi|\hat{L}_x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\alpha}\;\;0\;\;e^{i\alpha})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 0 \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\langle L_z\rangle = \langle\psi|\hat{L}_z|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\alpha}\;\;0\;\;e^{i\alpha})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 0 \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix} = 0.$$

Можно найти средние значения проекций момента на оси координат другим способом. Известна волновая функция в L^2, L_x- и L^2, L_z-представлениях. Следовательно, известны вероятности измеряемых значений проекций момента на оси x и z соответственно. Тогда по известной формуле

$$\langle L_x\rangle = 1\cdot\frac{1}{2}\cos^2\alpha + 0\cdot\sin^2\alpha + (-1)\cdot\frac{1}{2}\cos^2\alpha = 0.$$

Аналогично находится среднее значение $\langle L_z \rangle$.

4. Так как главное квантовое число $n = 2$, то орбитальное число l может принимать значения $l = 0, 1$. Следовательно, уровень энергии четырехкратно вырожден.

Оператор $\hat{L}_x$ можно выразить через повышающий и понижающий операторы

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-),$$

так что оператор возмущения принимает вид

$$\hat{V} = \frac{A}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-).$$

В результате действия этого оператора матричные элементы равны

$$V_{l_1 m_1, l_2 m_2} = \left\langle l_1, m_1 \middle| \hat{V} \middle| l_2, m_2 \right\rangle =$$

$$= \frac{A}{2}\left\langle l_1, m_1 \middle| \left(\sqrt{(l_2 - m_2)(l_2 + m_2 + 1)} \middle| l_2, m_2 + 1 \right\rangle + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(l_2 - m_2 + 1)(l_2 + m_2)} \middle| l_2, m_2 - 1 \right\rangle \Big).$$

С учетом ортогональности волновых функций матричные элементы принимают вид

$$V_{l_1 m_1, l_2 m_2} =$$

$$= \frac{A}{2}\left(\sqrt{(l_2 - m_2)(l_2 + m_2 + 1)}\,\delta_{m_1, m_2 + 1} + \sqrt{(l_2 - m_2 + 1)(l_2 + m_2)}\,\delta_{m_1, m_2 - 1}\right)\delta_{l_1, l_2}.$$

В матричном виде оператор возмущения имеет вид

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix},$$

где элементы и строк, и столбцов соответствуют парам квантовых чисел (l, m) последовательно $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$; $b = A/\sqrt{2}$.

Решается секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix} -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & b & 0 \\ 0 & b & -E & b \\ 0 & 0 & b & -E \end{vmatrix} = E^2(E^2 - 2b^2) = 0 \;\to\; E = 0, 0, \pm\sqrt{2}b.$$

Поправки к энергии атома водорода в первом порядке теории возмущений равны $E^{(1)}_{1,3} = 0$, $E^{(1)}_{2,4} = \pm A$. Четырехкратное вырождение частично снимается.

Чтобы найти для определенного значения энергии волновую функцию, необходимо решить систему уравнений с этим значением E:

$$\begin{cases} -EC_1 = 0, \\ -EC_2 + bC_3 = 0, \\ bC_2 - EC_3 + bC_4 = 0, \\ bC_3 - EC_4 = 0, \\ |C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2 = 1. \end{cases}$$

Для $E_{2,4}^{(1)} = \pm A$ получаем: $C_1 = 0$, $C_2 = C_4 = \dfrac{1}{2}$, $C_3 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, и «правильная» волновая функция имеет вид

$$\psi_{2,4}^{(0)} = \frac{1}{2} R_{2,1}(Y_{1,1} \pm \sqrt{2} Y_{1,0} + Y_{1,-1}).$$

Это решение отвечает $l = 1$, $m = \pm 1$. Для $E_{1,3}^{(1)} = 0$ из системы уравнений следует $C_3 = 0$, $C_2 = -C_4$, $C_1^2 + 2C_2^2 = 1$. Для $E_1^{(1)} = 0$ (в этом случае $l = m = 0$) должно быть $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ и «правильная» волновая функция равна $\psi_1^{(0)} = R_{2,0} Y_{00}$. Для $E_3^{(1)} = 0$ (в этом случае $l = 1$, $m = 0$) $C_1 = C_3 = 0$, $C_2 = -C_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, «правильная» волновая функция равна

$$\psi_3^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{2,1}(Y_{1,1} - Y_{1,-1}).$$

5. Возможные значения суммарного момента системы лежат в пределах от $l + s$ до $|l - s|$, т. е. $j = 3/2$, $1/2$. Проекция этого момента на ось z по условию задачи равна $j_z = 1/2$. Заданный по условию вектор состояния необходимо разложить по векторам состояния с определенными значениями полного момента и его проекции на ось z:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|1,0\rangle|1/2,1/2\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|1,1\rangle|1/2,-1/2\rangle = C_1|3/2,1/2\rangle + C_2|1/2,1/2\rangle.$$

Действуя повышающим оператором, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{2}|1,1\rangle|1/2,1/2\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|1,1\rangle|1/2,1/2\rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5}}(1 + \sqrt{2})|1,1\rangle|1/2,1/2\rangle = C_1\sqrt{3}|3/2,3/2\rangle.$$

Из этого равенства в силу очевидного тождества $|1,1\rangle|1/2,1/2\rangle \equiv |3/2,3/2\rangle$ находим коэффициент C_1:

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{15}}(1 + \sqrt{2}).$$

Таким образом, значение суммарного момента системы $j = 3/2$ можно обнаружить с вероятностью $w = C_1^2 = \dfrac{2}{15}(3 + 2\sqrt{2})$. Соответственно значение $j = 1/2$ обнаруживается с вероятностью $w = 1 - C_1^2 = \dfrac{1}{15}(9 - 4\sqrt{2})$.

Экзамен

1. Из условия нормировки находим постоянную C:

$$C^2\left(\int_{-a/2}^{0}\cos^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x + \int_0^{b/2}\cos^2\frac{\pi x}{b}\mathrm{d}x\right) = 1 \;\rightarrow\; C = \frac{2}{\sqrt{a+b}}.$$

Искомая вероятность равна

$$w = \frac{4}{a+b}\left(\int_{-a/2}^{0}\cos^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x + \int_0^{a/2}\cos^2\frac{\pi x}{b}\mathrm{d}x\right) = \frac{2a + \dfrac{b}{\pi}\sin\dfrac{\pi a}{b}}{a+b}.$$

2. По условию задачи волновые функции стационарных состояний частицы и соответствующие значения энергии равны

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a},\;\; E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2,\;\; n = 1, 2.$$

В зависимости от времени t волновая функция частицы имеет вид

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}.$$

Среднее значение импульса частицы равно:

$$\left\langle p\right\rangle = \int_0^a \psi^* \hat{p}\,\psi \mathrm{d}x = -\int_0^a \psi^* i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x =$$

$$= -i\hbar\frac{2}{3a}\int_0^a(\sin\frac{\pi x}{a}e^{i\omega_1 t} + \sqrt{2}\sin\frac{2\pi x}{a}e^{i\omega_2 t})\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}(\sin\frac{\pi x}{a}e^{-i\omega_1 t} + \sqrt{2}\sin\frac{2\pi x}{a}e^{-i\omega_2 t})\mathrm{d}x =$$

$$= -i\hbar\frac{2\pi}{3a^2}\int_0^a(\sin\frac{\pi x}{a}e^{i\omega_1 t} + \sqrt{2}\sin\frac{2\pi x}{a}e^{i4\omega_1 t})\times$$

$$\times(\cos\frac{\pi x}{a}e^{-i\omega_1 t} + 2\sqrt{2}\cos\frac{2\pi x}{a}e^{-i4\omega_1 t})\mathrm{d}x =$$

$$= -i\hbar\frac{2\pi}{3a^2}\int_0^a(\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a} + 4\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi x}{a} +$$

$$+ \sqrt{2}\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}e^{i3\omega_1 t} + 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{2\pi x}{a}e^{-i3\omega_1 t})\mathrm{d}x =$$

$$= -i\hbar\frac{\pi}{3a^2}\int_0^a(\sin\frac{2\pi x}{a} + 4\sin\frac{4\pi x}{a} + \sqrt{2}(\sin\frac{3\pi x}{a} + \sin\frac{\pi x}{a})e^{i3\omega_1 t} +$$

$$+ 2\sqrt{2}(\sin\frac{3\pi x}{a} - \sin\frac{\pi x}{a})e^{-i3\omega_1 t})\mathrm{d}x =$$

$$= -i\hbar\frac{\pi}{3a^2}\sqrt{2}\int_0^a((\sin\frac{3\pi x}{a} + \sin\frac{\pi x}{a})e^{i3\omega_1 t} + 2(\sin\frac{3\pi x}{a} - \sin\frac{\pi x}{a})e^{-i3\omega_1 t})\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{8\sqrt{2}i\hbar}{9a}(e^{i3\omega_1 t} - e^{-i3\omega_1 t}) = \frac{16\sqrt{2}\hbar}{9a}\sin 3\omega_1 t,$$

где $\omega_1 = E_1/\hbar,\ \ \omega_2 = E_2/\hbar = 4\omega_1$.

Амплитуда колебаний среднего значения импульса частицы равна

$$p_m = \frac{16\sqrt{2}\hbar}{9a},$$

частота колебаний $\omega = (E_3 - E_1)/\hbar = 3\omega_1 = \dfrac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}$, период колебаний

$$T = \frac{4ma^2}{3\pi\hbar}.$$

3. Волновая функция основного состояния линейного гармонического осциллятора имеет вид

$$\psi_0(x) = (2a/\pi)^{1/4}e^{-ax^2},\ \ a = m\omega/\hbar.$$

Волновая функция двумерного осциллятора в основном состоянии равна

$$\psi_0(x,y) = \psi_0(x)\psi_0(y) = \sqrt{2a/\pi}\,e^{-ar^2},\ \ r^2 = x^2 + y^2.$$

Поправка первого порядка к энергии основного состояния осциллятора вычисляется следующим образом:

$$E_0^{(1)} = V_{00} = \frac{2a}{\pi}\alpha\int_0^\infty e^{-2ar^2}\frac{1}{r}2\pi r\mathrm{d}r = \alpha\sqrt{2\pi a}.$$

Энергия основного состояния осциллятора с точностью до первого порядка теории возмущений равна

$$E_0 = \hbar\omega + \sqrt{2\pi}\,(m\omega/\hbar)^{3/2}.$$

4. Состояние атома водорода описывается вектором состояний $\left|1,0,0\right\rangle$. Под действием возмущения атом переходит в состояние, которое описывается вектором состояний $|2, l, m\rangle$. При $n = 2$ возможные значения орбитального квантового числа $l = 0, 1$. Волновая функция исходного (основного) состояния четная, возмущение описывается также четной функцией, поэтому возможен переход только в состояние с четной волновой функцией без изменения магнитного квантового числа: $|1, 0, 0\rangle \to |2, 0, 0\rangle$. Соответствующие волновые функции имеют вид

$$\psi_{100} = R_{10}Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\exp(-r/a),$$

$$\psi_{200} = R_{20}Y_{00} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi a^3}}(1 - r/2a)\exp(-r/2a).$$

Необходимый матричный элемент равен

$$V_{200,100} = \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \psi_{200}^* \hat{V} \psi_{100} r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi =$$

$$= -\frac{\beta}{2\sqrt{2}\pi a^3}\int_0^\infty (1 - r/2a)\exp(-3r/2a) r \mathrm{d}r 4\pi =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\beta}{a^3}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} - \frac{1}{2a}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\right)\int_0^\infty \exp(-\alpha r)\mathrm{d}r = -\frac{\sqrt{2}\beta}{a^3}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} - \frac{1}{2a}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\right)\frac{1}{\alpha} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\beta}{a^3}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{2a}\frac{2}{\alpha^3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}\beta}{27a},$$

где использовано обозначение $\alpha = 3/(2a)$.

Искомая вероятность перехода равна

$$W_{100 \to 200} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\tau V_{200,100}\exp(i\omega t)\mathrm{d}t\right|^2 = \frac{32\beta^2}{729a^2\hbar^2}\left|\frac{e^{i\omega\tau} - 1}{i\omega}\right|^2 =$$

$$= \frac{128\beta^2}{729a^2\hbar^2\omega^2}\sin^2\frac{\omega\tau}{2}.$$

Частота ω определяется разностью уровней энергии и в данном случае равна $\omega = \dfrac{3e^2}{32\pi\varepsilon_0 a\hbar}$.

5. Суммарный спин системы может принимать два значения: $s = 1$ и 0. В синглетном состоянии спин системы $s = 0$, его проекция на ось z равна $s_z = 0$. В триплетном состоянии $s = 1$, $s_z = 0, \pm 1$. Волновые вектора синглетного и триплетного состояний с $s_z = 0$ имеют соответственно вид

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right), \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right),$$

где введены обозначения

$$|1\rangle = |1/2, 1/2\rangle|1/2, -1/2\rangle, \; |2\rangle = |1/2, -1/2\rangle|1/2, 1/2\rangle.$$

В начальном состоянии

$$|\psi(0)\rangle = |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right).$$

В произвольный момент времени

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle e^{i(\gamma_2 - \gamma_1)Bt/2} - |2\rangle e^{-i(\gamma_2 - \gamma_1)Bt/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\gamma_2 - \gamma_1)Bt/2}\left(|1\rangle - |2\rangle e^{-i(\gamma_2 - \gamma_1)Bt}\right).$$

Моменты времени, когда система оказывается в триплетном состоянии, определяются из условия

$$e^{-i(\gamma_2-\gamma_1)Bt} = -1.$$

Из него следует

$$(\gamma_2-\gamma_1)Bt = (2n+1)\pi \;\to\; t = \frac{(2n+1)\pi}{(\gamma_2-\gamma_1)B}, \;\; n = 0,1,...$$

6. Энергетические уровни системы во втором порядке теории возмущений находятся по формуле

$$E_n = E_n^{(0)} + V_{nn} + \sum_{k\neq n}\frac{V_{nk}V_{kn}}{E_n^{(0)}-E_k^{(0)}},$$

где $E_n^{(0)}$– собственные значения гамильтониана невозмущенной системы, V_{nk} – матричные элементы.

Собственные значения гамильтониана находятся из решения секулярного уравнения:

$$\begin{vmatrix} E-\lambda & \sqrt{3}E & 0 \\ \sqrt{3}E & 3E-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -E-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\to\; \lambda = -E,\; 0,\; 4E.$$

Собственные функции являются решениями соответствующей системы уравнений:

$$\begin{cases} (E-\lambda)C_1 + \sqrt{3}EC_2 = 0, \\ \sqrt{3}EC_1 + (3E-\lambda)C_2 = 0, \\ -(E+\lambda)C_3 = 0, \\ \left|C_1\right|^2 + \left|C_2\right|^2 + \left|C_3\right|^2 = 1. \end{cases}$$

Подставляя в нее первое собственное значение $\lambda_1 = -E$, получим $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = 1$. Собственная функция гамильтониана для этого значения λ имеет вид

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично для $\lambda_2 = 0$ собственная функция

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_3 = 4E$ собственная функция $\psi_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$

Вычислим матричные элементы

$$V_{11} = \left\langle \psi_1 \middle| \hat{V} \middle| \psi_1 \right\rangle = (0\;\;0\;\;1)\begin{pmatrix} 0 & -V & 0 \\ -V & 0 & V \\ 0 & V & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$V_{12} = V_{21} = \left\langle \psi_1 \middle| \hat{V} \middle| \psi_2 \right\rangle = \frac{1}{2}V, \quad V_{13} = V_{31} = \left\langle \psi_1 \middle| \hat{V} \middle| \psi_3 \right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}V,$$

$$V_{23} = V_{32} = \left\langle \psi_2 \middle| \hat{V} \middle| \psi_3 \right\rangle = \frac{1}{2}V, \quad V_{22} = \left\langle \psi_2 \middle| \hat{V} \middle| \psi_2 \right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}V,$$

$$V_{33} = \left\langle \psi_3 \middle| \hat{V} \middle| \psi_3 \right\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}V.$$

Во втором порядке теории возмущений уровни энергии системы равны

$$E_1 = -E - \frac{2V^2}{5E}, \quad E_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}V + \frac{3V^2}{16E}, \quad E_3 = 4E - \frac{\sqrt{3}}{2}V + \frac{17V^2}{80E}.$$

Переэкзаменовка

1. Прежде всего необходимо проверить, является волновая функция нормированной или нет:

$$\int_0^\infty |\psi|^2 \mathrm{d}x = \int_0^\infty x^2 e^{-2x/a} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\alpha^3} = \frac{a^3}{4} \neq 1 \ \ (\alpha = 2/a).$$

Нормированной будет волновая функция

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{2}{a^{3/2}} x e^{-x/a}, & 0 \le x < \infty. \end{cases}$$

Тогда искомое среднее значение координаты частицы равно

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty |\psi|^2 x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4}{a^3}\int_0^\infty x^3 e^{-2x/a}\mathrm{d}x = -\frac{4}{a^3}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\alpha^3}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = -\frac{4}{a^3}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\alpha^3}\frac{1}{\alpha} = \frac{4}{a^3}\frac{6}{\alpha^4} = \frac{3a}{2}.$$

2. Гамильтониан двумерного гармонического осциллятора имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2.$$

Задача сводится к нахождению значений ω_x и ω_y.

Энергия первых двух уровней рассматриваемого осциллятора равна

$$E_0 = \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y) \ \text{ и } \ E_1 = \frac{\hbar}{2}(3\omega_x + \omega_y).$$

Для частицы в потенциальной яме энергия второго и третьего уровней равна соответственно

$$E_2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \ \text{ и } \ E_3 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$

По условию задачи имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y) = \dfrac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \\ \dfrac{\hbar}{2}(3\omega_x + \omega_y) = \dfrac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \end{cases}$$

откуда находим:

$$\omega_x = \frac{5\pi^2\hbar}{2ma^2}, \quad \omega_y = \frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}.$$

В результате гамильтониан осциллятора имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{2}m\left(\frac{5\pi^2\hbar}{2ma^2}\right)^2 x^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}\right)^2 y^2.$$

Для второго уровня энергии осциллятора возможно выражение $E_1 = \frac{\hbar}{2}(\omega_x + 3\omega_y)$. Значения ω_x и ω_y поменяются местами.

3. Волновая функция первого возбужденного состояния невозмущенного осциллятора имеет вид

$$\psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right).$$

Поправка первого порядка к энергии первого возбужденного состояния осциллятора при действии возмущения равна

$$\Delta E_1^{(1)} = V_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{V} \psi_1 \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2} \beta \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right)\delta(x-a)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2} \beta a^2 \exp\left(-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right).$$

Условия максимума функции $f(a)$ есть

$$\mathrm{d}f/\mathrm{d}a = 0,\ \mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}a^2 < 0.$$

Найдем максимум функции:

$$f = a^2 \exp\left(-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right).$$

Приравнивая нулю первую производную

$$\mathrm{d}f/\mathrm{d}a = 2a \exp\left(-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right)\left(1 - \frac{m\omega a^2}{\hbar}\right) = 0,$$

получим значения

$$a = 0, \pm\infty, \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Вторая производная

$$\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}a^2 = 2\exp\left(-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right)\left(1 - 5\frac{m\omega a^2}{\hbar} + 2\left(\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right)^2\right)$$

отрицательна только при

$$a = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Эти значения дают искомый максимум поправки к энергии

$$\Delta E_1^{(1)} = \frac{2\beta}{e}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}.$$

4. Волновая функция атома водорода в рассматриваемом состоянии равна

$$\psi_{3,2,m} = R_{3,2} Y_{2,m}.$$

Вычисляем среднее значение энергии кулоновского взаимодействия электрона с ядром атома:

$$\langle U \rangle = -\int_0^{\infty} R_{3,2} \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} R_{3,2} r^2 \mathrm{d}r \int_{(4\pi)} \left| Y_{2,m} \right|^2 d\Omega = -\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty} R_{3,2}^2 r \mathrm{d}r =$$

$$= -\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{16}{30 \cdot 81^2 a^3} \int_0^{\infty} e^{-2r/(3a)} (r/a)^4 r \mathrm{d}r = -\frac{4q_e^2}{30 \cdot 81^2 \pi\varepsilon_0 a} \int_0^{\infty} e^{-2r/(3a)} (r/a)^5 \mathrm{d}(r/a) =$$

$$= \frac{4q_e^2}{30 \cdot 81^2 \pi\varepsilon_0 a} \frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}\alpha^5} \int_0^{\infty} e^{-\alpha r/a} \mathrm{d}(r/a) = \frac{4q_e^2}{30 \cdot 81^2 \pi\varepsilon_0 a} \frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}\alpha^5} \frac{1}{\alpha} =$$

$$= -\frac{4q_e^2}{30 \cdot 81^2 \pi\varepsilon_0 a} \frac{5!}{\alpha^6} = -\frac{q_e^2}{36\pi\varepsilon_0 a}.$$

Здесь интеграл вычисляется с применением дифференцирования по параметру $\alpha = 2/3$; собственная функция

$$R_{3,2} = \frac{4}{81\sqrt{30}a^{3/2}}\exp(-r/(3a))(r/a)^2;$$

боровский радиус равен $a = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e q_e^2}$. Окончательно

$$\langle U \rangle = -m_e\left(\frac{q_e^2}{12\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2.$$

5. Подсистема из двух слабо взаимодействующих частиц, со спином 1/2 каждая, может обладать суммарным спином $s = 1$ или 0, находясь соответственно в триплетном или синглетном состоянии. По условию подсистема имеет спин $s = 1$ и его проекцию на ось z, равную $s_z = 0$. Это состояние дают две комбинации векторов:

$$|1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle \text{ и } |1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle.$$

Выражение для заданного триплета через эти векторы можно получить, действуя понижающим оператором на очевидное равенство:

$$|1,1\rangle = |1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle.$$

Имеем:

$$J_-|1,1\rangle = \sqrt{2}|1,0\rangle =$$

$$= J_-|1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle = |1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle + |1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle,$$

откуда

$$|T_0\rangle = |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle + |1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle).$$

Полная система (из трех частиц) находится в состоянии $|3/2,1/2\rangle$. Выражение для этого вектора можно получить, действуя понижающим оператором на также очевидное равенство:

$$|3/2,3/2\rangle = |1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle.$$

Имеем:

$$J_-|3/2,3/2\rangle = \sqrt{3}|3/2,1/2\rangle =$$

$$= J_-|1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle = |1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle +$$

$$+ |1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle + |1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle,$$

откуда

$$|3/2,1/2\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(|1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle + |1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle +$$

$$+ |1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle).$$

Из данного выражения для состояния системы видно, что подсистеме, состоящей из двух первых частиц и находящейся в триплетном состоянии, отвечают первые два слагаемых. Следовательно, искомая вероятность подсистемы находится в состоянии $|T_0\rangle$ и равна $W = 2/3$.

6. Чтобы найти собственные значения гамильтониана, решается секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-E & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2-E & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2-E \end{vmatrix} = 0 = (2-E)((1-E)(2-E)-2) = E(2-E)(E-3) \quad \to$$

$$\to \quad E = 0, 2, 3.$$

Гамильтониан в энергетическом представлении имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные функции находятся из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} (1-E)C_1 + \sqrt{2}C_3 = 0, \\ (2-E)C_2 = 0, \\ \sqrt{2}C_1 + (2-E)C_3 = 0, \\ |C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 = 1. \end{cases}$$

Подставляя в нее найденные значения E, получим наборы коэффициентов C_i и соответствующие собственные волновые функции гамильтониана:

для $E_1 = 0$ получим $C_1 = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}, C_2 = 0, C_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\psi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

для $E_2 = 2 -$ $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 0$ и $\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

для $E_3 = 3 -$ $C_1 = 1/\sqrt{3}, C_2 = 0, C_3 = \sqrt{2/3}$ и $\psi_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$

Вектор состояния $|2\rangle$ является собственным. Следовательно, при измерении можно обнаружить только значение энергии $E_2 = 2$. Соответствующая вероятность $W = 1$. Средняя энергия системы равна $\langle E \rangle = 2$.

Вторая переэкзаменовка

1. Нормируем волновую функцию:

$$\int_0^\pi d\varphi \int_0^{R_0} |\psi|^2 r dr = |C|^2 \pi R_0^2 / 2 = 1 \quad \to \quad C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{R_0}.$$

Находим средние значения:

$$\bar{r} = \int_0^\pi \int_0^{R_0} \psi^* r \psi r dr d\varphi = \frac{2}{3} R_0; \quad \bar{\varphi} = C^2 \int_0^\pi \varphi d\varphi R_0^2 / 2 = \frac{\pi}{2}.$$

(Решение см. также в задаче 1 из первой контрольной работы 2005 г.)

2. Собственные функции и собственные значения оператора $i\dfrac{d}{dx}$ находятся из решения уравнения

$$i\frac{d\psi}{dx} = b\psi.$$

Ему удовлетворяет функция $\psi = C\exp(-ibx)$. Чтобы она была собственной функцией оператора, она должна быть однозначной. Из условия ее однозначности следует $\exp(-iab) = 1$, откуда $b = 2\pi/a \cdot n$, где n – любое целое число $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Постоянная интегрирования C находится из условия нормировки: $C = 1/\sqrt{a}$. Таким образом, собственные функции и собственные значения оператора равны

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(-ib_n x),\ b_n = 2\pi / a \cdot n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

3. Задачу проще решать, если перейти к безразмерной независимой переменной $\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$. Волновая функция преобразуется следующим образом:

$$\psi(\xi) = C(\psi_0(\xi) + \xi\psi_2(\xi)) = C(\psi_0(\xi) + \psi_1(\xi) + \sqrt{\frac{3}{2}}\psi_3(\xi)).$$

Нормирование волновой функции дает возможность вычислить постоянную C:

$$C^2(1 + 1 + 3/2) = 1 \ \rightarrow \ C = \sqrt{2/7}.$$

В результате волновая функция принимает вид

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{2}{7}}\psi_0(\xi) + \sqrt{\frac{2}{7}}\psi_1(\xi) + \sqrt{\frac{3}{7}}\psi_3(\xi),$$

что позволяет определить значения энергии и вероятности их обнаружения при измерении:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad w_0 = \frac{2}{7};\ E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad w_1 = \frac{2}{7};\ E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega \quad w_3 = \frac{3}{7}.$$

Среднее значение энергии равно

$$\overline{E} = \sum E_i w_i = \frac{29}{14}\hbar\omega.$$

(Решение см. также в задаче 3 из первой контрольной работы 2005 г.)

4. Подсистема из двух слабо взаимодействующих частиц со спином $S_1 = 1/2$ и $S_2 = 1$ может обладать суммарным спином $S_{1,2} = 3/2$ или 1/2. Включение в систему спина $S_3 = 3/2$ дает значения суммарного спина $S \equiv S_{1,2,3} = 3, 2, 1, 0$ для $S_{1,2} = 3/2$ и $S \equiv S_{1,2,3} = 2, 1$ для $S_{1,2} = 1/2$. Таким

образом, суммарный спин рассматриваемой системы трех спинов может принимать значения $S = 3, 2, 1, 0$. Его проекцию на ось z, равную $S_z = 2$, имеют три состояния.

Третья переэкзаменовка

1. Нормируем волновую функцию:

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{R_0} \left|\psi\right|^2 r\mathrm{d}r = \left|C\right|^2 \pi R_0^2/2 = 1 \rightarrow C = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{R_0}.$$

Находим средние значения:

$$\overline{r} = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{R_0} \psi^* r\psi\, r\mathrm{d}r = \frac{2}{3}R_0;\ \overline{\varphi} = C^2\int_0^\pi \varphi \mathrm{d}\varphi R_0^2/2 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Собственные функции и собственные значения оператора $i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}$ находятся из решения уравнения

$$i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi} = a\psi.$$

Ему удовлетворяет функция $\psi = C\exp(-ia\varphi)$. Чтобы она была собственной функцией оператора, она должна быть однозначной. Из условия ее однозначности следует $\exp(-ia2\pi) = 1$, откуда $a = n$, где n – любое целое число $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Постоянная интегрирования C находится из условия нормировки: $C = 1/\sqrt{2\pi}$. Таким образом, собственные функции и собственные значения оператора равны

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-in\varphi), n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

3. Перейдем к безразмерной независимой переменной $\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$. Волновая функция в этом случае примет вид

$$\psi(\xi) = C(\psi_1(\xi) + \xi\psi_3(\xi)) = C(\psi_1(\xi) + \sqrt{\frac{3}{2}}\psi_2(\xi) + \sqrt{2}\psi_4(\xi)).$$

Нормирование волновой функции дает возможность вычислить постоянную C:

$$C^2(1 + 3/2 + 2) = 1 \;\to\; C = \sqrt{2/9}.$$

Нормированная волновая функция равна

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{2}{9}}\psi_1(\xi) + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_2(\xi) + \frac{2}{3}\psi_4(\xi).$$

Определяем значения энергии и вероятности их обнаружения при измерении:

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad w_1 = \frac{2}{9};\;\; E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad w_2 = \frac{1}{3};\;\; E_4 = \frac{9}{2}\hbar\omega \quad w_4 = \frac{4}{9}.$$

Среднее значение энергии равно $\overline{E} = \sum E_i w_i = \frac{19}{6}\hbar\omega.$

4. Подсистема из двух слабо взаимодействующих частиц, со спином 1/2 каждая, может обладать суммарным спином $S_{1,\,2} = 1$ или 0. Включение в систему спина $S_3 = 1$ дает значения суммарного спина $S \equiv S_{1,\,2,\,3} = 2, 1, 0$ для $S_{1,\,2} = 1$ и $S \equiv S_{1,\,2,\,3} = 1$ для $S_{1,\,2} = 0$. Таким образом, суммарный спин рассматриваемой системы трех спинов может принимать значения $S = 2, 1, 0$. Его проекцию на ось z, равную $S_z = 1$, имеют три состояния:

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|1,0\right\rangle,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)\left|1,1\right\rangle,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)\left|1,1\right\rangle.$$

Получить их можно, если исходить, например, из очевидного тождества для первых двух спинов:

$$\left|1,1\right\rangle \equiv \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Применение понижающего оператора дает

$$J_-\left|1,1\right\rangle = \sqrt{2}\left|1,0\right\rangle =$$

$$= J_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

откуда

$$\left|1,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right).$$

Волновой вектор $\left|0,0\right\rangle$ может иметь вид

$$\left|0,0\right\rangle = C_1\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + C_2\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Он должен быть ортогонален волновым векторам других состояний системы первых двух спинов, в частности, вектору $\left|1,0\right\rangle$, т. е. имеет место равенство $\left\langle 1,0|0,0\right\rangle = 0$. Это позволяет найти вектор

$$\left|0,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right).$$

Только в состояниях $\left|1,1\right\rangle$, $\left|1,0\right\rangle$, $\left|0,0\right\rangle$ система первых двух спинов совместно с третьим спином дают объединенную систему, имеющую проекцию суммарного спина $S_z = 1$.

Контрольные работы 2005 г.

Первая контрольная работа

1. Нормируем волновую функцию:

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{R_0} |\psi|^2 r\mathrm{d}r = |C|^2 \pi R_0^2/2 = 1 \;\to\; C = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{R_0}.$$

Находим средние значения:

$$\overline{r} = \int_0^{\pi}\int_0^{R_0} \psi^* r \psi\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}R_0; \quad \overline{\varphi} = C^2 \int_0^{\pi} \varphi \mathrm{d}\varphi R_0^2/2 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Чтобы найти собственные функции и собственные значения оператора $\hat{A}$, необходимо решить линейное уравнение:

$$\hat{A}\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - a\sqrt{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = b\psi.$$

Для его решения применяется метод разделения переменных: искомая функция ψ ищется в виде произведения функции одной независимой переменной на функцию другой переменной:

$$\psi = \psi_1(r)\,\psi_2(\varphi).$$

После подстановки этого выражения для функции ψ в исходное уравнение и деления правой и левой его частей на ψ получаем:

$$i\frac{1}{\psi_2}\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}\varphi} - a\frac{\sqrt{r}}{\psi_1}\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}r} = b.$$

Сумма функций различных независимых переменных может быть постоянной только в том случае, если эти функции сами имеют постоянное значение. Полагаем:

$$\frac{1}{\psi_2}\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}\varphi} = -im \;\to\; \psi_2 = \exp(-im\varphi).$$

Из условия однозначности волновой функции

$$\psi_2(2\pi) = \psi_2(0)$$

следует, что $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Для $\psi_1(r)$ имеем уравнение

$$-a\frac{\sqrt{r}}{\psi_1}\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}r} = \gamma \;\to\; \psi_1 = C\exp(-2\gamma\sqrt{r}/a),\; \gamma > 0.$$

Итак, искомое решение имеет вид

$$\psi = C\exp(-2\gamma\sqrt{r}/a)\exp(-im\varphi).$$

Нормировка позволяет найти постоянную C:

$$|C|^2\int_0^{\infty}\exp(-4\gamma\sqrt{r}/a)r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 4\pi|C|^2\int_0^{\infty}\exp(-4\gamma t/a)t^3\mathrm{d}t =$$

$$= -4\pi|C|^2\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\alpha^3}\int_0^{\infty}\exp(-\alpha t)\mathrm{d}t = 24\pi|C|^2\left(\frac{a}{4\gamma}\right)^4 = 1 \;\to\; C = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}\left(\frac{\gamma}{a}\right)^2.$$

Здесь введена замена переменных $r = t^2$ и использовано обозначение $\alpha = 4\gamma/a$.

Окончательный вид искомого решения следующий:

$$\psi = 4\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\left(\frac{\gamma}{a}\right)^2\exp(-2\gamma\sqrt{r}/a)\exp(-im\varphi),\; \gamma > 0,\; m = 0, \pm1, \pm2, \ldots;\; b_m = \gamma + m.$$

3. Задачу проще решать, если перейти к безразмерной независимой переменной $\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$. Волновая функция преобразуется следующим образом:

$$\psi(\xi) = C(\psi_0(\xi) + \xi\psi_2(\xi)) = C(\psi_0(\xi) + \psi_1(\xi) + \sqrt{\frac{3}{2}}\psi_3(\xi)).$$

Нормирование волновой функции дает возможность вычислить постоянную C:

$$C^2(1 + 1 + 3/2) = 1 \ \rightarrow \ C = \sqrt{2/7}.$$

В результате волновая функция принимает вид

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{2}{7}}\psi_0(\xi) + \sqrt{\frac{2}{7}}\psi_1(\xi) + \sqrt{\frac{3}{7}}\psi_3(\xi),$$

что позволяет определить значения энергии и вероятности их обнаружения при измерении:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad w_0 = \frac{2}{7}; \ E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad w_1 = \frac{2}{7}; \ E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega \quad w_3 = \frac{3}{7}.$$

Среднее значение энергии равно

$$\overline{E} = \sum E_i w_i = \frac{29}{14}\hbar\omega.$$

4. Выполняется нормировка волновой функции:

$$C^2\int_{-a}^{a}(x^2 - a^2)^2 \mathrm{d}x = 2C^2\int_0^a(x^4 - 2x^2a^2 + a^4)\mathrm{d}x = 2C^2\frac{8}{15}a^5 = 1 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ C = \frac{\sqrt{15}}{4}\frac{1}{a^{5/2}} \ \rightarrow \ \psi(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}\frac{1}{a^{5/2}}(x^2 - a^2).$$

Яма имеет ширину $2a$. Волновая функция частицы в основном состоянии равна

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{\pi x}{2a}.$$

Соответствующий коэффициент разложения волновой функции по собственным функциям равен

$$C_0 = \int\psi_0^*\psi\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{15}}{4}\frac{1}{a^2\sqrt{a}}\int_{-a}^{a}(x^2 - a^2)\cos\frac{\pi x}{2a}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{2}\int_0^1(y^2 - 1)\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y = -\frac{2\sqrt{15}}{\pi}\int_0^1 y\sin\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y = -\frac{4\sqrt{15}}{\pi^2}\int_0^1\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y =$$

$$= -\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \quad \text{(применяется интегрирование по частям).}$$

Вероятность обнаружения частицы в основном состоянии равна

$$w_0 = C_0^2 = \frac{960}{\pi^6}.$$

5. Энергия данного осциллятора в основном состоянии равна $E_0^{(0)} = \hbar\omega$ (нулевое приближение). Необходимо вычислить матричные элементы:

$$V_{nk,00} = \iint\psi_{nk}^*(x,y)\hat{V}\psi_{00}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)\psi_0(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k^*(y)(\alpha x + \beta y)\psi_0(y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)\psi_0(x)(\alpha x\delta_{k,0} + \beta a\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k^*(\xi)\xi\psi_0(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(\eta)(\alpha a\eta\psi_0(\eta)\delta_{k,0} + \beta a\psi_0(\eta)\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k^*(\xi)\psi_1(\xi)\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\eta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(\eta)(\alpha a \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(\eta)\delta_{k,0} + \beta a \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{k,1}\psi_0(\eta))\mathrm{d}\eta =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}(\alpha\delta_{n,1}\delta_{k,0} + \beta\delta_{n,0}\delta_{k,1}).$$

При их вычислении используются переход к безразмерным координатам η и ξ, рекуррентное соотношение и ортогональность собственных функций. Отличны от нуля только два элемента:

$$V_{10,00} = \frac{a}{\sqrt{2}}\alpha, \quad V_{01,00} = \frac{a}{\sqrt{2}}\beta, \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Смещение энергии основного состояния во втором порядке теории возмущений равно

$$\Delta E_0^{(2)} = \frac{\alpha^2 a^2}{2\hbar\omega(1-2)} + \frac{\beta^2 a^2}{2\hbar\omega(1-2)} = -\frac{(\alpha^2+\beta^2)a^2}{2\hbar\omega} = -\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{2m\omega^2}.$$

Вторая контрольная работа

1. Состояние системы описывается вектором

$$\left|\psi\right\rangle = C(\alpha\left|3,2\right\rangle + \beta\left|2,2\right\rangle).$$

Из условия нормировки находится постоянная C:

$$\left\langle\psi\middle|\psi\right\rangle = C^*C\left(\alpha^*\alpha\left\langle 3,2\middle|3,2\right\rangle + \beta^*\beta\left\langle 2,2\middle|2,2\right\rangle\right) = \left|C\right|^2\left(\left|\alpha\right|^2 + \left|\beta\right|^2\right) = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left|C\right| = \frac{1}{\sqrt{\left|\alpha\right|^2 + \left|\beta\right|^2}}.$$

Таким образом,

$$\left|\psi\right\rangle = \left(\alpha\left|3,2\right\rangle + \beta\left|2,2\right\rangle\right)/\sqrt{\left|\alpha\right|^2 + \left|\beta\right|^2}.$$

По определению среднего

$$\left\langle\hat{L}^2\right\rangle = \sum l(l+1)w_l = 3\cdot 4\cdot\frac{\left|\alpha\right|^2}{\left|\alpha\right|^2+\left|\beta\right|^2} + 2\cdot 3\cdot\frac{\left|\beta\right|^2}{\left|\alpha\right|^2+\left|\beta\right|^2} = \frac{6\left(2\left|\alpha\right|^2+\left|\beta\right|^2\right)}{\left|\alpha\right|^2+\left|\beta\right|^2},$$

$$\left\langle\hat{L}_z\right\rangle = 2.$$

2. Гамильтониан системы представим как сумму гамильтониана невозмущенной системы и возмущения: $\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{V}$, где

$$\hat{H}^{(0)} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Невозмущенная система имеет два различных значения энергии $E^{(0)} = b$ и $2b$, причем второе значение отвечает двукратно вырожденному уровню. Решаем секулярное уравнение и находим поправки первого порядка теории возмущений к значению энергии вырожденного уровня:

$$\begin{vmatrix} -E^{(1)} & a \\ a & -E^{(1)} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow E^{(1)} = \pm a.$$

Таким образом, под действием возмущения произошло расщепление вырожденного уровня энергии и имеется три различных значения энергии:

$$E_1 = E_1^{(0)} = b, \quad E_2 = E_2^{(0)} + E_2^{(1)} = 2b - a, \quad E_3 = E_3^{(0)} + E_3^{(1)} = 2b + a.$$

Состояние с энергией $E_1 = b$ описывается волновой функцией

$$\psi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти правильные волновые функции двух других состояний, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (2b - E^{(1)})C_1 + aC_2 = 0, \\ |C_1|^2 + |C_2|^2 = 1. \end{cases}$$

Подставляя в нее последовательно значения энергии второго и третьего уровней энергии, получим коэффициенты C_1 и C_2 и, тем самым, соответствующие правильные волновые функции:

Для $E_2 = 2b - a$ получаем $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\psi_2^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

и для $E_3 = 2b + a$ – $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\psi_3^{(0)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Из нормировки волновой функции получаем коэффициент C:

$$\langle\psi|\psi\rangle = |C|^2(2 \ \ -i)\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} = 5|C|^2 = 1 \ \to \ |C| = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

так что в $\hat{S}^2, \hat{S}_z$ -представлении волновая функция спина равна

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

В $\hat{S}^2, \hat{S}_z$ -представлении оператор $\hat{S}_y$ имеет вид

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Его собственные значения и соответствующие собственные функции равны

$$s_y = \pm 1/2, \ \psi_{s_y = 1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \ \text{и} \ \psi_{s_y = -1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Определим коэффициенты разложения заданной волновой функции по собственным функциям оператора $\hat{S}_y$:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ \ -i)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ \ i)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Волновая функция системы в $\hat{S}^2, \hat{S}_y$ -представлении имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Суммарный спин системы может принимать два значения: $s = 2$ и 1. Проекция суммарного спина на ось z равна $s_z = 1$. С такими значениями полного момента и с его проекцией $s_z = 1$ возможны два состояния системы: $|2, 1\rangle$ и $|1, 1\rangle$. Таким образом, разложение вектора состояния системы по векторам, соответствующим определенным значениям полного момента и его проекции, должно иметь вид

$$\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|3/2,3/2\right\rangle = C_1\left|2,1\right\rangle + C_2\left|1,1\right\rangle.$$

Применение повышающего оператора J_+ к обеим частям данного равенства позволяет получить коэффициент C_1. Применение J_+ к левой части дает

$$J_+\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|3/2,3/2\right\rangle = \left|1/2,1/2\right\rangle\left|3/2,3/2\right\rangle \equiv \left|2,2\right\rangle.$$

Применение J_+ к правой части дает

$$C_1J_+\left|2,1\right\rangle + C_2J_+\left|1,1\right\rangle = 2C_1\left|2,2\right\rangle.$$

Из сравнения результатов получаем $C_1 = 1/2$. Условие нормировки позволяет найти коэффициент $C_2 = \sqrt{3}/2$. Таким образом, разложение вектора состояния системы по векторам, соответствующим определенным значениям ее полного момента и его проекции, равно

$$\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|3/2,3/2\right\rangle = \frac{1}{2}\left|2,1\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|1,1\right\rangle.$$

Среднее значение квадрата полного момента системы равно

$$\left\langle \hat{S}^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 3 + \frac{3}{4}\cdot 1\cdot 2 = 3.$$

(Решение см. также в задаче 5 на экзамене, 2009 г.)

5. Искомая вероятность определяется выражением

$$W(1,0,0\to 2,0,0) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\infty V_{200,100}e^{i\omega_{21}t}\mathrm{d}t\right|^2,$$

где матричный элемент

$$V_{200.100} = \int_{4\pi}\int_0^\infty \psi^*_{200}\hat{V}\psi_{100}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega.$$

Орбитальное квантовое число в начальном и конечном состояниях равно нулю. Поэтому $\psi_{200} = R_{20}Y_{00}$, $\psi_{100} = R_{10}Y_{00}$, а $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ не зависит от угловых переменных, и действие оператора $\hat{L}^2$ на ψ_{100} дает нуль: $\hat{L}^2\psi_{100} = 0$. После интегрирования по угловым переменным получаем:

$$V_{200.100} = \frac{\alpha}{a_B}e^{-t/\tau}\int_0^\infty R_{20}(\rho)R_{10}(\rho)\rho\mathrm{d}\rho.$$

Здесь

$$R_{10} = 2e^{-\rho},\ R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\rho/2}(1-\rho/2).$$

Подстановка их дает

$$V_{200,100} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{a_B}e^{-t/\tau}\int_0^\infty e^{-3\rho/2}(1-\rho/2)\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$= -\frac{\alpha\sqrt{2}}{a_B}e^{-t/\tau}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2}\right)\int_0^\infty e^{-\beta\rho}\mathrm{d}\rho =$$

$$= -\frac{\alpha\sqrt{2}}{a_B}e^{-t/\tau}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2}\right)\frac{1}{\beta} = \frac{4\sqrt{2}\alpha}{27a_B}e^{-t/\tau}.$$

При интегрировании вводился параметр $\beta = 3/2$ и использовалось дифференцирование по параметру.

После подстановки матричного элемента в выражение для вероятности и интегрирования по времени получим:

$$W(1,0,0\to 2,0,0)=\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{4\sqrt{2}\alpha}{27a_B}\right)^2\left|\int\limits_0^\infty e^{(i\omega_{21}-1/\tau)t}\mathrm{d}t\right|^2=$$

$$=\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{4\sqrt{2}\alpha}{27a_B}\right)^2\frac{1}{\left|i\omega_{21}-1/\tau\right|^2}=\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{4\sqrt{2}\alpha}{27a_B}\right)^2\frac{\tau^2}{1+\omega_{21}^2\tau^2},$$

где $\omega_{21}=(E_2-E_1)/\hbar=\dfrac{3e^2}{32\pi\varepsilon_0 a_B\hbar}.$

Экзамен

1. Из условия нормировки находим постоянную C:

$$\left|C\right|^2\left(\int\limits_{-\infty}^0 e^{-x^2/a^2}\mathrm{d}x+\int\limits_0^\infty e^{-x^2/(4a^2)}\mathrm{d}x\right)=1\to C=\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{\pi}a}}.$$

Искомая вероятность равна

$$w=C^2\int\limits_0^\infty e^{-x^2/(4a^2)}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

По определению среднего значения

$$\left\langle x\right\rangle=C^2\left(\int\limits_{-\infty}^0 e^{-x^2/a^2}x\mathrm{d}x+\int\limits_0^\infty e^{-x^2/(4a^2)}x\mathrm{d}x\right)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}.$$

2. Нормировка волновой функции дает

$$\left|C\right|^2(4+1)=1\to C=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Полное число состояний этой системы равно $2s+1=7$, откуда следует, что спин системы $s=3$. Проекции спина на ось z и вероятности этих

проекций равны: $s_z=2$ $w_2=4/5$, $s_z=-1$ $w_{-1}=1/5$ (вероятности других значений проекции спина на ось z равны нулю), так что волновая функция системы (кет-вектор) имеет вид

$$\left|\psi\right\rangle=\frac{2}{\sqrt{5}}\left|3,2\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{5}}\left|3,-1\right\rangle.$$

Средние значения квадратов полного момента и его проекции на ось z равны

$$\left\langle\hat{S}^2\right\rangle=s(s+1)=12,\ \left\langle\hat{S}_z^2\right\rangle=2^2\frac{4}{5}+(-1)^2\frac{1}{5}=\frac{17}{5}.$$

Искомая величина равна $\left\langle S_x^2+S_y^2\right\rangle=\left\langle\hat{S}^2\right\rangle-\left\langle\hat{S}_z^2\right\rangle=\dfrac{43}{5}.$

3. Из условия нормировки волновой функции находится постоянная A:

$$A^2 4\pi\int\limits_0^\infty\exp(-r/a_B)r^2\mathrm{d}r=1\to$$

$$\to A^2 4\pi\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\int\limits_0^\infty\exp(-\alpha r)\mathrm{d}r=A^2 4\pi\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\frac{1}{\alpha}=8\pi a_B^3A^2=1\to A=\frac{1}{\sqrt{8\pi a_B^3}}.$$

Вероятность обнаружить атом в том или ином состоянии определяется коэффициентами разложения волновой функции по собственным функциям гамильтониана, в частности, вероятность обнаружить атом в основном состоянии определяется величиной C_1:

$$C_1=\int\limits_0^\infty\psi_1^*\psi 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}}{a_B^3}\int\limits_0^\infty\exp(-3r/2a_B)r^2\mathrm{d}r=\frac{16\sqrt{2}}{27},\ w_1=C_1^2=\frac{512}{729}.$$

Тогда вероятность обнаружить атом в любом из возбужденных состояний равна

$$w = 1 - w_1 = 217/729.$$

4. Волновая функция и энергия трехмерного осциллятора в основном состоянии равны

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right), \quad E_0^{(0)} = \frac{3}{2}\hbar\omega.$$

Необходимая поправка к энергии вычисляется стандартным образом:

$$E_0^{(1)} = V_{00} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right) V_0 \delta(r - r_0) 4\pi r^2 \mathrm{d}r =$$

$$= 4\pi V_0 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/2} r_0^2 \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r_0^2\right).$$

5. Поскольку оператор $\hat{B}$ имеет два собственных значения, то он изображается в $\hat{A}$-представлении двухрядной матрицей:

$$\hat{B}_{\hat{A}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

В $\hat{A}$-представлении заданы собственные функции оператора $\hat{B},$ и известны его собственные значения. Следовательно, имеем два соотношения для определения матричных элементов c_{ij}:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} \sqrt{1/3} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{1/3} \end{pmatrix} = \beta_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{1/3} \end{pmatrix}.$$

Эти соотношения эквивалентны двум системам уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}c_{11} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}c_{12} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\beta_1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}c_{11} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}c_{12} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\beta_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}c_{21} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}c_{22} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\beta_1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}c_{21} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}c_{22} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\beta_2 \end{cases}.$$

Из них находятся необходимые элементы и, тем самым, оператор $\hat{B}$:

$$\hat{B}_{\hat{A}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \beta_1 + 2\beta_2 & \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2) \\ \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2) & 2\beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\hat{B}$ в $\hat{A}$-представлении можно получить другим способом. В своем собственном представлении он имеет вид

$$\hat{B}_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

По известным в $\hat{A}$-представлении собственным функциям оператора $\hat{B}$ составляется матрица преобразования:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1}{3}} & \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ \sqrt{\dfrac{2}{3}} & -\sqrt{\dfrac{1}{3}} \end{pmatrix} = \hat{S}^+.$$

Эта матрица самосопряженная. Следовательно, оператор $\hat{B}$ в $\hat{A}$-представлении можно найти по формуле

$$\hat{B}_{\hat{A}} = \hat{S}^{+}\hat{B}_{\hat{B}}\hat{S} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \beta_1 + 2\beta_2 & \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2) \\ \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2) & 2\beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\hat{A}$ в своем представлении изображается диагональной матрицей:

$$\hat{A}_{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Искомый коммутатор равен

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \beta_1 + 2\beta_2 & \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2) \\ \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2) & 2\beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix} -$$

$$-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \beta_1 + 2\beta_2 & \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2) \\ \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2) & 2\beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \sqrt{2}(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \alpha_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку коммутатор $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \neq 0$, то величины A и B определить одновременно нельзя.

Переэкзаменовка

1. По условию

$$\left[\hat{A}_1, \hat{B}\right] = \left[\hat{A}_2, \hat{B}\right] = 0.$$

Использование его дает

$$\left[\hat{B}, \hat{A}_1^2\right] = \hat{B}\hat{A}_1^2 - \hat{A}_1^2\hat{B} = (\hat{B}\hat{A}_1)\hat{A}_1 - \hat{A}_1(\hat{A}_1\hat{B}) = (\hat{A}_1\hat{B})\hat{A}_1 - \hat{A}_1(\hat{B}\hat{A}_1) = 0.$$

Аналогично

$$\left[\hat{B}, \hat{A}_2^2\right] = 0.$$

Следовательно,

$$\left[\hat{B}, \hat{A}^2\right] = \left[\hat{B}, \hat{A}_1^2\right] + \left[\hat{B}, \hat{A}_2^2\right] = 0.$$

2. Находим возможные значения энергии системы. Для этого решаем секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 - E & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 - E & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 - E \end{vmatrix} = E(2 - E)(3 - E) = 0 \ \rightarrow \ E = 0, 2, 3.$$

В результате получаем гамильтониан в E-представлении:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные функции гамильтониана в базисе $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$. Для этого решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (1-E)C_1 + \sqrt{2}C_3 = 0, \\ (2-E)C_2 = 0, \\ \sqrt{2}C_1 + (2-E)C_3 = 0, \\ |C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 = 1. \end{cases}$$

Последовательная подстановка в эту систему значений E позволяет найти эти собственные функции:

$$E_1 = 0 \quad C_1 = \sqrt{2/3},\ C_2 = 0,\ C_3 = -1/\sqrt{3} \to \psi_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

$$E_2 = 2 \quad C_1 = C_3 = 0,\ C_2 = 1 \to \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$E_3 = 3 \quad C_1 = 1/\sqrt{3},\ C_2 = 0,\ C_3 = \sqrt{2/3} \to \psi_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}.$$

Из системы равенств

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|3\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|3\rangle \end{cases}$$

найдем разложение волнового вектора исходного состояния системы по собственным векторам гамильтониана:

$$|1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_3\rangle.$$

Это позволяет найти значения энергии системы в состоянии $|1\rangle$, которые можно обнаружить при измерении, и соответствующие вероятности:

$$E = E_1 = 0 \quad w_1 = 2/3; \quad E = E_3 = 3 \quad w_3 = 1/3.$$

Средняя энергия системы равна $\langle E\rangle = 1$.

3. Нормировка дает

$$C = 1/\sqrt{2} \text{ и } |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2,1,1\rangle + |1,0,0\rangle\right).$$

Поскольку складываются разные по размерности величины, то речь может идти только об их безразмерных аналогах. Пусть проекция момента на ось z измеряется величиной $\hbar$, квадрат полного момента − $\hbar^2$, энергия − $\hbar^2/(2ma_Б^2)$. Тогда

$$\langle E\rangle = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot(-1) = -\frac{5}{8},$$

$$\langle \hat{L}^2\rangle = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1 = 1, \qquad \langle \hat{L}_z\rangle = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

В результате

$$\langle \hat{F}\rangle = -\frac{5}{8} + 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}.$$

4. Квадрат суммарного спина определяется как сумма квадратов его проекций на оси декартовой системы координат:

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2.$$

Поэтому

$$\left\langle \hat{S}_{1x}^2 + \hat{S}_{1y}^2 \right\rangle = \left\langle \hat{S}_1^2 \right\rangle - \left\langle \hat{S}_{1z}^2 \right\rangle.$$

Уменьшаемое в правой части равно

$$\left\langle \hat{S}_1^2 \right\rangle = S_1(S_1 + 1) = 35/4.$$

Искомые максимум и минимум определяются соответственно минимальным и максимальным значениями вычитаемого. Проекцию суммарного спина на ось z, равную двум, дают две комбинации проекций спинов частиц на ту же ось:

$$S_{1z} = 5/2,\ S_{2z} = -1/2;\ S_{1z} = 3/2,\ S_{2z} = 1/2.$$

Таким образом,

$$\left\langle \hat{S}_{1x}^2 + \hat{S}_{1y}^2 \right\rangle_{\max} = 35/4 - (3/2)^2 = 13/2;$$

$$\left\langle \hat{S}_{1x}^2 + \hat{S}_{1y}^2 \right\rangle_{\min} = 35/4 - (5/2)^2 = 5/2.$$

5. Энергия частицы в рассматриваемой двумерной прямоугольной яме при отсутствии возмущения равна

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_1^2 + n_2^2), \quad n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$$

Для основного уровня энергии $n_1 = n_2 = 1$; для первого возбужденного − либо $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, либо $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, т. е. этот уровень энергии двукрат-

но вырожден. Соответственно для первого возбужденного уровня энергии вводим две волновые функции:

$$\varphi_1(x,y) = \psi_1(x)\psi_2(y), \quad \varphi_2(x,y) = \psi_2(x)\psi_1(y).$$

Вычисляем матричные элементы:

$$V_{11} = \iint \varphi_1^*(x,y)\hat{V}\varphi_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = V_0(2/a)^2\int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x \times$$

$$\times \int_0^a \sin^2\frac{2\pi y}{a}\cos\frac{\pi y}{a}\mathrm{d}y = 0 \ \ (\text{интеграл по } x \text{ дает нуль});$$

$$V_{22} = \iint \varphi_2^*(x,y)\hat{V}\varphi_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \ \ (\text{интеграл по } y \text{ дает нуль});$$

$$V_{12} = \iint \varphi_1^*(x,y)\hat{V}\varphi_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= V_0(2/a)^2\int_0^a \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\mathrm{d}x\int_0^a \sin\frac{2\pi y}{a}\cos\frac{\pi y}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\mathrm{d}y =$$

$$= V_0\left(\int_0^1 \sin^2(2\pi\xi)\mathrm{d}\xi\right)^2 = \frac{V_0}{4}; \quad V_{21} = \frac{V_0}{4}.$$

Секулярное уравнение

$$\begin{vmatrix} -E^{(1)} & V_0/4 \\ V_0/4 & -E^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

дает два значения для поправки к энергии $E^{(1)} = \pm V_0/4$. Таким образом, рассматриваемое возмущение приводит к расщеплению уровня энергии и снимает вырождение:

$$E_{1,2} = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \pm \frac{V_0}{4}.$$

Из решения системы уравнений

$$\begin{cases} -E^{(1)}C_1 + \dfrac{V_0}{4}C_2 = 0 \\ C_1^2 + C_2^2 = 1 \end{cases}$$

для каждого значения $E^{(1)}$ находим коэффициенты C_1 и C_2 и правильные волновые функции:

$$E_1 = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \frac{V_0}{4} \quad \varphi_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x)\psi_2(y) - \psi_2(x)\psi_1(y)),$$

$$E_2 = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + \frac{V_0}{4} \quad \varphi_2^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x)\psi_2(y) + \psi_2(x)\psi_1(y)).$$

Контрольные работы 2003 г.

Первая контрольная работа

1. Собственные функции оператора $\hat{A}$ должны удовлетворять уравнению

$$\hat{A}f = af,$$

где a – собственные числа.

Функция $f_1 = kx + B^2$ удовлетворяет уравнению при $a = B^2$. Функция f_1 является собственной функцией оператора $\hat{A}$, а B^2 – его собственное число.

Функция $f_2 = kx^2 + B^2$ не удовлетворяет уравнению (при $k \neq 0$) и не является собственной функцией оператора $\hat{A}$.

2. Кинетическая энергия частицы равна

$$K = \frac{p^2}{2m}.$$

Поскольку ее относительная неопределенность мала, то мала и относительная неопределенность в значении импульса частицы. Поэтому можно написать:

$$\Delta K/K = 2\Delta p/p = 0{,}01.$$

По соотношению неопределенности $\Delta p \cdot l \approx \hbar/2$. Отсюда

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2l} \text{ и } p = 100\hbar/l.$$

Таким образом, для кинетической энергии получается оценка

$$K = \frac{10^4\hbar^2}{2ml^2}.$$

3. Энергия во втором порядке теории возмущений находится по формуле

$$E_1 = E_1^{(0)} + V_{11} + \sum_{n\neq 1} \frac{V_{1n}V_{n1}}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}}.$$

Матричные элементы:

$$V_{1n} = V_{n1} = \int_0^a \psi_n^{(0)*} V \psi_1^{(0)} \mathrm{d}x = \frac{2}{a}V_0 \int_0^a \sin(\pi n\frac{x}{a})\cos(2\pi\frac{x}{a})\sin(\pi\frac{x}{a})\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{a}V_0 \int_0^a \sin(\pi n\frac{x}{a})(\sin(3\pi\frac{x}{a}) - \sin(\pi\frac{x}{a}))\mathrm{d}x = \frac{1}{2}V_0 \int_0^a \psi_n^{(0)*}(\psi_3^{(0)} - \psi_1^{(0)})\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}V_0(\delta_{n,3} - \delta_{n,1}).$$

Здесь $\psi_n^{(0)}$ – волновые функции невозмущенной частицы в яме, энергия этой частицы

$$E_n^{(0)} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2.$$

В результате энергия основного состояния частицы во втором порядке теории возмущений равна

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \frac{1}{2}V_0 - \frac{V_0^2 ma^2}{16\pi^2\hbar^2}.$$

Волновая функция основного состояния частицы в первом порядке теории возмущений равна

$$\psi_1 = \psi_1^{(0)} + \sum_{n\neq 1}\frac{V_{n1}}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}}\psi_n^{(0)} = \psi_1^{(0)} - \frac{V_0 ma^2}{8\pi^2\hbar^2}\psi_3^{(0)}.$$

4. Для основного состояния осциллятора $n = 0$. Это состояние реализуется при $n_x = n_y = 0$.

Волновая функция линейного гармонического осциллятора в основном состоянии равна

$$\psi_0(x) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\exp(-m\omega x^2/2\hbar).$$

Для двумерного осциллятора в основном состоянии волновая функция равна

$$\psi_0(x,y) = \psi_0(x)\psi_0(y) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/2}\exp(-m\omega(x^2 + y^2)/2\hbar) =$$

$$= (m\omega/\pi\hbar)^{1/2}\exp(-m\omega r^2/2\hbar),$$

где $r^2 = x^2 + y^2$.

Вероятность обнаружить осциллятор при $r \le R$ равна

$$W(r \le R) = \int_0^R |\psi_0|^2 2\pi r\mathrm{d}r = \frac{m\omega}{\hbar}\int_0^R \exp(-m\omega r^2/\hbar)2rdr = 1 - \exp(-m\omega R^2/\hbar).$$

5. Применяя известное рекуррентное соотношение, преобразуем выражение для волновой функции:

$$\psi(\xi) = C(\xi\psi_{n-1}(\xi) + \psi_{n+1}(\xi)) = C\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_n(\xi) + \sqrt{\frac{n-1}{2}}\psi_{n-2}(\xi) + \psi_{n+1}(\xi)\right).$$

Находим нормировочную постоянную:

$$C^2\left(\frac{n}{2} + \frac{n-1}{2} + 1\right) = 1 \to C = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

В результате

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{n-1}{2n+1}}\psi_{n-2}(\xi) + \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\psi_n(\xi) + \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\psi_{n+1}(\xi).$$

Для произвольного момента времени

$$\psi(\xi,t) = \sqrt{\frac{n-1}{2n+1}}\psi_{n-2}(\xi)e^{-i\omega(n-\frac{3}{2})t} + \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\psi_n(\xi)e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\psi_{n+1}(\xi)e^{-i\omega(n+\frac{3}{2})t}.$$

Теперь можно определить зависимость от времени среднего значения безразмерной координаты:

$$\left\langle \xi \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^* \xi \psi d\xi =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} ((n-1)\psi_{n-2}^2 + n\psi_n^2 + 2\psi_{n+1}^2 + \sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2}\psi_n (e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t}) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2(n-1)}\psi_{n-2}\psi_{n+1}(e^{3i\omega t} + e^{-3i\omega t}) + \sqrt{2n}\psi_n\psi_{n+1}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}))\xi d\xi \right) =$$

$$= 2\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}\cos\omega t.$$

Все слагаемые под интегралом, кроме последнего, дают нули в силу ортогональности волновых функций. Например, первое слагаемое:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_{n-2}^2(\xi)\xi d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_{n-2}(\xi)\left(\sqrt{\frac{n-1}{2}}\psi_{n-1}(\xi) + \sqrt{\frac{n-2}{2}}\psi_{n-3}(\xi)\right)d\xi =$$

$$= \sqrt{\frac{n-1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_{n-2}(\xi)\psi_{n-1}(\xi)d\xi + \sqrt{\frac{n-2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_{n-2}(\xi)\psi_{n-3}(\xi)d\xi = 0.$$

Переходим к размерной координате x:

$$\left\langle x \right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left\langle \xi \right\rangle = 2\sqrt{\frac{n(n+1)\hbar}{m\omega}}\,\frac{1}{2n+1}\cos\omega t.$$

Амплитуда колебаний среднего значения одномерного гармонического осциллятора с частотой ω равна

$$x_m = 2\sqrt{\frac{n(n+1)\hbar}{m\omega}}\,\frac{1}{2n+1}.$$

Частота колебаний равна ω.

Вторая контрольная работа

1. Используя формулу Эйлера, волновой функции можно придать вид

$$\psi = C\exp(i\varphi).$$

Нормируя ее, получим:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(i\varphi).$$

Она является собственной волновой функцией оператора $\hat{L}_z$. Поэтому при измерении можно обнаружить только значение $L_z = \hbar$ с вероятностью $W = 1$. Следовательно, $\left\langle L_z \right\rangle = \hbar$. Волновая функция ψ в $\hat{L}_z$-представлении имеет вид

$$\psi = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

2. Искомая вероятность вычисляется по формуле:

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int\limits_0^{\infty} V_{21}e^{i\omega_{21}t}dt\right|^2.$$

Необходимый матричный элемент равен

$$V_{21} = \int \psi_2^* \hat{V} \psi_1 dx = \frac{2}{a} V_0 e^{-kt} \int_0^a \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi x}{a} dx =$$

$$= \frac{1}{a} V_0 e^{-kt} \int_0^a \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx = \frac{1}{2a} V_0 e^{-kt} \int_0^a (1 - \cos\frac{4\pi x}{a}) dx = \frac{1}{2} V_0 e^{-kt}.$$

Подстановка этого значения V_{21} в выражение для вероятности дает

$$W_{1 \to 2} = \frac{V_0^2}{4\hbar^2} \left| \int_0^\infty e^{-kt + i\omega_{21} t} dt \right|^2 = \frac{V_0^2}{4\hbar^2} \left| \frac{1}{k - i\omega_{21}} \right|^2 = \frac{V_0^2}{4\hbar^2 (k^2 + \omega_{21}^2)},$$

где $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar = \dfrac{3\pi^2 \hbar}{2ma^2}$.

3. Система из двух подсистем с моментами $l_1 = l_2 = 1$ может обладать суммарным моментом $j_{1,2} = 2, 1, 0$. Полная система может обладать значениями суммарного момента:

$$j \equiv j_{1,2,3} = \begin{cases} l+2, l+1, l, l-1, l-2 \ \text{ при } l \ge 2 \\ l+1, l, l-1 \ \text{ при } l \ge 1 \\ l \end{cases}.$$

Составим таблицу при $l \ge 2$, где в первой строке укажем значение суммарного момента, во второй строке – статистический вес, в третьей – число состояний n:

j	$l+2$	$l+1$	l	$l-1$	$l-2$
g	1	2	3	2	1
n	$2l+5$	$2(2l+3)$	$3(2l+1)$	$2(2l-1)$	$2l-3$

Всего состояний

$$\sum n_j = 3^2 (2l+1).$$

При $l = 1$ возможны значения суммарного момента, статистического веса и числа состояний:

$$j = \begin{cases} 3, 2, 1 \\ 2, 1, 0; \ g_3 = 1 \ n_3 = 7, \ g_2 = 2 \ n_2 = 10, \ g_1 = 3 \ n_1 = 9, \ g_0 = 1 \ n_0 = 1. \\ 1 \end{cases}$$

Полное число состояний равно 27.

Аналогично при $l = 0$ имеем $j = 2, 1, 0$.

4. Из нормировки получаем коэффициент C:

$$\langle \psi | \psi \rangle = |C|^2 (4 \ \ -3i) \begin{pmatrix} 4 \\ 3i \end{pmatrix} = 25 |C|^2 = 1 \ \to \ |C| = \frac{1}{5},$$

так что $|\psi\rangle = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3i \end{pmatrix}$.

В заданном представлении оператор $\hat{S}_y$ имеет вид

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Его собственные значения $\pm 1/2$, а соответствующие собственные функции

$$\psi_{s_y = 1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \ \text{ и } \ \psi_{s_y = -1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Определяем коэффициенты разложения заданной волновой функции по собственным функциям оператора $\hat{S}_y$:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -i)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3i\end{pmatrix} = \frac{7}{5\sqrt{2}}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad i)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3i\end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Волновая функция системы в $\hat{S}^2,\ \hat{S}_y$ -представлении имеет вид

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}.$$

При измерении будут обнаружены значения проекции спина на ось y с вероятностями:

$$S_y = 1/2\ W = 49/50;\ S_y = -1/2\ W = 1/50.$$

По определению среднего

$$\left\langle s_y \right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{49}{50} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{50} = 0.48, \quad \left\langle s_z \right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{25} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{9}{25} = 0{,}14.$$

5. В $2p$-состоянии атома водорода главное и орбитальное квантовые числа равны: $n = 2$, $l = 1$. Возможные значения магнитного числа равны $m = 0, \pm 1$. Таким образом, $2p$-состояние атома водорода в отсутствие магнитного поля трехкратно вырождено.

Возмущение зависит только от угла и вызывает расщепление уровня энергии по магнитному квантовому числу. Необходимые матричные элементы равны

$$\left\langle 2,1,m_1\right|\hat{V}(\varphi)\left|2,1,m_2\right\rangle = \left\langle m_1\right|\hat{V}\left|m_2\right\rangle = V_0\left\langle m_1\right|\cos 2\varphi\left|m_2\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}V_0\int\limits_0^{2\pi} e^{i(m_2 - m_1)\varphi}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi}V_0\int\limits_0^{2\pi} e^{i(m_2 - m_1)\varphi}(e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi})\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}V_0(\delta_{m_2 - m_1 + 2,0} + \delta_{m_2 - m_1 - 2,0}).$$

В матричной форме возмущение равно

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & V_0/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ V_0/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поправки первого порядка к энергии находятся из решения секулярного уравнения:

$$\begin{vmatrix} -E^{(1)} & 0 & V_0/2 \\ 0 & -E^{(1)} & 0 \\ V_0/2 & 0 & -E^{(1)} \end{vmatrix} = 0 \to -(E^{(1)})^3 + E^{(1)}(V_0/2)^2 = 0 \to E^{(1)} = 0,\ \pm V_0/2.$$

Чтобы найти правильные волновые функции, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} -E^{(1)}C_1 + \frac{1}{2}V_0C_3 = 0, \\ -E^{(1)}C_2 = 0, \\ \frac{1}{2}V_0C_1 - E^{(1)}C_3 = 0, \\ \left|C_1\right|^2 + \left|C_2\right|^2 + \left|C_3\right|^2 = 0. \end{cases}$$

Подставляя в нее последовательно значения $E^{(1)}$, получим правильные волновые функции:

$$E_1 = -V_0/2 \quad \left|\psi_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|2,1,1\right\rangle - \left|2,1,-1\right\rangle\right); \quad E_2 = 0 \quad \left|\psi_2\right\rangle = \left|2,1,0\right\rangle;$$

$$E_3 = V_0/2 \quad \left|\psi_3\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|2,1,1\right\rangle + \left|2,1,-1\right\rangle\right).$$

Экзамен

1. Равенство

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 1$$

умножаем на $\hat{A}$ первый раз слева, а второй раз справа. В результате получим соотношения:

$$\hat{A}^2\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} = \hat{A} \text{ и } \hat{A}\hat{B}\hat{A} - \hat{B}\hat{A}^2 = \hat{A}.$$

Складываем их и получаем:

$$\left[\hat{A}^2, \hat{B}\right] = 2\hat{A}.$$

Аналогично, умножая равенство

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 1$$

точно так же слева и справа на $\hat{B}$, получим:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^2\right] = 2\hat{B}.$$

Умножая равенство

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 1$$

первый раз слева на $\hat{B}^2$, второй раз справа на $\hat{B}^2$ и затем одновременно слева и справа на $\hat{B}$, получим три соотношения:

$$\hat{B}^2\hat{A}\hat{B} - \hat{B}^3\hat{A} = \hat{B}^2, \quad \hat{A}\hat{B}^3 - \hat{B}\hat{A}\hat{B}^2 = \hat{B}^2 \text{ и } \hat{B}\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}^2\hat{A}\hat{B} = \hat{B}^2.$$

Складывая их, получаем:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^3\right] = 3\hat{B}^2.$$

2. Выразим $\psi(x, 0)$ через собственные функции гамильтониана частицы:

$$\psi(x, 0) = A\sin(2\pi x/a)\cos(3\pi x/a) = \frac{1}{2}A(\sin(5\pi x/a) - \sin(\pi x/a)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_1 + \psi_5).$$

В этом состоянии возможные значения энергии и соответствующие вероятности равны

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad W = \frac{1}{2}; \quad E = \frac{25\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad W = \frac{1}{2}.$$

Волновая функция частицы в произвольный момент времени имеет вид

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_1(x)e^{-i\omega_1 t} + \psi_5(x)e^{-i\omega_5 t}).$$

Для точки $x = a/2$ и произвольного момента времени t волновая функция равна

$$\psi(a/2, t) = \frac{1}{\sqrt{a}}(-e^{-i\omega_1 t} + e^{-i\omega_5 t}).$$

Плотность вероятности обнаружения частицы в точке $x = a/2$ в произвольный момент времени t равна

$$\left|\psi(a/2, t)\right|^2 = \frac{1}{a}(2 - e^{i(\omega_5 - \omega_1)t} - e^{-i(\omega_5 - \omega_1)t}) = \frac{2}{a}(1 - \cos(\omega_5 - \omega_1)t),$$

где $\omega_5 - \omega_1 = \dfrac{12\pi^2\hbar}{ma^2}$.

3. Волновая функция первого возбужденного состояния невозмущенного осциллятора имеет вид

$$\psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x\cdot\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right).$$

Поправка первого порядка к энергии первого возбужденного состояния осциллятора при действии возмущения равна

$$\Delta E_1^{(1)} = V_{11} = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*\hat{V}\psi_1\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2}\beta\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right)\delta(x-a)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2}\beta a^2\exp\left(-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right).$$

Условия максимума функции $f(a)$ есть

$$\mathrm{d}f/\mathrm{d}a = 0,\ \mathrm{d}^2f/\mathrm{d}a^2 < 0.$$

Найдем максимум функции:

$$f = a^2\exp\left(-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right).$$

Приравнивая нулю первую производную

$$\mathrm{d}f/\mathrm{d}a = 2a\exp\left(-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right)\left(1-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right) = 0,$$

получим значения:

$$a = 0,\ \pm\infty,\ \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Вторая производная

$$\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}a^2 = 2\exp\left(-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right)\left(1-5\frac{m\omega a^2}{\hbar}+2\left(\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right)^2\right)$$

отрицательна только при

$$a = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Эти значения дают искомый максимум поправки к энергии:

$$\Delta E_1^{(1)} = \frac{2\beta}{e}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}.$$

(Решение см. также в задаче 3 из контрольной работы на переэкзаменовке 2007 г.)

4. Поскольку гамильтониан имеет только два собственных значения, то он изображается двумерной матрицей. Пусть эта матрица имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Требуется найти матричные элементы a, b, c, d. Из уравнения Шредингера $\hat{H}\psi = E\psi$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} ai + b = E_1 i, \\ ci + d = E_1, \\ a + bi = E_2, \\ c + di = E_2 i. \end{cases}$$

Решая ее, находим все необходимые матричные элементы и получаем гамильтониан в представлении, в котором заданы его собственные функции:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} (E_1 + E_2)/2 & i(E_1 - E_2)/2 \\ -i(E_1 - E_2)/2 & (E_1 + E_2)/2 \end{pmatrix}.$$

Приведем другой способ решения. Из собственных векторов составляется матрица преобразования:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан в собственном представлении равен

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\hat{H} = S\hat{H}_0 S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -iE_1 & E_1 \\ E_2 & -iE_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_1 + E_2 & i(E_1 - E_2) \\ -i(E_1 - E_2) & E_1 + E_2 \end{pmatrix}.$$

5. Суммарный спиновый момент системы может иметь значения $S = 5/2$ и $3/2$. Проекция его на ось z равна $S_z = 3/2$. Действуя понижающим оператором S_- на очевидное равенство

$$\left|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right\rangle = |2,2\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,$$

Получим:

$$S_-\left|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right\rangle = \sqrt{5}\left|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\rangle =$$

$$= S_-|2,2\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 2|2,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + |2,2\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

откуда

$$\left|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|2,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2,2\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Волновой вектор $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$ выражается через те же произведения волновых векторов отдельных частиц, т. е.

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = C_1|2,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + C_2|2,2\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Коэффициенты разложения находятся из условия ортогональности векторов $\left|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$ и $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$:

$$\left\langle\frac{5}{2},\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}C_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}C_2 = 0,$$

с учетом нормировки:

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1.$$

В результате

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|2,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}|2,2\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \left|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|2,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2,2\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \\ \left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|2,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}|2,2\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle. \end{cases}$$

Находим из нее

$$|2,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle.$$

Искомая вероятность равна

$$W\left(\left|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\rangle\right) = \frac{4}{5}.$$

Переэкзаменовка

1. Волновая функция частицы в основном состоянии равна

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}.$$

Соответственно плотность вероятности обнаружения частицы равна

$$p = |\psi_1|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\frac{\pi x}{a}.$$

Ее максимальное значение $p = p_m$ достигается в точке $x = a/2$. Ширина ямы равна $a = 2/p_m$. Энергия частицы:

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{\pi^2\hbar^2 p_m^2}{8m}.$$

2. Волновая функция основного состояния линейного гармонического осциллятора имеет вид

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).$$

Основное состояние двумерного осциллятора описывается волновой функцией:

$$\psi_0(r) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right).$$

Поправка к энергии двумерного осциллятора в основном состоянии равна

$$E_0^{(1)} = \int_0^\infty \left|\psi_0(r)\right|^2 V(r) 2\pi r dr =$$

$$= \frac{m\omega}{\pi\hbar} V_0 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar} r^2\right) \delta(r - r_0) 2\pi r dr = \frac{2m\omega}{\hbar} V_0 r_0 \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar} r_0^2\right).$$

3. Вычислим матричные элементы:

$$V_{11} = \int_0^{2\pi} \psi_1^2 V d\varphi = \frac{V_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} V_0,$$

$$V_{22} = \int_0^{2\pi} \psi_2^2 V d\varphi = \frac{V_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} V_0,$$

$$V_{12} = V_{21} = \int_0^{2\pi} \psi_1 \psi_2 V d\varphi = \frac{V_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} V_0.$$

Решая секулярное уравнение, найдем искомые поправки к энергии

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4}V_0 - E^{(1)} & \frac{1}{2\pi}V_0 \\ \frac{1}{2\pi}V_0 & \frac{1}{4}V_0 - E^{(1)} \end{vmatrix} = 0 \to E^{(1)} = \frac{1}{4}V_0 \pm \frac{1}{2\pi}V_0.$$

Правильные волновые функции находятся из решения системы уравнений

$$\begin{cases} (\frac{1}{4}V_0 - E^{(1)})C_1 + \frac{1}{2\pi}V_0 C_2 = 0, \\ C_1^2 + C_2^2 = 1 \end{cases}$$

при последовательной подстановке в нее значений $E^{(1)}$:

$$E^{(1)} = \frac{1}{4}V_0 \pm \frac{1}{2\pi}V_0 \quad C_1 = \pm C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \varphi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin\varphi \pm \cos\varphi).$$

4. Решаем секулярное уравнение и определяем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - E & \sqrt{2}\alpha \\ \sqrt{2}\alpha & \alpha - E \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow E = 0, 3\alpha.$$

Последовательная подстановка значений E в уравнение

$$(2\alpha - E)A_1 + \sqrt{2}\alpha A_2 = 0$$

и выполнение условия нормировки

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = 1$$

дают соответствующие значения коэффициентов A_1 и A_2 и, тем самым, собственные функции:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ для } E_1 = 0 \text{ и } \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ для } E_2 = 3\alpha.$$

Этот результат можно записать через волновые векторы в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \left|E_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|2\right\rangle, \\ \left|E_2\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|2\right\rangle, \end{cases}$$

откуда несложно найти вектор $|1\rangle$:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|E_2\rangle,$$

и, следовательно, искомые вероятности:

$$W_1 = 1/3,\ W_2 = 2/3.$$

Чтобы вычислить эти вероятности после того, как найдены собственные волновые функции, можно воспользоваться другим способом. Составляется матрица преобразования из векторов-столбцов собственных функций:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Система находится в состоянии

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда в энергетическом представлении

$$\psi(E) = S^{-1}\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

Квадраты модулей элементов столбца дают искомые вероятности.

5. Орбитальный момент $l = 2$ может иметь проекции на ось z, равные $m = -2, -1, 0, 1, 2$. Спин электрона $s = 1/2$ может иметь проекции на ось z, равные $s_z = -1/2,\ 1/2$. Система имеет полный момент $j = 5/2$. Состояние системы с проекцией $j_z = 5/2$ реализуется, если одновременно $m = 2$ и $s_z = 1/2$, т. е. если выполняется равенство

$$\left|\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle = |2, 2\rangle\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle.$$

Действуем на него понижающим оператором, получаем:

$$J_-\left|\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle = \sqrt{5}\left|\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle =$$

$$= J_-|2, 2\rangle\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = 2|2, 1\rangle\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + |2, 2\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle,$$

откуда

$$\left|\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|2, 1\rangle\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2, 2\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

По определению среднего

$$\langle s_z\rangle = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}.$$

Контрольные работы 2001 г.

Вторая контрольная работа

1. Выразим волновую функцию через собственные функции гамильтониана:

$$\psi(x,0)=\frac{1}{2}A\left(\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)-\frac{i}{2}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\right)=\frac{1}{2}A\sqrt{\frac{a}{2}}\left(\psi_1(x)-\frac{i}{2}\psi_3(x)\right).$$

$$\left(\psi_n(x)\ =\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\pi n\frac{x}{a}\right),\qquad E_n\ =\ \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2,\qquad n\ =\ 1,\,2,\,\ldots\right).$$

После нормировки имеем:

$$\psi(x,0)=\frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1(x)-\frac{i}{\sqrt{5}}\psi_3(x).$$

В произвольный момент времени волновая функция равна

$$\psi(x,t)=\frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1(x)e^{-i\omega t}-\frac{i}{\sqrt{5}}\psi_3(x)e^{-9i\omega t},\ \text{ где }\ \omega=\frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}.$$

В E-представлении она имеет вид

$$\psi(t)=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5}\cdot\exp(-i\omega t)\\ 0\\ -i/\sqrt{5}\cdot\exp(-9i\omega t)\\ 0\\ 0\\ .\\ .\\ . \end{pmatrix}.$$

2. Спин s может находиться в $(2s+1)$ различных состояниях. Электрон обладает спином $s=1/2$. Система из пяти невзаимодействующих спинов может находиться в $(2s+1)^5=32$ различных состояниях.

Тот же результат получается в базисе суммарных спинов. Система из двух электронов может обладать спином $s_{1,2}=1,0$. Добавление к ней третьего электрона дает систему, которая может обладать спином

$$s_{1,2,3}=\begin{cases}3/2,\ 1/2,\\ 1/2.\end{cases}$$

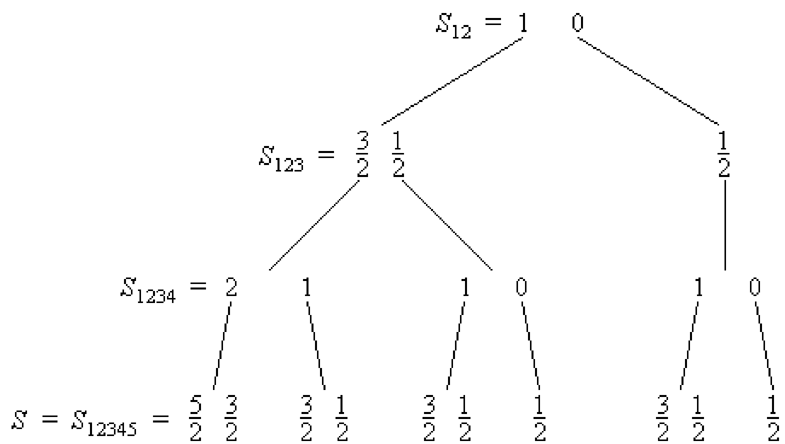
Для четырех электронов

$$s_{1,2,3,4}=\begin{cases}\{2,\ 1;\ \ \{1,\ 0;\\ 1,\ 0.\end{cases}$$

Система из пяти невзаимодействующих спинов может обладать значениями суммарного спина:

$$s\equiv s_{1,2,3,4,5}=\begin{cases}\begin{cases}\begin{cases}5/2,\ 3/2\\ 3/2,\ 1/2\end{cases}\\ \begin{cases}3/2,\ 1/2\\ 1/2\end{cases}\end{cases}\\ \begin{cases}3/2,\ 1/2\\ 1/2\end{cases}\end{cases}.$$

Пояснением к решению является приведенный ниже рисунок.



Составим таблицу, в которой укажем возможные значения суммарного спина, статистический вес g и число различных состояний n с данным s.

s	5/2	3/2	1/2
g	1	4	5
$n = g(2s+1)$	6	16	10

Полное число состояний равно 6 + 16 + 10 = 32.

3. Будем исходить из очевидного равенства

$$\left|2,2\right\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle,$$

утверждающего, что проекция суммарного момента равна двум $s_z = 2$, если проекции подсистем равны $s_{z1} = 1/2$, $s_{z2} = 3/2$. Подействуем на это равенство понижающим оператором:

$$S_-\left|2,2\right\rangle = 2\left|2,1\right\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,$$

откуда

$$\left|2,1\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Волновой вектор $\left|1,1\right\rangle$ определяется суперпозицией тех же векторов, что и волновой вектор $\left|2,1\right\rangle$:

$$\left|1,1\right\rangle = C_1\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle + C_2\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Из условия ортогональности этих волновых векторов определяется век-

тор $\left|1,1\right\rangle$. Именно:

$$\left\langle 2,1\middle|1,1\right\rangle = 0 \to \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 0.$$

Используя условие нормировки

$$\left|C_1\right|^2 + \left|C_2\right|^2 = 1,$$

найдем:

$$\left|1,1\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle - \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Искомые вероятности равны

$$W_{S_{1z}=-1/2} = W_{S_{2z}=3/2} = 3/4,\ W_{S_{1z}=1/2} = W_{S_{2z}=1/2} = 1/4,$$

$$W_{S_{2z}=-1/2} = W_{S_{2z}=-3/2} = 0.$$

Средние значения проекций на ось z спиновых моментов подсистем равны

$$\left\langle s_{1z}\right\rangle = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{4},\quad \left\langle s_{2z}\right\rangle = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

4. Искомая вероятность определяется выражением

$$W(1,0,0 \to 2,0,0) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\infty V_{200,100}e^{i\omega_{21}t}\mathrm{d}t\right|^2,$$

где матричный элемент

$$V_{200,100} = \int_{4\pi}\int_0^\infty \psi_{200}^*\hat{V}\psi_{100}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega.$$

Орбитальное квантовое число в начальном и конечном состояниях равно нулю. Поэтому $\psi_{200} = R_{20}Y_{00}$, $\psi_{100} = R_{10}Y_{00}$, а $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ не зависит от угловых переменных. После интегрирования по угловым переменным получаем:

$$V_{200,100} = \frac{\beta}{a_B} e^{-t/\tau} \int_0^\infty R_{20}(\rho) R_{10}(\rho) \rho \mathrm{d}\rho.$$

Здесь

$$R_{10} = 2e^{-\rho}, \quad R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\rho/2}(1-\rho/2).$$

Подстановка их дает

$$V_{200,100} = \frac{\beta\sqrt{2}}{a_B} e^{-t/\tau} \int_0^\infty e^{-3\rho/2}(1-\rho/2)\rho \mathrm{d}\rho =$$

$$= -\frac{\beta\sqrt{2}}{a_B} e^{-t/\tau} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} \right) \int_0^\infty e^{-\alpha\rho} \mathrm{d}\rho =$$

$$= -\frac{\beta\sqrt{2}}{a_B} e^{-t/\tau} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} \right) \frac{1}{\alpha} = \frac{4\sqrt{2}\beta}{27 a_B} e^{-t/\tau}.$$

При интегрировании вводился параметр $\alpha = 3/2$ и использовалось дифференцирование по параметру.

После подстановки матричного элемента в выражение для вероятности и интегрирования по времени получаем:

$$W(1,0,0 \to 2,0,0) = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{4\sqrt{2}\beta}{27 a_B} \right)^2 \left| \int_0^\infty e^{(i\omega_{21} - 1/\tau)t} \mathrm{d}t \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{4\sqrt{2}\beta}{27 a_B} \right)^2 \frac{1}{\left| i\omega_{21} - 1/\tau \right|^2} = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{4\sqrt{2}\beta}{27 a_B} \right)^2 \frac{\tau^2}{1+\omega_{21}^2\tau^2},$$

где $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar = \dfrac{3e^2}{32\pi\varepsilon_0 a_B \hbar}.$

5. По определению среднего

$$\langle r \rangle = \langle \psi | r | \psi \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \int (R_{10}Y_{00}e^{i\omega_1 t} + R_{20}Y_{00}e^{i\omega_2 t}) r (R_{10}Y_{00}e^{-i\omega_1 t} + R_{20}Y_{00}e^{-i\omega_2 t}) r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty (R_{10}^2 + R_{20}^2 + R_{10}R_{20}(e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t})) r^3 \mathrm{d}r \int_{(4\pi)} Y_{00}^2 \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} (\langle r_1 \rangle + \langle r_2 \rangle + 2\cos((\omega_2 - \omega_1)t) \int_0^\infty R_{10}R_{20} r^3 \mathrm{d}r) =$$

$$= r_0 + \frac{\sqrt{2}}{a^3} \cos((\omega_2 - \omega_1)t) \int_0^\infty e^{-3r/2a} (r^3 - r^4/2a) \mathrm{d}r =$$

$$= r_0 + \frac{\sqrt{2}}{a^3} \cos((\omega_2 - \omega_1)t) \left(-\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\alpha^3} - \frac{1}{2a}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\alpha^4} \right) \int_0^\infty e^{-\alpha r} \mathrm{d}r =$$

$$= r_0 + \frac{\sqrt{2}}{a^3} \cos\omega_{21} t \left(-\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\alpha^3} - \frac{1}{2a}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\alpha^4} \right) \frac{1}{\alpha} =$$

$$= r_0 + \frac{\sqrt{2}}{a^3} \cos\omega_{21} t \left(\frac{6}{\alpha^4} - \frac{12}{a\alpha^5} \right) = r_0 - \frac{32}{81}\sqrt{2} a \cos\omega_{21} t.$$

Амплитуда и частота колебаний среднего радиуса электрона в атоме водорода в заданном состоянии равны

$$a_m = \frac{32\sqrt{2}}{81}a, \quad \omega = \omega_{21} = \omega_2 - \omega_1 = (E_2 - E_1)/\hbar = \frac{3me^4}{8\hbar^3}.$$

Экзамен

1. Из нормировки получаем коэффициент C:

$$\langle\psi|\psi\rangle = |C|^2(4 \;\; -3i)\begin{pmatrix}4\\3i\end{pmatrix} = 25|C|^2 = 1 \;\to\; |C| = \frac{1}{5},$$

так что $|\psi\rangle = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3i\end{pmatrix}$.

В заданном представлении оператор $\hat{S}_y$ имеет вид

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$

Его собственные значения $\pm 1/2$, а соответствующие собственные функции

$$\psi_{s_y=1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \text{ и } \psi_{s_y=-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}.$$

Определяем коэффициенты разложения заданной волновой функции по собственным функциям оператора $\hat{S}_y$:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \;\; -i)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3i\end{pmatrix} = \frac{7}{5\sqrt{2}}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \;\; i)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3i\end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Волновая функция системы в $\hat{S}^2$, $\hat{S}_y$-представлении имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}.$$

При измерении будут обнаружены значения проекции спина на ось y с вероятностями:

$$S_y = 1/2 \; W = 49/50; \; S_y = -1/2 \; W = 1/50.$$

По определению среднего

$$\langle s_y\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{49}{50} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{50} = 0.48, \quad \langle s_z\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{25} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{9}{25} = 0{,}14.$$

(Решение см. также в задаче 4 второй контрольной работы 2003 г.)

2. Чтобы найти собственные значения гамильтониана, необходимо решить секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix}1-E & 0 & 1\\ 0 & 1-E & 0\\ 1 & 0 & 1-E\end{vmatrix} = 0 = (1-E)((1-E)^2 - 1) \;\to\; E = 0, 1, 2.$$

Собственные функции находятся из решения системы уравнений:

$$\begin{cases}(1-E)C_1 + C_3 = 0,\\ (1-E)C_2 = 0,\\ C_1 + (1-E)C_3 = 0,\\ |C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 = 1.\end{cases}$$

Подставляя в нее найденные значения E, получим наборы коэффициентов C_i и соответствующие собственные волновые функции гамильтониана:

для $E_1 = 0$ получим $C_1 = -C_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $C_2 = 0$ и $\psi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$;

для $E_2 = 1$ – $C_1 = C_3 = 0$, $C_2 = 1$ и $\psi_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$;

для $E_3 = 2$ получим $C_1 = C_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $C_2 = 0$ и $\psi_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Составляем матрицу преобразования:

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные функции гамильтониана образуют столбцы этой матрицы. Вектор-столбец из элементов базиса находится умножением матрицы S на вектор-столбец из собственных волновых функций гамильтониана:

$$\begin{pmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \\ |3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \end{pmatrix}.$$

Разложение векторов состояния $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ по собственным волновым функциям гамильтониана будет иметь вид

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle + |\psi_3\rangle\right),$$
$$|2\rangle = |\psi_2\rangle,$$
$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\psi_1\rangle + |\psi_3\rangle\right).$$

При измерении можно обнаружить значения энергии $E = 0$ и 2 с равной вероятностью $W = 1/2$. $\langle E\rangle = 1$.

3. Волновая функция гармонического осциллятора в основном состоянии имеет вид

$$\psi(x) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\exp(-m\omega x^2/2\hbar).$$

Поправка первого порядка теории возмущений к энергии основного состояния равна

$$E^{(1)} = V_{00} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^*(x)\hat{V}\psi_0(x)\mathrm{d}x = V_0(m\omega/\pi\hbar)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-(m\omega/\hbar + 1/a^2)x^2)\mathrm{d}x =$$

$$= V_0(m\omega/\hbar)^{1/2}\frac{a}{\sqrt{1 + m\omega a^2/\hbar}} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \hbar/(m\omega a^2)}}.$$

4. Выразим $\psi(x, 0)$ через собственные функции гамильтониана частицы

$$\psi(x,0) = A\sin(2\pi x/a)\cos(3\pi x/a) = \frac{1}{2}A(\sin(5\pi x/a) - \sin(\pi x/a)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_1 + \psi_5).$$

В этом состоянии возможные значения энергии и соответствующие вероятности равны

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad W = \frac{1}{2}; \quad E = \frac{25\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad W = \frac{1}{2}.$$

Волновая функция частицы в произвольный момент времени имеет вид

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_1(x)e^{-i\omega_1 t} + \psi_5(x)e^{-i\omega_5 t}).$$

Для точки $x = a/2$ и произвольного момента времени t волновая функция равна

$$\psi(a/2,t) = \frac{1}{\sqrt{a}}(-e^{-i\omega_1 t} + e^{-i\omega_5 t}).$$

Плотность вероятности обнаружения частицы в точке $x = a/2$ в произвольный момент времени t равна

$$\left|\psi(a/2,t)\right|^2 = \frac{1}{a}(2 - e^{i(\omega_5-\omega_1)t} - e^{-i(\omega_5-\omega_1)t}) = \frac{2}{a}(1 - \cos(\omega_5 - \omega_1)t),$$

где $\omega_5 - \omega_1 = \dfrac{12\pi^2\hbar}{ma^2}.$

(Решение см. также в задаче 2 на экзамене 2003 г.)

5. Гамильтониан взаимодействия спина с магнитным полем представ-

ляем как сумму невозмущенного гамильтониана и возмущения:

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{V},$$

где

$$\hat{H}^{(0)} = -\frac{1}{2}\gamma\hbar B_0\hat{\sigma}_z, \quad \hat{V} = -\frac{1}{2}\gamma\hbar B_1 f(t)\hat{\sigma}_x, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & -\tau/2 < t < \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2, \end{cases}$$

$\hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_x$ – матрицы Паули.

Вычисляем матричный элемент:

$$V_{21} = \left\langle +1/2\middle|\hat{V}\middle|-1/2\right\rangle = -\frac{1}{2}\gamma\hbar B_1 f(t)\left\langle +1/2\middle|\hat{\sigma}_x\middle|-1/2\right\rangle = -\frac{1}{2}\gamma\hbar B_1 f(t),$$

где

$$\left\langle +1/2\middle|\hat{\sigma}_x\middle|-1/2\right\rangle = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Искомая вероятность равна

$$W(\left|-1/2\right\rangle \to \left|+1/2\right\rangle) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} V_{21}e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right|^2 = \frac{1}{4}\gamma^2 B_1^2\left|\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right|^2 =$$

$$= \frac{\gamma^2 B_1^2}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega\tau}{2} = \frac{B_1^2}{B_0^2}\sin^2\frac{\gamma B_0\tau}{2}, \quad \omega = \gamma B_0.$$

Контрольные работы разных лет

Первая контрольная работа

1. Постоянная C находится из условия нормировки:

$$\iiint|\psi(r,\theta,\varphi)|^2 r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 1 \to |C|^2 \int_0^{\pi/k} \sin^2(kr)\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}|C|^2 \frac{\pi}{k}\frac{2}{3}2\pi \to C = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3k}{2}}.$$

2. Чтобы найти собственные функции и собственные значения оператора $\hat{A}$, необходимо решить уравнение

$$\overleftarrow{A}\psi = a\psi.$$

В данном случае решается уравнение

$$i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varphi} + 2\cos^2\varphi\psi = a\psi.$$

Для его решения применяется метод разделения переменных:

$$i\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi} = (a - 2\cos^2\varphi)d\varphi.$$

После интегрирования получаем:

$$\psi = Ce^{-i(a-1)\varphi + \frac{1}{2}i\sin 2\varphi}.$$

Нормированная волновая функция равна

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i(a-1)\varphi + \frac{1}{2}i\sin 2\varphi}.$$

Собственная волновая функция должна быть однозначной. В данном случае должно выполняться условие

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi), \quad \text{или} \quad e^{-2\pi i(a-1)} = 1.$$

Это условие дает собственные значения оператора $\hat{A}$:

$$a_m = 1 + m, \;\; m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Таким образом, собственные функции и собственные значения оператора $\hat{A}$ равны

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-im\varphi + \frac{1}{2}i\sin 2\varphi}, \;\; a_m = 1 + m, \;\; m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

3. Нормируем волновую функцию:

$$\int_{\infty}^{\infty}|\psi|^2 \mathrm{d}x = 1 \to |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} = 1 \to A = (2\alpha/\pi)^{1/4},$$

так что

$$\psi = (2\alpha/\pi)^{1/4}\exp(-\alpha x^2).$$

Эта функция является функцией состояния гармонического осциллятора и должна удовлетворять уравнению Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = (E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)\psi.$$

Подставляя функцию состояния в уравнение и сокращая на экспоненту, получаем алгебраическое уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2\alpha + 4\alpha^2 x^2) = E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Оно должно удовлетворяться при произвольных значениях x. Это возможно, если

$$\frac{\hbar^2}{m}\alpha = E \text{ и } \frac{\hbar^2}{m}4\alpha^2 = m\omega^2.$$

Отсюда получаем $\alpha = \dfrac{m\omega}{2\hbar}$ и $E = \dfrac{1}{2}\hbar\omega,$ т. е. осциллятор находится в основном состоянии.

4. Нормируем волновую функцию:

$$4\pi A^2\int_0^\infty e^{-2r/a}r^2\mathrm{d}r = 4\pi A^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha r}\mathrm{d}r = 4\pi A^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\frac{1}{\alpha} = \pi A^2 a^3 \to$$

$$\to A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \to \psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}.$$

Электрон в заданном поле обладает потенциальной энергией

$$U = eE_0 r\cos\theta.$$

Находим сдвиг уровня энергии основного состояния:

$$E^{(1)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\psi^* U\psi r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 0,$$

так как $\int_0^\pi\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0.$

5. Вычисляем матричный элемент:

$$V_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_k^*\hat{V}\psi_n\mathrm{d}x = \alpha\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k(x)x^2\psi_n(x)\mathrm{d}x = \alpha a^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k(\xi)\xi^2\psi_n(\xi)\mathrm{d}\xi =$$

$$= \alpha a^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k(\xi)\xi(\sqrt{(n+1)/2}\psi_{n+1}(\xi) + \sqrt{n/2}\cdot\psi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi =$$

$$= \alpha a^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k(\sqrt{(n+1)(n+2)}/2\cdot\psi_{n+2} + (2n+1)/2\cdot\psi_n + \sqrt{n(n-1)}/2\cdot\psi_{n-2})\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha a^2\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\cdot\delta_{k,n+2} + (2n+1)\delta_{k,n} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{k,n-2}\right).$$

При вычислении матричного элемента использованы переход к безразмерной переменной $\xi = x/a$ $(a = \sqrt{\hbar/m\omega}),$ рекуррентное соотношение

$$\xi\psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(\xi) + \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(\xi)$$

и ортогональность собственных волновых функций осциллятора.

Искомая вероятность перехода равна

$$W(n\to k) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}V_{kn}e^{i\omega_{kn}t}\mathrm{d}t\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\alpha^2\frac{1}{(m\omega)^2}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}\cdot\delta_{k,n+2} + (2n+1)\delta_{k,n} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{k,n-2}\right)^2\left|\int_0^T e^{i\omega_{kn}t}\mathrm{d}t\right|^2 =$$

$$= \frac{\alpha^2}{(m\omega)^2\omega_{kn}^2}\left((n+1)(n+2)\delta_{k,n+2} + (2n+1)^2\delta_{k,n} + n(n-1)\delta_{k,n-2}\right)\sin^2\frac{\omega_{kn}T}{2},$$

$$\omega_{k,n} = \omega(k-n).$$

Вторая контрольная работа

1. Система из двух невзаимодействующих спинов $S_1 = 1$ и $S_2 = 3$ может обладать суммарным моментом $S = 4, 3, 2$. Составим таблицу возможных значений полного спина, числа различных состояний и возможных значений проекции полного спина на ось z.

S	$2S + 1$	S_z
4	9	$-4, -3, \ldots, +4$
3	7	$-3, -2, \ldots, +3$
2	5	$-2, -1, \ldots, +2$

Полное число состояний вычислим по формуле

$$\sum_{S=2}^{4}(2S+1) = 21.$$

Из них, как видно из таблицы, имеется три состояния с $S_z = -1$, а именно:

$$\psi_{4,-1},\ \psi_{3,-1},\ \psi_{2,-1}.$$

2. Искомая вероятность вычисляется по формуле

$$W_{1\to 2} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\infty V_{21}e^{i\omega_{21}t}dt\right|^2.$$

Необходимый матричный элемент равен

$$V_{21} = \int\psi_2^*\hat{V}\psi_1 dx = \frac{2}{a}V_0e^{-kt}\int_0^a \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}dx =$$

$$= \frac{1}{a}V_0e^{-kt}\int_0^a \sin^2\frac{2\pi x}{a}dx = \frac{1}{2a}V_0e^{-kt}\int_0^a(1-\cos\frac{4\pi x}{a})dx = \frac{1}{2}V_0e^{-kt}.$$

Подстановка этого значения V_{21} в выражение для вероятности дает

$$W_{1\to 2} = \frac{V_0^2}{4\hbar^2}\left|\int_0^\infty e^{-kt+i\omega_{21}t}dt\right|^2 = \frac{V_0^2}{4\hbar^2}\left|\frac{1}{k-i\omega_{21}}\right|^2 = \frac{V_0^2}{4\hbar^2(k^2+\omega_{21}^2)},$$

где $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar = \dfrac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}$.

(Решение см. в задаче 2 из второй контрольной работы 2003 г.)

3. Чтобы найти собственные значения гамильтониана, необходимо решить секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-E & 1 & 0 \\ 1 & 2-E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{vmatrix} = 0 = -E((2-E)^2-1) \ \rightarrow\ E = 0, 1, 3.$$

Собственные функции находятся из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} (2-E)C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + (2-E)C_2 = 0, \\ -EC_3 = 0, \\ |C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 = 1. \end{cases}$$

Подставляя в нее найденные значения E, получим наборы коэффициентов C_i и соответствующие собственные волновые функции гамильтониана:

для $E_1 = 0$ получим $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = 1$ и $\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

для $E_2 = 1$ $\quad C_1 = -C_2 = 1/\sqrt{2},\ C_3 = 0$ и $\psi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

для $E_3 = 3$ $\quad C_1 = C_2 = 1/\sqrt{2},\ C_3 = 0$ и $\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$

Составляем матрицу преобразования:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы представляют собой собственные функции гамильтониана. Вектор-столбец из элементов базиса находится умножением матрицы S на вектор-столбец из собственных волновых функций гамильтониана:

$$\begin{pmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \\ |3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \end{pmatrix}.$$

Разложение векторов состояния $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ по собственным волновым функциям гамильтониана будет иметь вид

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle\right),$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle\right),$$

$$|3\rangle = |\psi_1\rangle.$$

Отсюда

$$|\psi_1\rangle = |3\rangle,$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right),$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right).$$

В начальный момент времени система находится в состоянии $|2\rangle$, т. е. ее волновая функция при $t = 0$ равна

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle\right).$$

В произвольный момент времени волновая функция системы равна

$$|\psi(t)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\psi_2\rangle e^{-i\omega t} + |\psi_3\rangle e^{-3i\omega t}\right) = \frac{1}{2}e^{-2i\omega t}\left(-\left(|1\rangle - |2\rangle\right)e^{i\omega t} + \left(|1\rangle + |2\rangle\right)e^{-i\omega t}\right) =$$

$$= e^{-2i\omega t}(-|1\rangle i\sin\omega t + |2\rangle\cos\omega t),$$

где $\omega = 1/\hbar$.

4. Так как главное квантовое число $n = 2$, то орбитальное число l может принимать значения $l = 0, 1$. Следовательно, уровень энергии четырехкратно вырожден.

Оператор $\hat{L}_x$ можно выразить через повышающий и понижающий операторы:

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-),$$

так что оператор возмущения принимает вид

$$\hat{V} = \frac{A}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-).$$

В результате действия этого оператора матричные элементы равны

$$V_{l_1 m_1,\ l_2 m_2} = \left\langle l_1, m_1 \middle| \hat{V} \middle| l_2, m_2 \right\rangle = \frac{A}{2}\left\langle l_1, m_1 \middle| \left(\sqrt{(l_2 - m_2)(l_2 + m_2 + 1)} \middle| l_2, m_2 + 1 \right\rangle + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(l_2 - m_2 + 1)(l_2 + m_2)} \middle| l_2, m_2 - 1 \right\rangle \Big).$$

С учетом ортогональности волновых функций матричные элементы принимают вид

$$V_{l_1 m_1, l_2 m_2} =$$

$$= \frac{A}{2}\left(\sqrt{(l_2 - m_2)(l_2 + m_2 + 1)}\,\delta_{m_1, m_2 + 1} + \sqrt{(l_2 - m_2 + 1)(l_2 + m_2)}\,\delta_{m_1, m_2 - 1} \right)\delta_{l_1, l_2}.$$

В матричном виде оператор возмущения имеет вид

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix},$$

где элементы и строк, и столбцов соответствуют парам квантовых чисел (l, m) последовательно $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$; $b = A/\sqrt{2}$.

Решается секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix} -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & b & 0 \\ 0 & b & -E & b \\ 0 & 0 & b & -E \end{vmatrix} = E^2(E^2 - 2b^2) = 0 \to E = 0, 0, \pm\sqrt{2}b.$$

Поправки к энергии атома водорода в первом порядке теории возмущений равны $E^{(1)}_{1,3} = 0$, $E^{(1)}_{2,4} = \pm A$. Четырехкратное вырождение частично снимается.

Чтобы найти для определенного значения энергии волновую функцию, необходимо решить систему уравнений с этим значением E:

$$\begin{cases} -EC_1 = 0, \\ -EC_2 + bC_3 = 0, \\ bC_2 - EC_3 + bC_4 = 0, \\ bC_3 - EC_4 = 0, \\ |C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2 = 1. \end{cases}$$

Для $E_{2,4}^{(1)} = \pm A$ получаем $C_1 = 0,\ C_2 = C_4 = \frac{1}{2},\ C_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$ и «правильная» волновая функция имеет вид

$$\psi_{2,4}^{(0)} = \frac{1}{2}R_{2,1}(Y_{1,1} \pm \sqrt{2}Y_{1,0} + Y_{1,-1}).$$

Это решение отвечает $l = 1$, $m = \pm 1$. Для $E_{1,3}^{(1)} = 0$ из системы уравнений следует: $C_3 = 0,\ C_2 = -C_4,\ C_1^2 + 2C_2^2 = 1$. Для $E_1^{(1)} = 0$ (в этом случае $l = m = 0$) должно быть $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ и «правильная» волновая функция равна $\psi_1^{(0)} = R_{2,0}Y_{00}$. Для $E_3^{(1)} = 0$ (в этом случае $l = 1$, $m = 0$) $C_1 = C_3 = 0,\ C_2 = -C_4 = \frac{1}{\sqrt{2}},$ «правильная» волновая функция равна

$$\psi_3^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}R_{2,1}(Y_{1,1} - Y_{1,-1}).$$

(Решение см. в задаче 4 из второй контрольной работы 2007 г.)

Экзамен

1. Нормируем волновую функцию:

$$\int|\psi|^2 r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega = 1 = |A|^2 + 0.36 \to A = 0.8 \to$$

$$\to \psi(r,\theta,\varphi) = 0.8\cdot R_{10}Y_{00} + 0.6\cdot R_{21}Y_{10}.$$

Вероятность обнаружить частицу в заданном слое равна

$$\mathrm{d}W(r) = \int\limits_{(4\pi)}|\psi|^2 \mathrm{d}\Omega\cdot r^2\mathrm{d}r = \left(0.64|R_{10}|^2 + 0.36|R_{21}|^2\right)r^2\mathrm{d}r.$$

Используя известные выражения для собственных функций R_{10} и R_{21}:

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a^{3/2}}e^{-r/a},\ R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a^{5/2}}e^{-r/2a}\cdot r,$$

получим

$$\mathrm{d}W(r) = (2.56(r/a)^2 e^{-2r/a} + 0.015(r/a)^4 e^{-r/a})\frac{\mathrm{d}r}{a}.$$

Из выражения для волновой функции видно, что состояние системы является суперпозицией двух состояний $\left|1,0,0\right\rangle$ и $\left|2,1,0\right\rangle$ с вероятностями $W_{100} = 0{,}64$ и $W_{210} = 0{,}36$. Им соответствуют главные квантовые числа $n = 1$ и $n = 2$ соответственно. Энергия электрона в атоме водорода равна

$$E_n = -\frac{e^2}{2a}\frac{1}{n^2},\quad n = 1,\ 2,\ \ldots;\quad a = \frac{\hbar^2}{me^2} - \text{радиус Бора}.$$

Вычисляем среднюю энергию частицы:

$$\left\langle E\right\rangle = \sum_n E_n W_n = 0.64E_1 + 0.36E_2 = -0{,}73\frac{me^4}{2\hbar^2} \quad \text{в} \quad \text{CGSE}.$$

2. На осциллятор в течение времени τ действует постоянная сила F. Следовательно, в течение этого промежутка времени осциллятор обладает потенциальной энергией $V = -Fx$. Под действием потенциального силового поля осциллятор переходит с первого возбужденного уровня энергии ($n = 1$) на второй уровень ($n = 2$). Чтобы найти вероятность такого перехода, вычисляем матричный элемент:

$$V_{21} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_2^* V\psi_1 \mathrm{d}x = -F\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_2^*(x)x\psi_1(\mathrm{x})\mathrm{d}x = -aF\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_2^*(\xi)\xi\psi_1(\xi)\mathrm{d}\xi =$$

$$= -aF\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_2^*(\xi)(\psi_2(\xi) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(\xi))\mathrm{d}\xi = -aF,\ a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

При вычислении матричного элемента используются переход к безразмерной независимой переменной $\xi = x/a$, известное рекуррентное соотношение для волновых функций ос- осциллятора и ортогональность собственных функций осциллятора.

Искомая вероятность перехода равна

$$W_{1\to 2} = \frac{a^2F^2}{\hbar^2}\left|\int_0^\tau e^{i\omega_{21}t}dt\right|^2 = \frac{a^2F^2}{\hbar^2}\left|\frac{e^{i\omega_{21}\tau}-1}{i\omega_{21}}\right|^2 = \frac{4F^2}{m\hbar\omega^3}\sin^2\frac{\omega\tau}{2},$$

где $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar = \omega$.

3. Вычислим матричные элементы:

$$V_{11} = \int_0^{2\pi}\psi_1^2 V d\varphi = \frac{V_0}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}V_0,$$

$$V_{22} = \int_0^{2\pi}\psi_2^2 V d\varphi = \frac{V_0}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}V_0,$$

$$V_{12} = V_{21} = \int_0^{2\pi}\psi_1\psi_2 V d\varphi = \frac{V_0}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}V_0.$$

Решая секулярное уравнение, найдем искомые поправки к энергии:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4}V_0 - E^{(1)} & \frac{1}{2\pi}V_0 \\ \frac{1}{2\pi}V_0 & \frac{1}{4}V_0 - E^{(1)} \end{vmatrix} = 0 \to E^{(1)} = \frac{1}{4}V_0 \pm \frac{1}{2\pi}V_0.$$

Правильные волновые функции находятся из решения системы уравнений

$$\begin{cases} (\frac{1}{4}V_0 - E^{(1)})C_1 + \frac{1}{2\pi}V_0 C_2 = 0 \\ C_1^2 + C_2^2 = 1 \end{cases}$$

при последовательной подстановке в нее значений $E^{(1)}$:

$$E^{(1)} = \frac{1}{4}V_0 \pm \frac{1}{2\pi}V_0 \quad C_1 = \pm C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \varphi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin\varphi \pm \cos\varphi).$$

(Решение см. в задаче 3 из контрольной работы на переэкзаменовке в 2003 г.)

4. По условию

$$W_{S_x = 1/2} = 2/3, \quad W_{S_x = -1/2} = 1/3.$$

Следовательно, в S_x-представлении волновая функция электрона имеет вид

$$\psi_{S_x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{i\alpha} \\ e^{i\beta} \end{pmatrix},$$

где экспоненциальные множители – фазовые коэффициенты.

Оператор $\hat{S}_z$ в S_x-представлении и его собственные значения и собственные функции равны:

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{1}{2} \quad \psi_{s_z = \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad s_z = -\frac{1}{2} \quad \psi_{s_z = -\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Найдем коэффициенты разложения волновой функции электрона по собственным функциям оператора $\hat{S}_z$:

$$C_1 = \left\langle \psi_{s_z = \frac{1}{2}} \middle| \psi_{S_x} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ \ -i)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{i\alpha} \\ e^{i\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{2}e^{i\alpha} - ie^{i\beta}\right),$$

$$C_2 = \left\langle \psi_{s_z = -\frac{1}{2}} \middle| \psi_{S_x} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ \ i)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{i\alpha} \\ e^{i\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{2}e^{i\alpha} + ie^{i\beta}\right).$$

В результате находим волновую функцию электрона в S_z-представлении:

$$\psi_{S_z} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{i\alpha} - ie^{i\beta} \\ \sqrt{2}e^{i\alpha} + ie^{i\beta} \end{pmatrix}.$$

Находим вероятность проекции спина электрона на положительное направление оси z:

$$W_{S_z=1/2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{2}e^{-i\alpha} + ie^{-i\beta}\right)\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{2}e^{i\alpha} - ie^{i\beta}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\sin(\alpha-\beta),$$

$$W_{S_z=-1/2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\sin(\alpha-\beta).$$

5. Чтобы найти энергию заданного состояния и вид потенциальной энергии $U(x)$, следует воспользоваться уравнением Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = (E-U)\psi.$$

Подставляем в него заданную волновую функцию, получим:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}Ae^{-\alpha x}(2 - 4\alpha x + \alpha^2x^2) = (E - U)Ax^2e^{-\alpha x},$$

откуда после несложных преобразований найдем:

$$E - U = -\frac{\hbar^2}{mx^2}(1-2\alpha x) - \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2.$$

Это равенство выполняется, если

$$E = -\frac{(\alpha\hbar)^2}{2m},\ \ U = \frac{\hbar^2}{mx^2}(1-2\alpha x).$$

6. Система из двух спинов $S_1 = S_2 = 1$ может обладать суммарным моментом $S = 2, 1, 0$. В состоянии системы с $S = S_z = 2$ оба спина ориентированы по оси z. Для этого состояния можно написать очевидное равенство:

$$|2,2\rangle = |1,1\rangle|1,1\rangle.$$

Действуя на него понижающим оператором, получим:

$$S_-|2,2\rangle = 2|2,1\rangle =$$

$$= S_-|1,1\rangle|1,1\rangle = \sqrt{2}\left(|1,0\rangle|1,1\rangle + |1,1\rangle|1,0\rangle\right),$$

откуда следует, что

$$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle|1,1\rangle + |1,1\rangle|1,0\rangle\right).$$

Аналогичный вид имеет вектор состояния:

$$|1,1\rangle = C_1|1,0\rangle|1,1\rangle + C_2|1,1\rangle|1,0\rangle.$$

Из условий ортогональности волновых векторов и нормировки находим коэффициенты разложения:

$$\begin{cases} \langle 2,1|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 + C_2) = 0 \\ |C_1|^2 + |C_2|^2 = 1 \end{cases} \to C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

так что

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle|1,1\rangle - |1,1\rangle|1,0\rangle\right).$$

Применение понижающего оператора дает искомый вектор состояния

$$\left|1,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1,-1\right\rangle\left|1,1\right\rangle - \left|1,1\right\rangle\left|1,-1\right\rangle\right).$$

С одинаковой вероятностью можно обнаружить ориентацию каждого спина как по оси z, так и в противоположном направлении, т. е.

$$W_{S_{1z}=-1} = W_{S_{1z}=1} = W_{S_{2z}=-1} = W_{S_{2z}=1} = 1/2,$$

$$W_{S_{1z}=0} = W_{S_{2z}=0} = 0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задача 1

Состояние частицы со спином $s = 1/2$ описывается в S_z-представлении волновой функцией:

$$a)\ \left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad б)\ \left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Найти вид этой функции в S_x-представлении. Найти средние значения $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ и $\hat{S}^2$.

Решение

В S_z-представлении операторы проекций спина $s = 1/2$ на оси координат имеют вид

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\qquad \hat{S}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix},\qquad \hat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

Найдем средние значения. Для случая a) имеем:

$$\left\langle s_x\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2},$$

$$\left\langle s_y\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0,\ \left\langle s_z\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0.$$

Следует прокомментировать полученный результат. Средние значения проекций спина на оси y и z равны нулю, тогда как среднее значение его проекции на ось x равно величине спина. Это означает, что спин ориентирован по оси x.

Аналогичный результат получим и для случая *б*):

$$\langle s_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ -1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2},\quad \langle s_y\rangle = \langle s_z\rangle = 0.$$

В случае *б*) спин ориентирован против оси x.

Полученные результаты – следствие того, что заданные функции являются собственными функциями оператора S_x в S_z-представлении. Именно по этой причине в S_x-представлении функция имеет вид

$$a)\ |\psi\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad б)\ |\psi\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Найдем вид оператора $\hat{S}_x$ в S_x-представлении, считая, что спин лежит на оси x. Для проекции спина $s_x = 1/2$ волновая функция в S_x-представлении имеет полученный выше вид для случая *а*):

$$s_x = \frac{1}{2}\quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Это одно из собственных значений и соответствующая собственная функция оператора S_x в S_z-представлении. Пусть

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Собственная волновая функция должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Отсюда найдем: $a = 1$, $c = 0$.

Аналогично для проекции спина $s_x = -1/2$ собственная волновая функция в S_x-представлении имеет полученный выше вид для случая *б*):

$$s_x = -\frac{1}{2}\quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Из уравнения

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

найдем: $b = 0$, $d = -1$.

Таким образом, оператор $\hat{S}_x$ в S_x-представлении имеет вид

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Несложно получить операторы проекций спина на другие оси в S_x-представлении:

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \hat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$

Задача 2

Волновая функция электрона в S_z-представлении имеет вид

$$\psi_{S_z} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}e^{i\alpha} - ie^{i\beta}\\ \sqrt{2}e^{i\alpha} + ie^{i\beta}\end{pmatrix}.$$

Найти вид волновой функции в S_x-представлении. Чему равны вероятности различных значений проекции спина на ось x? (Данная задача является обратной задаче № 4 на стр. 34.)

Решение

Как и при решении задачи № 4 на стр. 34 в качестве основного направления выберем ось x. Тогда оператор $\hat{S}_z$ в S_x-представлении и его собственные значения и собственные функции равны:

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{1}{2} \quad \psi_{s_z = \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad s_z = -\frac{1}{2} \quad \psi_{s_z = -\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Это позволяет записать волновую функцию в S_x-представлении:

$$\psi_{S_x} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}e^{i\alpha} - ie^{i\beta})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}e^{i\alpha} + ie^{i\beta})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{i\alpha} \\ e^{i\beta} \end{pmatrix}.$$

Именно такой вид имеет волновая функция в S_x-представлении в решении указанной задачи (см. решение задачи № 4 на стр. 188).

Вероятности значений проекции спина на ось x равны 2/3 и 1/3 в положительном и отрицательном направлениях соответственно.

Задача 3

Для спина s =3/2 оператор $\hat{S}_z$ задан в своем собственном представлении. Найти в этом представлении операторы $\hat{S}_x$ и $\hat{S}_y$. Как будут выглядеть операторы $\hat{S}_y$ и $\hat{S}_z$ в $\hat{S}_x$ -представлении?

Решение

Проекция спина s = 3/2 на любое направление может принимать четыре значения ±3/2, ±1/2. Поэтому операторы $\hat{s}_x, \hat{s}_y$ и $\hat{s}_z$ должны изображаться четырехрядными матрицами, так как четырехрядная матрица, будучи приведена к диагональному виду, содержит лишь четыре диагональных члена и, стало быть, имеет только четыре собственных значения.

Пусть матрица s_z приведена к диагональному виду. Так как ее собственные значения равны ±3/2 , ±1/2, то диагональный вид S_z будет

$$S_z = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

В этом случае оператор $\hat{S}_z$ задан в своем собственном представлении. В этом же представлении операторы $\hat{S}_x$ и $\hat{S}_y$ изображаются некоторыми матрицами:

$$S_x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}.$$

Требуется найти конкретный вид этих матриц. Для этого используются правила перестановки:

$$i\hat{S}_x = \hat{S}_y\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_y, \; i\hat{S}_y = \hat{S}_z\hat{S}_x - \hat{S}_x\hat{S}_z, \; i\hat{S}_z = \hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x.$$

Применение первых двух из них дает:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0, \; b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = 0$$

(диагональные элементы матриц равны нулю),

$$a_{13} = a_{31} = b_{13} = b_{31} = 0, \; a_{14} = a_{41} = b_{14} = b_{41} = 0, \; a_{24} = a_{42} = b_{24} = b_{42} = 0.$$

Кроме того,

$$b_{12} = -ia_{12},\ b_{21} = ia_{21},\ b_{23} = -ia_{23},\ b_{32} = ia_{32},\ b_{34} = -ia_{34},\ b_{43} = ia_{43}.$$

В результате искомые матрицы принимают вид

$$S_x=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix},\quad S_y=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Третье правило перестановки дает еще три соотношения:

$$a_{12}\, a_{21} = 3/4,\ a_{23}\, a_{32} = 1 \text{ и } a_{34}\, a_{43} = 3/4.$$

Операторы эрмитовы. Следовательно, матрицы должны бать самосопряженными:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a_{21}^* & 0 & 0 \\ a_{12}^* & 0 & a_{32}^* & 0 \\ 0 & a_{23}^* & 0 & a_{43}^* \\ 0 & 0 & a_{34}^* & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует

$$a_{21} = a_{12}^*,\ a_{32} = a_{23}^*,\ a_{43} = a_{34}^*.$$

В результате

$$a_{12}a_{12}^* = |a_{12}|^2 = 3/4 \text{ и } a_{12} = \sqrt{3}/2\cdot e^{i\alpha}.$$

Соответственно

$$a_{21} = \sqrt{3}/2\cdot e^{-i\alpha}.$$

Аналогично определяются другие матричные члены:

$$a_{23} = e^{i\beta},\ a_{32} = e^{-i\beta},\ a_{34} = \sqrt{3}/2\cdot e^{i\gamma},\ a_{43} = \sqrt{3}/2\cdot e^{-i\gamma}.$$

Таким образом, все соотношения удовлетворены при произвольных α, β, γ. Поэтому можно положить

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Ответ: операторы $\hat{S}_x$ и $\hat{S}_y$ изображаются матрицами

$$S_x=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix},\quad S_y=\begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если оператор $\hat{S}_x$ задан диагональной матрицей (т. е. в своем собственном представлении),

$$S_x = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

то в том же представлении операторы $\hat{S}_y$ и $\hat{S}_z$ изображаются матрицами

$$S_y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Результат получается циклической перестановкой.

Библиографический список

1. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М.: Высш. шк., 1961.

2. Галицкий В. М., Карнаков В. М., Коган В. И. Задачи по квантовой механике. М.: Наука, 1981.

3. Гинзбург В. Л., Левин Л. М., Рабинович М. С., Сивухин Д. В., Четверикова Е. С. Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука, 1964. Ч. 2.

4. Гольдман И. И., Кривченков В. Д. Сборник задач по квантовой механике. М.: Гостехиздат, 1957.

5. Давыдов А. С. Квантовая механика. М.: Наука, 1973.

6. Иродов И. Е. Задачи по квантовой механике. М.: Высш. шк., 1991.

7. Коган В. И., Галицкий В. М. Сборник задач по квантовой механике. М.: Гостехиздат, 1956.

8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантова механика. М.: Наука, 1974.

9. Оришич Т. И., Филиппова Л. Г. Задачи по квантовой механике и атомной физике. Новосибирск: НГУ, 1999.

11. Толкачев В. А., Вязовкин В. Л., Багрянский В. А., Большаков Б. В., Пуртов П. А., Ступак М. Ф. Задачи по квантовой механике. Новосибирск: НГУ, 2003.

10. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. М.: Мир, 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
Контрольные работы 2011 года 4
Вторая контрольная работа 4
Экзамен 5
Контрольные работы 2009 года 7
Первая контрольная работа 7
Вторая контрольная работа 8
Экзамен 9
Переэкзаменовка 10
Контрольные работы 2007 года 12
Первая контрольная работа 12
Вторая контрольная работа 13
Экзамен 14
Переэкзаменовка 136
Вторая переэкзаменовка. 17
Третья переэкзаменовка. 18
Контрольные работы 2005 года 18
Первая контрольная работа 18
Вторая контрольная работа 20
Экзамен 2118
Переэкзаменовка 22
Контрольные работы 2003 года 120
Первая контрольная работа 2142
Вторая контрольная работа 2142
Экзамен 26
Переэкзаменовка 27
Контрольные работы 2001 года 28
Вторая контрольная работа 28
Экзамен 29
Контрольные работы разных лет 31
Первая контрольная работа. 31
Вторая контрольная работа. 32
Экзамен 33
Ответы. 35
Решения. 51
Контрольные работы 2011 года. 51
Вторая контрольная работа 51
Экзамен. 58
Контрольные работы 2009 года. 65
Первая контрольная работа 65

Вторая контрольная работа 69
Экзамен. 74
Переэкзаменовка. 78
Контрольные работы 2007 года. 86
Первая контрольная работа. 86
Вторая контрольная работа. 93
Экзамен. 102
Переэкзаменовка. 109
Вторая переэкзаменовка. 116
Третья переэкзаменовка. 118
Контрольные работы 2005 года 121
Первая контрольная работа 121
Вторая контрольная работа 125
Экзамен 13118
Переэкзаменовка 135
Контрольные работы 2003 года 14120
Первая контрольная работа 141
Вторая контрольная работа 14246
Экзамен 151
Переэкзаменовка 158
Контрольные работы 2001 года 162
Вторая контрольная работа 162
Экзамен 169
Контрольные работы разных лет 174
Первая контрольная работа. 174
Вторая контрольная работа. 178
Экзамен 185
Приложение 192
Библиографический список 200

Учебное издание

Замураев Владимир Павлович,
Калинина Анна Павловна

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Учебное пособие

Редактор *Е. П. Войтенко*

Подписано в печать 13.08.2012 г.
Формат 60×84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 12,7. Усл. печ. л. 11,8. Тираж 150 экз.

Заказ №
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090. Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.